# Table des matières


**Notations** **1**

**Introduction** **2**

**1 préliminaire** **5**

1.1 Définitions . . . . . 5

1.2 Homotopie . . . . . 6

1.3 Difféomorphismes . . . . . 12

1.4 Espaces de Sobolev . . . . . 13

1.5 Trace et formule de Green . . . . . 15

1.6 Les injections et les résultats de compacité . . . . . 15

1.7 Quelques propriétés sur les opérateurs compacts . . . . . 17

**2 Degrés topologiques** **19**

2.1 Le degré topologique de Brouwer . . . . . 19

2.1.1 Construction du degré . . . . . 20

2.1.2 Propriétés principales du degré topologique . . . . . 25

2.1.3 Conséquences des propriétés . . . . . 27

2.1.4 Unicité du degré de Brouwer . . . . . 32

2.2 Degré topologique de Leray-Schauder . . . . . 33

2.2.1 Construction du degré . . . . . 34

2.2.2 Propriétés du degré de Leray-Schauder . . . . . 38

2.2.3 Alternative non linéaire de Leray-Schauder . . . . . 40

2.2.4 Conséquence des propriétés . . . . . 41

**3 Quelques applications de degrés topologiques** **43**

3.1 Théorèmes de point fixe . . . . . 43
3.2 Surjectivité des fonctions . . . . . 44
3.3 Résolution d'EDO . . . . . 46
3.4 Résolution d'EDP . . . . . 49
3.4.1 Equation linéaire modèle . . . . . 49
3.4.2 Equation linéaire non-coercive . . . . . 49
3.4.3 Non-linéaire sur-linéaire . . . . . 52

**Bibliographie** **54**

# Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : l'ensemble des entiers naturels. |
| $\mathbb{R}$ | : l'ensemble des nombres réels. |
| $\mathbb{Z}$ | : l'ensemble des entiers relatifs. |
| $\mathbb{C}$ | : l'ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{R}^N$ | : un espace euclidien de dimension $N$. |
| $\Omega$ | : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. |
| $\partial\Omega$ | : la frontière de $\Omega$. |
| $B(x,r)$ | : la boule ouverte, centrée en $x$ de rayon $r$. |
| $dist$ | : la distance associée à la norme. |
| $I$ | : l'application identité. |
| $I_n$ | : la matrice unité d'ordre $n$. |
| $\oplus$ | : la somme direct. |
| $\tau(X,Y)$ | : la topologie $\tau$. |
| $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ | : le gradient de la fonction $u$. |
| $\Delta u$ | : le laplacien de la fonction $u$ c'est-à-dire, $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. |
| $p'$ | : l'exposant conjugué de $p$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. |
| $p*$ | : l'exposant critique tel que $p* = \frac{N_p}{N-p}$. |
| $supp(u)$ | : le support de la fonction $u$. |
| $p.p$ | : presque partout. |
| $C^0(\Omega)$ | : l'espace des fonctions continue sur $\Omega$. |
| $C^k(\Omega)$ | : un espace des fonction $k$ fois continument différentiable sur $\Omega$, $k \in \mathbb{N}$. |
| $C_0^\infty(\Omega)$ | : l'espace des fonctions $C^\infty$ a support compact dans $\Omega$. |
| $C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ | : l'espace des fonctions indéfiniment dérivable a support borné. |
| $L^{P'}(\Omega)$ | : l'espace dual de $L^P(\Omega)$. |

$L^P(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \text{ est mesurable}, \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}$ pour $1 \leq p < \infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \text{ est mesurable}, \exists C \text{ tel que} |u(x)| < C, p.p, x \in \Omega\}$.

# Introduction

Les dernières années, le degré topologique s'est révélé un outil très puissant pour la résolution de certains problèmes associés à des équations différentielles ordinaires et fonctionnelles. Pour cela on va présenter, dans ce travail, la théorie du degré topologique en dimension finie et infinie.

En 1869 Kronecker [17] a introduit la notion du degré pour les applications de $C^1$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Poincaré [21], Böhler [6] et Hadamard [12] l'ont ensuite développé au début des années 1890 puis étendu au cas des fonctions continues. Brouwer [5] le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884).

Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points.

Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications $C^0$ ont été développées par Nagumo [19] et Heinz . Cependant, les théorèmes du point fixe restèrent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.

Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application au moins continue et $b \in \mathbb{R}^N$, on considère le problème suivante :

$$\text{trouver } x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = b. \tag{1}$$

Si $f$ est linéaire et le déterminant de $M_f$ est différent de 0 où $M_f$ est la matrice associé à $f$, alors (1) admet une solution unique dans $\Omega$ pour tout $b \in \mathbb{R}^N$, mais ceci n'est pas une condition nécessaire et suffisante, car il peut existe des solutions pour certains $b$ lorsque $\det M_f = 0$, et par conséquent les solutions n'est pas stables. Si l'on perturbe un peu $b$, il peut ne plus exister de solutions.
Par contre, si $M_f \neq 0$, la solution de (1) est particulièrement stable, si l'on perturbe $b$ ou $f$ par une application linéaire. On s'ait qu'il continue à exister une solution de (1) qui est de plus proche de la solution originellement cherchée.
Notre objectif est d'étudier l'existence des solutions d'une équation non linéaire en utilisant un outil qu'on appellera le degré topologique de $f$ par rapport à $\Omega$ en $b$ et qu'on notera $deg(f, \Omega, b)$.
Ils existent plusieurs degrés topologiques, par exemple : on a le degré de Mawhin (pour les applications de Fredholm) et pour les applications multivoques on a le degré de Robert et

Tasry, le degré de Cellinat et Lasota, le degré d'Ortega, le degré de Hukuhara,...etc. Mais les degréS topologiques les plus connus sont de Brouwer pour les espaces de dimension finie, et de Leray-Schauder pour les espaces de dimension infinie.
Ce mémoire est composée de trois chapitres :
Dans **le première chapitre**, on introduira quelques notions de base ainsi que des rappels, qui seront utilisés dans certaines démonstrations et applications.
**Le deuxième chapitre** est constitué de deux parties, dans la premier, nous étudions le degré topologique de Brouwer en dimension finie : sa définition, sa construction et on donne quelques propriétés (normalisation, invariance par Homotopie,...etc) et conséquences. Dans la deuxième nous parlerons du degré topologique de Leray-Schauder où la dimension de l'espace est infinie, nous commençons par sa définition, sa construction et quelques propriétés et conséquences.
**Le troxième chapitre**, on tentera de mettre en exergue l'utilité du degré topologique via quelques applications.

# Chapitre 1

# préliminaire

## 1.1 Définitions

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose
$$sgn(a) = \begin{cases} 1 & si\ a > 0, \\ 0 & si\ a < 0. \end{cases}$$

2. Pour tout $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, on pose $J_f(x)$ le déterminant de la jacobienne de $f$ au point $x$
$$J_f(x) := det f'(x) = det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq N}.$$

3. Soit $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$ différentiable, un point $x \in \Omega$ est dit régulier si $J_f(x) \neq 0$. On dit que $y \in \mathbb{R}^N$ est une valeur régulier de $f$ si tout les points $x \in f^{-1}(y)$ sont régulier.

4. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, alors
$$supp(f) = \{\overline{x \in \Omega, f(x) \neq 0}\}.$$

5. Soit $A \subset H$ on a
$$CO(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_i \in A,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\},$$
l'ensemble de tout convexes de $A$.

## 1.2 Homotopie

.

**Définition 1.2.1.** *(Application Homotope)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que $f$ est homotope à $g$ s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que*

$$\forall x \in X,\ H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x).$$

*On dit alors que $H$ est une homotopie de $f$ à $g$.*

**Définition 1.2.2.** *(Applications homotopes relativement à un sous-espace)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques, $A$ une partie de $X$ et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. On dit que $f$ est homotope à $g$ relativement à $A$ s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que*

$$\forall x \in X,\ H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x),$$

*et*

$$\forall a \in A,\ \forall t \in [0,1],\ H(a,t) = f(a) = g(a).$$

*On dit alors que $H$ est une homotopie relative à $A$ de $f$ à $g$.*

**Remarque 1.2.3.** *1. La deuxième condition de la définition 1.2.2 montre que pour que $f$ et $g$ puissent être homotopes relativement à $A$, il faut que $f$ et $g$ coïncide sur $A$.*

2. *Si* $A = \emptyset$, *la deuxième condition de la définition 1.2.2 est vide. Ainsi être homotope relativement à l'ensemble vide signifie simplement être homotope.*

3. *Si* $A' \subset A$ *et* $f$ *et* $g$ *homotopes relativement à* $A$, *alors* $f$ *et* $g$ *sont homotopes relativement à* $A'$.

   *En effet : une homotopie relative à* $A$ *de* $f$ *à* $g$ *est une homotopie relative à* $A'$ *de* $f$ *à* $g$.

4. *Soient* $X, Y$ *deux espaces topologiques et* $f : X \to Y$ *une application continue, alors* $f$ *est homotope à elle même relativement à* $X$.

   *En effet : considérons l'application*

   $$H : (x,t) \in X \times [0,1] \mapsto f(x) \in Y,$$

   *elle est continue et pour* $x \in X$ *et* $t \in [0,1]$, *on a*

   $$H(x,0) = H(x,1) = f(x),$$

   *et*

   $$H(x,t) = f(x) = f(x).$$

   *Autrement dit, c'est une Homotopie relative à* $X$ *de* $f$ *à* $f$.

**Exemple 1.2.4.** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions définies de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{C}$ *par*

$$f(x) = \exp(\frac{2x}{\pi}), \quad g(x) = 0.$$

$f$ *est le cercle d'origine* $(0,0)$ *et de rayon 1,* $g$ *reste à l'origine, alors* $f$ *et* $g$ *sont Homotopes via la fonction continue*

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$$
$$(x,t) \to H(x,t) = (1-t)\exp(\frac{2x}{\pi}).$$

*On a pour tout* $x \in [0,1]$ :

$$\begin{cases} H(x,0) = \exp(\frac{2x}{\pi}) = f(x). \\ H(x,1) = 0 = g(x). \end{cases}$$

**Proposition 1.2.5.** *(Relation d'équivalence)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques, $A$ une partie de $X$. La relation d'homotopie relativement à $A$ est une relation d'équivalence sur $\tau(X, Y)$.*

***Preuve.*** -Soit $f : X \to Y$ une application continue. D'après la remarque 1.2.3,(3,4) $f$ est homotope à $f$ relativement à $A$ et la relation est réflexive.
-Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues et $H$ une homotopie relative à $A$ de $f$ à $g$. L'application

$$\tilde{H} : (x,t) \in X \times [0,1] \mapsto H(x, 1-t) \in Y$$

est continue. Pour tout $x \in X, a \in A$ *et* $t \in [0,1]$ on a

$$\tilde{H}(x,0) = H(x,1) = g(x),$$

et

$$\begin{cases} \tilde{H}(x,1) = H(x,0) = f(x), \\ \tilde{H}(a,t) = H(a,1-t) = f(a) = g(a). \end{cases}$$

Autrement dit $\tilde{H}$ est une homotopie relative à $A$ de $g$ à $f$ et la relation est symétrique.
-Soient $f, g, h : X \to Y$ trois applications continues. $H$ une homotopie relative à $A$ de $f$ à $g$ et $H'$ une homotopie relative à $A$ de $g$ à $h$. L'application

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times [0,1] &\to Y \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} H(x,2t) & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H_1(x,2t-1) & si \quad \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases} \end{aligned}$$

est bien définie et continue.

En effet : En chacun des points $(x, \frac{1}{2})$, l'application est définie de deux manières. Mais ces deux manières coïncident

$$\tilde{H}(x, \frac{1}{2}) = H(x, 1) = g(x) = H_1(x, 0) = \tilde{H}(x, \frac{1}{2}).$$

De plus, pour $x \in X$, on a

$$\tilde{H}(x, 0) = H(x, 0) = f(x),$$

et

$$\tilde{H}(x, 1) = H_1(x, 1) = h(x).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}], u \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $a \in A$, on a

$$\tilde{H}(a, t) = H(a, 2t) = f(a) = g(a) = h(a),$$

et

$$\tilde{H}(a, u) = H_1(a, 2u - 1) = h(a) = g(a) = f(a).$$

Autrement dit $\tilde{H}$ est une homotopie relative à $A$ de $f$ à $h$ et la relation est transitive. ■

**Définition 1.2.6.** *(Classe d'équivalence)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques, on note $[X, Y]_A$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\tau(X, Y)$ pour la relation être homotope relativement à $A$. Ainsi $[X, Y]_A$ un quotient de $\tau(X, Y)$.*

**Définition 1.2.7.** *(Restriction)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques $A$ une partie de $X$ et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Si $f$ et $g$ sont homotopes relativement à $A$ alors les restrictions à $A$ de $f$ et $g$ coïncide, l'application*

$$Rest : \begin{cases} \tau(X, Y) & \to \tau(A, Y), \\ f & \mapsto f \restriction_A . \end{cases}$$

**Définition 1.2.8.** *(Chemins)*
*Soit $X$ un espace topologique. On dit que $C : [0, 1] \to X$ est un chemin dans $X$ si $C$ est une application continue. Le point $C(0)$ s'appelle l'origine de $C$, $C(1)$ son extrémité de $C$. Soient $C$ et $C'$ deux chemins dans $X$. On dit que $C$ et $C'$ sont des chemins homotopes s'ils sont homotopes dans $\tau([0, 1], X)$ relativement à $\{0, 1\}$ c'est-à-dire, s'il existe une application $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ telle que*

$$\forall s \in [0, 1],\ H(s, 0) = C(s),\ H(s, 1) = C'(s),$$

*et*

$$\forall t \in [0,1],\ H(0,t) = C(0) = C'(0),$$

*et*

$$\forall t \in [0,1],\ H(1,t) = C(1) = C'(1).$$

*Cette relation est une relation d'équivalence.*

**Proposition 1.2.9.** *(Composition)*
*Soient $X, Y, Z$ trois espaces topologiques, $A$ une partie de $X$, $B$ une partie de $Y$, $f_1, f_2 : X \to Y$ deux applications continues et $g_1, g_2 : Y \to Z$ deux applications continues. Si $f_1$ et $f_2$ sont homotopes relativement à $A$, $g_1$ et $g_2$ sont homotopes relativement à $B$ et $f_1(A) \subset B$ alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$ relativement à $A$.*

**P*reuve*.** Soient $H$ une homotopie relative à $A$ de $f_1$ à $f_2$ et $H_1$ une homotopie relative à $B$ de $g_1$ à $g_2$. On considère alors la fonction

$$\begin{aligned} H_2 : X \times [0,1] &\to Z \\ (x,t) &\mapsto H_1(H(x,t)), \end{aligned}$$

elle est continue par composition des fonctions $H'$ et $(x,t) \mapsto (H(x,t),t)$ (cette dernière étant continue car $(x,t) \mapsto t$ et $(x,t) \mapsto H(x,t)$ le sont aussi. De plus, pour tout $x \in X$, on a

$$H_2(x,0) = H_1(H(x,0),0) = g_1(H(x,0)) = (g_1 \circ f_1)(x),$$

et

$$H_2(x,1) = H_1(H(x,1),1) = g_2(H(x,1)) = (g_2 \circ f_2)(x).$$

Par ailleurs, pour $a \in A$ et $t \in [0,1]$, on a

$$H_2(a,t) = H_1(H(a,t),t) = H_1(f_1(a),t) = H_1(f_2(a),t),$$

or $f_1(a) \in B$ et $H_1$ est une homotopie relativement à $B$, on a

$$H_1(f_1(a),t) = g_1(f_1(a)) = g_2(f_1(a)),$$

et

$$H_1(f_2(t),t) = g_1(f_2(a)) = g_2(f_2(a)).$$

Finalement,

$$H_2(a,t) = g_1(f_1(a)) = g_2(f_2(a)).$$

Ainsi $H_2$ est bien une homotopie relativement à $A$ de $g_1 \circ f_1$ à $g_2 \circ f_2$. ■

**Exemple 1.2.10.** *(Chemin)*
*Soient $X$ un espace topologique et $C_1 : [0,1] \to X$ un chemin. On définit le chemin inverse par*

$$\overline{C_1} : t \mapsto C_1(1-t).$$

*Si $C_1$ et $\overline{C_1}$ sont deux chemins dans $X$ homotopes en tant que chemin, alors $\overline{C_1}$ et $\overline{C_2}$ sont deux chemins homotopes.*
*En effet : L'application $t \in [0,1] \mapsto 1-t \in [0,1]$ est continue et homotope à elle même relativement à $\{0,1\}$ d'après la remarques 1.2.3, (3,4) par ailleurs, elle envoie $A = \{0,1\}$ dans l'ensemble $B = \{0,1\}$. Comme $C_1$ et $\overline{C_2}$ sont homotopes relativement à $B$, la proposition 1.2.9 donne le résultat souhaité.*
*En suivant pas à pas les preuves de la remarque 1.2.3, (4) et de la proposition 1.2.9, on constate que si $H$ est un Homotopie de $C_1$ à $C_2$, alors $\overline{H} : (s,t) \mapsto H(1-s,t)$ est une homotopie $\overline{C_1}$ à $\overline{C_2}$ ce qui se vérifie bien sur immédiatement.*

**Corollaire 1.2.11.** *(Composition)*
*Soient $X, Y, Z$ trois espaces topologiques, $A$ une partie de $X$, $B$ une partie de $Y$, $f_1, f_2 : X \to Y$ deux applications continues et $g : Y \to Z$ une application continue. Si $f_1$ et $f_2$ sont homotopes est relativement à $A$, alors $g \circ f_1$ et $g \circ f_2$ le sont aussi relativement à $B$.*

**P*reuve*.** L'application $(y,t) \in Y \times [0,1] \mapsto g(y)$ est une homotopie de $g$ à $g$ relativement à $Y$. Comme $f_1(A) \subset Y$, la proposition 1.2.9 permet de conclure. ■

**Corollaire 1.2.12.** *Soient $X, Y, Z$ trois espaces topologiques, $f_1, f_2 : X \to Y$ deux applications continues et $g_1, g_2 : Y \to Z$ deux applications continues. Si $f_1$ et $f_2$ sont homotopes et $g_1$ et $g_2$ sont homotopes, alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$.*

**P*reuve*.** Comme $f_1(\emptyset) \subset \emptyset$, c'est une conséquence de la proposition 1.2.9 et de la remarque 1.2.3, (2). ■

**Définition 1.2.13.** *(Équivalence d'homotopie)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que $f$ est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à $Id_X$ et $f \circ g$ soit homotope à $Id_Y$.*

**Remarque 1.2.14.** *On reprend les notations de la définition 1.2.13. L'application $g$ est alors une équivalence d'homotopie.*

**Exemple 1.2.15.** *(Homéomorphisme)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ un homéomorphisme, alors $f$ est une équivalence d'homotopie. La réciproque est fausse.*

**Définition 1.2.16.** *(Type d'homotopie)*
*Soient $X, Y$ deux espaces topologiques. On dit que $X$ a le même type d'homotopie que $Y$ s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \to Y$.*

**Exemple 1.2.17.** *(Ensemble vide)*
*Une fonction à valeurs dans l'ensemble vide est nécessairement l'application vide dont l'espace de départ est l'ensemble vide. On en déduit que le seul espace topologique qui a même type d'homotopie que le vide est l'ensemble vide.*

## 1.3 Difféomorphismes

**Définition 1.3.1.** *(Difféomorphisme)*
*Soient $U$ et $V$ des ouverts non vides de $\mathbb{R}^p$. On dit q'une application $f : U \to V$ est un difféomorphisme de $U$ sur $V$ si*

1. *$f$ est une bijection.*
2. *$f$ est de classe $C^1$, c'est à dire continument différentiable sur $U$.*
3. *$f^{-1}$ est de classe $C^1$ sur $V$.*

**Proposition 1.3.2.** *(Difféomorphisme et réciproque)*
*Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme, alors sa différentielle est en tout point $U$ un isomorphisme (de $\mathbb{R}^p$ dans lui même) et la différentielle de sa réciproque $f^{-1}$ est liée à celle de $f$ par la formule*

$$D(f^{-1})y = (Df_{f^{-1}(y)})^{-1}, \text{ pour tout } y \in V.$$

**Remarque 1.3.3.** *Un difféomorphisme de $U$ sur $V$ est évidemment un homéomorphisme de $U$ sur $V$. Mais la réciproque est fausse, par exemple l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^3$ est un homéomorphisme différentiable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas un difféomorphisme sur $\mathbb{R}$ puisque la réciproque $f^{-1} : x \to x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas différentiable au point $x = 0$.*

**Théorème 1.3.4.** *(D'inversion local)*
*Soit $f : U \to F$ une application de classe $C^1$. S'il existe $a \in U$ tel que $D_a f$ est inversible, alors il existe des voisinages $V$ de $a$ et $W$ de $f(a)$ tels que $f : V \to W$ est un difféomorphisme.*

## 1.4 Espaces de Sobolev

**Définition 1.4.1.** *Soient* $\Omega$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N, p \in [1, +\infty[$, *et* $m$ *un entier naturel. On définit l'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \text{ tel que }, \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \le m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\},$$

*où* $\alpha$ *est un multi-indice* ($\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *et* $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$), *et la dérivée partielle* $\partial^\alpha v \in L^p(\Omega)$ *est à prendre au sens faible muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{1/p}_{L^p(\Omega)},$$

*si* $1 \le p \le +\infty$, *et si* $p = +\infty$ *la norme de l'espace* $W^{m,\infty}(\Omega)$ *est*

$$\|u\|_{W^{m,\infty}}(\Omega) = \max \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

**Propriétés 1.4.2.** *L'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est*

1. *Un espace de Banach pour* $1 \le p \le +\infty$.
2. *Un espace séparable pour* $1 \le p < +\infty$.
3. *Un espace réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

**Définition 1.4.3.** *(Dérivation faible)*
*Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $u$ *localement intégrable sur* $\Omega$, *et* $\alpha \in \mathbb{N}^N$, *on appelle dérivée faible de* $u$ *d'ordre* $\alpha$, *et on note* $\partial^\alpha u$, *toute fonction* $v$ *localement intégrable sur* $\Omega$ *telle que*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx.$$

**Corollaire 1.4.4.** *Soient* $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 \le p \le +\infty$, *alors* $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \forall i = \overline{1, N}.$$

**Corollaire 1.4.5.** *Soit* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *telle que* $G(0) = 0$ *et* $|G'(s)| \le M$ $\forall s \in \mathbb{R}$, *et soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega),$$

*et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

**Définition 1.4.6.** *(Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$)*
*Soit p un réel, $1 \leq P \leq \infty, \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$ l'ensemble*

$$H^m(\Omega) = \{u \text{ mesurable, tel que } D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\},$$

*où* $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_N} x_N}(x)$ *désigne la dérivée d'ordre $\alpha$ au sens des distribution avec* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ *et* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$,
*on munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

*La norme associée étant donnée par*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^m(\Omega).$$

**Théorème 1.4.7.** *Si $\Omega$ est un ouvert borné régulier de classe $C^1$ et $m > N/2$, alors $H^m(\Omega)$ est un sous espace de l'ensemble $C(\overline{\Omega})$ des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.*

**Définition 1.4.8.** *On désigne par $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$W^{1,2}_0(\Omega) = H^1_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)},$$

*$H^1_0(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui ne s'annulent pas sur le bord $\partial\Omega$. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, on a*

$$H^1_0(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N) = \overline{D(\mathbb{R}^N)},$$

*car $C^1_0(\Omega)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

**Proposition 1.4.9.** *Muni de produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

**Théorème 1.4.10.** *(Inégalité de Poincaré)*
*On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante positive $c = c(\Omega) > 0$ telle que*

$$\forall u \in H^1_0(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)(\sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.5 Trace et formule de Green

**Théorème 1.5.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de classe $C^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, x_N > 0\}$. On définit l'application trace par*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega})$$
$$v \mapsto \gamma_0(v) = v \restriction_{\partial\Omega},$$

*cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore $\gamma_0$. En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Théorème 1.5.2.** *(Formule de Green)*
*Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de classe $C^1$. Si $u$ et $v$ sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elle vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds,$$

*où $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.*

## 1.6 Les injections et les résultats de compacité

**Théorème 1.6.1.** *(Théorème de Rellich)*
*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'injection de $H_0^{m+1}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ est compact.*

**Remarque 1.6.2.** *On a en particulier*
*L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact.*

**Théorème 1.6.3.** *Soient $m \geq 1$ un entier et $1 \leq p \leq \infty$, on a les injections continues suivantes*

1. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.*
2. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad, \forall q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

*De plus si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas un entier, on pose*

$$K = [m - \frac{N}{p}] \quad et \quad \theta = m - \frac{N}{p} - K, \quad (0 < \theta < 1).$$

*Pour $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\|D^\alpha u\| \leq c\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \text{ où } |\alpha| \leq K,$$

*et*

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq c|x-y|^\alpha \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N \text{ et } |\alpha| = K.$$

*En particulier $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset D(\mathbb{R}^N)$, si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par $\Omega$ un ouvert borné de classe $C^1$, on a les mêmes injections sauf dans le cas où $p < N$, l'injection devient $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.*

**Théorème 1.6.4.** *(Rellich-kondrachov)*
*Si l'on suppose que $\Omega$ est un ouvert borné de classe $C^1$, on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & \forall q \in [1, P^*[ \quad \text{si } p < N, \\ L^q(\Omega), & \forall q \in [1, +\infty[ \quad \text{si } p = N, \\ C(\overline{\Omega}) & \quad \text{si } p > N. \end{cases}$$

*avec injections compactes.*

**Théorème 1.6.5.** *Il existe une constante c dépend de $|\Omega| \leq \infty$ telle que*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,P}(\mathbb{R})}, \text{ pour tout } u \in W^{1,P}(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty.$$

*Autrement dit, $W^{1,P}(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ avec injection continue.*

**Théorème 1.6.6.** *Supposons que $\Omega$ est un intervalle ouvert borné, on a*

1. *L'injection $W^{1,P}(\Omega) \subset C(\Omega)$ est compact pour $1 < p \leq +\infty$.*
2. *L'injection $W^{1,1}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ est compact pour $1 \leq q \leq +\infty$.*

**Théorème 1.6.7.** *(De convergence dominée)*
*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On suppose*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p dans $\Omega$.*
2. *$\exists g \in L^1(\Omega)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \ |f_n(x)| \leq g(x)$, p.p sur $\Omega$, alors*

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)=0.}.$$

**Théorème 1.6.8.** *(Théorème de Riez)*
*Soit $V$ un espace de Hilbert réel et soit $V'$ son dual. Pour toute forme linéaire continue $L \in V'$, il existe un unique $y \in V$ tell que $L(x) = \langle y, x\rangle, \forall x \in V$. De plus on a*

$$\|L\|_{V'} = \|y\|_V.$$

**Théorème 1.6.9.** *(De Banach-Alaoglu-Bourbaki)*
*L'ensemble*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\},$$

*est compact pour la topologie faible.*

## 1.7 Quelques propriétés sur les opérateurs compacts

Soient $E, F$ deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ un ouvert.

**Définition 1.7.1.** *Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est dit compact si l'image de la boule unité fermé $B'_E$ de $E$ est relativement compact dans $F$, c'est-à-dire, si $\overline{T(B'_E)}$ est compact dans $F$.*
*On notera $K(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires compacts de $E$ dans $F$.*

**Proposition 1.7.2.** *Soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$T \in K(E, F)$.*
2. *L'image de tout borné de $E$ est relativement compact dans $F$.*
3. *De toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans $E$, on peut extraire une sous suite $(T(u_{n_k}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergente dans $F$.*

**Remarque 1.7.3.** *Toute application linéaire compact $T$ est continue. La réciproque est vraie si $T$ est de rang finie.*

**Proposition 1.7.4.** *Si l'espace $E$ est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur $E$ est continue et compact*

**Proposition 1.7.5.** *Soit $E$ un fermé borné d'un espace de Banach $F$ et $f : E \to F$ une application. Alors $f$ est compact si et seulement si $f$ est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications compactes de rang finie.*

**Proposition 1.7.6.** *Soit $B$ la boule unité ouverte d'un espace vectoriel normé $X$. Alors on a les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned} dim X < \infty &\iff \text{La boule unité fermée } \overline{B} \text{ est compacte.} \\ &\iff \text{La frontière } \partial B \text{ est compacte.} \\ &\iff \text{De toute suite } \overline{B}, \text{ on peut extraire une sous suite convergente.} \\ &\iff \text{Toute application continue } f : \overline{B} \to \overline{B} \text{ admet au moins un point fixe.} \end{aligned}$$

**Définition 1.7.7.** *(Perturbation compact de l'identité)*
*Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels topologiques localement compacts et $\Phi : X \to Y$ est une application continue.*
*Une application de la forme $\Phi = I - T$ où $I$ est l'application identité et $T$ une application compact est dite perturbation compacte de l'identité ou application de Leray-Schauder.*

# Chapitre 2

# Degrés topologiques

## 2.1 Le degré topologique de Brouwer

Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue, et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$f(x) = b. \tag{2.1}$$

Notre objectif est de obtenir une quantité qui nous permet de connaître le nombre des solutions de (2.1). Cette quantité devrait nous donner le nombre exact des solutions de (2.1) et devrait être invariante par des petits déformations continues de $f$. Pour éviter que les solutions de (2.1) sortent du domaine, on imposera que $b \notin f(\partial\Omega)$.
Dans le cas simple de $\mathbb{R}$ on remarque que le nombre des solutions n'est pas constants, or si on assigne à chaque solution de $f$ une orientation qui n'est autre que le signe de $f'$ et on définie

$$deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn f'(x).$$

**En particulier dans la dimension 1 :** Si on suppose une fonction $f$ définit de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue, ne s'annule ni en 0 ni en 1,

$$deg(f) = \frac{1}{2}(sgn f(1) - sgn f(0)).$$

Si $deg(f, [0, 1], b) \neq 0$, alors $f(0)$ *et* $f(1)$ ont des signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [0, 1]$ tel que

$$f(x) = 0, \tag{2.2}$$

donc l'entier $deg(f, [0, 1], b)$ permet d'assurer qu'il existe au moins une solution de (2,2) dans $[0, 1]$. Ces solutions sont stables, si on perturbe $f$ par des petits perturbations ou on modifie $f$ continument, avec les valeurs au bord de $[0, 1]$, l'existence des solutions reste vraie.
En décompose $\Omega$ en ses composantes connexes $\Omega = \cup_{i\in I} ]a_i, b_i[$, et on définit

$$deg(f, \Omega, b) = \frac{1}{2} \sum_{i\in I}(sgn(f(b_i) - b) - sgn(f(a_i) - b)).$$

### 2.1.1 Construction du degré

**Définition 2.1.1.** *(Du degré de Brouwer)*
*Soient $N \geq 1$ un entier, $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(\partial\Omega)$.*
*On considère $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ a support compact contenu dans $]0, \varepsilon[$, telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1.$$

*On appelle le degré topologique de Brouwer de $f$ dans $\Omega$ par rapport au point cible $b$ le nombre*

$$deg(f, \Omega, b) := \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - b|)J_f(x)dx.$$

**Lemme 2.1.2.** *Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, et $\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $0 \notin f(\partial\Omega)$ et que $supp\ \psi \subset ]0, \varepsilon[$ pour un $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$, et*

$$\int_0^{+\infty} r^{N-1}\psi(r)dr = 0,$$

*alors on a*

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x)|)J_f(x)dx = 0.$$

Pour la démonstration voir[15]

**Proposition 2.1.3.** *Avec les hypothèses et notation de la définition précèdent, le degré topologique $deg(f, \Omega, b)$ est indépendant de $\varepsilon$ et de la fonction $\varphi$, prouvé que*

$$\varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega)).$$

***Preuve.*** Soient $\varepsilon_0 = dist(b, f(\partial\Omega))$ et $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$.
Si $\varphi_1$ *et* $\varphi_2$ ont leur support contenu respectivement dans $]0, \varepsilon_1[$ *et* $]0, \varepsilon_2[$, et sont telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1,$$

alors en posant $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$, on a

$$\int_0^{+\infty} r^{N-1}\psi(r)dr = 0,$$

et en appliquant le lemme précèdent à $\psi$ et la fonction $x \mapsto f(x) - b$ on obtient

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x) - b|)J_f(x)dx = 0.$$

■

**Proposition 2.1.4.** *(Stabilité)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f_1, f_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, et $b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\, dist(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)) \text{ et } \|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon,$$

*donc*

$$deg(f_1, \Omega, b) = deg(f_2, \Omega, b).$$

***Preuve.*** nous allons voir plus loin dans la proposition 2.1.3 $deg(f, \Omega, b) = deg(f - b, \Omega, 0)$, on peut supposer sans perte de généralité, que $b = 0$, soit $\theta : [0, +\infty[ \to [0, 1]$ une fonction de classe $C^\infty$ telle que

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le r \le \varepsilon, \\ 0 & \text{si } r \ge 2\varepsilon. \end{cases}$$

En introduisant la fonction

$$f_3(x) := (1 - \theta(|f_1(x)|))f_1(x) + \theta(|f_1(x)|)f_2(x),$$

on vérifie que pour $1 \le i, k \le 3$ on a $\|f_i - f_k\|_\infty < \varepsilon$ et pour $x \in \partial\Omega$, on a $|f_i(x)| > 3\varepsilon$. D'autre part le choix de $\theta$ implique

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ |f_1(x)| > 2\varepsilon, \\ f_2(x) & si\ |f_1(x)| > \varepsilon. \end{cases}$$

On va maintenant choisir les fonctions $\varphi_1$ *et* $\varphi_2$ de la façon suivante

$$\begin{cases} supp(\varphi_1) \subset ]2\varepsilon, 3\varepsilon[, \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = 1, \\ supp(\varphi_2) \subset ]0, \varepsilon[, \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1. \end{cases}$$

Comme $f_3$ coïncide (en partie) avec $f_1$ ou avec $f_1$, alors on a

$$\begin{cases} \varphi_1(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) = \varphi_1(|f_1(x)|)J_{f_1}(x), \\ \varphi_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x) = \varphi_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x). \end{cases}$$

Ceci implique

$$deg(f_3, \Omega, 0) = deg(f_1, \Omega, 0) = deg(f_2, \Omega, 0).$$

■

**Théorème 2.1.5.** *Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On considère un point $b \notin f(\partial\Omega)$ et $(f_k)_k$ une suite de fonction de $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telles que*

$$\|f_k - f\|_{+\infty} \to 0 \ sur \ \overline{\Omega},$$

*alors le degré topologique de $f_k$ existe pour $k$ assez grand et le degré topologique de $f$ est donné par*

$$deg(f, \Omega, b) := lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega, b).$$

***Preuve***. En effet : comme $\|f - f_k\|_\infty \to 0 \ sur \ \overline{\Omega}$, pour $k \geq k_0$ assez grand, $b \notin f_k(\partial\Omega)$ et par conséquence le degré topologique $deg(f_k, \Omega, b)$ est bien défini. Par ailleurs la proposition de stabilité (proposition 2.1.4) donne que si $k, j$ assez grands pour que

$$\|f_k - f_j\| < \frac{1}{4} dist(b, f_k(\partial\Omega) \cup f_j(\partial\Omega)),$$

alors

$$deg(f_k, \Omega, b) = deg(f_j, \Omega, b).$$

On conclut que la suite du degré topologique $(deg(f_k, \Omega, b))_k$ est stationnaire. ■

**Proposition et Définition 2.1.6.** *(Du degré de Brouwer)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On désigne par*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\},$$

*l'ensemble des points singulier de $f$ et on suppose que $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$, alors on a*

$$deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) \ \in \mathbb{Z}.$$

*Si $\Omega \cap f^{-1}(b) = \emptyset$, alors*

$$deg(f, \Omega, b) = 0.$$

***Preuve***. Dans le cas où $f^{-1}(b) = \emptyset$ il est clair que le degré est nul, sinon supposons que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$, on a que

$$f^{-1}(b) = \{x_1, ..., x_m\} \ pour \ m \ \geq \ 1.$$

Soit $r > 0$ assez petit pour que

$$B(b, r) \cap (f(\partial\Omega) \cup f(S)) = \emptyset.$$

On sait que pour $1 \leq i \leq m$, il existe un voisinage $V_i$ de $x_i$ tel que $f$ soit un difféomorphisme de $V_i$ sur $B(b,r)$ et que $f^{-1}(B(b,r)) = \cup_{1\leq i\leq m} V_i$, choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min(r, dist(b, f(\partial) \cup f(S))),$$

et prenons une fonction $\varphi \in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $supp(\varphi) \subset ]0,\varepsilon[$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1,$$

alors on a

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,b) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int_{V_i} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y = f(x) - b$, puisque $J_f(x)$ ne s'annule pas sur $V_i$, on a

$$dy = |J_f(x)|dx = sgn(J_f(x_i))J_f(x)dx,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \varphi(|f(x)-b|)J_f(x)dx &= sgn(J_f(x_i)) \int_{B(0,r)} \varphi(|y|)dy \\ &= sgn(J_f(X_i)), \end{aligned}$$

d'ou

$$deg(f,\Omega,b) = \sum_{x\in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)).$$

■

**Cas singulier :** Si $b \in f(\partial\Omega)$ est une valeur singulier, on pose

$$deg(f,\Omega,b) = deg(f,\Omega,a),$$

où $a$ est une valeur régulière proche de $b$ et dont l'existence est assurée par le lemme suivante

**Lemme 2.1.7.** *(Lemme de Sard)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ et*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\},$$

*l'ensemble des points singulier de $f$, alors $f(S)$ est de mesure nulle.*

***Preuve.*** On suppose que $\Omega$ un cube de coté $a$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ pour $k \geq 1$ entier, on divise le cube en $k^N$ cubes $C_i$ de coté $\frac{a}{k}$ (avec $1 \leq i \leq k^N$).
Si $S \cap C_i \neq \emptyset$, alors il existe $x \in S \cap C_i$ et $y \in C_i$ et puisque $J_f(x) = 0$ donne l'existence d'un hyperplan $H_x$ de $\mathbb{R}^N$ contient $f'(x)(\mathbb{R}^N)$.
Soit $x \mapsto f'(x)$ est uniformément continue c'est-à-dire

$$\forall x, y \in \Omega,\ \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon.$$

par l'utilisation du théorème des accroissement finis, on obtient

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| &\leq |y-x|\varepsilon(|y-x|) \\ &\leq \frac{a}{k}\sqrt{N}\varepsilon(|y-x|), \end{aligned}$$

on déduit que

$$dist(f(y), f(x) + H_x) \leq \frac{a\sqrt{N}}{k}\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k}),$$

d'autre part

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |y-x| sup |f'(x + t(y-x))| \\ &\leq L\frac{a}{k}\sqrt{N}, \end{aligned}$$

tel que

$$L = max_{x \in \overline{\Omega}} \|f'(x)\|,$$

finalement si $C_i \cap S \neq \emptyset$, alors $f(C_i)$ est continue dans le pavé dé-pisseur $2\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})^2$, et la base a des cotés de longeur $2L(\frac{a\sqrt{N}}{k})$, on obtient

$$mes f(C_i) \leq 2\varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k})^2(2L\frac{a\sqrt{K}}{k})^{N-1},$$

et nous avons $k^N$ cubes $C_i$ on déduit, $\forall k \geq 1$

$$mes(f(S)) \leq 2^N L^{N-1}(a\sqrt{N})^N \varepsilon(\frac{a\sqrt{N}}{k}),$$

faisons tendre k $\to +\infty$ et comme le nombre de décomposition est quelconque, on déduit que

$$mes(f(S)) = 0.$$

■

### 2.1.2 Propriétés principales du degré topologique

Nous énonçons les propriétés fondamental du degré topologique.

**Proposition 2.1.8.** *(Stabilité)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sont deux fonctions continues telles que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. Alors si*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4} dist(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)),$$

*on a*

$$deg(f_1, \Omega, b) = deg(f_2, \Omega, b).$$

**Proposition 2.1.9.** *(Stabilité par rapport à la cible)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que $b, b' \in \mathbb{R}^N$ sont dans la même composante connexe de $f(\partial\Omega)^c$, alors*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega, b').$$

**P*reuve*.** Il suffit de voir que si $b, b' \in \mathbb{R}^N$ est assez proche de $b$, alors le degré est le même. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \frac{1}{4} dist(b, f(\partial\Omega)),$$

et posons

$$f_0(x) := f(x) - b,$$

$$f_1(x) := f(x) - b'.$$

On voit que si $dist(b', b) < \varepsilon$, alors $\|f_0 - f_1\|_\infty < \varepsilon$, et que par conséquent d'après la proposition précédente

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, b) &= deg(f_0, \Omega, 0) \\ &= deg(f_1, \Omega, 0) \\ &= deg(f, \Omega, b'). \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.1.10.** *(Normalisation)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné et $b \in \mathbb{R}^N$, en désignant par $I$ l'application identité, on a*

$$deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & si\ b \in \Omega, \\ 0 & si\ b \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

*du fait que* $J_I(x) = 1$.

*On a, aussi le fait que* $J_{-I}(x) = (-1)^N$

$$deg(-I, \Omega, b) = \begin{cases} (-1)^N & si\ b \in \Omega, \\ 0 & si\ b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

**Proposition 2.1.11.** *(Additivité)*

*Soient* $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$, *une fonction continue sur un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, *et* $\Omega_1, \Omega_2$ *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$. *Si* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *avec* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *et* $b \notin f(\partial\Omega_1 \cup f(\partial\Omega_2)$, *alors*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega_1, b) + deg(f, \Omega_2, b).$$

**P*reuve*.** Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions de classe $C^1$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0,$$

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, b) &= \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega, b) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(|f_k(x) - b|_2) J_{f_k}(x) dx \\ &= \lim_{k\to\infty} [\int_{\Omega_1} \varphi(|f_k(x) - b|_2) J_{f_k}(x) dx + \int_{\Omega_2} \varphi(|f_k(x) - b|_2) J_{f_k}(x) dx] \\ &= \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega_1, b) + \lim_{k\to\infty} deg(f_k, \Omega_2, b) \\ &= deg(f, \Omega_1, b) + deg(f, \Omega_2, b). \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.1.12.** *(Invariance par homotopie)*

*Soient* $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ *une fonction continue et* $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, *alors pour tout* $t \in [0,1]$ *on a*

$$deg(H(.,t), \Omega, b) = deg(H(.,0), \Omega, b).$$

**P*reuve*.** Vérifiant tout d'abord qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, alors

$$deg(H(.,t_1), \Omega, b) = deg(H(.,t_2), \Omega, b).$$

Soit

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\, dist(b, H(\partial\Omega \times [0,1])),$$

comme $H(.,.)$ est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,1]$, alors $\exists\delta > 0$ tel que si

$$|t_1 - t_2| \leq \delta,$$

et pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on a
$$|H(x,t_1) - H(x,t_2)| < \varepsilon.$$

Par conséquence vu la proposition de stabilité on a
$$deg(H(.,t_1),\Omega,b) = deg(H(.,t_2),\Omega,b),$$
pour tout $t_1, t_2 \in [0,1]$, tels que
$$|t_1 - t_2| \leq \delta.$$
D'où on en déduit le résultat d'invariance par homotopie en recouvrant le compact $[0,1]$ par des intervalles de longeur $\delta$. ■

**Proposition 2.1.13.** *(L'invariance du degré par la translation)*
*Pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$, alors*
$$deg(f,\Omega,b) = deg(f-b,\Omega,0).$$

**Proposition 2.1.14.** *(Multiplication du degré)*
*Soient $f : U \to \mathbb{R}^N$ et $g : V \to \mathbb{R}^M$ deux fonctions de classe $C^1$, où $U$ et $V$ sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^N$ et de $\mathbb{R}^M$, et soient $b_0 \notin f(\partial U)$ et $z_0 \notin f(\partial V)$. Alors*
$$deg(f \times g, U \times V, (b_0,z_0)) = deg(f,U,b_0) \times deg(g,V,z_0),$$
*où*
$$(f,g)(a,b) = (f(a),g(a)), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

### 2.1.3 Conséquences des propriétés

Nous allons, maintenant, déduire quelque conséquences des propriétés principales du degré topologique.

**Corollaire 2.1.15.** *(Propriété de l'excision)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N), K \subset \overline{\Omega}$ un compact et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Alors*
$$deg(f,\Omega,b) = deg(f,\Omega - K,b),$$
*ce résultat est très souvent utilisé pour montrer l'existence de solutions pour des équations non linéaire dans $\mathbb{R}^N$. En particulier si $K = \Omega$, alors*
$$deg(f,\Omega,b) = 0.$$

Pour la démonstration voir [7]

**Proposition 2.1.16.** *(Propriété d'existence)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$. Si $deg(f, \Omega, b) \neq 0$, alors l'équation*

$$f(x) = b,$$

*admet au moins une solution dans $\Omega$.*

**P*reuve*.** On démontre par l'absurde.
Supposons que $f(x) = b$, n'a admet pas de solution dans $\Omega$. Et comme $b \notin f(\partial\Omega)$, alors $b \notin f(\overline{\Omega})$, par la propriété de l'excision on a

$$deg(f, \Omega, b) = 0.$$

Ceci implique une contradiction avec

$$f(x) = b,$$

admet une solution. ■

**Proposition 2.1.17.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$, alors le degré $deg(f, \Omega, b)$ est un entier.*

**P*reuve*.** On peut prendre une fonction $f_1 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f_1, \Omega, b).$$

Soit $S$ l'ensemble des points singulier de $f_1$. Puisque $f_1(\partial\Omega)$ est compact, et que d'après le théorème de Sard $f_1(S)$ est de mesure nulle, alors que $\mathbb{R}^N / f_1(\partial\Omega)$ est un ouvert, on peut affirmer que $\mathbb{R}^N / (f_1(\partial\Omega) \cup f_1(S))$ est dense dans $\mathbb{R}^N / f_1(\partial\Omega)$, et par conséquent on peut choisir un point $b_1 \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_1(S)$, tel que $b$ et $b_1$ soient dans la même composant connexe de $\mathbb{R}^N / f_1(\partial\Omega)$. Alors, puisque le degré topologique est constant sur les composant connexe de $f_1(\partial\Omega)^c$ et d'après la stabilité par rapport au point cible on obtient

$$deg(f_1, \Omega, b) = deg(f_1, \Omega, b_1) \quad \in \mathbb{Z}.$$

Et par conséquent le degré topologique de $f$ est un entier. ■

**Corollaire 2.1.18.** *Si $H$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ et $f(\overline{\Omega}) \subset H$, alors pour tout $b \notin f(\partial\Omega)$*

$$deg(f, \Omega, b) = 0.$$

**P*reuve*.** Si $b \notin H$ alors $b \notin f(\overline{\Omega})$, donc il n'existe pas de $x$ tel que $f(x) = b$. D'où

$$deg(f, \Omega, b) = 0.$$

Si $b \in H$ on va prendre un point $b \in H$. D'après la proposition de stabilité, on obtient

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega, b') = 0.$$

■

**Proposition 2.1.19.** *Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et deux fonctions $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. On suppose que $f = g$ sur $\partial\Omega$ et que $b \notin f(\partial\Omega)$. Alors on a*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b).$$

**P*reuve*.** Il suffit d'utiliser l'invariance par homotopie du degré topologique, en considérant l'homotopie

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a que

$$deg(H(., t), \Omega, b) = deg(g, \Omega, b).$$

■

**Proposition 2.1.20.** *Le degré topologique de Brouwer vérifier aussi les propriétés suivante*

1. $\forall z \in \mathbb{R}^N : deg(f, \Omega, b) = deg(f - z, \Omega, b - z).$
2. *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue, $b \in \mathbb{R}^N$ et $r = dist(b, f(\partial\Omega)) > 0$, si $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ est continue, $z \in \mathbb{R}^N$ sont tel que*

$$\sup_{\partial\Omega}(|g - f|) + |b - z| < 0,$$

   *alors*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, z).$$

3. $deg(f, \Omega, .)$ *est constant sur les composantes connexes de* $\mathbb{R}^N / f(\partial\Omega)$.
4. $\forall z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : deg(f, \Omega, b) = deg(f(. - z), \Omega + z, b).$

**P*reuve*.** 1. On considère l'homotopie naturelle $H$ entre $(f, b)$ et $(f - z, b - z)$, définie par

$$H(t, x) = (1 - t)f(x) + t(f(x) - z) = f(x) - tz,$$

et en suppose

$$b(t) = (1-t)b + t(b-z) = b - tz,$$

et on applique l'invariance par homotopie on obtient :
Pour tout $t \in [0,1]$, il n'existe pas $x \in \partial\Omega$ tel que

$$f(x) - tz = b - tz,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = b.$$

2. Soient

$$H(t,x) = tg(x) + (1-t)f(x),$$

l'homotopie entre $f$ et $g$, et

$$b(t) = tz + (1-t)b.$$

S'il existe $t \in [0,1]$ et $x \in \partial\Omega$ tel que

$$tg(x) + (1-t)f(x) = tz + (1-t)b,$$

alors

$$|b - f(x)| \leq t|g(x) - f(x)| + t|b - z| < r,$$

(comme $|g(x) - f(x)| + |b - z| < r$) tel que $r > 0$, car on a $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ est compact, donc $f(\partial\Omega)$ est fermé, et $b \notin f(\partial\Omega)$, alors la distance est strictement positive. On applique l'invariance du degré par homotopie on obtient

$$deg(f,\Omega,b) = deg(g,\Omega,z).$$

3. D'après la proposition de translation

$$deg(f,\Omega,b) = deg(f-b,\Omega,0),$$

et comme par la normalisation l'application $b \mapsto deg(f-b,\Omega,0) \in \mathbb{Z}$ est continue, elle est localement constant, donc constant dans les composants connexes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/f(\partial\Omega)$.

4. Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est continue, $y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\partial(\Omega + z) = \partial\Omega + z,$$

alors

$$b \notin f(\partial(\Omega + z) - z),$$

donc

$$deg(f(.-z), z+\Omega, b),$$

est définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $\Omega_s$ un ouvert inclus dans $\Omega$ tel que

$$\Omega_s = \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > s\},$$

comme $b \notin f(\partial\Omega)$, il existe $s$ positive tel que

$$b \notin f(\overline{\Omega}/\Omega_s),$$

et par la propriété de l'additivité du degré topologique avec les ouverts $\Omega_s$ et $\emptyset$ disjoints inclus dans $\Omega$, et puisque $deg(f, \emptyset, b) = 0$, on en déduit que

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega_s, b) \tag{2.3}$$

D'autre part, on prend $z \in B(0, s)$, et on a $\Omega_s \subset z + \Omega$ et $b \notin f(\overline{z+\Omega}/(\Omega_s) - z)$ car

$$\overline{z+\Omega}/\Omega_s - z = (\overline{\Omega}/\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega}/\Omega_{2s} \text{ et } b \notin f(\overline{\Omega})$$

d'après l'additivité du degré on a

$$deg(f(.-z), z+\Omega, b) = deg(f.-z, \Omega_s, b) \text{ pour } |z| < 2s. \tag{2.4}$$

Finalement, on fixe $z \in B(0, s)$ et considérerons l'homotopie entre $f$ et $f(.-z)$ définie par

$$H(t, x) = f(x - tz) \text{ sur } \overline{\Omega}_s,$$

comme $\Omega_s - tz \subset \overline{\Omega}$, alors $H$ est bien définie pour tout $t \in [0, 1]$, et pour tout $x \in \partial\Omega_s$, on a

$$dist(x, \partial\Omega) = s,$$

donc

$$dist(x - tz, \partial\Omega) \leq dist(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s,$$

d'où on en déduit que

$$x - tz \in \overline{\Omega}/\Omega_{2s},$$

et

$$b \neq f(x - tz),$$

c'est-à-dire

$$b \notin H(t, \partial\Omega_s),$$

pour tout $t \in [0,1]$, l'invariance par homotopie implique que

$$deg(f, \Omega_s, b) = deg(f. - z, \Omega_s, b),$$

ceci pour tout $z \in B(0,s)$, ce qui permet de conclure grâce (2.3) et (2.4).

■

### 2.1.4 Unicité du degré de Brouwer

Pour démontrer l'unicité du degré, il suffit de déterminer le degré sur les application linéaire avec $b = 0$.
Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}^N / f(C_f)$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N \subset C^\infty(\overline{\Omega})^N$.
Pour démontrer l'unicité du degré, il suffit de déterminer le degré sur les applications linéaires avec $b = 0$.
Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^N / f(C_k)$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N \subset C^\infty(\overline{\Omega})^N$.
Si on prend $x$ un antécédente de $b$ par $f$ qui est une valeur régulière de $f$, alors $x$ est forcément dans $\Omega$ (et non pas sur $\partial\Omega$) et $f'(x)$ est inversible, donc d'après le théorème d'inversion local $f$ est difféomorphisme local d'un voisinage de $x$ sur un voisinage de $b$. $f$ est injective au voisinage de $x$, donc il ne peut existe d'autre antécédent de $b$.
Si on suppose $\delta$ assez petit, alors les boules centrés sur les antécédents de $b$ et de rayon $\delta$ sont deux à deux disjoints. Comme $b$ n'a pas d'antécédent par $f$ en dehors de ces boules, donc d'après les propriétés (1) et (4) de la proposition 2.1.20, et pour $z$ un antécédente de $b$ on a

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, b) &= \sum_{z \in f^{-1}(b)} deg(f, B(z,\delta), b) \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(b)} deg(f - b, B(z,\delta), 0) \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(b)} deg(f(z + .) - b, B(0,\delta), 0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour tout $\delta$ assez petit.
Comme $f'$ est uniformément continue sur $\Omega$, donc le théorème des accroissement finis nous donne

$$\begin{aligned} |f(x+z) - b - f'(z)x| &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'(z + tx) - f'(z)\| |x| \\ &\leq w(|x|)|x|, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\|.\|$ la norme d'endomorphisme induite par $|.|$ et $w(r) \to 0$ lorsque r tend vers 0 .
Considérons maintenant l'homotopie $H$ entre $f'(z)x$ et $f(z+x) - b$ définie par

$$H(t,x) = t(f(z+x) - b) + (1-t)f'(z)x,$$

et prenons $\delta > 0$, s'il existe $x \in \partial B(0,\delta)$ et $t \in [0,1]$ tel que $H(t,x) = 0$, alors

$$t(f(z+x) - b) - f'(z)x = -f'(z)x.$$

d'après (2.6) on a

$$|f'(z)x| \leq w(\delta)\delta.$$

Mais comme $f'$ est inversible, on peut trouver $C_z > 0$ indépendant de $\delta$ et $x$ tel que $|f'(z)x| \geq C_z|x| = C_z\delta \Rightarrow C_z \geq w(\delta)$. Ce qui n'est pas possible lorsque $\delta$ est assez petit, donc on peut appliquer l'invariance par homotopie du degré pour trouver

$$deg(f, \Omega, b) = \sum_{z \in f^{-1}(b)} deg(f'(z) - b, B(0, \delta), 0). \tag{2.7}$$

La seule solution de $f'(z)x = 0$ est $x = 0$ (car $f'$ est inversible), alors par l'additivité du degré cette formule est valable pour tout $\delta > 0$.
Finalement (2.7) prouve que le degré est déterminé par les valeurs qu'il prend sur les applications linéaires continues.

## 2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Nous allons maintenant présenter un degré ayant le même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est-à-dire un outil qui permette d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = b$, où $f$ est continue d'un Banach $E$ dans lui-même, a au moins une solution $x$.
Soient $l^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable, et $K$ la boule unité fermée de $l^2(\mathbb{N})$. On désigne par $|x|$ la norme de $x$

$$|x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

Si $x \in K$ on définit $Tx$ par

$$Tx = (\sqrt{1 - |x|^2}, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ...).$$

Il est clair que $T$ est continue, et que $Tx \in K$ et que plus précisément $|Tx| = 1$.
$T$ ne possède aucun point fixe dans $K$,
En effet : Si $Tx = x$ revient à dire

$$x_{n+1} = x_n,$$

et

$$x_0 = \sqrt{1 - |x|^2},$$

or

$$|x| = |Tx| = 1,$$

implique que $x_0 = 0$, d'où $x = 0$ ce qui contredit $|x| = 1$.
Donc en dimension infinie, et pour des applications continues d'un Banach $E$ dans lui-même, il existe plusieurs degré en dimension infinie qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique, l'une des degré appelé degré de Leray-Schauder qui est construit sur les applications qui différent de l'identité par une application compacte.
On va définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité du type $I - T$ où $T$ est compact et $I$ désigne l'application identité de $X$.

### 2.2.1 Construction du degré

**Lemme 2.2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $A$ un fermé de $F$. Si $T : A \to E$ est compact et si $X$ est un fermé borné dans $A$, alors $(I - T)(X)$ est fermé.*

***Preuve.*** Soit $b_n = x_n - T(x_n)$ une suite de $(I - T)(X)$ qui converge vers un $b$, comme $(x_n)_{n\geq 1} \in X$ est borné on peut extraire de $(T(x_n))_{n\geq 1}$ une suite qui converge, donc

$$x_n = b_n + T(x_n),$$

converge elle-même vers un $x \in X$ ($X$ est fermé) et, par continuité

$$b = x - T(x) \in (I - T)(X).$$

■

**Lemme 2.2.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $X$, Si $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a*

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

***Preuve.*** On démontre par l'absurde c'est à dire il existe une suite $(u_n)_n$ de $\partial\Omega$ telle que

$$u_n - Tu_n \to 0.$$

$T$ étant compact et $\overline{\Omega}$ borné, on pourrait trouver une sous suite $(Tu_{ni})_i$ et $b \in X$ tels que

$$Tu_{ni} \to b \quad lorsque \quad i \to +\infty.$$

donc

$$u_{ni} \to b,$$

$T$ étant continue et par conséquent, on a

$$b - Tb = 0,$$

ce qui montre que $T$ à un point fixe $b$ et Comme $b \in \partial\Omega$, cela contredit notre hypothèse sur $T$. ■

**Lemme 2.2.3.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $X$. Si $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que*

$$\|u - Tu\| \geq 4\epsilon \text{ pour tout } u \in \partial\Omega,$$

*il existe un sous espace vectoriel de dimension finie $E_\varepsilon$ de $X$ et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ tels que*

$$\forall u \in \overline{\Omega}, \|T_\varepsilon u - Tu\| \leq \varepsilon,$$

*et*

$$\forall u \in \partial\Omega, \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon.$$

***Preuve.*** On a d'après le lemme précèdent que

$$\forall u \in \partial\Omega, \|u - Tu\| \geq 4\varepsilon.$$

Comme $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans $X$, il existe des points $(x_i)_{i\leq n}$ dans $T(\overline{\Omega})$ tels que

$$T(\overline{\Omega}) \subset \cup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons pour

$$x \in X, \lambda_i(x) = (\varepsilon - \|x - x_i\|),$$

puis pour $x \in T(\overline{\Omega})$

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i(x)}.$$

En fin en introduisant l'espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\leq n}$ c'est-à-dire l'espace $E_\varepsilon = \mathbb{R}\{x_1, ..., x_n\}$ et pour $u \in \overline{\Omega}$, l'application continue $T_\varepsilon$ définie de $\overline{\Omega} \to x$ par

$$T_\varepsilon(u) = g_\varepsilon(Tu),$$

pour tout $x \in T(\overline{\Omega})$, on a

$$\lambda_i(x)\|x - x_i\| \leq \lambda_i(x)\varepsilon,$$

on en déduit que $\|x - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$. Cela implique que si $u \in \overline{\Omega}$, alors

$$\|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon.$$

D'autre part si $u \in \partial\Omega$ on a

$$\begin{aligned}\|u - T_\varepsilon u\| &= \|u - Tu + Tu - T_\varepsilon u\| \\ &\geq \|u - Tu\| + \|Tu - T_\varepsilon u\| \\ &\geq 3\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Ce qui montre le lemme ■

**Lemme 2.2.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $X$. Si $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que*

$$\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon \quad \forall u \in \partial\Omega.$$

*On suppose que $T_{1\varepsilon} - T_{2\varepsilon}$ sont deux approximation de $T$, telles que pour $i = 1, 2$ on ait $T_{i\varepsilon} \subset E_\varepsilon$, où $E_\varepsilon$ est un sous espace de dimension finie de $X$, et de plus,*

$$\|T_{i\varepsilon}u - Tu\| \leq \varepsilon, \quad \forall u \in \Omega,$$

*et*

$$\|u - T_{i\varepsilon}u\| \geq 3\varepsilon, \quad \forall u \in \partial\Omega.$$

*Alors si $F$ est un sous espace vectoriel de dimension finie de $X$ contenant $E_\varepsilon$ tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$, on a*

$$deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

***Preuve*.** Soient $\partial\Omega_F = \partial\Omega \cap F$ le bord de $\Omega_F$. Comme $T_{i\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$ donc le degré topologique est bien définie en 0 de l'opérateur $I - T_{i\varepsilon}$.
Pour $t \in [0, 1]$, on considère l'homotopie

$$H(u, t) = tT_{1\varepsilon}(u) + (1 - t)T_{2\varepsilon}(u).$$

D'une part et on retranche la quantité $(1 - t)T(u)$ on obtient que pour tout $t \in [0, 1]$, $u \in \overline{\Omega}$ et en particulier pour $u \in \Omega_F$

$$\|H(u, t) - Tu\| \leq \varepsilon,$$

et d'autre part pour $u \in \partial\Omega$ en ajoutant et retranchant la quantité $T(u)$ on trouve

$$\begin{aligned} \|u - H(u, t) - Tu + tu\| &= \|u - tT_{1\varepsilon}(u) + (1 - t)T_{2\varepsilon} - Tu + Tu\| \\ &\geq \|u - Tu\| + t\|T_{1\varepsilon} - T_{2\varepsilon}\| - \|Tu - T_{2\varepsilon}\| \end{aligned}$$

alors

$$\|u - H(u, t)\| \geq 3\varepsilon.$$

Par conséquence $H \in C(\Omega_F \times [0, 1], F)$ est une homotopie admissible. En appliquant la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique de Brouwer, on obtient

$$deg(I - H(., 0), \Omega_F, 0) = deg(I - H(., 1), \Omega_F, 0),$$

d'où

$$deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0) = deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

■

**Lemme 2.2.5.** *Soient $E_n, E_p$ deux sous espaces de dimension finie et $\omega \subset E_n \times E_p$ un ouvert borné. On identifie $E_n \times \{0\}$ à $E_n$ et on suppose que*

$$\omega_n = \omega \cap (E_n \times \{0\}) \neq \emptyset.$$

*Soient $\varphi \in C(\overline{\omega}, E_n)$ et $f(x,y) = (x - \varphi(x,y), y)$ pour $(x,y) \in E_n \times E_p$. On suppose que pour tout $x$ tel que $(x,0) \in \partial\omega$, on a*

$$\varphi(x,0) \neq (x,0),$$

*et on considère la fonction $f_0 = x - \varphi(x,0)$ définie sur $\overline{\omega}_n$. Alors en notant $deg_n, deg_{n+p}$ les degrés topologiques dans $E_n$ et $E_{n+p} = E_n \times E_p$ respectivement on a*

$$deg_{n+p}(f, \omega, 0) = deg_n(f_0, \omega, 0).$$

Pour la démonstration voir [15]

**Proposition et Définition 2.2.6.** *(Du degré de Leray-Schauder)*
*Soient $X$ un espace de Banach, $\Omega$ un ouvert borné de $X$, $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors pour $\varepsilon > 0$ et $E_\varepsilon, T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme 2.2.3. On considère $F$ un sous espace vectoriel de dimension finie contenant $E_\varepsilon$ et tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$. On définit le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

*Cette définition ne dépend pas que de $T$ et de $\Omega$. Si $b \in X$ est tel que $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$ le degré de $I - T$ dans $\Omega$ par rapport à $b$ est défini comme suit*

$$deg(I - T, \Omega, b) = deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

**P*reuve*.** De ce qui précèdent depuis les propriétés de $E_\varepsilon$ et de $T_\varepsilon$ on a

$$\forall u \in \overline{\Omega}, \|Tu - T_\varepsilon u\| \leq \varepsilon,$$

et

$$\forall u \in \partial\Omega, \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon.$$

Et par conséquent si $\Omega_F \neq \emptyset$, d'après le lemme 2.2.4 de degré

$$deg(I_F - T_F, \Omega, 0_F),$$

est bien Défini. Afin de montrer que ce degré ne dépend que de $\Omega$ et de $T$, on va considérer deux familles pour $i = 1, 2,\ \varepsilon_i > 0, E_{i\varepsilon_i}, T_{i\varepsilon_i}$ et $F_i$ comme ci dessus et on va montrer que le degré est le même. Pour cela il suffit d'appliqué le lemme 2.2.5 dans un espace de dimension finie contenant $F_1$ et $F_2$. Soient

$$F = F_1 \oplus F_2, \quad \Omega_F = \Omega \cap F.$$

Alors on désigne par $deg_F$ le degré topologique de Brouwer dans $F$, on sait d'après le lemme 2.2.3 on a

$$deg_F(I_F - T_{1\varepsilon_1}, \Omega_F, 0_F) = deg_F(I_F - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_F, 0_F).$$

Par ailleurs par le lemme 2.2.4 affirme que pour $i = 1, 2$ on a

$$deg_F(I_F - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_F, 0_F) = deg_{F_i}(I_{F_i} - T_{i\varepsilon_i}, \Omega_{F_i}, 0_{F_i}).$$

Maintenant en combinant $i = 1$ et $i = 2$ on obtient que

$$deg_{F_1}(I_{F_1} - T_{1\varepsilon_1}, \Omega_{F_1}, 0_{F_1}) = deg_{F_2}(I_{F_2} - T_{2\varepsilon_2}, \Omega_{F_2}, 0_{F_2}).$$

On remarque que si $T$ est compact et $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$, l'application $u \mapsto b + Tu$ est aussi compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. ■

### 2.2.2 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Nous énonçons les propriétés les plus importants du degré topologique de Leray-Schauder. Supposons que $X$ est un espace de Banach, $\Omega$ un ouvert borné de $X$ et $T : \Omega \to X$ un opérateur compact.

**Proposition 2.2.7.** *(La continuité par rapport à b)*
*Soient $b, b' \in X$ tels que $b, b' \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Alors si $b, b'$ appartiennent à la même composante connexe de $X/(I - T)(\partial\Omega)$, on a*

$$deg(I - T, \Omega, b) = deg(I - T, \Omega, b').$$

**Proposition 2.2.8.** *(La continuité par rapport à l'opérateur)*
*Soient $T_1, T_2$ des applications compacts de $\overline{\Omega}$ dans $X$ et $b \in X$ tel que*

$$dist(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) = 4\varepsilon > 0,$$

*alors si $\sup_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon$ on a*

$$deg(I - T_1, \Omega, b) = deg(I - T_2, \Omega, b).$$

**Proposition 2.2.9.** *(Normalisation)*
*Si $\Omega$ un ouvert borné de $E$ et $b \in \Omega$, alors*

$$deg(I, \Omega, b) = 1,$$

*sinon*

$$deg(I, \Omega, b) = 0.$$

**P*reuve*.** on prendre $T = 0$ et $b$ soient contenus dans l'espace unidimensionnel $\mathbb{R}$ donc

$$deg(I, \Omega, b) = deg(I, \Omega \cap \mathbb{R}, b).$$

■

**Proposition 2.2.10.** *(Additivité)*
*Si $\Omega_1, \Omega_2$ sont deux ouverts bornés disjoints et $T : \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \to X$ est un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors*

$$deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0). \tag{2.8}$$

**P*reuve*.** la relation (2,8) adapte directement de la définition et de l'addition de Brouwer.

■

**Corollaire 2.2.11.** *(L'invariance par homotopie)*
*Soient $b \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to X$ une application compacte, telle que $\forall (u, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ on ait $u - H(u, t) \neq b$. Alors le degré $deg(I - H(., 1), \Omega, b)$ est constant pour $t \in [0, 1]$*

$$deg(I - H(., t), \Omega, b) = deg(I - H(., 0), \Omega, b).$$

**P*reuve*.** Soit $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to E$ est une homotopie compact telle que $0 \notin (I - H(., t))(\partial\Omega)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et comme $[0, 1]$ est un compact, par l'absurde on conclut que

$$r = \inf_{t \in [0,1]} dist(0, (I - H(., t))(\partial\Omega)) \text{ est strictement positif.}$$

On prend l'homotopie

$$\tilde{H} : \overline{D(\Omega)} \times [0, 1] \to E,$$

de rang fini et à distance de $H$ strictement inférieure à $r$, donc si $F$ est un espace de dimension finie qui contient l'image de $\tilde{H}$, pour tout $t \in [0, 1]$ on a par définition

$$\begin{aligned} deg(I - \tilde{H}(., t), \Omega, 0) &= deg_F(I - \tilde{H}(., t)_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, 0) \\ &= deg_F(I - \tilde{H}(., t)_{\overline{\Omega \cap F}}, \overline{\Omega \cap F}, 1) \\ &= deg((I - \tilde{H}(., t)), \Omega, 1). \end{aligned}$$

Donc l'invariance par homotopie de $deg_F$. ■

**Proposition 2.2.12.** *(Invariance du degré par translation)*
*Si $b \in X$ tel que $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I-T$ dans $\Omega$ par rapport à la cible $b$ est défini comme étant*

$$deg(I-T,\Omega,b) = deg(I-T-b,\Omega,0).$$

**Proposition 2.2.13.** *(Multiplication du degré)*
*Soient $E_1, E_2$ deux espaces de Banach, $\Omega_1 \subset E_1, \Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts bornés et $T_1 : \overline{\Omega_1} \to E_1, T_2 : \overline{\Omega_2} \to E_2$ deux opérateurs compacts, posons $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2) = I-T := \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_2} \to E_1 \times E_2$ où $T = (T_1,T_2)$. Soit*

$$deg(\Phi,\Omega_1,b_1) = deg(\Phi,\Omega_2,b_2).$$

### 2.2.3 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Soit $\Omega$ un ouvert borné d'un espace de Banach $X$, et $F : \Omega \to X$ une application compact, alors l'une des propriétés est satisfaits

1. $F$ admet un point fixe dans $\Omega$.

2. Il existe $x \in \partial\Omega$ et il existe $t \in [0.1]$ tel que $x = tF(x)$.

***Preuve***. Si la condition (2) n'est pas satisfaite, l'assertion a lieu

$$\forall x \in \partial\Omega \; telque \; (I-tF)(x) \neq 0.$$

Le degré $deg(I-tF,\Omega,0)$ est bien défini et par homotopie on a

$$deg(I-F,\Omega,0) = deg(I,\Omega,0) = 1,$$

de plus

$$\exists x \in \Omega \text{ tel que } x - F(x) = 0.$$

Donc $F$ admet un point fixe. ■

**Exemple 2.2.14.** *Soit $B$ une boule ouvert dans un espace de Banach $X$ et $K : \overline{B} \to X$ une application compact vérifiant la condition d'Altmann suivante*

$$\|x-Kx\|^2 \geq \|Kx\|^2 - \|x\|^2, \forall x \in \partial B.$$

*Maintenant on va montrer que $K$ admet un point fixe dans $\overline{B}$. Alors par l'absurde, supposons l'existence d'un couple $(t,x) \in [0,1] \times \partial B$ tel que $x = tK(x)$ on peut supposons $t \neq 1$ car autrement le résultat est prouvé, alors on a*

$$x - K(x) = (t-1)K(x) \; et \; \|Kx\|^2 - \|x\|^2 = (1-t^2)\|Kx\|^2.$$

*La condition d'Altmann donne alors*

$$(1-t^2) \geq 1-t^2 \iff t \geq 1,$$

*ce qui est absurde. Par conséquent,* $\forall t \in [0,1]$ *et* $\forall x \in \partial B, tK(x) \neq x$, *le degré* $deg(I-tK, B, 0)$ *est bien défini et vaut par Homotopie 1, donc l'équation* $(I-K)(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* $B$, *sinon sur la frontière, d'où le résultat.*

### 2.2.4 Conséquence des propriétés

Nous allons, maintenant, déduire quelques conséquences des propriétés fondamentales du degré topologique.

**Corollaire 2.2.15.** *(Propriété de l'existence)*
*Si* $b \in X$ *tel que pour tout* $u \in \partial\Omega$ *on a*

$$u - Tu \neq b,$$

*et*

$$deg(I-T, \Omega, b) \neq 0,$$

*alors il existe* $u \in \Omega$ *tel que*

$$u - Tu = b.$$

**Proposition 2.2.16.** *Si* $b \in X$ *est tel que pour tout* $u \in \overline{\Omega}$ *on a*

$$u - Tu \neq b,$$

*alors*

$$deg(I-T, \Omega, b) = 0.$$

**Proposition 2.2.17.** *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifier aussi les propriétés suivantes*

1. *Pour tout* $z \in E, deg(I-f, \Omega, b) = deg(I-f-z, \Omega, b-z)$.
2. *Soit* $\Omega$ *un ouvert borné de* $E, b \in E$ *et* $b \notin (I-f)(\partial\Omega)$ *et* $r = dist(b, (I-f)(\partial\Omega)) > 0$. *Si* $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *est compacte et* $z \in \mathbb{R}^N$ *sont tels que* $\sup_{\partial\Omega}(\|g-f\|)+\|b-z\| < r$, *alors*

$$deg(I-f, \Omega, b) = deg(I-g, \Omega, z).$$

3. $deg(I-f, \Omega, .)$ *est constant sur les composantes connexe de* $E/(I-f)(\partial\Omega)$.

*4. Pour tout $z \in E, deg(I - f, \Omega, b) = deg((I - f)(. - z), z + \Omega, b)$.*

**P*reuve*.** On vue que cette proposition est similaire à la proposition (2.1.20) donc, il suffit de vérifier que les homotopies que l'on a utilisées dans la preuve de la proposition (2.1.20) sont des perturbations compactes d'identité, lorsque les fonctions considérées sont elle-même des perturbations compactes d'identité.
Mais on a deux points ne prend pas comme dans la dimension finie qui lié à la compacité de $\overline{\Omega}$, et qui sont :

1. $f(\partial\Omega)$ est fermé (tout points qui n'est pas dans $f(\partial\Omega)$ est à distance strictement positive de cet ensemble) ce qui revient à dire que $(I - f)(\partial\Omega)$ est fermé, c'est une conséquence du lemme 2.2.1.
2. $y \notin f(\overline{\Omega}/\Omega_{2s})$ Pour $s$ assez petit, dans notre cas : $y \notin (I - f)/(\overline{\Omega}/\Omega_{2s})$ pour $s$ assez petit, on prouve par l'absurde, exactement comme dans la preuve de la proposition (2.1.20) en utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 2.2.1.

■

# Chapitre 3

# Quelques applications de degrés topologiques

## 3.1 Théorèmes de point fixe

**Théorème 3.1.1.** *(Point fixe de Brouwer)*
*Soit $\overline{B}$ la boule unité fermé de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ est continue. Alors $f$ a un point fixe c'est-à-dire il existe $x \in \overline{B}$ tel que*

$$f(x) = x.$$

**Théorème 3.1.2.** *(Point fixe de Schauder)*
*Soit $\overline{B}$ la boule unité fermé d'un Banach et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ compact. Alors $f$ a un point fixe c'est-à-dire il existe $x \in \overline{B}$ tel que*

$$f(x) = x.$$

**P*reuve*.** Supposons que pour tout $x \in \partial B$ on a

$$f(x) \neq x,$$

c'est-à-dire $f$ n'a pas de point fixe sur le bord $\partial B$. On a $B(0,1)$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$(ou $E$ dans le cadre du théorème de Schauder) et l'application

$$I - f : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1),$$

est continue (ou compacte dans le cadre du théorème de Schauder) tel que $0 \notin (I-f)(\partial B)$ donc on peut montrer que $I - f$ admet des solutions ou non dans $B(0,1)$, on considère l'homotopie

$$\begin{aligned} H : [0,1] \times \overline{B} &\to \overline{B} \\ (t,x) &\mapsto tf(x), \end{aligned}$$

s'il existe un $x \in \partial B$ et un $t \in [0,1]$ tel que

$$x - H(t,x) = 0,$$

alors

$$tf(x) = x.$$

Comme $x \in \partial B$, donc $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$ d'où $t = 1$, et par conséquent $x = f(x)$. ce qui montre l'existence d'un point fixe sur $\partial B(0,1)$. De plus, en utilisant les propriétés du degré de Brouwer ou de Leray Schauder notamment la normalisation et l'invariance par homotopie, on obtient

$$deg(I - f, B(0,1), 0) = deg(I, B(0,1), 0) - deg(f, B(0,1), 0),$$

et on a

$$deg(H(1,.), B(0,1), 0) = deg(H(0,.), B(0,1), 0),$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$deg(f, B(0,1), 0) = deg(0, B(0,1), 0) = 0,$$

donc

$$deg(I - f, B(0,1), 0) = 1.$$

et par conséquent $I - f$ admet au moins une solution dans $B(0,1)$. ■

**Remarque 3.1.3.** *Le théorème de Brouwer est un cas particulier du théorème de Schauder, puisque toute application continue est compact en dimension finie.*

## 3.2 Surjectivité des fonctions

**Proposition 3.2.1.** *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que $\frac{f(x)x}{|x|} \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$. Alors $f$ est surjective sur $\mathbb{R}^N$.*

**P*reuve*.** Soit $b \in \mathbb{R}^N$ et $H$ l'homotopie naturelle entre $f$ et $I$ définie par

$$H(t,x) = tf(x) + (1-t)x.$$

Nous allons montrer que, pour $R > |b|$ assez grand et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$H(t, x) = b,$$

n'a pas de solution sur le bord $\partial B(0, R)$, ce qui permet de voir, grâce à l'invariance par homotopie que

$$deg(H(0, .), B(0, R), b) = deg(H(1, .), B(0, R), b),$$

c'est-à-dire

$$deg((x, B(0, R), b) = deg(f, B(0, R), b),$$

d'où

$$deg(I, B(0, R), b) = deg(f, B(0, R), b).$$

Et d'après à la normalisation du degré on obtient

$$deg(f, B(0, R), b) = deg(I, B(0, R), b) = 1,$$

d'où l'existence d'une solution $x \in B(0, R)$ tel que $f(x) = b$.
Soit $x \in \partial B(0, R)$ et $t \in [0, 1]$ tel que $H(t, x) = b$, on a

$$x.b = x.H(t, x) = tx.f(x) + (1 - t)|x|^2,$$

ce qui donne

$$|b| \geq \left( t\frac{f(x).x}{|x|} + (1 - t)|x| \right) = \left( t\frac{f(x).x}{|x|} + (1 - t)R \right).$$

Pour $R > |b| + 1$ assez grand de sorte que

$$\frac{f(x).x}{|x|} > |b| + 1,$$

et si $|x| \geq R$ on déduit que

$$|b| \geq t(|b| + 1) + (1 - t)(|b| + 1) = |b| + 1,$$

ce qui est une contradiction avec le choix de $R$, donc $H(t, x) = b$ ne peut avoir de solution $x \in \partial B(0, R)$. ■

**Proposition 3.2.2.** *(De Borsuk)*
*Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, symétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire. On désigne par $S$ l'ensemble des points singulier de $f$ et on suppose que $0 \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$, alors*

1. *Si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est un entier impaire.*

*2. Si* $0 \notin \overline{\Omega}$, *le degré* $deg(f, \Omega, 0)$ *est un entier pair.*

**P*reuve*.** Rappelons que $f$ étant impaire on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.
• Si $0 \notin \overline{\Omega}$, et si $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, la propriété d'existence montre que $deg(f, \Omega, 0)$ est nul. Si $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, on a $f^{-1}(\{0\}) = \{x_i, -x_i; i = \{1, ..., m\}\}$, pour certains $x_i \in \mathbb{N}$. D'après la définition 2.1.6 du degré topologique de Brouwer on obtient

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, 0) &= \sum_{i=1}^{m} [sgn(J_f(x_i)) + sgn(J_f(-x_i))] \\ &= 2 \sum_{i=1}^{m} sgn(J_f(x_i)), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.
• Si $0 \in \Omega$, alors on a deux cas : $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ou bien
$f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \cup \{x_i, -x_i; \{i = 1, ..., m\}\}$, pour des $x_i \in \Omega$ et $x_i \neq 0$. Dans le premier cas on a

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, b) = sgn(J_f(0)) + &\sum_{x \in f^{-1}(\{0\}), x \neq 0} sgn(J_f(x)) \\ &\pm 1 + \sum_{i=1}^{m} [sgn(J_f(x_i)) + sgn(J_f(-x_i))] \\ &= \pm 1 + 2 \sum_{i=1}^{m} sgn(J_f(x_i)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que dans les deux cas le degré est un entier impaire. ∎

## 3.3 Résolution d'EDO

**Théorème 3.3.1.** *(De Cauchy-Peano en dimension infinie)*
*Soit* $E$ *un espace de Banach et* $f : \mathbb{R} \times E \to E$ *compact. Considérons ici l'équation différentielle suivante*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I, \\ x(0) = a. \end{cases} \tag{3.1}$$

*Alors pour tout* $a \in E$, *il existe* $T > 0$ *tel que (3.1) a au moins une solution sur l'intervalle* $I = [-T, T]$.

**Remarque 3.3.2.** *Le champ* $f$ *et la condition initial* $a$ *sont donnés, mais d'une part on ne suppose pas que* $f$ *est lipschitzienne par rapport à* $x$ *(sinon on applique le théorème* *de Cauchy-Lipschitz), et d'autre par l'espace dans lequel on travail n'est pas forcément de dimension finie. Pour établir Cauchy-Peano en dimension infinie il faut donc ajouter des conditions.*

Avant de démontrer le théorème, on a besoin du théorème d'Arzelà-Ascoli suivant.

**Théorème 3.3.3.** *Soit $(K, d)$ un espace métrique compact, $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $A \subset C(K, E)$, alors $A$ est relativement compact dans $(C(K, E), \|.\|_{\infty,k})$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites*

1. *$A$ est équicontinue, c'est-à-dire, pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \subset K$ de $x$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \quad \forall y \in V, \forall f \in A.$$

2. *$A$ est uniformément borné, c'est-à-dire*

$$A(x) = \{f(x), f \in A\}$$

*est relativement compact dans $E$.*

**P*reuve*.** Voir [24] ■

**P*reuve*.** (Du théorème de Cauchy-Peano)
On adapte la formulation intégrale du problème (3,1), on cherche $T > 0$ et $x \in C([-T, T], E)$ qui vérifie, pour tout $t \in [-T, T]$

$$x(t) = a + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

L'intégrale qui apparaisse dans cette équation est à valeurs dans un Banach.
Soit $\Phi_T : C([-T, T], E) \to C([-T, T], E)$ telle que

$$\Phi_T = \int_0^t f(s, x(s))ds,$$

il suffit de montrer qu'il existe $T > 0$ tel que $\Phi_T$ a un point fixe. Remarquons tout d'abord que $\Phi_T$ est continue.
En effet : Si $x_n \to x$ dans $C([-T, T], E)$, alors

$$\{x_n(t); n \geq 1, t \in [-T, T]\},$$

est borné par $M$, et la fonction compacte $f$ qui envoie $[-T, T] \times \overline{B}(0, M)$ sur un ensemble borné de $E$, d'autre part on a

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x)(t)\| \leq \int_{-T}^{T} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|ds.$$

$f$ est continue, donc

$$\|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \to 0, \text{ lorsque n tend vers } +\infty,$$

d'après le théorème de convergence dominé, on trouve que

$$\Phi_T(x_n) \to \Phi_T(x) \ dans \ C([-T,T],E).$$

Il faut ensuite prouver que $\Phi_T$ envoie les bornés de $C([-T,T],E)$ sur les ensembles relativement compacts dans cet espace. pour cela On va appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite borné dans $C([-T,T],E)$, donc on a

$$\|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')\| \leq \int_{t'}^{t} \|f(s,x_n(s))\|ds.$$

notons par

$$Y = \{f(s,x_n(s)); n \geq 1, s \in [-T,T]\},$$

alors d'après ce qui précède $Y$ est borné par $k$, ce qui montre que

$$\|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')\| \leq k|t-t'|,$$

donc l'équicontinuité de $\{\Phi_T(x_n), n \geq 1\}$.
D'autre part, d'après la compacité de $f$, $Y$ est relativement compact dans $E$, cela permet de dire que l'enveloppe convexe $co(Y)$ de $Y$ est aussi relativement compacte dans $E$, et on a pour tout $n \geq 1$ et $s \in [-T,T]$ :

$$f(s,x_n(s)) \in Y,$$

il donc

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(s,x_n(s))ds \ \in \overline{co(Y)}.$$

Ainsi

$$\int_0^t f(s,x_n(s))ds \ \in t\overline{co(Y)},$$

qui est compact.
Ce qui montre que $(\Phi_T(x_n)(t))_{n\geq 1}$, reste dans un compact de $E$, d'où on conclut que $\Phi_T$ transforme les bornés de $C([-T,T],E)$ sur des ensembles relativement compacts.
La démonstration du théorème de Cauchy-Peano via le théorème de point fixe de Leray-Schauder est dépend du choix de $T$ et $R$ tel que $\Phi_T$ transforme $\overline{B}(0,R)$ dans elle même.

En effet : si on prend $R = \|a\| + 1$ et $M$ un majorant de $f$ sur $[-1, 1] \times \overline{B}(0, R)$, alors on a si $T \leq 1$ et $x \in C([-T, T], E)$ est bornée par $R$

$$\begin{aligned} \sup \|\Phi_T(x)\| &\leq \|a\| + \int_{-T}^{T} \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq \|a\| + 2TM, \end{aligned}$$

et il suffit de prendre $T < \inf(1, \frac{1}{2M})$ pour que $\Phi_T(x)$ reste borné par $R$ sur $[-T, T]$. ■

## 3.4 Résolution d'EDP

### 3.4.1 Equation linéaire modèle

Nous allons considère des équations basées sur l'équation linéaire modèle

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^2(\Omega)$. La solution est prise au sens faible trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv.$$

L'inégalité de point carré permet de voir que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Et d'après le théorème de Riesz on déduit qu'il existe bien une unique solution de (3.2) au sens faible. D'autre part, on peut voir que cette solution est continue par rapport à $f$, si $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$, alors $u_n$ la solution correspondant à $f_n$, converge vers $u$ dans $H_0^1(\Omega)$.
D'après le théorème d'injection de Sobolev et de Rellich on obtient que
pour tout $p < \frac{2N}{N-2}$, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continue-ment et compacte-ment dans $L^p(\Omega)$.

### 3.4.2 Equation linéaire non-coercive

On considère le problème suivante

$$\begin{cases} -\Delta u + div(Vu) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $V \in (L^\infty(\Omega))^N$.
En effet : On prend l'espace

$$H = \{v \in (H_0^1(\Omega))^N, divv = 0 \quad dans \quad \Omega\},$$

et on a

$$div(Vu) = divVu + V.\nabla u,$$

en multipliant les deux membres de la première équation de (3.3) par une fonction test $v \in H$ et en intégrant par rapport à $\Omega$, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega div(Vu).v \, dx + \int_\Omega (V.\nabla u).v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

par l'utilisation de la formule de Green on trouve

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega (V.\nabla u).v \, dx = \int_\Omega fv \, dx,$$

donc la formulation variationnelle est trouver $u \in H$ solution de

$$a(u,v) = L(v)$$

telle que

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega (V.\nabla u).v \, dx, \\ L(v) = \int_\Omega fv \, dx. \end{cases}$$

$a(.,.)$ est n'est pas coercive(c'est-à-dire, $a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1}$ pour $\alpha > 0$, n'est pas valable), donc le théorème de Lax-Milgram ne peut pas s'appliquer. Pour traiter ce cas (non-coercive) on va voir le problème variationnelle précédent comme une perturbation du cas classique où $V = 0$ et on va essayer d'appliquer la méthode du degré topologique pour déduire l'existence d'une solution.

**Théorème 3.4.1.** *(D'existence et d'unicité)*
*Sous les hypothèses précédentes, le problème (3.3) admet une solution unique.*

Pour la démonstration on a besoin du théorème suivante.

**Théorème 3.4.2.** *(Principe de maximum)*
*Sous les hypothèses précédentes, si $f = 0$, alors la seule solution du problème (3.3) est $u = 0$.*

**Théorème 3.4.3.** *Par le principe du maximum on obtient facilement que si la solution existe, elle est unique.*

***Preuve.*** (Du théorème 3.4.1)
Pour $w \in L^2(\omega)$, fixé on définit $u$ comme la solution unique du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f - div(Vw) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

et on note $u = F(w)$, $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est un opérateur continue et compact. En effet :
• $F$ est continue car si $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, alors

$$div(Vu_n) \to div(Vu) \; dans \; L^2(\Omega).$$

• Le second membre $f - div(Vu)$ reste borné dans $L^2(\Omega)$, indépendamment de $w$. Mais l'application qui à ce second membre dans $L^2(\Omega)$ associé la solution de (3.4) dans $(H_0^1(\Omega))^N$ est linéaire continue, donc envoie les bornés de $L^2(\Omega)$ sur des bornés de $(H_0^1(\Omega))^N$. Ainsi, l'image de $F$ inclus dans un borné de $(H_0^1(\Omega))^N$, donc un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Donc la fonction

$$F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

est compact.
On doit montrer que la solution du problème (3.3) est un point fixe de $F$.
Pour appliquer le théorème du point de fixe de Schauder, on doit montrer que si $(u, t)$ est une solution de

$$u = tF(u), t \in [0, 1],$$

alors il existe une constante $M > 0$ indépendante de $t$ et $u$, tel que $\|u\|_{L^2(\Omega)} < M$. Supposons par l'absurde l'existence c'est-à-dire

$$\exists t_n \in [0, 1] \; telque \; u_n = t_n F(u_n)$$

et

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq n.$$

On prend $F(u_n) = \frac{u_n}{t_n}$, alors

$$-\Delta u_n = -\Delta(t_n F(u_n)) = f - div(Vu_n) \iff -\frac{\Delta u_n}{t_n} = -\Delta(F(u_n)) = f - div(Vu_n)$$

d'où

$$-\Delta u_n = t_n f - t_n div(Vu_n).$$

On pose $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$, alors

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

et $v_n$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_n = t_n \frac{f}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} - t_n div(Vv_n) & \text{dans } \Omega, \\ \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 & \text{sur } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant $v_n$ comme une fonction de test, et d'après les hypothèses sur $V$ et $v_n$ on obtient que

$$\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c,$$

alors $\exists v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $v_n \rightharpoonup v$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ (car $\frac{\|v_n\|}{c} \leq 1 \in B(0,1)$ et d'après le théorème de Bourbaki, alors de toute suite borné on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$). Par le théorème de Rellich-Kondrachov, on déduit que $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et pp sur $\Omega$ donc $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Notons que $t_n \to t \in [0,1]$, et passons à la limite dans le problème de $v_n$, il résulte que $v$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = tf - tdiv(Vv) & \text{dans } \Omega, \\ \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1, & \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

• Si $t = 0$, le problème aura pour seule solution, la solution trivial, qui est une contradiction avec le fait que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

• Si $t \neq 0$, alors en appliquant le principe de maximum, on obtient $v = 0$, contradiction.

Donc $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq M$ et par le théorème du point fixe de Schauder on déduit l'existence d'une solution. ■

### 3.4.3 Non-linéaire sur-linéaire

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

et on considère $F : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $\overline{u}$ associé la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = -\overline{u}^3 + f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Si on prend $f = 0$ un instant, on se rend compte que pour $\lambda > 0$

$$F(\lambda\overline{u}) = \lambda^3 F(\overline{u}),$$

ce qui montre que $F$ à élever au cube le rayon des boules et ne va donc pas stabiliser une boule de rayon assez grand, on peut donc avoir l'idée de raisonner sur des boules de rayon petit, pour cela on va appliquer une autre méthode qui est le degré topologique dans le cas où $N = 2$, d'abord, on définit $F$ de $L^6(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ ($\overline{u}^3$ n'appartient pas à $L^2(\Omega)$ en générale lorsque $\overline{u} \in L^2(\Omega)$ donc on n'est pas sur que l'équation admet une solution), on a $H_0^1(\Omega)$ s'injecte bien dans $L^6(\Omega)$ car $6 < \frac{2N}{N-2}, N = 2$ et la solution de (3.6) est dans $L^6(\Omega)$ lorsque $\overline{u} \in L^6(\Omega)$, et On a aussi $F$ est continue car $\overline{u}_n \to \overline{u}\ dans\ L^6(\Omega)$, et comme

$$|\overline{u}_n^3 - \overline{u}^3| \leq |\overline{u}_n - \overline{u}|(|\overline{u}_n^2| + |\overline{u}_n||\overline{u}| + |\overline{u}^2|).$$

Et par l'utilisation de l'inégalité de Hölder on obtient

$$\overline{u^3}_n \to \overline{u}^3\ dans\ L^2(\Omega),$$

et la continuité de la solution (3.2) par rapport au second membre montre que

$$F(\overline{u}_n) \to F(\overline{u})\ dans\ H_0^1(\Omega),$$

donc dans $L^6(\Omega)$.
$(\overline{u}_n^3)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (car $(\overline{u_n})_n$ est borné dans $L^6(\Omega)$) et comme pour (3.4) on en déduit que $(F(\overline{u}_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc relativement compact dans $L^6(\Omega)$ (d'après l'injections compacts de Sobolev). Donc on trouve que $F$ envoie les bornés de $L^6(\Omega)$ sur des ensembles relativement compacts dans $L^6(\Omega)$.
Pour montrer que $F$ à un point fixe à l'aide du degré topologique, il suffit de montrer que pour $R$ assez grand

$$deg(I - F, B(0, R), 0) = 1.$$

On prend

$$u = tF(u),$$

et on montre par l'absurde qu'elle n'a pas de solution sur $[0, 1] \times \partial\Omega$. Si on suppose qu'une solution existe, pour tout $t \neq 0$, alors

$$F(u) = \frac{u}{t},$$

ce qui montre que $\frac{u}{t}$ vérifie

$$-\Delta(\frac{u}{t}) = -u^3 + f,$$

au sens faible, d'où pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + t \int_\Omega u^3 v = t \int_\Omega f v.$$

En prenant $v = u$ et en négligeant le terme $\int_\Omega u^4$ qui positif, on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega |fu| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

Sur $H_0^1(\Omega)$, et d'après l'inégalité de Poincaré on a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^6(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq KC\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En posant $R = KC\|f\|_{L^2(\Omega)} + 1$, on a $u \notin \partial B(0, R)$, donc $deg(I - tF, B(0, R), 0)$ est bien définie et par la normalisation et l'invariance d'homotopie on obtient

$$deg(I - tF, B(0, R), 0) = deg(I, B(0, R), 0) = 1$$

donc $F$ admet un point fixe $u$.

# Conclusion

Le degré topologique est une méthode très puissant pour étudie l'existence des solutions des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles. Cette méthode est la base des théorèmes de point fixe outils, le point fixe de Brouwer et le point fixe de Leray-Schauder.

# Bibliographie


[1] **G. Allaire**, *Analyse numérique et optimisation, 2005.*

[2] **A. Ambrosetti, D. Arcoya**, *An Introduction to Nolinear Functional Analysis and Elliptic Problems, Birkhauser Ba. 2011.*

[3] **V. Beck**, *Un tout petit peu d'homotopie. www.idpoisson .fr/homotopie.pdf, 2018.*

[4] **H. Brizes**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1983.*

[5] **L.E.J.Brouwer**, *Uber abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann 71 ; pp. 97-115.1912.*

[6] **P. Böhler,** *Über die bewegung eines mechanischen systems in der nähe einer Gleichge-wichtslage. J.Reine Angew. Math. 127, 176, 179. 1904.*

[7] **M. Cuesta**, *Analyse Fonctionnelle Non linéaire et application en équation différentielle, cours, 2009-2010.*

[8] **J. Droniou**, *Degrés topologiques et applications 2006.*

[9] **Khiat Djihane, Soufane Amina**, *Degrés topologique 2016/2017.*

[10] **I. Fronsera, W. Gangbo**, *Degree Theory in Analysis and Applications, Oxford press, USA, 1995.*

[11] **T. Gallouet, R. Herbin**, *Équations aux dérivées partielles. Master. France. cel-01196782. 2015.*

[12] **J. Hadamard,** *Sur quelques applications de l'indice de Klonceker ; dans S'introduction à la théorie des fonctions d'une variable T, par J. Tannery, Vol. II, Hermann, Paris, pp. 875-915. 1910.*

[13] **A. Jeannert, D. Lines**, *Invitation à la topologie algébrique, tome 1 Homologie.1-cépaduès Editions. 2014.*

[14] **Y.J.Cho, Y.Q.Chen, D.O'regan,** *Topological degree theory And Application, Series : Mathematical Analysis and Application, 2006.*

[15] **O. Kavian,** *Introduction à la Théorie des points Critiques et Application aux Problème Elliptiques, Springer-Verlag, Paris, 1993.*

[16] **S. Kesavan**, *Nonlinear Functional Analysis A First course, Hindustan Book Agency, 2004.*

[17] **L. Krocker,** *Über systeme von funktionen mehrer variablen, Monatsberichte. Acad. wiss. Berlin, pp. 159-193, 688-698. 1869.*

[18] **L. Lirenberg**, *Topic in Nonlinear Functional Analysis, Mathematics Subject Classification. Primary 46-XX. 2000.*

[19] **M. Nagumo,** *A theory of degree based on infinitesimal analysis. Amer. J.Math. 73, pp. 485-496. Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73, pp. 497-511. 1951.*

[20] **F. Paulin**, *Topologie algébrique élémentaire, cours de première année de master, École Normale Supérieure, 2010.*

[21] **H. Poincaré,** *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (3 volumes). Gauthiers-Villars, Paris. 1892-1899.*

[22] **A. Prouté**, *cours de Topologie Algébrique, Master 1 de l'université Denis Diderot-Paris 7. 2012.*

[23] **P. A-J. Thomas**, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivée partielle, Masson, Paris, (1988 ou 1983).*

[24] **Mohamed Rezgania**, *Théorie d'Arzéla-Ascoli et Application. Mémoire de Master, 2014.*

[25] **Mohammdi Mahmoud** , *Degré topologique et Application 2014.*