RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et applications.

Thème

Réduction du processus de Rafle à une inclusion différentielle sans contrainte

Présenté par :

Abbad Zineb

Devant le jury

Président :	Arroud Chams Eddine	MCB	Université de Jijel
Encadreur :	Haddad Touma	MCB	Université de Jijel
Examinateur :	Khellaf Wahiba	MCB	Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

*Avant tout, mes vifs remerciements ; je les exprime à **ALLAH** qui m'a donné la volenté, la santé, la patience et le courage pour terminer ce mémoire.*

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire **Dr T.Haddad**. Je la remercie de m'avoir encadrée, orientée, encouragée et accompagnée tout au long de ce travail.

Je voudrais également être reconnaissante à l'ensemble des membres de jury : **Madame W. Khellaf** et **Monsieur C. Aroud** à l'université de Jijel pour m'avoir honorée par leurs évaluation du travail en tant qu'examinateurs.

Enfin, je n'oublie pas tous mes enseignants au département de mathématiques de l'université de Jijel et mes collègues de promotion.

Dédicace

Avec un grand plaisir, et pleine de joie, je dédie ce mémoire

A la mémoire de mon chèr père ★ ***Ammar*** ★

j'aurais tant aimé que tu soit présent, que dieu l'accueil dans son vaste paradis.

A ma Reine, ma chère maman ★ ***Fariza***★

la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur ; je t'adore.

A mes frères et ma soeur.

A mes chèrs petits neveux ★ ***Ramy*** *et* ***Yahya*** ★.

A toute ma grande famille et mes amies.

A tous mes enseignants.

★ *Zineb* ★

Table des matières

Introduction générale

La théorie d'analyse non lisse jout un rôle crucial pour les problèmes d'évolution sous l'appelation "state dependent sweeping process", le "sweeping process" ou bien le processus de Rafle en français a été introduit en 1971 dans un célèbre exposé de J.J. Moreau. (J.J. Moreau, *Rafle par un convexe variable, Séminaire d'Analyse convexe de Montpellier, exposé 15 (1971)*). Ce dernier a introduit et a étudié le problème suivant qui est connu sous le nom de processus de Rafle

$$(\mathcal{SP}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p } t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(u(t))$ désigne le cône normal, au sens de l'analyse convexe, à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $u(t)$, Ce type de problème intervient dans beaucoup de domaines comme :

- contrôle optimal,
- médecine avec la modélisation de canaux de médicaments,
- modélisation de mouvements de foule, de circuit électrique,
- planification en économie, etc..

Notre objectif principal dans ce mémoire consiste à étudier une classe d'inclusion différentielle avec des ensembles non convexe. Cette classe d'ensembles est appelée la classe des ensembles uniformément prox réguliers ou r-prox réguliers.

De tels ensembles sont aussi dits positivement atteints, p-convexes, O(2)-convexes et proximalement lisses dans [6], [13], [2] ,[11], et [3] respectivement.

Soit H un espace de Hilbert réel et $C : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$, $(T_0 < T)$ une application multivoque à valeurs non vides et fermées. Dans [9], les auteurs ont obtenu un résultat d'équivalence quand l'ensemble $C(t, u(t))$ est r-prox régulier via des arguments d'analyse non lisse. Ils ont établit que l'inclusion différentielle avec contrainte

$$(\mathcal{D}_N) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

où $N_{C(t,u(t))}(u(t))$ désigne le cône normal de Clarke à $C(t, u(t))$ au point $u(t)$ est équivalente à l'inclusion différentielle sans contrainte

$$(\mathcal{D}_d) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in \dfrac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L} \partial d_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

où $\partial d_{C(t,u(t))}(\cdot)$ désigne le sous-différentiel de Clarke de la fonction distence $d_{C(t,u(t))}(\cdot)$.
De plus, il existe une fonction absolument continue non-négative $\zeta : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et une constante réelle : $0 \leq L < 1$ tel que

$$|d_{C(t,x)}(z) - d_{C(s,y)}(z)| \leq |\zeta(t) - \zeta(s)| + L\|x - y\|,$$

pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $s, t \in [T_0, T]$.

Le mémoire est composé comme suit. Dans le premier chapitre on rappelle les principaux concepts concernant les sous différentiels et cônes normaux pour les ensembles non convexes ainsi que quelques résultats préliminaires que nous avons utilisé tout au long de ce travail. Ensuite on donne quelques propriétés des ensembles uniformément prox réguliers ou r-prox réguliers.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons un résultat clé concernant quelques propriétés importantes de ces ensembles dont nous aurons besoin dans la suite.
Nous allons montrer un théorème de réduction ([9], Theorem 1) qui est un résultat d'équivalence de l'inclusion différentielle avec contrainte $(\mathcal{D}_N)$ et l'inclusion différentielle sans contrainte $(\mathcal{D}_d)$.

Notations

Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme associée $\|\cdot\|$. On note par

- $\overline{\mathbb{B}}$ ou $\overline{\mathbb{B}}(0,1)$ la boule unité fermée de H.
- $d_S(\cdot)$ la fonction distance au sous ensemble S.
- $\delta(\cdot, S)$ la fonction indicatrice de S.
- $\delta^*(\cdot, S)$ la fonction support de S.
- s.c.i semi-continue inférieurement.
- ∂f le sous différentiel de f.
- $N_S(x)$ dénote le cône normal, au sens d'analyse convexe, à S au point x.
- $N_S^C(x)$ le cône normal de Clarke à S en x.
- $N_S^F(x)$ le cône normal de Fréchet à S en x.
- $N_S^L(x)$ le cône normal limitant à S en x.
- $N_S^P(x)$ le cône normal proximal à S en x.
- ID abréviation de l'inclusion différentielle.

Chapitre 1

Préliminaires et résultats auxiliaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques concepts de sous différentiels (respectivement de cônes normaux) pour des ensembles non convexe. Cette classe d'ensembles est appelée la classe des ensembles uniformément prox-réguliers.

Pour plus de détails, on réfère le lecteur à [1, 5].

- $\delta(\cdot, A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

• La fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$ appelée aussi fonction support de A, est la fonction $\delta^*(\cdot, A)$, définie sur H par

$$\delta^*(\xi, A) = \sup_{x \in A} \langle \xi, x \rangle \,, \ \ \forall \xi \in H.$$

• Soit S un sous ensemble fermé de H.

On note par $d_S(\cdot)$, la fonction distance au sous ensemble S, i.e.,

$$d_S(x) := \inf_{u \in S} \|x - u\| \,, \forall x \in H.$$

Théorème 1.1. *Soit x un élément d'un espace de Hilbert H et C un sous-ensemble convexe* *fermé non vide de H. Il existe un unique point $y \in C$ tel que*

$$d_C(x) = \|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\|.$$

Ce point y est appelé la projection de x sur C et noté $Proj_C(x)$.
Il est caractérisé par l'inégalité variationnelle suivante

$$\langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \ \ \forall z \in C.$$

- On dit que la fonction f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour tout $x \in H$

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

Définition 1.1. *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multifonction (ou multi-application) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : X \to P(Y)$, ($P(Y)$ est l'ensemble des parties de Y).*

Le domaine, le graphe et l'image de la multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) := Dom(F) = \{x \in X / F(x) \neq \varnothing\},$$

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y / \ x \in D(F), y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

1.1 Concepts d'analyse non lisse

Donnons dans ce qui suit quelques définitions classiques de différentiabilité. Nous citons entre autres la dérivée directionelle, Gâteaux différentiel et les définitions de tous les sous différentiels et les cônes normaux. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à [1, 5, 7, 8, 10].

1.1.1 Sous différentiabilité

Soit $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i), et soit x un point de H où f est finie.

- la dérivée directionelle généralisé de Clarke de f en x est donnée par

$$f^{\uparrow}(x;h) := \limsup_{\substack{\acute{x} \to^f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{\acute{h} \to h} \frac{f(\acute{x} + t\acute{h}) - f(\acute{x})}{t},$$

  où $\acute{x} \to^f x$ veut dire $\acute{x} \to x$ et $f(\acute{x}) \to f(x)$.

- On dit que f est Gâteaux différentiel en x si

  1. La directionnelle en x existe dans toutes les directions, i. e.,

  $$\forall h \in H, Df(x,h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \quad \text{existe.}$$

  2. $Df(x,h)$ est linéaire en h. L'opérateur $Df(x,h) \in H$ est appelé différentiel de Gâteaux de f en x dans la direction h.

- Le sous différentiel de f au sens d'analyse convexe au point x est défini par

$$\partial^{conv} f(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, h - x \rangle \leq f(h) - f(x), \forall h \in H\}.$$

Définition 1.2. *Le sous différentiel d'une fonction f en un point $x \in domf$ est noté $\partial f(x)$ est l'ensemble de tous les vecteurs $v \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle + o(\|y - x\|) \text{ lorsque } y \to x.$$

Lorsque f est différentiable en x, le sous différentiel se réduit au singleton, c'est à dire,

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Plusieurs concepts de sous différentiabilité pour les fonctions non convexes ont été introduits depuis le sous différentiel de Clarke. Le début est avec le sous différentiel de Dini.

Définition 1.3. *Le sous différentiel de Dini est défini en termes de la dérivé directionnelle inferieure de Dini $f^-(x;.)$, il est défini comme suit :*

$$\partial f := \{\xi \in H; \langle \xi, v\rangle \leq f^-(\bar{x}; v), \forall v \in H\},$$

où

$$f^-(\bar{x}; v) := \liminf_{t \to 0} \tfrac{f(\bar{x}+t.v)-f(\bar{x})}{t}.$$

1.2 Sous différentiels

1.2.1 Sous différentiel de Clarke

On a déja vu que pour les fonctions convexes continues, le sous différentiel est défini en terme de la dérivée directionnelle $f^{\uparrow}(x;\cdot)$ (voir Définition 1.4 [1]). Un nouveau concept de la dérivée directionnelle est appelé dérivée directionnelle généralisée (dit aussi, dérivée directionnelle de Clarke) est donnée par

$$f^{\uparrow}(x; h) := \limsup_{\substack{\acute{x} \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(\acute{x} + th) - f(\acute{x})}{t}.$$

Le sous différentiel de Clarke (ou bien gradient généralisé) de f au point x est défini par

$$\partial^C f(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, h\rangle \leq f^{\uparrow}(x; h), \forall h \in H\}.$$

Par convention, quand $f(x)$ est infinie on pose

$$\partial^C f(x) = \varnothing,$$

Notons aussi que $\partial^C f(x)$ est un convexe fermé.

1.2.2 Sous différentiel de Fréchet

Définition 1.4. *Pour $x \in S$, un élément $\xi \in H$ est un vecteur normal de Fréchet de l'ensemble S en x si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que*

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \epsilon \|x' - x\| \ \ \textit{pour tout } x' \in S \cap V.$$

Définition 1.5. *Pour $x \in S$, un vecteur $\xi \in H$ est un sous gradient de Fréchet de f en x (f est finie) si*
pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \epsilon \|x' - x\| \ \ \textit{pour tout } x' \in V.$$

Définition 1.6. *Le sous différentiel de Fréchet $\partial^F f(x)$ de f en x(noté aussi par $\hat{\partial} f(x)$) est l'ensemble de tous les sous gradients de Fréchet de f en x.*

Par convention, quand $f(x)$ est infinie on pose

$$\partial^F f(x) = \varnothing,$$

1.2.3 Sous différentiel limitant (Sous différentiel basique)

Une nouvelle approche de sous différentiel est définie par une limite en vue d'avoir des régle de calculs plus précises. Ainsi, on défini le sous différentiel limitant $\partial^L f(x)$ ou sous différentiel basique (ou sous différentiel de Mordukhovich) de f en $x \in V$ comme suit

$$\partial^L f(\bar{x}) := \{\xi \in H; \exists x_n \to \bar{x}, \exists \xi_n \overset{\omega^*}{\to} \xi \text{ avec } \xi_n \in \partial^F f(x_n)\}.$$

1.2.4 Sous différentiel proximal

Le sous différentiel proximal $\partial^P f(x)$ est l'ensemble de tous les points $\xi \in H$ pour lesquels il existe $\rho > 0, \beta \geq 0$ tels que

$$\langle \xi, \acute{x} - x \rangle \leq f(\acute{x}) - f(x) + \beta \left\| \acute{x} - x \right\|^2, \forall \acute{x} \in x + \rho \overline{\mathbb{B}}.$$

Remarquons que nous avons toujours

$$\partial^P f(x) \subset \partial^C f(x).$$

Par convention, quand $f(x)$ est infinie on pose

$$\partial^P f(x) = \partial^C f(x) = \varnothing,$$

Notons aussi que $\partial^C f(x)$ est un convexe fermé par contre $\partial^P f(x)$ est un convexe pas nécessairement fermé.

Si f est convexe, alors tous les sous différentiels coincident, i.e.,

$$\partial^P f(x) = \partial^L f(x) = \partial^F f(x) = \partial^C f(x) = \partial f^{conv}(x).$$

Remarque 1.1. *Les inclusions suivantes sont toujours vérifiées :*

$$\partial^P f(x) \subset \partial^F f(x) \subset \partial^{conv} f(x) \subset \partial^C f(x) \tag{1.1}$$

1.3 Cônes normaux

D'autres concepts de cônes normaux pour les ensembles non convexes ont été introduits et étudiés par plusieurs auteurs, nous citons entre autres le le cône normal de Clarke, le cône normal de Fréchet, le cône normal de Mordukhovich et le cône normal proximal, ...etc...

Définition 1.7. *On appelle cône normal d'un ensemble convexe S de H au point $x \in S$, l'ensemble définie par*

$$N_S(x) := \{\xi \in H; \langle \xi, x' - x \rangle \leqslant 0, \forall x' \in S\}.$$

c'est à dire un vecteur ξ est un vecteur normal de S à x si ξ ne fait pas un angle aigu avec chaque segment de ligne en S à partir de x.

Proposition 1.1. *le cône normal à A au point $y \in N_A(y)$,(il s'agit du cône des normales sortantes) est défini par*

$$\begin{aligned} \xi \in N_A(y) &\Leftrightarrow y \in A \text{ et } \langle \xi, y \rangle = \delta^*(\xi, A) \\ &\Leftrightarrow y \in A \text{ et } \xi \in \partial\delta(y, A). \end{aligned}$$

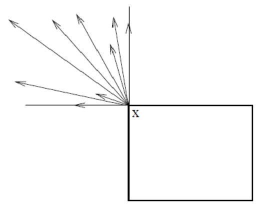

FIGURE 1.1 – Exemple du cône normal

Une caractérisation en terme de cône normal est donnée par

$$y \in Proj_A(x) \Leftrightarrow x - y \in N_A(y).$$

Précisons la relation utile par la suite entre le sous-différentiel et le cône normal du même nom.

• Soit $x \in S$. On appelle cône normal de Clarke (resp. cône normal de Frécher, cône normal limitant, cône normal proximal) à S au point x le sous ensemble $N_S^C(x)$ (resp. $N_S^F(x)$, $N_S^L(x)$, $N_S^P(x)$) défini par

$$N_S^C(x) = \partial^C \delta(x, S) \text{ (resp. } N_S^F(x) = \partial^F \delta(x, S)$$

$$N_S^L(x) = \partial^L \delta(x, S), N_S^P(x) = \partial^P \delta(x, S))$$

• Notons que le cône normal proximal est aussi donné par

$$N_S^P(x) := \{\xi \in H \ / \ \exists \alpha > 0 \ , \ x \in Proj_S(x + \alpha\xi)\},$$

où

$$Proj_S(u) := \{y \in S / d_S(u) := \|u - y\|\}.$$

Remarque 1.2. *Soit $x \in S$. Si S est convexe alors*

$$N_S^P(x) = N_S(y) = N_S^C(x).$$

Une caractérisation du cône normal proximal N_S^P vérifiée globalement pour tout $x' \in S$, nous la citons dans la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H, pour tout $x \in S$ alors*

$$N_S^P(x) = \{\xi \in H, \exists \sigma > 0 : \langle \xi, x' - x \rangle \leq \sigma \parallel x' - x \parallel^2 \quad pour\ tout\ \ x' \in S\}.$$

La relation entre le cône normal proximal et le sous différentiel proximal de la fonction distance est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et $x \in S$. Alors*

$$\partial^P d_S(x) = N_S^P(x) \cap \overline{\mathbb{B}}.$$

Définition 1.8. *On appelle cône normal limitant à S en x l'ensemble*

$$N_S^L(x) = \{\xi \in H, \exists (x_n) \subset S^{\mathbb{N}}, \exists (\xi_n) \subset \left(N_S^P(x)\right)^{\mathbb{N}}, x_n \to x, \xi_n \rightharpoonup \xi\}.$$

Remarque 1.3. *Si $x \in int\, S$, alors $N_S^P(x) = N_S^L(x) = \{0\}$.*

Définition 1.9. *L'ensemble de tous les vecteurs normaux de S en x est appelé cône normale de Fréchet de S en x.*

Notons aussi que pour $x \notin S$ on pose $N_S^F(x) = \emptyset$.

Proposition 1.4. *Le cône normale de Fréchet de S en $x \in S$ est donné par*

$$\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \mathbb{B}_H \ \ et\ \ N_S^F(x) = \mathbb{R}_+ \partial^F d_S(x). \tag{1.2}$$

1.4 Propriétés des ensembles uniformément prox-réguliers

Introduction

Dans cette section, on présente une propriété d'ensemble plus faible que la convexité, autrement dit, ensemble uniformément prox-régulier ou r-prox réguliers.

Le concept de prox-régularité uniforme a été introduit par H. Federer dans [6] en dimension finie sous le nom d'ensemble "positively reached". Puis les ensembles prox-réguliers dans un espace de Hilbert ont été considérés par A. Canino dans [2] sous le nom d'ensembles "p-convexes", et aussi par F. H. Clarke, R. J. Stern et P.R. Wolenski dans [3] en tant qu'ensembles "proximally smooth". La notion de prox-régularité locale ainsi que la dénomination de prox-régularité pour les ensembles dans un espace de Hilbert ont été introduites par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault dans [10].

Définition 1.10. *Un ensemble S est dit **r-prox-régulier**, $r \in]0,+\infty[$ si la projection métrique $Proj_S(\cdot)$ sur S est unique et continue sur le tube $U_r(S)$ (dit aussi élargissement) défini par*

$$U_r(S) = \{x \in H : d_S(x) < r\}.$$

Si $dim H < +\infty$ alors S est dit uniformément prox-régulier si $Proj_S(\cdot)$ est unique sur $U_r(S)$.

Interprétation géométrique

L'ensemble S présente une propriété plus faible :

La projection sur un ensemble S r-prox-régulier est bien définie pour tous les points situés à une distance suffisamment petite que la constante de prox-régularité.

Autrement dit, un ensemble S est r-prox-régulier si on peut faire "rouler" une boule de rayon r continûment sur toute la frontière ∂S.

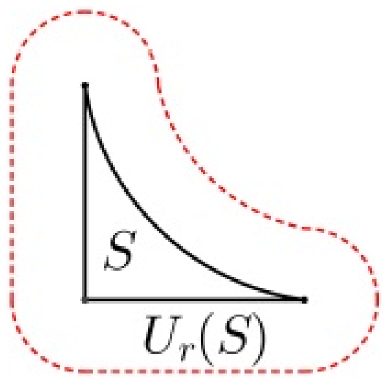

FIGURE 1.2 – Ensemble uniformément prox-régulier

Proposition 1.5. *Soit $r \in]0,+\infty]$, un sous ensemble S est r-prox régulier si et seulement si, pour tout $x' \in S$ et tout $\xi \in N_S^P(x') \backslash \{0\}$,*

$$\mathbb{B}\Big(x' + r\frac{\xi}{\parallel \xi \parallel}, r\Big) \cap S = \emptyset,$$

autrement dit, si et seulement si, pour tout $x' \in S$ et tout $\xi \in N_S^P(x')$,

$$\left\langle \frac{\xi}{\| \xi \|}, x - x' \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \| x - x' \|^2, \quad \textit{pour tout } x' \in S.$$

Dans le cas particulier où $r = +\infty$, on trouve que la r-prox-régularité de l'ensemble S avec $r = +\infty$ correspond à sa convexité.

Remarque 1.4. *Dans toute la suite nous allons noter par $\partial d_S(x)$ le sous différentiel de la fonction distance associé à un sous-ensemble non vide fermé uniformément r-prox-régulier de H (sans préciser le nom car ils sont tous **égaux**).*
*Comme une conséquence directe, pour les ensembles uniformément prox-réguliers, le cône normal proximal à S **coïncide** avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point $x \in S$, c'est-à-dire,*

$$N_S^P(x) = N_S^F(x) = N_S^L(x) = N_S^C(x), \ \textit{pour tout } x \in S. \tag{1.3}$$

Dans la suite, on note

$$N_S(x) = N_S^P(x) = N_S^F(x) = N_S^L(x) = N_S^C(x), \ \textit{pour tout } x \in S.$$

1.5 Autres résultats de sous différentiel de Fréchet

Définition 1.11. *Soit f une fonction sur un sous-ensemble ouvert U d'un espace normé X dans l'espace normé Y. On dit que f est Fréchet différentiable en $x \in U$ s'il y a un opérateur linéaire borné $T_x : X \to Y$ tel que*

$$f(x + y) = f(x) + T_x y + \|y\| E_x(y),$$

où $E_x(y) \to 0$ si $y \to 0$.

Théorème 1.2. *[10] Pour un ensemble fermé $S \subset H$ et tout point $\bar{x} \in S$ Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *S est r-prox-régulier à $\bar{x}$.*
2. *d_S est continument différentiable sur $O \setminus S$ pour un voisinage ouvert o de $\bar{x}$.*
3. *d_S est Fréchet différentiable sur $O \setminus S$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$.*

4. *d_S est Gâteaux différentiable sur $O \setminus S$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$ et l'application projection $Proj_S$ est à valeur non-vide sur O .*
5. *d_S^2 est C^{1+} sur un voisinage ouvert O de $\bar{x}$. c'est-à-dire, Fréchet différentiable sur O avec l'application dérivée $D(d_S^2)(x) : H \rightrightarrows H$ est Lipschitzienne et donc continue sur x.*
6. *Il existe $r > O$ et un voisinage O de $\bar{x}$ tel que tout proximal non nul normal à S à tout x sur $S \cap O$ peut être réalisé par une boule de rayon r.*
7. *Pour certains $r > 0$ et voisinage O de $\bar{x}$ la multi-application N_S^r est hypomonotone sur O. où*
$$N_S^r(x) = \begin{cases} N_S^L(x) \cap int\mathbb{B}(0, r), & si\ x \in S. \\ 0, & sinon. \end{cases}$$
(Ici $\mathbb{B}(0, r)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon r.)
8. *Il existe $\lambda > 0$ tel que :*
$$\left.\begin{array}{r} x = Proj_S(u), x \neq u \\ 0 < |u - \bar{x}| < \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = Proj_S(u') \text{ pour } u' = x + \lambda \frac{u - x}{|u - x|}$$
9. *$Proj_S$ est à valeur unique et fortement-faiblement continue sur un voisinage de $\bar{x}$.*
10. *S a la propriété Shapiro en $\bar{x}$. Alors il y a un voisinage O de $\bar{x}$ sur lequel l'application projection $Proj_S$ est monotone à valeur unique et Lipschitzienne donc continue avec $Proj_S = (I + N_S^r)^{-1}$ sur O pour certains $r > 0$, alors que $D(d_S) = [I - Proj_S]/d_S$ sur $O \setminus S$. Ici $I : H \to H$ désigne l'application identité.*
Si l'ensemble S est faiblement fermé par rapport à un voisinage (fort) de $\bar{x}$ (qui est toujours le cas lorsque l'espace H est de dimension finie), alors on peut ajouter l'assertion suivante à l'ensemble des propriétés équivalentes :
11. *L'application projection $Proj_S$ est à valeur unique autour de $\bar{x}$.*

Lemme 1.1. *[10] Soit S un sous-ensemble fermé non vide de H. Si d_S^2 est Fréchet différentiable sur un ensemble ouvert O, ou de manière équivalente d_S est Fréchet différentiable sur $O \setminus S$, alors l'application projection $Proj_S$ est (à valeur unique et) fortement continue sur O.*

Preuve. La dérivé de Fréchet de d_S^2 au point u est $2(u - proj_S(u))$ c'est à dire

$$\partial^F(d_S^2)(u) = 2(u - proj_S(u)) = 2d_S(u).$$

La fonction $-d_S^2$ est égal à une fonction convexe moins le carré normal, on a

$$\begin{aligned} -d_S^2(u) &= \sup_{x\in S}\{-|u-x|^2\} \\ &= \sup_{x\in S}\{-(|u|^2+|x|^2-2\langle u,x\rangle)\} \\ &= -|u|^2+\sup_{x\in S}\{2\langle u,x\rangle-|x|^2\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que la dérivé d'une fonction convexe est fortement-faiblement continue. L'observation précédente alors implique que la dérivée de d_S^2 et donc P_S est fortement-faiblement continue dans O.

Soit x_k converge fortement vers x, où $x \in S$ i.e $x_k \to x$ pour tout $x \in S$,

on a

$$D(d_S^2(x_k)) \to D(d_S^2)(x),$$

de plus

$$|D(d_S^2(x_k))| = 2d_S(x_k) \to |D(d_S^2(x))| = 2d_S(x),$$

car d_S est lipschitz donc est continue. D'où la convergence faible et la convergence des normes ; ça implique la convergence forte. □

Proposition 1.6. *[10]*
On considère un ensemble fermé $S \subset H$ un point $\bar{x} \in S$ et un voisinage O de $\bar{x}$, Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *d_S est continument différentiable dans $O \setminus S$.*
2. *d_S est Fréchet différentiable dans $O \setminus S$.*
3. *d_S est Gâteaux différentiable dans $O \setminus S$ et P_S est non vide dans O.*
4. *P_S est à valeur unique et fortement-faiblement continue sur O.*
   Si l'ensemble S est faiblement fermé par rapport à O, alors on peut ajouter ce qui suit à l'ensemble de propriétés équivalentes :
5. *P_S est à valeur unique sur O.*

Lemme 1.2. *Si $v \in \partial^F d_S(u)$, alors $2d_S(u)v \in \partial^F d_S^2(u)$.*

Preuve. Pour chaque ϵ, on a (par définition d'un sous-gradient de Fréchet) :

$$\langle v, x-u\rangle \leq d_S(x) - d_S(u) + \epsilon|x-u|.$$

Pour tout x dans un voisinage de u on a :

$$\begin{aligned}
\langle 2d_S(u)v, x-u\rangle &\leq 2d_S(u)d_S(x) - 2d_S(u)d_S(u) + 2d_S(u)\epsilon|x-u| \\
&= d_S(x)^2 - d_S(u)^2 - (d_S(x)-d_S(u))^2 + 2d_S(u)\epsilon|x-u| \\
&\leq d_S(x)^2 - d_S(u)^2 + 2d_S(u)\epsilon|x-u|
\end{aligned}$$

On conclure que $2d_S(u)v \in \partial^F d_S^2(u)$. □

Lemme 1.3. *(Lemma 5[5]) Soit u un point de H.*

(a) On a les inclusions

$$d_S(u)\partial^P d_S(u) = \partial^P(\tfrac{1}{2}d_S^2)(u) \text{ et } d_S(u)\partial^F d_S(u) = \partial^F(\tfrac{1}{2}d_S^2)(u).$$

(b) Si d_S est ∂^P-sous-différentiable au point u, alors $Proj_S(u)$ existe et

$$d_S(u)\partial^P d_S(u) = \partial^P(\tfrac{1}{2}d_S^2)(u) = u - Proj_S(u).$$

(c) Si d_S est ∂^F-sous-différentiable au point u, alors $Proj_S(u)$ existe et

$$d_S(u)\partial^F d_S(u) = \partial^F(\tfrac{1}{2}d_S^2)(u) = u - Proj_S(u).$$

(d) La fonction d_S est Fréchet différentiable au point $u \in H \setminus S$ si et seulement si d_S ∂^F-sous-différentiable en ce point. Dans ce cas

$$\nabla^F d_S(u) = \frac{1}{d_S(u)}(u - Proj_S(u)).$$

(e) La fonction distance au carré d_S^2 est Fréchet différentiable au point $u \in H$ si et seulement si ∂^F Fréchet sous-différentiable en ce point. Dans ce cas

$$\nabla^F(\tfrac{1}{2}d_S^2(u)) = (u - Proj_S(u)).$$

Chapitre 2

Réduction du processus de rafle à une inclusion différentielle sans contrainte

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons tout d'abord par prouver une proposition importante ([9], Proposition 1) qui est un point clé de la preuve du théorème de réduction ([9], Theorem 1) qui nous permet d'obtenir l'équivalence de l'inclusion différentielle avec contrainte

$$(\mathcal{D}_N)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

et l'inclusion différentielle sans contrainte

$$(\mathcal{D}_d)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in \dfrac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L}\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0). \end{cases}$$

2.2 Résultats auxiliaires

Définition 2.1. *un sous-ensemble S de H est appelé normalement Fréchet régulier en un point $x \in S$ lorsque $N_S^F(x) = N_S(x)$.*

Quelques propriétés importantes des ensembles r-prox-réguliers sont résumées dans la proposition suivante ([9], Proposition 1).

Proposition 2.1. *Soit S un sous ensemble fermé non vide de H et soit $r \in]0, +\infty]$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'ensemble S est (uniformément) r-prox-régulier ;

(b) Pour tout point x' dans élargissement ouverte $\{x \in H : d_S(x) < r\}$, L'ensemble $Proj_S(x')$ est un singleton et l'application $Proj_S(.)$ est continue dans l'élargissement ouverte ;

(c) L'égalité $\partial^P d_S(x) = \partial d_S(x)$ pour tout $x \in H$ satisfait $d_S(x) < r$;

(d) La fonction distance $d_S(.)$ est continument Fréchet différentiable dans le tube ouvert $\{x \in H : 0 < d_S(x) < r\}$;

(e) Le cône normal proximal $N_S^P(.)$ satisfait la propriété d'hypomononicité,c'est-à-dire

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\|x_1 - x_2\|^2,$$

pour tout $x_i \in S$ et $v_i \in N_S^P(x_i)$ avec $\|v_i\| \leq r(i = 1, 2)$.

Pour chaque $x \in H$ avec $0 < d_S(x) < r$, on remarque que la différentiabilité de Fréchet de la fonction distance d_S assure que

$$\|\nabla d_S(x)\| = 1.$$

Preuve Pour cette preuve nous aurons besoin des références suivantes [4, 5, 10].

a) $\Rightarrow$ *b)* Soit $S \in H$ un sous ensemble fermé non vide , soit $r \in]0, +\infty]$, et soit

$x' \in U_r(S) = \{x \in H ; d_S(x) < r\}$.

On suppose que S est r-prox régulier.

D'après le théorème 1.2 la projection $Proj_S(x')$ est un singleton.

Montrons maintenant que l'application $Proj_S(\cdot)$ est bien définie sur $U_r(S)$ et, pour tout réel positif $r \in]0, +\infty]$, l'application $Proj_S(\cdot)$ est lipschitzienne sur $U_r(S)$.

la démonstration se faite à travers des étapes.

Premièrement on veut montrer l'équivalence entre r-prox-régularité de l'ensemble S et l'inégalité suivante :

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{1}{2}(\frac{\|v_1\|}{r(x_1)} + \frac{\|v_2\|}{r(x_2)})\|x_1 - x_2\|^2. \tag{2.1}$$

En effet;

D'après la proposition1.5 l'ensemble S est r-prox régulier ssi

$$\langle \frac{v}{\|v\|}, x - x' \rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - x'\|^2, \forall x' \in S. \tag{2.2}$$

On suppose que S est r-prox-régulier et on montre l'inégalité (2.1), alors

Soit $x_i \in S$, et $0 \neq v_i \in N_S^P(x_i), i = 1, 2$

On a

$$\langle v_1, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{\|v_1\|}{2r(x_1)}\|x_2 - x_1\|^2,$$

et

$$\langle -v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{\|v_2\|}{2r(x_2)}\|x_2 - x_1\|^2.$$

On additionne, on obtient

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{1}{2}(\frac{\|v_1\|}{r(x_1)} + \frac{\|v_2\|}{r(x_2)})\|x_2 - x_1\|^2. \tag{2.3}$$

Maintenant, on montre que l'inégalité (2.3) entraine la prox régularité de l'ensemble S.

Pour $x, x' \in S$ et $v \in N_S^P(x')$, il suffit alors de prendre $v_1 = v, x_1 = x, x_2 = x'$ et $v_2 = 0$ dans l'inégalité (2.3) pour obtenir que

$$\langle v, x - x' \rangle \geq -\frac{\|v\|}{2r(x)}\|x' - x\|^2,$$

or

$$\langle v, x' - x \rangle \leq \frac{\|v\|}{2r(x)}\|x' - x\|^2.$$

D'où l'ensemble S est r-prox-régulier.

On suppose que l'inégalité (2.3) est satisfaite.

On fixe chaque $u_i \in H$ et $y_i \in (I + N_S^P)^{-1}(u_i)$ pour i=1,2, alors (2.3) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2\rangle &= \langle y_1 - y_2, u_1 - u_2 + y_1 - y_1 + y_2 - y_2\rangle \\ &= \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 + (u_1 - y_1) - (u_2 - y_2)\rangle \\ &= \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle + \langle y_1 - y_2, (u_1 - y_1) - (u_2 - y_2)\rangle \\ &\geq -\frac{1}{2}(\frac{\|u_1 - y_1\|}{r(y_1)} + \frac{\|u_2 - y_2\|}{r(y_2)})\|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2\end{aligned}$$

Alors

$$\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2\rangle \geq \big(1 - (\frac{\|u_1 - y_1\|}{2r(y_1)} + \frac{\|u_2 - y_2\|}{2r(y_2)})\big)\|y_1 - y_2\|^2. \tag{2.4}$$

Fixons $\gamma > 1$, pour chaque $u_i \in H$ et $y_i \in (I + \gamma r\mathbb{B}_H \cap N_S^P)^{-1}$ avec i=1,2, l'inclusion

$$u_i \in y_i + \gamma r(y_i)\mathbb{B}_H \cap N_S^P(y_i),$$

nous assure que

$$\|u_i - y_i\| \leq \gamma r(y_i). \tag{2.5}$$

On montre que

$$\|y_1 - y_2\| \leq (1 - \gamma)^{-1}\|u_1 - u_2\|.$$

En effet

l'inégalité (2.5) nous donne

$$\begin{cases}\|u_1 - y_1\| \leq \gamma r(y_1) \\ \|u_2 - y_2\| \leq \gamma r(y_2)\end{cases}$$

or

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\|u_1 - y_1\|}{r(y_1)} \leq \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\frac{\|u_2 - y_2\|}{r(y_2)} \leq \frac{1}{2}\gamma\end{cases}$$

D'aprés (2.4), on trouve

$$\begin{aligned}\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2\rangle &\geq (1 - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma)\|y_1 - y_2\|^2 \\ &= (1 - \gamma)\|y_1 - y_2\|^2\end{aligned}$$

or

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq (1-\gamma)^{-1}\langle y_1 - y_2, u_1 - u_2\rangle,$$

D'où

$$\|y_1 - y_2\| \leq (1-\gamma)^{-1}\|u_1 - u_2\|. \tag{2.6}$$

D'après **Lemma 2** [5], l'application P_S est bien définie sur $U_r(S)$, où

$$\mathrm{Proj}_S(u) = \{\ \mathrm{P}_S(u)\}, \quad \text{ pour tout } u \in U_r(S)$$

et d'après l'inégalité (2.6) on trouve

$$\|P_S(u) - P_S(u')\| \leq \frac{1}{1-\gamma}\|u - u'\|, \quad \text{ pour tout} u, u' \in U_r(S).$$

c'est à dire, P_S est Lipschitzienne sur $U_r(S)$ avec $\frac{1}{1-\gamma}$ comme constante de Lipschitz.

D'où $\mathrm{Proj}_S(\cdot)$ est continue sur $U_r(S)$.

$b \Rightarrow c$) D'après la remarque 1.1on a

$$\partial^P f(x) \subset \partial f(x). \tag{2.7}$$

On suppose que $x \notin S$ et $\xi \in \partial^P d_S(x)$, alors $\exists \sigma, \delta > 0$ tel que

$$d_S(y) - d_S(x) \geq \langle \xi, y - x\rangle - \sigma\|y - x\|^2, \forall y \in \mathbb{B}(x, \delta) \tag{2.8}$$

on doit établir que le sous-gradient de $d_S(.)$(c'est à dire $\partial d_S(.)$) conduit au sous gradient de $d_S^2(.)$ (c'est à dire $\partial d_S^2(.)$)

En particulier d'après le lemme 1.2 (Lemma 5[5])

$$\xi \in \partial d_S(x) \Rightarrow 2d_S(x)\xi \in \partial d_S^2(x)$$

On observe que

$d_S^2(y) - d_S^2(x) = 2d_S(x)(d_S(y) - d_S(x)) + (d_S(y) - d_S(x))^2, \forall y \in H$

Donc pour tout $y \in \mathbb{B}(x, \delta)$ on a

$$\begin{aligned} d_S^2(y) - d_S^2(x) &= 2d_S(x)(d_S(y) - d_S(x)) + (d_S(y) - d_S(x))^2 \\ &\geq 2d_S(x)(d_S(y) - d_S(x)) \\ &\geq 2d_S(x)(\langle \xi, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2) \\ &= \langle 2d_S(x)\xi, y - x \rangle - 2d_S(x)\sigma \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

d'après (2.8) on obtient

$$2d_S(x)\xi \in \partial^P d_S^2(x)$$

et donc

$$\partial d_S(x) \subset \partial^P d_S(x),$$

d'où

$$\partial^P d_S(x) = \partial d_S(x).$$

$(c) \Rightarrow (d)$ d'aprés le Théorème 1.2 (Théorème 3[10]) pour montrer que $d_S(.)$ est continument Fréchet différentiable, on montre que $d_S^2(.)$ est Fréchet différentiable à x.

Pour tout $v \in H$, la limite lorsque $t \to 0$ de

$$\frac{d_S^2(x + tv) - d_S^2(x)}{tv} = \frac{(d_S(x + tv) - d_S(x))(d_S(x + tv) + d_S(x))}{tv}$$

existe avec une convergence uniforme, $\forall v \in \bar{S}$, et que sa limite est $2d_S(x)\langle \xi, v \rangle$, en effet on a

$$d_S(x + tv) + d_S(x) \overset{\text{conv.unif}}{\longrightarrow} 2d_S(x), \forall v \in \bar{S}, \text{ lorsque } t \to 0,$$

par conséquent la lipshitzité globale de la fontion distance $d_S(.)$,

$$\frac{d_S(x + tv) - d_S(x)}{t} \overset{\text{conv.unif}}{\longrightarrow} \langle \xi, v \rangle, \text{ lorsque } t \to 0$$

c'est à dire la limite ξ existe et finie.

D'où la continuité Fréchet différentiable de $d_S(.)$

$(d) \Rightarrow (e)$ Elle suit directement de la preuve des implications suivantes. De plus

On montre que

$$\|\nabla d_S(x)\| = 1.$$

On suppose que la fonction distance d_S est Fréchet différentiable en u et d'aprés le lemme 1.3(Lemma 5[5])

$$\nabla^F d_S(u) = \frac{u - P_S(u)}{d_S(u)}.$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla^F d_S(u)\| &= \|\frac{u - P_S(u)}{d_S(u)}\| \\
&= \frac{\|u - P_S(u)\|}{\|d_S(u)\|} \\
&= \frac{\|d_S(u)\|}{\|d_S(u)\|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$(d) \Leftrightarrow (a)$ d'aprés le Théorème 1.2 (**Théorème 3** [10]) on trouve l'équivalence.

$(e) \Leftrightarrow (a)$ on commence par

$(a) \Rightarrow (e)$ Montrons que $N_S^P(.)$ est hypomonotone

D'aprés la proposition 1.5 , on a S est r-prox-régulier si et seulement si

$$\langle \frac{v}{\|v\|}, x - x' \rangle \leq \frac{1}{2r}\|x - x'\|^2, \forall x' \in S,$$

or

$$-\langle v, x - x' \rangle \geq -\frac{\|v\|}{2r}\|x - x'\|^2, \forall x' \in S.$$

Alors, pour $i = 1, 2$, soit $0 \neq v_i \in N_S^P(x_i)$, et on a

$$\langle v_1, x_2 - x_1 \rangle \leq \frac{\|v_1\|}{2r}\|x_2 - x_1\|^2,$$

et

$$\langle v_2, x_1 - x_2 \rangle \leq \frac{\|v_2\|}{2r} \|x_1 - x_2\|^2,$$

et donc

$$\langle v_1, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{\|v_1\|}{2r} \|x_2 - x_1\|^2,$$

et

$$\langle -v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{\|v_2\|}{2r} \|x_1 - x_2\|^2.$$

On additionne, on trouve ($v_i \neq 0$)

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\frac{\|v_1\| + \|v_2\|}{2r} \|x_1 - x_2\|^2.$$

Par conséquent si $\|v_i\| \leq r, i = 1, 2$ alors

$$\begin{aligned}
\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle &\geq -\frac{\|v_1\| + \|v_2\|}{2r} \|x_1 - x_2\|^2 \\
&\geq -\frac{2r}{2r} \|x_1 - x_2\|^2 \\
&= -\|x_1 - x_2\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que N_S^P est hypomonotone sur S avec constante $\sigma = -1$.

$(e) \Rightarrow (a)$ On montre que l'ensemble S est r-prox-régulier.

Fixons $x \in S$ et $v \in N_S^P(x) \cap \mathbb{B}_H$. Pour $x' \in H$ et $r \in]0, +\infty]$. D'après la caractérisation du cône normal proximal $N_S^P(\cdot)$, on a

$$v \in N_S^P(x) \iff \langle v, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2, \forall x' \in S.$$

On voit que

$$\|rv - (x' - x)\|^2 = r^2 \|v\|^2 - 2r \langle v, x' - x \rangle + \|x' - x\|^2.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|rv\|^2 &= \|x - x + rv\|^2 \\ &= \|rv - (x - x)\|^2 \\ &\leq \|rv - (x' - x)\|^2, \forall x' \in S,\end{aligned}$$

si et seulement si

$$-2r\langle v, x' - x\rangle + \|x' - x\|^2 \geq 0, \forall x' \in S,$$

et donc

$$-2r\langle v, x' - x\rangle \geq -\|x' - x\|^2,$$

c'est à dire

$$2r\langle v, x' - x\rangle \leq \|x' - x\|^2.$$

Comme $r > 0$, on obtient

$$\langle v, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2, \forall x' \in S.$$

Donc d'aprés la proposition 1.5, on en déduit que S est un ensemble r-prox-régulier. $\square$

2.3 Théorème de réduction

Soit H un espace de Hilbert réel et $C : [T_0, T] \times H \rightrightarrows H$ une application multivoque à valeurs non vides et fermées.

Notre objectif dans cette section est d'étudier la relation entre l'inclusion différentielle avec contrainte

$$(\mathcal{D}_N) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0) \end{cases}$$

et l'inclusion différentielle sans contrainte

$$(\mathcal{D}_d) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in \dfrac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L} \partial d_{C(t,u(t))}(u(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0) \end{cases}$$

Pour cette étude nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

($\mathcal{A}_1$) Il existe une constante $r \in]0, +\infty]$ tel que, pour tout $t \in [T_0, T]$ et $x \in H$, les ensembles $C(t, x)$ sont (uniformément) r-prox-régulier.

($\mathcal{A}_2$) L'ensemble $C(t, x)$ varie d'une manière absolument continue par rapport à t et continument Lipschitz par rapport à l'état x, c-à-d, il existe une fonction absolument continue non-négative $\zeta : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et une constante réelle : $0 \leq L < 1$ tel que

$$|d_{C(t,x)}(z) - d_{C(s,y)}(z)| \leq |\zeta(t) - \zeta(s)| + L\|x - y\|,$$

pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $s, t \in [T_0, T]$.

Théorème 2.1. *Supposons que les hypothèses ($\mathcal{A}_1$) et ($\mathcal{A}_2$) sont satisfaites. Alors chaque solution absolument continue $u : [T_0, T] \to H$ de ($\mathcal{D}_d$) est une solution absolument continue de ($\mathcal{D}_N$).*

Preuve. Soit $u(.)$ une solution de l'inclusion différentielle sans contrainte ($\mathcal{D}_d$).

D'après (1.2) dans la proposition 1.4 et **c)** dans la proposition 2.1 on obtient

$$\partial d_S(x) \subset N_S(x) \text{ pour tout } x \in S. \tag{2.9}$$

Alors il suffit de montrer que

$$u(t) \in C(t, u(t)) \text{ pour tout } t \in [T_0, T].$$

Puisque $\lim\limits_{\lambda(A)\to 0} \int_A |\dot{\zeta}(t)|dt = 0$, (car $\dot{\zeta}(.) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$, on peux fixer certains réels $\gamma > 0$), tel que

$$\frac{2}{1-L} \int_A |\dot{\zeta}(t)|dt < r, \tag{2.10}$$

pour tous les ensembles Lebesgue mesurables $A \subset [T_0, T]$ satisfaisant $\lambda(A) < \gamma$.

On dénote pour tout $r \in]0, +\infty]$, $U_r(S)$, le r-tube ouvert autour de l'ensemble S impliqué dans l'énoncé (d) dans la proposition 2.1, c'est-à-dire :

$$U_r(S) := \{x \in H : 0 < d_S(x) < r\}. \tag{2.11}$$

Etape 1.

On considère $T - T_0 < \gamma$. On doit prouver que

$$u(t) \in C(t, u(t)), \text{ pour tout } t \in [T_0, T],$$

ce qui justifiera que $u(.)$ est une solution de $(\mathcal{D}_N)$ lorsque $T - T_0 < \gamma$. D'après l'hypothèse $(\mathcal{A}_2)$, la fonction donnée par

$$g(t) := d_{C_{(t,u(t))}}(u(t)),$$

est absolument continue sur $[T_0, T]$, donc l'ensemble

$$\Omega := \{t \in [T_0, T] : u(t) \notin C(t, u(t))\},$$

est ouvert dans $[T_0, T]$ car

$$\begin{aligned} \Omega &= \{t \in [T_0, T] : d_{C_{(t,u(t))}}(u(t)) > 0\} \\ &= \{t \in [T_0, T] : g(t) > 0\}. \end{aligned}$$

Notre objectif maintenant est de prouver que l'ensemble Ω est vide. On va raisonner par l'absurde, c'est à dire on suppose que $\Omega \neq \emptyset$. Comme $T_0 \notin \Omega$, car on a d'après la condition initiale de $(\mathcal{D}_d)$ que

$$u(T_0) \in C(T_0, u(T_0)),$$

alors il existe un intervalle ouvert non vide $]\alpha, \beta[\subset \Omega$ tel que $g(\alpha) = 0$. Il suffit de choisir pour $]\alpha, \beta[$ toute composante connexe de $\Omega \cap]T_0, T[= \emptyset$.
Soit s un point de $]\alpha, \beta[$ où $\dot{g}(s), \dot{u}(s), \dot{\zeta}(s)$ existent avec $\dot{u}(s)$ satisfaisant l'inclusion $(\mathcal{D}_d)$.
On sait que pour une application $\varepsilon(\delta) \longrightarrow 0$, lorsque $\delta \to 0$,
on peut écrire d'après le développement de Taylor

$$u(s+\delta) = u(s) + \delta\dot{u}(s) + \delta\varepsilon(\delta)$$

On doit établir que $\dot{g}(s)$ est inférieure ou égal à 0, et ça nous donne que $g(s)$ est inférieure ou égal à 0 qui est nous permet de conclure. Alors, pour certains $\delta > 0$ suffisamment petit, en ajoutant et en enlevant les termes

$$\tfrac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s) + \delta\dot{u}(s))]$$

et

$$\tfrac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s) + \delta\dot{u}(s))]$$

respectivement et d'après l'hypothèse $(\mathcal{A}_2)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{g}(s) &= \frac{1}{\delta}[g(s+\delta) - g(s)] \\
&= \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s+\delta)) - d_{C(s,u(s))}(u(s))] \\
&= \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)+\delta\varepsilon(\delta)) - d_{C(s,u(s))}(u(s))] \\
&= \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)+\delta\varepsilon(\delta))] - \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] \\
&+ \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] - \frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] \\
&+ \frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] - \frac{1}{\delta}d_{C(s,u(s))(u(s))} \\
&= \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)+\delta\varepsilon(\delta)) - d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] \\
&+ \frac{1}{\delta}[d_{C(s+\delta,u(s+\delta))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)) - d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))] \\
&+ \frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)) - d_{C(s,u(s))(u(s))}] \\
&\le \|\varepsilon(\delta)\| + L\frac{1}{\delta}\|u(s+\delta) - u(s)\| + \frac{1}{\delta}|\zeta(s+\delta) - \zeta(s)| \\
&+ \frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)) - d_{C(s,u(s))}(u(s))]
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

1.Cas où $\dot{\zeta}(s) = 0$

L'inclusion $(\mathcal{D}_d)$ nous donne $\dot{u}(s) = 0$, et donc on obtient de la dernière inégalité que

$\dot{g}(s) \le 0$. Ce qui garantit que pour tout $t \in]\alpha, \beta[$,

$$\begin{aligned}
g(t) &= g(\alpha) + \int_\alpha^t \dot{g}(s)ds \\
&= \int_\alpha^t \dot{g}(s)ds \\
&\le 0,
\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec $]\alpha, \beta[\subset \Omega$. Il en résulte que $\Omega = \emptyset$.

2.Cas où $\dot{\zeta}(s) \neq 0$

On a $\dot{u}(s)$ vérifie $(\mathcal{D}_d)$ et $u(s) \notin C(s, u(s))$.

D'autre part la condition initiale $u(T_0) \in C(T_0, u_0)$ et l'hypothèse $(\mathcal{A}_2)$, donnent

$$\begin{aligned}
d_{C(s,u(s))}(u(s)) &\leq d_{C(s,u(s))}(u(T_0)) + \|u(s) - u(T_0)\| \\
&= d_{C(s,u(s))}(u(T_0)) - d_{C(T_0,u(T_0))}(u(T_0)) + \|u(s) - u(T_0)\| \\
&\leq |\zeta(s) - \zeta(T_0)| + L\|u(s) - u(T_0)\| + \|u(s) - u(T_0)\| \\
&\leq (1+L)\|u(s) - u(T_0)\| + |\zeta(s) - \zeta(T_0)| \\
&= (1+L)\|\int_{T_0}^{s} \dot{u}(r)dr\| + |\int_{T_0}^{s} \dot{\zeta}(r)dr|
\end{aligned}$$

et comme

$$\|\dot{u}(s)\| \leq \|\frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}\|, \text{ presque partout } s \in [T_0, T], \tag{2.12}$$

car $u(.)$ est une solution de $(\mathcal{D}_d)$ c'est à dire

$$-\dot{u}(t) \in \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L}\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)), \text{ p.p } t \in [T_0, T],$$

alors, en utilisant 2.12

$$\begin{aligned}
d_{C(s,u(s))}(u(s)) &= (1+L)\|\int_{T_0}^{s} \dot{u}(r)dr\| + |\int_{T_0}^{s} \dot{\zeta}(r)dr| \\
&\leq (1+L)\int_{T_0}^{s} \|\dot{u}(r)\|dr + \int_{T_0}^{s} |\dot{\zeta}(r)|dr \\
&\leq (1+L)\int_{T_0}^{s} \|\frac{|\dot{\zeta}(r)|}{1-L}\|dr + \int_{T_0}^{s} |\dot{\zeta}(r)|dr \\
&\leq \frac{1+L+1-L}{1-L}\int_{T_0}^{s} |\dot{\zeta}(r)|dr. \\
&\leq \frac{2}{1-L}\int_{T_0}^{s} |\dot{\zeta}(r)|dr.
\end{aligned}$$

ce qui entraine par (2.10) et par l'inégalité $T - T_0 < \gamma$

$$0 < d_{C(s,u(s))}(u(s)) < r,$$

ce qui assure que $u(s)$ reste dans l'élargissement U_r de l'ensemble S, c'est à dire,

$$u(s) \in U_r(C(s, u(s))).$$

Par conséquent l'uniforme prox-régularité de l'ensemble $C(\cdot,\cdot)$ d'après l'hypothèse $(\mathcal{A}_1)$ et l'assertion (d) dans la proposition 2.1 assurent que la fonction distance $d_{C(s,u(s))}(.)$ est continument Fréchet différentiable en $u(s)$.

Alors, $\dot{u}(s)$ solution de l'inclusion $(\mathcal{D}_d)$ nous permet d'écrire

$$-\frac{1-L}{|\dot{\zeta}(s)|}\,\dot{u}(s) \in \partial d_{C(s,u(s))}(u(s)), \text{ presque partout } s \in [T_0, T]$$

et donc ça signifie que $-(1-L)\frac{\dot{u}(s)}{|\dot{\zeta}(s)|}$ est la dérivée de Fréchet en $u(s)$ de la fonction $d_{C(s,u(s))}(.)$, c'est à dire.

$$-(1-L)\frac{\dot{u}(s)}{|\dot{\zeta}(s)|} = \nabla^F d_{C(s,u(s))}(.), \tag{2.13}$$

et on a d'après la proposition 2.1

$$\|\nabla^F d_{C(s,u(s))}(.)\| = 1,$$

or

$$\| -(1-L)\tfrac{\dot{u}(s)}{|\dot{\zeta}(s)|}\| = 1,$$

ce qui combine avec le fait que

$$u(s) \notin C(s, u(s)),$$

et ça implique que

$$(1-L)\|\dot{u}(s)\| = |\dot{\zeta}(s)|,$$

or

$$\|\dot{u}(s)\| = \frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}. \tag{2.14}$$

Sachant que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s)) - d_{C(s,u(s))}(u(s))}{u(s)+\delta\dot{u}(s)-u(s)} = \nabla^F d_{C(s,u(s))}(u(s)),$$

c'est à dire

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))-d_{C(s,u(s))}(u(s))}{\delta\dot{u}(s)}=\nabla^F d_{C(s,u(s))}(u(s)),$$

alors pour certain fonction $\eta(\delta)\longrightarrow 0$, on obtient d'après 2.13 et 2.14

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))-d_{C(s,u(s))}(u(s))] &= \langle\nabla^F d_{C(s,u(s))}(u(s)),\dot{u}(s)\rangle+\eta(\delta)\\ &= -(1-L)\langle\frac{\dot{u}(s)}{|\dot{\zeta}(s)|},\dot{u}(s)\rangle+\eta(\delta)\\ &= -(1-L)\frac{\|\dot{u}(s)\|^2}{|\dot{\zeta}(s)|}+\eta(\delta)\\ &= -(1-L)\frac{[\frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}]^2}{|\dot{\zeta}(s)|}+\eta(\delta)\\ &= -(1-L)\frac{|\dot{\zeta}(s)|^2}{(1-L)^2}\frac{1}{|\dot{\zeta}(s)|}+\eta(\delta)\\ &= -\frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}+\eta(\delta).\end{aligned}$$

Revenant à l'inégalité

$$\begin{aligned}\dot{g}(s) &= \frac{1}{\delta}(g(s+\delta)-g(s))\\ &\leq \|\varepsilon(\delta)\|+L\|\dot{u}(s)\|+|\dot{\zeta}(s)|+\frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))-d_{C(s,u(s))}(u(s))]\end{aligned}$$

on retrouve lorsque $\eta(\delta)\longrightarrow 0$, $\|\varepsilon(\delta)\|\longrightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\dot{g}(s) &\leq L\|\dot{u}(s)\|+|\dot{\zeta}(s)|+\frac{1}{\delta}[d_{C(s,u(s))}(u(s)+\delta\dot{u}(s))-d_{C(s,u(s))}(u(s))]\\ &\leq L\frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}+|\dot{\zeta}(s)|-\frac{|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}\\ &\leq \frac{L|\dot{\zeta}(s)|+(1-L)|\dot{\zeta}(s)|-|\dot{\zeta}(s)|}{1-L}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour presque tous $s\in]\alpha,\beta[$, on a

$$\dot{g}(s)\leq 0,$$

ce qui garantit que pour tout $t \in]\alpha, \beta[$,

$$\begin{aligned} g(t) &= g(\alpha) + \int_\alpha^t \dot{g}(s)ds \\ &= \int_\alpha^t \dot{g}(s)ds \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec $]\alpha, \beta[\subset \Omega$. Il en résulte que $\Omega = \emptyset$.

Etape 2.

On considère maintenant la discrétisation suivante sur l'intervalle $[T_0, T]$.

Prenant un entier N tel que :

$$\tfrac{T-T_0}{N} < \gamma,$$

et soit la subdivision

$$T_0, T_1, \cdots, T_N = T \text{ de } [T_0, T],$$

avec

$$k \in \{0, 1, \cdots, N\},$$

où

$$T_k = T_0 + k\frac{(T-T_0)}{N}, \qquad \text{pour } k = 0, 1..., N$$

il suffit d'appliquer l'étape I avec la restriction

$$u|_{[T_{k-1}, T_k]} \text{ sur } [T_{k-1}, T_k]$$

pour la solution de $(\mathcal{D}_d)$. En effet ;

Pour chaque

$$k = 1, ..., N$$

on désigne par u^k la restriction de $u(.)$ à $[T_{k-1}, T_k]$, c'est à dire

$$u^k := u|_{[T_{k-1},T_k]}.$$

Pour mettre au clair l'idée nous considérons

$$u^1 : [T_0, T_1] \longrightarrow H$$

est une solution de l'inclusion différentielle sans contrainte

$$\begin{cases} -\dot{u}^1(t) \in \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L} \partial d_{C(t,u^1(t))}(u^1(t)) \text{ pour tout } t \in [T_0, T_1] \\ u^1(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0) \end{cases}$$

Puisque

$$T_1 - T_0 < \gamma,$$

il résulte de l'étape I que $u(.)$ vérifie

$$u^1(t) \in C(t, u^1(t)), \text{ pour tout } t \in [T_0, T_1].$$

On suppose que, pour chaque $i = 1, ..., k-1$, on a

$$u_i(t) \in C(t, u_i(t)) \text{ pour tout } t \in [T_{i-1}, T_i].$$

en tenant compte des égalités

$$u^{k-1}(T_{k-1}) = u(T_{k-1}) = u^k(T_{k-1})$$

on voit que l'application

$$u^k : [T_{k-1}, T_k] \longrightarrow H,$$

est une solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} -\dot{u}^k(t) \in \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1-L}\partial d_{C(t,u^k(t))}(u^k(t)) \text{ pour tout } t \in [T_{k-1}, T_k] \\ u^k(T_{k-1}) = u^{k-1}(T_{k-1}) \in C(T_{k-1}, u^{k-1}) \end{cases}$$

De l'inégalité

$$T_k - T_{k-1} < \gamma,$$

on peut appliquer à nouveau le résultat de l'étape I pour obtenir

$$u^k(t) \in C(t, u^k(t)), \text{ pour tout } [T_{k-1}T_k],$$

on obtient alors par récurrence pour chaque $k = 1, ..., N$ que

$$u^k(t) \in C(t, u^k(t)), \text{ pour tout } [T_{k-1}, T_k].$$

Ces inclusions peuvent être reformulées en

$$u(t) \in C(t, u(t)), \text{ pour tout } t \in [T_0, T]$$

ce qui assure que $u(.)$ est une solution de l'inclusion différentielle $(\mathcal{D}_N)$. □

Théorème 2.2. *Supposons que l'hypothèses $(\mathcal{A}_2)$ satisfaite et que les ensembles $C(t, u(t))$ sont Fréchet normalement réguliers. Alors chaque solution absolument continue $u(\cdot)$ de $(\mathcal{D}_N)$ est une solution absolument continue de $(\mathcal{D}_d)$.*

Preuve Soit $u(.)$ une solution absolument continue de $(\mathcal{D}_N)$ et soit $t \in]0, T[$ tel que $u(.)$ et $\zeta(.)$ sont dérivables en t avec $\dot{u}(t) \neq 0$.

La propriété Fréchet normalement réguliers de l'ensemble $C(t, u(t))$ i.e

$$N_S^F(x) = N_S(x),$$

et l'égalité

$$\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \mathbb{B}_H,$$

nous donne

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in \partial^F d_{C(t,u(t))}. \tag{2.15}$$

En effet, on doit montrer que

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in N^F_{C(t,u(t))}(u(t))$$

implique que

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in \partial^F d_{C(t,u(t))}(u(t)).$$

Soit

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in N^F_{C(t,u(t))}(u(t)),$$

alors

$$\left\| -\tfrac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \right\| = \frac{\|\dot{u}(t)\|}{\|\dot{u}(t)\|} = 1 \iff -\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in \mathbb{B}_H(0,1),$$

et donc

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in N^F_{C(t,u(t))}(u(t)) \cap \mathbb{B}_H(0,1) = \partial^F d_{C(t,u(t))}(u(t)),$$

d'où

$$-\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|} \in \partial^F d_{C(t,u(t))}(u(t)).$$

D'autre part, on sait que si une fonction $g \in L^1([T_0, T], \mathbb{R})$, alors

$$\int_A |g(r)|dr \longrightarrow 0, \text{ lorsque } \lambda(A) \to 0.$$

Aussi, puisque $u(.)$ est absolument continue, on a

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &= \| \int_s^t \dot{u}(r)dr\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|dr. \end{aligned}$$

Il suit directement de la définition du sous-différentiel de Fréchet, pour tout $\epsilon > 0$ et pour $s < t$ suffisamment proche de t, et $(\mathcal{A}_2)$:

$$\begin{aligned} \langle -\frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|}, u(s) - u(t)\rangle &\leq d_{C(t,u(t))}(u(s)) + \varepsilon\|u(t) - u(s)\| \\ &= d_{C(t,u(t))}(u(s)) - d_{C(s,u(s))}(u(s)) + \varepsilon\|u(t) - u(s)\| \\ &\leq L\|u(t) - u(s)\| + |\zeta(t) - \zeta(s)| + \varepsilon\|u(t) - u(s)\|, \end{aligned}$$

ce qui signifie

$$\langle \frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|}, \frac{u(t) - u(s)}{t - s}\rangle \leq L\|\frac{u(t) - u(s)}{t - s}\| + |\frac{\zeta(t) - \zeta(s)}{t - s}| + \varepsilon\|\frac{u(t) - u(s)}{t - s}\|.$$

Alors, en prenant la limite pour $s \longrightarrow t$, on obtient pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \langle \frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|}, \dot{u}(t)\rangle &= \frac{\|\dot{u}(t)\|^2}{\|\dot{u}(t)\|} \\ &\leq |\dot{\zeta}(t)| + L\|\dot{u}(t)\| + \varepsilon\|\dot{u}(t)\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\dot{u}(t)\| \leq |\dot{\zeta}(t)| + L\|\dot{u}(t)\| + \varepsilon\|\dot{u}(t)\|.$$

En utilisant le fait que $0 < L < 1$ c'est à dire $0 < 1 - L < 1$,

donc lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\|\dot{u}(t)\| \leq |\dot{\zeta}(t)| + L\|\dot{u}(t)\|,$$

d'où

$$(1 - L)\|\dot{u}(t)\| \leq |\dot{\zeta}(t)|,$$

or

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1 - L}.$$

On observe que la dernière inégalité est satisfaite pour $\dot{u}(t) = 0$, alors

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1 - L} \text{ pour presque tout } t \in [0, T].$$

Il découle de l'inégalité (2.15)

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &\in -\|\dot{u}(t)\|\partial^F d_{C(t,u(t))}(u(t)) \\ &\in -\frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1 - L}\partial^F d_{C(t,u(t))}(u(t)). \end{aligned}$$

Donc

$$\dot{u}(t) \in \frac{|\dot{\zeta}(t)|}{1 - L}\partial d_{C(t,u(t))}(u(t)),$$

ce qui assure que $u(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{D}_d)$. Ceci termine la preuve . $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe des deux théorèmes précédents.

Corollaire 2.1. *On suppose que ($\mathcal{A}_1$) et ($\mathcal{A}_2$) sont satisfaites. Alors une application absolument continue $u : [T_0, T] \to H$ est une solution de ($\mathcal{D}_N$) si et seulement si c'est une solution de ($\mathcal{D}_d$).*

Conclusion

Ce travail est consacré à l'étude d'un résultat d'équivalence pour un problème d'évolution sous l'appelation "*Reduction of state dependent sweeping process to unconstrained differentiel inclusion*", quand l'ensemble des contraintes $C(t, u(t))$ est r-prox régulier.
On souligne le rôle de la propriété de la fonction distance associée à un ensemble prox-régulier ainsi que la coïncidence de tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke, c-à-d, $N_C^P(\cdot) = N_C^F(\cdot) = \cdots = N_C^C(\cdot)$.

Bibliographie

[1] M. Bounkhel, *Regularity Concepts in Nonsmooth Analysis*, Springer Optimization and Its Applications, Vol 59 (2012).

[2] A. Canino , *p-Convex Sets and Geodesics*, J. Differential Equations 75, 118-157 (1988).

[3] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski , *Proximal Smoothness and the Lower C^2 Property*, J. Convex Analysis, 117-144 (1995).

[4] F.H.Clarke, Yu.S.Ledyaev, R.J.Stern, P.R.Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Spriger-Verlang New York (1998).

[5] G. Colombo, L. Thibault *Prox-regular Sets and Applications*, HandBook of Nonconvex Analysis, International. Somerville, (2010).

[6] H. Federer, *Curvature Measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 93, 418-491 (1959).

[7] T. Haddad, A. Jourani , L. Thibault, *Reduction of Sweeping Process to Unconstrained Differential Inclusion*, Pac.J. Option.4.493-521(2008).

[8] T. Haddad, L. Thibault, *Mixed Upper Semicontinuous Perturbation of Nonconvex Sweeping Process*, Math. Program. 123, 225-240 (2010).

[9] T. Haddad, I. Kecis, L. Thibault , *Reduction of State Dependent Sweeping Process to Unconstrained Differential Inclusion*, J Glob Optim (2014).

[10] R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault, *Local Differentiability of Distance Functions*, M Trans. Amer. Math. Soc.Vol.352, , N.11, 5231-5249 (2000).

[11] A. Shapiro, *Existence and Differentiability of Metric Projection in Hilbert Spaces*, SIAM J. Optim. 4, 130-141 (1994).

[12] L. Thibault, *Sweeping Process with Regular and Nonregular Sets*. J. Differ. Equ. **193**, 1-26 (2003).

[13] J. P. Vial, *Strong and Weak Convexity of Sets and Functions*, Math. Oper. Res. 8, 231-259 (1983).

[14] J. Venel, *Modélisation Mathématique et Numérique de Mouvement de Foule*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université Paris XI, (2008).