

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE JIJEL  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

N° d'ordre  
Série



**Mémoire de fin d'études**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

**Option : EDP et applications**

Intitulé :

**Méthode du domaine fictif avec le problème de  
Dirichlet et de Stokes**

Présenté par :

**Kihal Amina**

Soutenu le 28 Octobre 2020, devant le jury composé de :

Président	S. Lounis	MCA Université de Jijel
Encadreur	O. Yakhlef	MCB Université de Jijel
Examineur	A. Zazoua	MCB Université de Jijel

Promotion 2019/2020

# Remerciements

---

*Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout-puissant qui nous a guidés vers le chemin du savoir et pour tous ses bienfaits.*

*La première personne que nous tenons à remercier est notre promoteur Mr Othman Yakhlef, pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.*

*Nos sincères remerciements s'adressent aux enseignants de l'université de Jijel pour tout le savoir qu'ils ont su nous transmettre durant ces cinq dernières années, et spécialement un grand merci pour le professeur Mme W. Chikouche.*

*Nous remercions tous les membres de département de mathématiques plus particulièrement celles du jury pour nous avoir honorés en acceptant de juger notre travail.*

*Mme S. Lounis, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Mme A. Zazoua, pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Nous tenons à remercier également, tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce modeste travail.*

*... Pour tous et à toutes,*

*Merci*  
infiniment 

# Dédicace

*Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux  
qui me sont chers,*

*À mon cher père **AZZOUZ** et ma chère mère **SORIA**,  
aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon  
amour et ma considération pour les sacrifices que vous  
avez consenti pour mon instruction et mon bien être.*

*Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux  
tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices.  
Puisse Dieu, le très Haut, vous accorder santé, bonheur  
et longue vie.*

*À l'âme de mon grand-père **AHMED** et mon cousin  
**ADEM**, que Dieu ait pitié d'eux.*

*À ma grand-mère, qui est ma deuxième mère **FATMA**,  
que Dieu la protège et prolonge sa vie.*

*À mes chers frères **YASSER**, **MOHAMMED-WASSIM** et  
**AHMED**, qui m'ont encouragé et m'ont apporté le  
meilleur soutien, j'espère vous donner le bon exemple.*

*À mes chères tantes **FADILA**, **SABRINA** et ma chère  
cousine **ILHEM**. Et toute la famille **KIHAL**.*

*À mes grands-parents **AZZOUZ** et **DJAMILA**, que Dieu les  
protège, et à tous oncle, tantes et toute la famille  
**BOUNEMEUR**.*

*À tous cousins, cousines, amies et tous qui ont toujours  
cru à ma réussite...*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Concepts de base et résultats préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Notations . . . . .	8
1.2 Ensembles convexes . . . . .	8
1.3 Fonctions convexes . . . . .	9
1.4 Existence et unicité de la solution . . . . .	9
1.4.1 Formules de Green et formule de la divergence . . . . .	11
1.4.2 Théorème de Lax-Miligram . . . . .	12
1.4.3 La théorie de Babushka-Brezzi . . . . .	13
<b>2 La méthode du domaine fictif avec pénalisation</b>	<b>15</b>
2.1 Problème de Dirichlet . . . . .	15
2.1.1 Formule variationnelle . . . . .	15
2.1.2 Disque . . . . .	18
2.1.3 Ellipse . . . . .	20
2.2 Problème de Stokes . . . . .	22
2.2.1 Formule variationnelle . . . . .	23
2.2.2 Formulation mixte par l'utilisation de domaine fictif avec pénalisa- tion $H^1$ . . . . .	27

2.2.3	Calcul des erreurs . . . . .	28
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>32</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>

# Notations

$d$  : dimension de l'espace,

$\Omega$  : ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , généralement domaine physique ou domaine fictif,

$\Omega_{cal}$  : domaine de calcul,

$\bar{\Omega}$  : l'adhérence de  $\Omega$ ,

$\Gamma = \partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$ ,

p.p. : presque partout,

$\epsilon$  : paramètre de pénalisation (tendant vers 0),

$h$  : pas du maillage,

$dx$  : mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ ,

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace pré-hilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire,

$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$

$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$

$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; v \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty\},$

$L^2(\Omega)$  : est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(x)w(x)dx; v, w \in$

$L^2(\Omega),$

$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$

$L^\infty(\Omega) = \{v \text{ mesurable dans } \Omega / \exists c \geq 0 \text{ vérifiant } |v| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$

$\|v\|_\infty = \inf \{c, |v| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\},$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , utilisé pour la définition des espaces de Sobolev,

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d},$$

$W^{m,p}(\Omega)$  : espace de Sobolev sur  $\Omega$  défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega), \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^{|\alpha|} v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\},$$

$H^1(\Omega)$  : espace de Sobolev d'ordre 1 sur  $\Omega$  défini par :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\},$$

dont la norme associée est :

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left( \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et de produit scalaire :

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right),$$

$H^1(\Omega)$  : est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{1,\Omega}$ ,

$$H_0^1 = \{\forall v \in H^1, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$H'$  : l'espace dual de l'espace  $H$ ,

$|v|_{H^1(\Omega)}$  : semi-norme sur  $H^1(\Omega)$ , telle que :

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$D(\Omega)$  : espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné (espace des fonctions test) .



# Introduction générale

Les méthodes des domaines fictifs sont de plus en plus utilisées, notamment pour les problèmes d'interactions fluide/structure et plus généralement pour tous les problèmes à frontière libre. Le principe de ces méthodes est de prolonger un domaine réel ouvert régulier  $\Omega$  (dans la suite  $d = 2$ ) de bord  $\Gamma$  en un domaine  $D$  plus grand et de géométrie simple appelé domaine fictif.

Parmi les méthodes de domaine fictif :

- Les méthodes de pénalisation, considérées comme faisant partie des méthodes de domaines fictifs, ont été introduites depuis les années 1960 par V.K. Saul'ev [13] et V.D. Kopčenov [7]. Le principe de ces méthodes de pénalisation afin d'ajouter un terme de pénalisation au coefficient de diffusion utiliser une équation unique sur le domaine  $\Omega_{cal}$ . Des travaux ont été faites dans le cas des équations elliptiques scalaires avec des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann et Robin par I.Ramière [10].
- Les méthodes de frontières immergées traitant des problèmes d'obstacle immergés dans un domaine. Elles ont été introduites et développés par Charles S. Peskin [9] dans le but de modélisation des écoulements sanguins dans les valves. Ainsi, elles ont été utilisées pour résoudre les problèmes d'interaction fluide structure que nous pouvons dire c'est le domaine le plus vaste dans la recherche scientifique aujourd'hui, le fait qu'il regroupe de nombreuses spécialités.

- Les méthodes de multiplicateur de Lagrange qui sont des méthodes classiques pour la résolutions des problèmes de domaine fictif, cette méthode s'applique à toute recherche de minimum en présence de contraintes, l'idée est d'associer à chaque contrainte un multiplicateur a priori indéterminé, il y a plusieurs méthodes encore bien détaillé par M.Fabre [5].

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la méthode de domaine fictif avec pénalisation pour le problème de Dirichlet et le problème de Stokes.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Le premier est consacré à des notions de base que nous avons utilisé tout au long de ce travail, concernant les vecteurs, la divergence d'un champ vectoriel et la norme associée, quelques rappels sur les ensembles et les fonctions convexes, les formules de Green et de la divergence, ainsi que le théorème de Lax-Milgram et le théorème de Babushka-Brezzi à propos d'existence et d'unicité de la solution.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'application de la méthode du domaine fictif avec pénalisation  $L^2$  et  $H^1$  pour le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où  $f$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Avec  $\Omega$  le domaine réel (Disque ou ellipse) afin de calculé les estimations d'erreurs entre les solutions exactes  $u$  et les solutions approchées  $u_{\epsilon,h}$  après la présentation des formulations variationnelles.

Ensuite, nous effectuons l'application de la méthode du domaine fictif pour les équations de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2)$$

afin de calculer les estimations d'erreurs relatives entre les solutions exactes  $\mathbf{u}$ ,  $p$  et les solutions des problèmes pénalisés  $\mathbf{u}_{\epsilon,h}$ ,  $p_{\epsilon,h}$  (vitesses, pressions respectivement) après la présentation de la formulation faible-mixte du problème de Stokes et la formulation mixte par l'utilisation de domaine fictif avec pénalisation  $H^1$ . De plus, pour valider nos résultats, des exemples numériques ont été donnés où les calculs numériques ont été élaborés via le logiciel "FreeFem++".

# Chapitre 1

## Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base de l'analyse convexe, quelques formules de Green et de la divergence et concernant l'existence et l'unicité de la solution avec les théorèmes de Lax-Milgram et de Babushka-Brezzi.

### 1.1 Notations

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et de la norme associée  $\|\cdot\|$ .

### 1.2 Ensembles convexes

**Définition 1.1 :**

*Un sous ensemble  $C$  de  $H$  est dit ensemble convexe si pour tout*

$$u, v \in C : \lambda u + (1 - \lambda)v \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

*Nous appelons enveloppe convexe (resp. enveloppe convexe fermé) de  $C$ , et on note  $co(C)$  (resp.  $\bar{co}(C)$ ), le plus petit ensemble convexe (resp. ensemble convexe fermé) contenant  $C$ .*

**Remarque 1.1 :**

En général,  $\text{co}(C)$  n'est pas un ensemble fermé. De plus, si  $C$  est convexe alors  $\text{co}(C) = C$  est réciproquement. D'autre part, si  $C$  est borné (resp. compact) alors  $\text{co}(C)$  est borné (resp. compact).[11]

### 1.3 Fonctions convexes

Nous considérons les fonctions  $\varphi$  telles que  $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Nous appelons l'épigraphe de la fonction  $\varphi$ , l'ensemble noté par :

$$\text{epi}(\varphi) = \{(u, \lambda) \in H \times \mathbb{R} / \varphi(u) \leq \lambda\}.$$

Nous notons par

$$\text{dom}(\varphi) = \{u \in H / \varphi(u) < +\infty\}$$

le domaine de la fonction  $\varphi$ . Si  $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$  alors la fonction  $\varphi$  est dite propre.

**Définition 1.2 :**

La fonction  $\varphi$  est dite convexe si pour tout  $u, v \in H$  avec  $\varphi(u) < +\infty$  et  $\varphi(v) < +\infty$ , nous avons

$$\varphi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

La fonction  $\varphi$  est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Remarquons qu'une fonction est convexe si son épigraphe est une partie convexe de  $H \times \mathbb{R}$ . [11]

### 1.4 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous rappelons des notions de base par rapport à la norme et des théorèmes principaux concernant l'existence et l'unicité de la solution.

Soit  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 1$ . Dans cette section nous travaillerons avec des champs vectoriels de fonctions  $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ), que nous noterons

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d), \text{ où } v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, d),$$

Pour un tel champ, nous écrirons les opérateurs vectoriels associés de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad ,$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \dots \\ \nabla v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \dots \\ \frac{\partial v_d}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \dots \\ \Delta v_d \end{pmatrix} \quad .$$

La norme d'un champ vectoriel  $\mathbf{u}$  dans un espace de Hilbert  $H^1(\Omega)^d$  se note :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} := \left( \sum_{j=1}^d \|u_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Si  $u_i$  est un champ scalaire dans l'espace  $H^1(\Omega)$  alors par la définition de la norme  $H^1$  :

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} := \left( \sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega)} \quad .$$

**Théorème 1.1** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) [1]

- **Avec des sommes :**

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v} \in \Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ) . Alors :

$$\sum_{k=1}^d |u_k v_k| \leq \left( \sum_{k=1}^d |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^d |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

- **Avec des intégrales :**

Soient  $f, g \in C([0, 1], \mathbb{R})$  . Alors :

$$\int_0^1 |fg| \, dx \leq \left( \int_0^1 |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |g|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

• **Dans un espace de Hilbert :**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous  $u, v \in E$ ,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_E \|v\|_E.$$

**Théorème 1.2** (Inégalité de Hölder) [3]

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .  $1 \leq r \leq \infty$ ,  $1 \leq s \leq \infty$  et  $1 \leq t \leq \infty$  tels que  $(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t})$ . Alors

$$\forall f \in L^r(\Omega), \forall g \in L^s(\Omega), f \cdot g \in L^t(\Omega)$$

et

$$\|f \cdot g\|_{L^t(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|g\|_{L^s(\Omega)}.$$

**Remarque 1.2 :**

Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour  $r = s = 2$  et  $t = 1$ .

**Théorème 1.3** (Inégalité de Poincaré) [1]

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$  (dépendant de  $\Omega$ ) telle que : pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

**Remarque 1.3 :**

Une inégalité de Poincaré est une inégalité qui permet de contrôler (estimer) la norme  $L^2$  d'une fonction par la norme  $L^2$  de son gradient.

**Théorème 1.4** (Théorème de Riesz) [3]

Soit  $H$  un espace de Hilbert de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et de norme  $\|\cdot\|_H$ . Alors, pour toute  $f \in H'$ ,  $\exists ! u \in H$  tel que  $\langle f, v \rangle_{H', H} = (v, u)_H \quad \forall v \in H$ .

De plus,  $\|f\|_{H'} = \|u\|_H$ .

### 1.4.1 Formules de Green et formule de la divergence

Nous donnons quelques rappels utiles par la suite.

$\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , soient  $v, w \in H^1(\Omega)$  et soient  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^2(\Omega)$ .

**Formules de Green :**

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx = \int_{\partial\Omega} v n_i w \, d\sigma - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx$$

a) Pour tous champs scalaires  $v, w$  réguliers, on a

$$- \int_{\Omega} (\Delta w) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma, \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$

b) Pour tous champs vectoriels  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  réguliers, on a

$$- \int_{\Omega} \Delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.2)$$

avec  $\nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

c) Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^d$  et  $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $\mathbf{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  un champ vectoriel de classe  $C^2$ . Alors

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} (p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$  est le vecteur normal unitaire à  $\partial\Omega$ .

### Formule de la divergence :

Pour tout champ vectoriel  $\mathbf{v}$  régulier, nous avons

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$

Nous notons par  $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ ) la norme sur  $\mathbb{X}$  (resp. sur  $\mathbb{Y}$ ).

## 1.4.2 Théorème de Lax-Miligram

### Définition 1.3 :

Soit  $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. Nous disons que

1)  $a(u, v)$  est continue sur  $\mathbb{X}$  si :

$$\text{Il existe } M > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{X} \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{X}} \|v\|_{\mathbb{X}}.$$



2)  $a(u, v)$  est coercive sur  $\mathbb{X}$  si :

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v\|_{\mathbb{X}}^2 \leq a(v, v).$$

3)  $a(u, v)$  est symétrique si :

$$\forall u, v \in \mathbb{X}, a(u, v) = a(v, u).$$

**Théorème 1.5** (Théorème de représentation de Lax-Milgram)[2]

Soit  $a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur l'espace de Hilbert  $\mathbb{X}$  et soit  $L : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue sur  $\mathbb{X}$ . Alors, il existe un unique  $u \in \mathbb{X}$  tel que l'équation  $a(u, v) = L(v)$  soit vérifiée pour tout  $v$  de  $\mathbb{X}$ , c-à-d :

$$\exists! u \in \mathbb{X} \quad \forall v \in \mathbb{X}, a(u, v) = L(v) \quad (1.5)$$

Si on suppose de plus que la forme  $a$  est symétrique, alors l'élément  $u$  est caractérisé comme étant l'unique élément de  $\mathbb{X}$  qui minimise la fonctionnelle  $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$  pour tout  $v$  de  $\mathbb{X}$ , c'est-à-dire :

$$\exists! u \in \mathbb{X}, J(u) = \min_{v \in \mathbb{X}} J(v) \quad (1.6)$$

### 1.4.3 La théorie de Babushka-Brezzi

Soit  $\mathbb{X}$  et  $\mathbb{Y}$  deux espaces de Hilbert et deux formes bilinéaires

$$a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Etant donné  $f \in \mathbb{X}'$ , nous cherchons  $(u, p) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  tels que

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{X}', \mathbb{X}} \quad \forall v \in \mathbb{X} \quad (1.7)$$

$$b(u, q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Y}. \quad (1.8)$$

**Théorème 1.6** [8]

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1) La forme  $a(u, v)$  est continue sur  $\mathbb{X}$  :

$$\text{Il existe } M > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{X} \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbb{X}} \|v\|_{\mathbb{X}}.$$

2) La forme  $a(u, v)$  est coercive sur  $\mathbb{X}$  :

$$\text{Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v\|_{\mathbb{X}}^2 \leq a(v, v).$$

3) La forme  $b(v, q)$  est continue :

$$\text{Il existe } N > 0 \quad \forall v \in \mathbb{X} \quad \forall q \in \mathbb{Y}, \text{ tel que } |b(v, q)| \leq N \|v\|_{\mathbb{X}} \|q\|_{\mathbb{Y}}.$$

4) La forme  $b(v, q)$  satisfait la condition 'inf-sup' :

$$\text{Il existe } \beta > 0, \text{ tel que } \inf_{\substack{q \in \mathbb{Y} \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{v \in \mathbb{X} \\ v \neq 0}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathbb{X}} \|q\|_{\mathbb{Y}}} \geq \beta.$$

Alors le problème (1.7),(1.8) admet une unique solution  $(u, p) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$  .

**Corollaire 1.1** :[6]

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Alors :

L'opérateur  $\text{div}$  est un isomorphisme de  $V^\perp$  sur  $L_0^2(\Omega)$

# Chapitre 2

## La méthode du domaine fictif avec pénalisation

### 2.1 Problème de Dirichlet

Nous nous proposons dans cette partie d'appliquer la méthode de domaine fictif pour le problème de Dirichlet qui nous permet de simplifier la prise en compte de domaine de géométrie complexe.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Nous considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $f$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

#### 2.1.1 Formule variationnelle

Nous supposons que  $u \in H^2(\Omega)$ . En multipliant l'équation de Laplace (2.1) par une fonction test  $v$  qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  et en intégrant sur  $\Omega$  et après nous utilisons

la formule de Green, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous définissons la forme bilinéaire  $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$  et la forme linéaire continue

$F : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

**Théorème 2.1** *Il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ .*

**Preuve.**

1) Continuité de  $a(., .)$  :

Soient  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| \, dx \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= |u|_{H^1(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire  $a$  est continue avec  $M = 1$  comme constante de continuité.

2) Coercivité de  $a(., .)$  :

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \\
&= \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= |v|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire  $a$  est coercive avec  $\alpha = 1$  la constante de coercivité.

**3)** Continuité de  $F(., .)$  :

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
|F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f v| dx \\
&\stackrel{C-S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\stackrel{I.Poincaré}{\leq} C_{\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

De plus,  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert. Alors, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de  $u$  (solution de problème (2.2)).

■

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\Omega \subset D$ ,  $\Omega_2 = D \setminus \bar{\Omega}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ , soit  $f$  une fonction définie de  $D$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , maintenant nous allons résoudre un problème de pénalisation  $L^2$  [14] avec un coefficient de pénalité  $0 < \epsilon < 1$ , qui est équivalent à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_{\epsilon} \in H_0^1(D) \text{ tel que} \\ \int_D \nabla u_{\epsilon} \cdot \nabla v dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_2} u_{\epsilon} v dx = \int_D f v dx \quad \forall v \in H_0^1(D). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Un autre exemple d'application de la méthode de domaine fictif avec pénalisation  $H^1$  de (2.2) est de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_\epsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que} \\ \int_D \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega_2} \left( u_\epsilon v + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \int_D f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

**Théorème 2.2** (Theorem 2.1 dans [14])

Soit  $D$  un domaine rectangulaire et  $\Omega$  un domaine régulier. Il existe des solutions uniques  $u$  et  $u_\epsilon$  pour (2.2) et (2.4), respectivement, et nous avons les estimations suivantes :

$$\|u_\epsilon - u\|_{1,\Omega} \leq C\epsilon, \quad (2.5)$$

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_2} \leq C\epsilon. \quad (2.6)$$

Nous donnons aussi un théorème concernant la régularité des solutions pour les problèmes de pénalisation  $H^1$

**Théorème 2.3** (Theorem 3.1 dans [14])

Soit  $D$  un domaine rectangulaire et  $\Omega$  un domaine régulier. Soit  $u_\epsilon \in H_0^1(D)$  la solution du problème de pénalisation  $H^1$  (2.4) pour  $f \in L^2(\Omega)$ . Si  $\Gamma \in C^3$  et  $\partial D$  lipschitz alors nous avons

$$\begin{aligned} u_\epsilon|_\Omega &\in H^2(\Omega), & u_\epsilon|_{\Omega_2} &\in H^2(\Omega_2), \\ \|u_\epsilon - u\|_{1,\Omega} &\leq C\epsilon, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\|u_\epsilon\|_{1,\Omega_2} \leq C\epsilon. \quad (2.8)$$

## 2.1.2 Disque

Dans cette partie nous considérons  $\Omega$  un disque inclus dans le domaine  $D$ , tel que  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2\}$ , et  $D$  c'est le carré qui est défini par  $D = \{(x_1, x_2) \mid -3 < x_1 < 3, -3 < x_2 < 3\}$ . Nous mettons  $f = 4$  dans (2.1) nous obtenons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 4 \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

La solution exacte de (2.9) est  $u = 4 - x_1^2 - x_2^2$ .

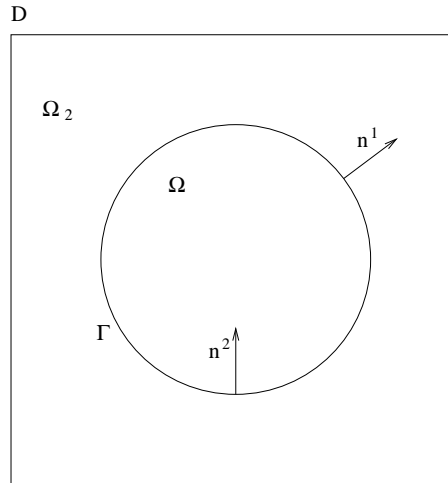


FIGURE 2.1 – Domaine de calcul

Nous avons calculé les erreurs relatives avec la norme  $L^2(D)$  par la pénalisation  $L^2$  et nous avons utilisé la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , avec plusieurs valeurs de  $\epsilon$  et de  $h$ , (où  $h = \sqrt{2}/k$  ( $k = N/6$ ), pour  $N = 30, 60, 120, 300, 600$ , et de générer une grille  $N \times N$  dans le carré  $D$ ) nous obtenons les résultats qui sont représentées par la Figure 2.2. Ensuite, nous avons utilisé la pénalisation  $H^1$  et nous avons calculé l'erreur relative avec la norme  $H^1(D)$ , la Figure 2.3 représente ces résultats.

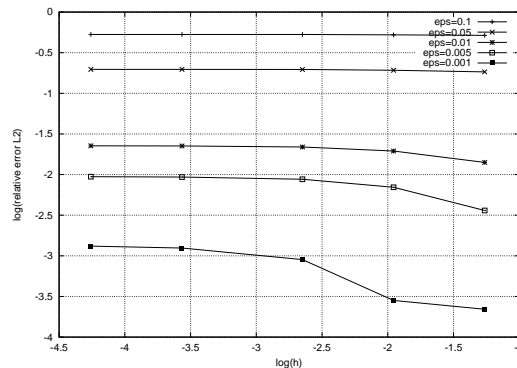


FIGURE 2.2 – Disque : pénalisation  $L^2$  et l'erreur relative avec la norme  $L^2(D)$   $\left( \frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{0,D}}{\|u\|_{0,D}} \right)$  avec échelle logarithmique

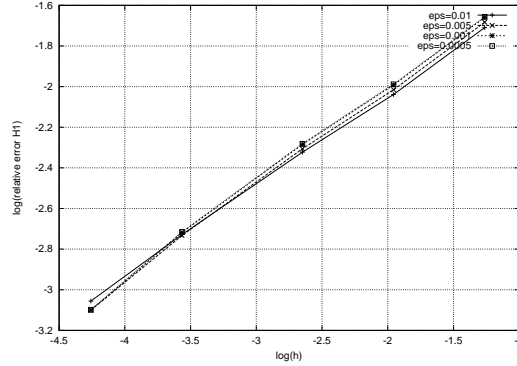


FIGURE 2.3 – Disque : pénalisation  $H^1$  et l'erreur relative avec la norme  $H^1(D)$   $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{1,D}}{\|u\|_{1,D}}\right)$  avec échelle logarithmique

### Remarque 2.1 :

Nous pouvons voir à travers la Figure 2.2, si nous diminuons le terme de discrétisation  $h$  nous remarquons que l'erreur ne diminue pas et parfois elle augmente. Ce phénomène, nous pouvons l'expliquer par le fait que l'erreur avec la pénalisation  $L^2$  dépend de  $h$ , mais aussi de  $\epsilon$  (voir Théorème 3.3 dans [12]).

### 2.1.3 Ellipse

Dans cette partie nous considérons  $\Omega$  une ellipse dans le domaine  $D$  qui à la même définition comme dans la section du cercle, tel que  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2/4 + x_2^2} \leq 1\}$ . Nous mettons  $f = 2.5$  dans (2.1) nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = 2.5 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

La solution exacte de (2.10) est  $u = 1 - x_1^2/4 - x_2^2$ .



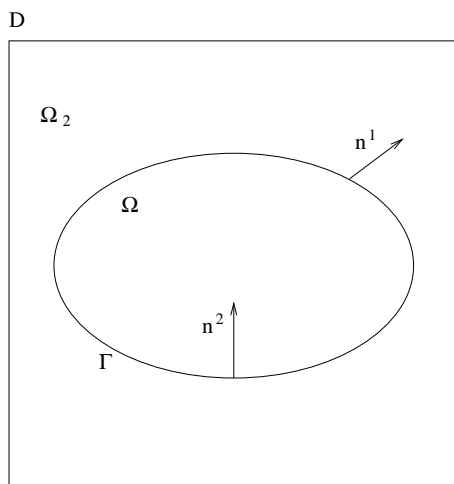


FIGURE 2.4 – Domaine de calcul

Nous avons fait les calculs identiques à la section précédente du disque mais au lieu de prendre un disque nous avons pris une ellipse, les résultats sont dans les figures suivantes :

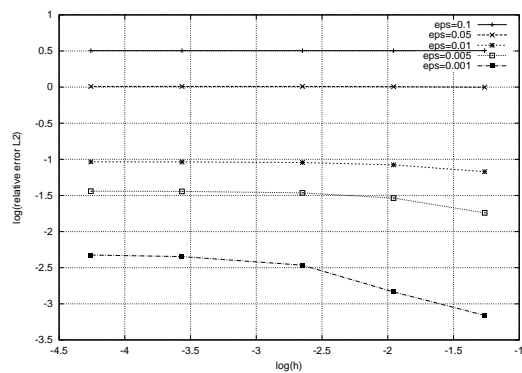


FIGURE 2.5 – Ellipse : pénalisation  $L^2$  et l'erreur relative avec la norme  $L^2(D)$   $\left( \frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{0,D}}{\|u\|_{0,D}} \right)$  avec échelle logarithmique

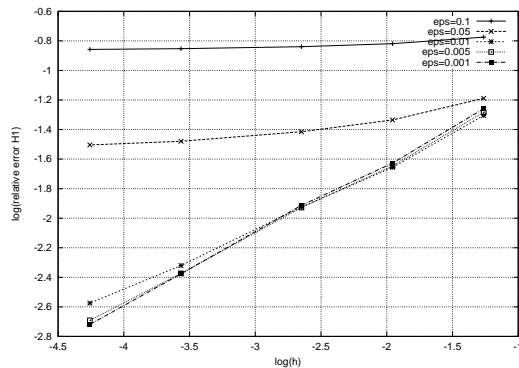


FIGURE 2.6 – Ellipse : pénalisation  $H^1$  et l’erreur relative avec la norme  $H^1(D)$   $\left(\frac{\|u_{\epsilon,h} - u\|_{1,D}}{\|u\|_{1,D}}\right)$  avec échelle logarithmique

Nous observons pour l’ellipse (Figure 2.5 et 2.6) le même phénomène que dans l’exemple précédent pour le disque, voir la remarque 2.1.

## 2.2 Problème de Stokes

L’équation de Stokes permet de décrire un fluide visqueux coulant lentement dans un lieu étroit ou autour d’un petit objet,

Dans cette partie nous allons nous intéresser au problème de Stokes suivant : pour  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , étant donné une fonction  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on veut trouver des fonctions  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le vecteur  $\mathbf{u}$  représente le champ de vitesse du fluide. La fonction scalaire  $p$  est la pression qui lui est associée. Nous considérons encore le champ de force  $\mathbf{f}$  agissant sur la frontière et le coefficient de viscosité cinématique  $\nu$  ( $\nu > 0$ ). Ici nous nous intéresserons uniquement au cas des fluides incompressibles, régi par l’équation  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

### 2.2.1 Formule variationnelle

Nous supposons que  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ ,  $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$  et  $p \in H^1(\Omega)$ . Nous multiplions la première équation par un champ vectoriel  $\mathbf{v}$  dans l'espace des fonctions tests  $(D(\Omega))^2$  et nous intégrons. Le problème devient :

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in (D(\Omega))^2.$$

En utilisant les formules de Green (1.2) et (1.3) avec  $d = 2$ , l'expression devient :

$$\int_{\Omega} (\nu(\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) - p \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial\Omega} ((-\nu(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} + (p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) \, d\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in (D(\Omega))^2.$$

De plus, afin de simplifier le problème variationnel, nous cherchons une fonction s'annulant sur  $\partial\Omega$ . Nous définissons ainsi

$$V := H_0^1(\Omega)^2.$$

Concernant la pression, puisque l'équation de Stokes n'en fait intervenir que les dérivées, nous sommes poussés à imposer une condition sur  $p$  qui nous fixe la constante d'intégration afin de garantir l'unicité d'une telle pression. Nous choisissons à cet effet l'espace des fonctions de carré sommable à moyenne nulle

$$Q = L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, dx = 0\}.$$

Par l'équation d'incompressibilité,  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , nous la multiplions par une fonction scalaire  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dans l'espace  $Q$  et nous intégrons. Nous obtenons

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0 \quad \forall q \in Q.$$

Finalement, en définissant les formes bilinéaires  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx, \tag{2.12}$$

$$b(\mathbf{v}, q) := - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \tag{2.13}$$

ainsi que la fonctionnelle linéaire  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$F(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx,$$

Nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V, p \in Q \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

**Théorème 2.4** *Il existe une unique solution  $(\mathbf{u}, p)$  telle que  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$ .*

**Preuve.**

1) Continuité de  $a(., .)$  :

Soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx \right| \leq \nu \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \, dx \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \nu \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \nu \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{H^1(\Omega)} \|v_i\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \nu \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est continue avec  $M = \nu$  comme constante de continuité.

2) Coercivité de  $a(., .)$  :

Soit  $\mathbf{v} \in V$ , nous avons :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \nu \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_j \cdot \nabla u_j \, dx.$$

Vérifions dans un premier temps que la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a_j(v, v) &= \int_{\Omega} \nabla u_j \cdot \nabla u_j \, dx \\ &= \| \nabla v_j \|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

est coercive. En effet, grâce à l'inégalité de Poincaré :

$$\| v_j \|_V^2 \leq (1 + C_{\Omega}^2) \| \nabla v_j \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Où  $C_{\Omega}$  est la constante de Poincaré. Par conséquent,

$$a_j(v, v) \geq \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \| v_j \|_V^2.$$

Donc  $a_j$  est coercive avec  $\alpha = \frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} > 0$  la constante de coercivité . Puisque

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu \sum_{j=1}^2 a_j(v, v) \geq \nu \sum_{j=1}^2 \alpha \| v_j \|_V^2 \geq \nu \alpha \| \mathbf{v} \|_V^2.$$

Donc la forme bilinéaire  $a$  est coercive avec  $\nu \alpha$  la constante de coercivité.

### 3) Continuité de $b(., .)$ :

Soient  $\mathbf{u} \in V$  ,  $q \in Q$  , nous avons :

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}, q)| &= \left| - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \right| \leq \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_k} q \right| \, dx \\ &\stackrel{C-S}{\leq} \sum_{k=1}^2 \| \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \|_{L^2(\Omega)} \| q \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^2 \| u_k \|_V^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \| q \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \gamma \| \mathbf{u} \|_V \| q \|_Q \quad \forall \mathbf{u} \in V, q \in Q. \end{aligned}$$

Donc la forme  $b$  est continue avec  $\gamma = \sqrt{2}$  la constante de continuité .

4) On peut finalement montrer (voir [6], [4]) que les espaces  $V$  et  $Q$  vérifient la propriété suivante :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall q \in Q \exists \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0 : b(\mathbf{v}, q) \geq \beta \| \mathbf{v} \|_V \| q \|_Q.$$

Soit

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\} \subset H_0^1(\Omega)^2$$

grâce au corollaire 1.1 nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} : V^\perp &\xrightarrow{\text{isom}} L_0^2(\Omega) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Soit  $q \in Q$ , donc  $\exists! \mathbf{v} \in V^\perp$  tel que :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = q,$$

d'après la continuité de  $(\operatorname{div})^{-1}$  nous avons :

$$\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \geq c \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \forall \mathbf{v} \in V^\perp,$$

donc

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2} \leq \frac{1}{c} \|q\|_{L^2(\Omega)} \quad (*)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}} &= \frac{(q, q)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}} = \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}}, \\ (*) \implies \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}} &\geq c \frac{1}{\|q\|_{L^2(\Omega)}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2}} &\geq \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 c \frac{1}{\|q\|_{L^2(\Omega)}} \\ &\geq c \|q\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'où

$$(q, \operatorname{div} \mathbf{v}) \geq c \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \forall q \in Q,$$

Soit  $\mathbf{w} = -\mathbf{v} \in V^\perp \subset H_0^1(\Omega)^2$ ,

$$(q, -\operatorname{div} \mathbf{w}) \geq c \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^2} \quad \forall q \in Q,$$

nous avons :

$$(q, -\operatorname{div} \mathbf{w}) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{w}),$$

$$-(q, \operatorname{div} \mathbf{w}) = b(\mathbf{w}, q).$$

De plus,  $H_0^1(\Omega)$  et  $L_0^2(\Omega)$  sont des espaces de Hilbert. Alors, la théorie de Babushka-Brezzi assure l'existence et l'unicité de  $(\mathbf{u}, p)$  (solution de problème (2.14) ).

■

## 2.2.2 Formulation mixte par l'utilisation de domaine fictif avec pénalisation $H^1$

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\Omega^S, \Omega^F \subset D$ , et  $D = \overline{\Omega^S} \cup \Omega^F$

**D**

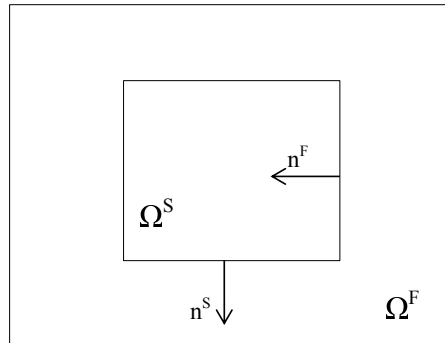


FIGURE 2.7 – Domaine de calcul

Maintenant nous allons résoudre un problème par la méthode de domaine fictif avec pénalisation  $H^1$  avec un coefficient de pénalité  $0 < \epsilon < 1$ , soit

$$\mathbf{u}_\epsilon : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad p_\epsilon : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \mathbf{u}_\epsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D$$

Donc notre problème est : trouver  $(\mathbf{u}_\epsilon, p_\epsilon) \in H_0^1(D)^2 \times L_0^2(D)$  tel que

$$\int_D 2\mu\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) : \epsilon(\mathbf{w}) \, dx - \int_D (\nabla \cdot \mathbf{w}) p_\epsilon \, dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega^F} (\mathbf{u}_\epsilon \cdot \mathbf{w} + \nabla \mathbf{u}_\epsilon : \nabla \mathbf{w}) \, dx = \int_D f \cdot \mathbf{w} \, dx \quad \forall \mathbf{w} \in H_0^1(D)^2 \quad (2.15)$$

$$- \int_D (\nabla \cdot \mathbf{u}_\epsilon) q \, dx = 0 \quad \forall q \in L_0^2(D) \quad (2.16)$$

où  $\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_\epsilon + (\nabla \mathbf{u}_\epsilon)^T)$  et  $\epsilon(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{w})^T)$ .

### 2.2.3 Calcul des erreurs

Lorsque nous calculerons des problèmes avec solutions exactes, nous vérifierons le résultat en calculant les erreurs relatives entre les solutions exactes  $\mathbf{u}$  et  $p$  et leurs approximations  $\mathbf{u}_{\epsilon,h}$  et  $p_{\epsilon,h}$ .

Pour la pression  $p$ , l'erreur absolue se fera pour la norme  $L^2$  :

$$\|p_{\epsilon,h} - p\|_{L^2(D)} = \left( \int_D (p_{\epsilon,h} - p)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $\mathbf{u}$  se trouve dans un sous espace de Sobolev de type  $H^1(D)^2$ , nous allons estimer l'erreur absolue pour la norme correspondante, c'est à dire

$$\|\mathbf{u}_{\epsilon,h} - \mathbf{u}\|_{H^1(D)^2} = \left( \sum_{i=1}^2 \|u_{i,\epsilon,h} - u_i\|_{H^1(D)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\|u_{i,\epsilon,h} - u_i\|_{H^1(D)}^2 = \|u_{i,\epsilon,h} - u_i\|_{L^2(D)}^2 + \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial u_{i,\epsilon,h}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(D)}^2.$$

Finalement, nos erreurs relatives sur  $\mathbf{u}$  et  $p$  seront calculées de la manière suivante :

$$Er(\mathbf{u}) = \frac{\|\mathbf{u}_{\epsilon,h} - \mathbf{u}\|_{H^1(D)^2}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1(D)^2}}$$



et

$$Er(p) = \frac{\|p_{\epsilon,h} - p\|_{L^2(D)}}{\|p\|_{L^2(D)}}$$

Nous considérons  $\Omega^S$  un petit carré dans le domaine  $D$ , tel que  $\Omega^S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ , et  $D$  c'est le grand carré qui est défini par  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 < 2, -1 < x_2 < 2\}$ . Nous mettons  $f = (f_1, f_2)$  dans le problème (2.11) tel que

$$f_1 = 256x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1)(12x_1^2 - 12x_1 + 2) + 256(12x_2 - 6)x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2 - 0.5$$

$$f_2 = -256x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)(12x_2^2 - 12x_2 + 2) - 256(12x_1 - 6)x_2^2(x_2 - 1)^2 + x_1 - 0.5$$

La solution exacte de (2.11) est :

$$u_1(x_1, x_2) = -256x_2(x_2 - 1)(2x_2 - 1)x_1^2(x_1 - 1)^2$$

$$u_2(x_1, x_2) = 256x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1)x_2^2(x_2 - 1)^2$$

$$p(x_1, x_2) = (x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Nous avons calculé les erreurs relatives avec la norme  $H^1(D)$  pour le  $\mathbf{u}$  et  $L^2(\Omega^S)$  pour le  $p$  par la pénalisation  $L^2$  et nous avons utilisé la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  par rapport à  $\mathbf{u}$  et  $\mathbb{P}_1$  par rapport à  $p$ , avec plusieurs valeurs de  $\epsilon$  et de  $h$ , (où  $h = \sqrt{2}/k$  ( $k = 10, 15, 20, 25$ )) nous avons obtenu les résultats suivant qui sont représentés par la Figure 2.8 pour  $\mathbf{u}$  et la Figure 2.9 pour  $p$ . Après, nous avons utilisé la pénalisation  $H^1$  et nous avons calculé l'erreur relative avec la norme  $H^1(D)$  pour le  $\mathbf{u}$  et  $L^2(\Omega^S)$  pour le  $p$ , les Figures 2.10 et 2.11 pour  $\mathbf{u}$  et  $p$  respectivement représentent ces résultats :

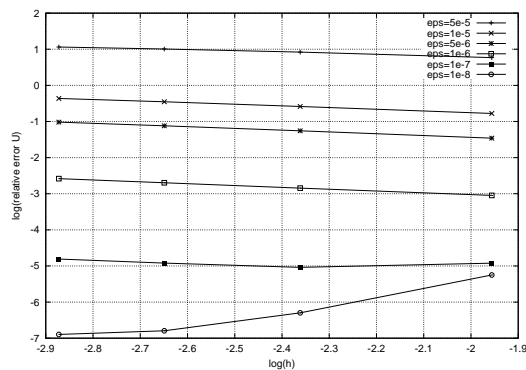


FIGURE 2.8 – L’erreur relative ( $Er(\mathbf{u})$ ) avec la pénalisation  $L^2$  avec échelle logarithmique.

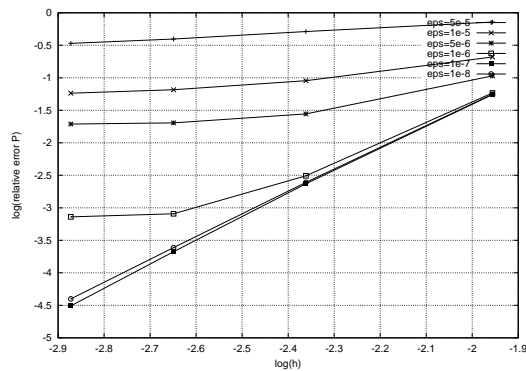


FIGURE 2.9 – L’erreur relative ( $Er(p)$ ) avec la pénalisation  $L^2$  avec échelle logarithmique.

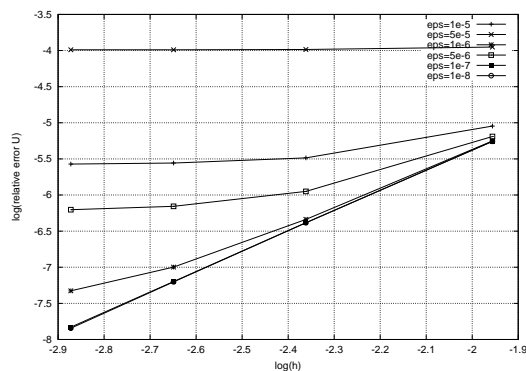


FIGURE 2.10 – L’erreur relative ( $Er(\mathbf{u})$ ) avec la pénalisation  $H^1$  avec échelle logarithmique.

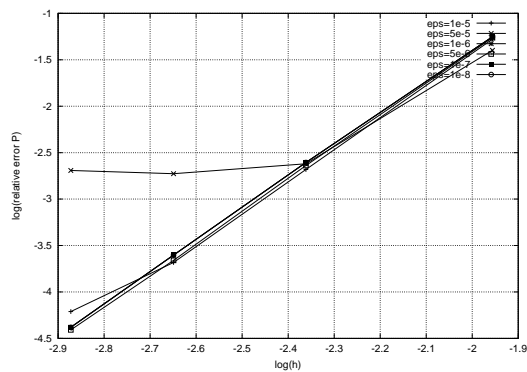


FIGURE 2.11 – L'erreur relative ( $Er(p)$ ) avec la pénalisation  $H^1$  avec échelle logarithmique.

Nous observons pour le problème de Stokes (Figure 2.8) le même phénomène que dans l'exemple précédent (Figure 2.2, 2.5).

A partir des résultats que nous avons trouvé pour les problèmes de Laplace et du Stokes, nous concluons que nous pouvons faire les calculs à partir du domaine fictif (où nous faisons la pénalisation) ou à partir du domaine réel.

# Conclusion Générale

La méthode de domaine fictif est une méthode permettant une résolution rapide et simple du problème étendu sur le domaine fictif, dans ce travail cette méthode a été testées avec succès, nous essaierons dans le future d'appliqué cette méthode pour résoudre des problème plus compliqué d'un certain phénomènes physique (en mécanique des fluide, électromagnétisme, biologie...).

# Bibliographie

- [1] R.A.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, San Francisco, London, 1975.
- [2] H.Brézis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications, dunod, Paris, 1999. Nouvelle présentation, 2005.
- [3] H.Brézis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.
- [4] M. Discacciati, Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Cour Master MA, EPFL, Lausanne, 2010.
- [5] M. Fabre. Méthodes de domaines fictifs pour les éléments finis, application à la mécanique des structures. PhD thesis, Lyon, INSA, 2015.
- [6] P. Girault, P.A. Raviart, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer, New York, 1986.
- [7] V.D. Kopčenov. Approximate solutions of the dirichlet problem by the method of fictive domains. Differential Equations, 4(1), 1968.
- [8] C.Murea. Schémas numériques stables pour fluides, structures et leurs interactions. Collection Mécaniques Des Fluides. ISTE, 2017.
- [9] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : A numerical method. Journal of Computational Physics, 10(2) :252–271, 1972.

- [10] I. Ramière. Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasiques. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille I, 2006.
- [11] R. Rockafellar. Convex Analysis princeton university press princeton. New Jersey Google Scholar, 1970.
- [12] N. Saito and G. Zhou. Analysis of the fictitious domain method with an  $l_2$ -penalty for elliptic problem. Numerical functional analysis and optimization, 36(4) : 501-527, 2015.
- [13] V.K. Saul'ev. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. Siberian Math. Journal, 4(4) :912–925, 1963.
- [14] G. Zhou and N. Saito. Analysis of the fictitious domain method with penalty for elliptic problem. Japan journal of industrial and applied mathematics, 31(1) :57-85, 2014.