RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et applications.

Thème

Indicateur d'erreur pour l'équation de Stokes

Présenté par :

Youssra Bouhenache

Devant le jury composé de

H. Benhassine	Université de Jijel Mohammed Seddik Ben Yahia	Président
S. Maarouf	Université de Jijel Mohammed Seddik Ben Yahia	Encadrante
R. Boufenouche	Université de Jijel Mohammed Seddik Ben Yahia	Examinatrice

Promotion **2019/2020**

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et reconnaissance a ma chère mère ***"Hasina"****.*

A mon cher père ***"Abd elghani"*** *et ma grand-mère* ***"Fatma"*** *qui m'ont toujours soutenu, qui m'ont aidé à affronter les difficultés.*

A mes belles soeurs ***"Amina"****,* ***"Sarra"****,* ***"Soulef"*** *et* ***"Samiha"*** *et chers frères* ***"Ramzi"*** *et* ***"Mouhammed"****.*

A toute ma famille ***"Bouhenache"*** *et* ***"Boukdjane"****.*

A tous les amis.

A tous.

Table des matières

Introduction

La compréhension des phénomènes du monde réel de notre technologie est aujourd'hui en grande partie basée sur les équations aux dérivées partielles qui modélisent de nombreux phénomènes (problèmes de la mécanique, de la physique, etc.). Nous rencontrons de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modélisation en physique, en mécanique du solide et des fluides. En particulier, pour les mathématiciens, les méthodes numériques sont le seul moyen de simuler ou de modéliser les phénomènes que nous observons, de les interpréter et de les comprendre.

L'adaptation de maillage est maintenant utilisée dans la plupart des discrétisations par éléments finis, puisqu'elle permet de retrouver la même précision à moindre coût grâce au choix d'une triangulation appropriée. La construction de cette triangulation repose le plus souvent sur des estimations a posteriori, plus exactement sur leur forme locale : les indicateurs d'erreur. Un premier calcul sur un maillage grossier permet en effet d'associer à chaque élément de la triangulation un "indicateur" que l'on peut calculer exactement à partir des données et de la première solution discrète. Le raffinement s'effectue alors localement en fonction de la taille de ces indicateurs. Différents types d'indicateurs ont été proposés et étudiés.

On s'intéresse ici plus particulièrement aux indicateurs dits "par résidu" initiées par Babuška et Rheinboldt (voir [2], [3]), et détaillées par Verfürth. En particulier, ces indicateurs sont optimaux pour un grand nombre d'équations, au sens précisé dans [7].

L'objectif de ce travail est d'estimer l'indicateur d'erreur par "résidu", pour cela nous décrivons l'équation du résidu pour l'erreur et nous démontrons les estimations d'erreur a posteriori pour le problème de Stokes.

Il y a deux façons d'estimer l'erreur due à la discrétisation, estimation a priori ou estimation a posteriori :

Les estimations d'erreur a priori sont des estimations qui fournissent des bornes sur l'écart de la solution approchée u_h à la solution exacte u. En effet, ces estimations d'erreur permettent de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique. Par contre, comme la régularité de la solution exacte u est en général inconnue, cette analyse ne permet pas le calcul de la norme de cette solution et par suite ne permet pas le contrôle de l'erreur.

L'estimation d'erreur a posteriori est l'analyse qui satisfait plusieurs objectifs. En premier lieu, elle contrôle globalement l'erreur de discrétisation du problème posé. De plus, cette analyse permet d'utiliser les ressources informatiques d'une manière convenable et efficace. En effet, l'avantage de l'analyse a posteriori est de fournir des bornes explicites sur l'erreur entre la solution numérique u_h et la solution exacte u dès que la solution approchée est connue. L'analyse a posteriori peut fournir des critères d'arrêt qui garantissent le contrôle global de l'erreur. Par conséquence, une étape importante sera de concevoir des estimations d'erreur a posteriori en distinguant les erreurs de linéarisation et de discrétisation. Ce type d'analyse a été initialisé pour une certaine classe de problèmes linéaires.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous rassemblons les notions et les résultats que nous utilisons fréquemment tout au long de ce manuscrit. Nous donnons des brèves définitions de quelques espaces fonctionnels, notamment, les espaces de Sobolev. Ensuite, on rappelle un résultat abstrait pour les problèmes mixtes comme le problème de Stokes aussi la condition 'inf-sup' continue. Puis, nous donnons des brèves descriptions de la méthode des éléments finis ensuite nous donnons un résultat d'approximation abstrait et la condition 'inf-sup' discrète pour notre problème. Dans la dernière section de ce chapitre, nous présentons les propriétés de l'analyse a posteriori résiduel, notamment, la fiabilité et l'efficacité. Puis, nous regroupons les outils de l'analyse, c'est à dire, les fonctions bulles et les inégalités inverses locales qu'on utilise pour montrer l'efficacité de l'analyse.

Au deuxième chapitre, nous commençons par l'étude de l'équation du problème de Stokes, où nous allons introduire la formulation variationnelle et nous montrons que le problème variationnel est bien posé puis nous vérifions l'équivalence entre le problème continu et le problème variationnel, ensuite nous donnons un résultat d'existence. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à la discrétisation de notre problème c'est à dire on présente le problème discret puis un résultat pour l'existence et l'unicité de la solution avec sa stabilité.

Dans le dernier chapitre, nous présentons dans la première section l'estimation d'erreur a priori entre la solution exacte u et la solution approchée u_h. Dans la deuxième section, nous

nous intéressons à l'estimation d'erreur a posteriori où nous écrivons l'équation de "résidu" pour l'erreur. Et, on définit l'indicateur d'erreur "par résidu". On montre que cet indicateur vérifie la propriété de fiabilité et d'efficacité. Enfin, nous déduisons que l'optimalité de l'indicateur assure l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur d'erreur a posteriori.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier les définitions et les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev classiques et les outils de la méthode des éléments finis. Nous présentons aussi quelques concepts utilisés.

1.1 Espaces Fonctionnels

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Dautray et Lions [13], Grisvard [14] et Lions et Magenes [17].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière. La définition suivante est nécessaire pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère.

Définition 1.1.1. *En dimension $d \geq 2$, un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien ou à frontière lipschitzienne si pour tout point $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, ..., y_d)$, un hypercube $U^{\boldsymbol{x}} = \prod_{i=1}^{d}]-a_i, a_i[$ et une application lipschitzienne $\Phi^{\boldsymbol{x}}$ de $\prod_{i=1}^{d-1}]-a_i, a_i[$ dans $]-\frac{a_d}{2}, \frac{a_d}{2}[$ tels que :*

$$\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ \ y_d > \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U^{\boldsymbol{x}} = \{(y_1, ..., y_d) \in U^{\boldsymbol{x}};\ \ y_d = \Phi^{\boldsymbol{x}}(y_1, ..., y_{d-1})\}.$$

Cette propriété signifie que la frontière coïncide localement avec le graphe d'une fonction lipschitzienne. Elle sera satisfaite par tous les ouverts considérés dans ce mémoire. Tout ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$ est également à frontière lipschitzienne (voir Grisvard [14, Corollaire 1.2.2.3]).

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note $\boldsymbol{x}$ le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit $d\boldsymbol{x}$ soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \ < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [20]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.1.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$.

Définition 1.1.4. *On définit l'espace $L_0^2(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$L_0^2(\Omega) = \{ \, p \in L^2(\Omega), \, \int_\Omega p \, d\boldsymbol{x} = 0 \},$$

muni de la norme

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega p^2(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La caractérisation de l'espace $L_0^2(\Omega)$ est pour l'unicité de la solution sur cet espace.

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [14]. On rappelle que l'ouvert Ω étant lipschitzien, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$. Si les composantes de $\boldsymbol{n}$ s'écrivent $(n_1, ..., n_d)$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ l'opérateur de dérivée normale $n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + n_d \frac{\partial}{\partial x_d}$.

Corollaire 1.1.1. (***Formule de Green***) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$- \int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \, d\sigma. \tag{1.2}$$

Définition 1.1.5. *Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme dual :*

$$\|f\|_{H^{-m}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{H^m(\Omega)}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

Lemme 1.1.2. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq d$, on peut définir une forme linéaire continue $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$< \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi >= - \int_\Omega v(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

1.2 Résultat abstrait pour les problèmes mixtes

Dans ce paragraphe, nous construisons un cadre abstrait bien adapté à la solution des problèmes variationnelles elliptiques comme le problème de Stokes, voir [15].

Soient X et M deux espaces de Hilbert munis de normes $\| \cdot \|_X$ et $\| \cdot \|_M$ respectivement. Et soient *X'* et *M'* leurs espaces duales correspondants. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ les crochets de dualité entre *X'* et X. On introduit deux formes bilinéaires continues

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b(\cdot, \cdot) : X \times M \to \mathbb{R}$$

On considère le problème variationnel suivant : Étant donné $f \in$ X', on cherche le couple $(u,p) \in X \times M$ tel que

$$\begin{cases} \forall v \in X, & a(u,v) + b(v,p) \quad = \langle f, v\rangle_{X',X}, \\ \forall q \in M, & b(u,q) \qquad\qquad\quad = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

On introduit le noyau de la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$

$$V = \{u \in X, \quad \forall q \in M,\ b(u,q) = 0\}. \tag{1.5}$$

La continuité de la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ implique que V est un sous-espace fermé de X. Par conséquent, si (u,p) est solution du problème (1.4), alors u est solution du problème réduit suivant

Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V.$$

Théorème 1.2.1. *On suppose que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est V-elliptique ,i.e.*
Il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $a(v,v) \geq \alpha\|v\|_X^2$, $\forall v \in V$. Alors, le problème (1.4) *est bien posé si et seulement si la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ satisfait la condition 'inf-sup' suivante*
Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta\|q\|_M, \quad \forall q \in M. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.1. *La condition* (1.6) *est souvent appelée* ***"la condition inf-sup"****, quelques auteurs l'appelent aussi* ***"la condition de Babuška-Brezzi"****, le courant actuel semble utiliser l'expression* ***"LBB condition"*** *qui veut dire : la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi.*

1.3 Méthode des éléments finis

Dans cette section, on présente les notions de base et les principaux outils de la méthode des éléments finis. On réfère à [6] pour plus de détail.

Définition 1.3.1. *Une triangulation de Ω est un ensemble fini $\mathcal{T}_h$ de sous-ensembles K de $\overline{\Omega}$ vérifiant les propriétés suivantes*

(i) On a

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

(ii) chaque élément K de $\mathcal{T}_h$ est un polygone ou un polyèdre connexe fermé de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide à frontière lipschitzienne,

(iii) l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{T}_h$ est soit vide soit un sommet, un côté ou une face entière de ces deux éléments.

Dans la plupart des cas, les triangulations sont composées de triangles ou de quadrilatères convexes en dimension $d = 2$, de tétraèdres ou de parallélépipèdes rectangles en dimension $d = 3$.

Soit h_K le diamètre de K. Il est d'usage que l'indice h de $\mathcal{T}_h$ représente le maximum des h_K, $K \in \mathcal{T}_h$.

Définition 1.3.2. (***Triangulation conforme***) *On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $N = 2$) ou polyédral (si $N = 3$). On dit qu'une triangulation $\mathcal{T}_h$ sur $\partial\Omega$ est admissible ou conforme, si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.*

Définition 1.3.3. *Une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ est dite régulière s'il existe une constante positive c telle que, pour tout h*
(i) en dimension $d = 1$, pour tous éléments K et K' de $\mathcal{T}_h$ ayant une extrémité commune, le rapport $\frac{h_K}{h_{K'}}$ est inférieur à c,
(ii) en dimension $d \geq 2$, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, le rapport $\frac{h_K}{\rho_K}$ est inférieur à c, où ρ_K désigne le diamètre de la plus grande sphère contenue dans K.

Définition 1.3.4. *On appelle coordonnées barycentriques λ_j, $1 \leq j \leq d+1$, d'un point $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d}$ de $\mathbb{R}^d$ par rapport aux $d+1$ sommets $\boldsymbol{a}_j$ non contenus dans un même hyperplan, la solution (unique) du système linéaire suivant*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{d+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq d, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1, \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coordonnées du point $\boldsymbol{a}_j$.

Notation 1.3.1. *Pour tout entier $k \geq 0$, on définit $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré total $\leq k$ et $\mathcal{P}_k(K)$ défini par l'espace des restrictions à K des fonctions de l'ensemble $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^d)$.*

On introduit quelques notations supplémentaires.

Notation 1.3.2. *À une triangulation $\mathcal{T}_h$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}_h$ des côtés $d = 2$ ou faces $d = 3$ des éléments de $\mathcal{T}_h$. On désigne par $\mathcal{E}_h^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_h$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$. Dans ce qui suit, h_e désigne le diamètre de n'importe quel élément e de $\mathcal{E}_h$.*

Notation 1.3.3. *Pour une triangulation* $\mathcal{T}_h$ *et tout élément* K *de* $\mathcal{T}_h$, *on note* $\mathcal{E}_K$ *l'ensemble des côtés* $d = 2$ *ou faces* $d = 3$ *de* K *et* $\mathcal{E}_K^0$ *l'ensemble des éléments de* $\mathcal{E}_K$ *qui ne sont pas contenus dans* $\partial\Omega$.

On réfère à [6, Lemme 2.7, chap XI] pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 1.3.4. *Pour tout élément* K *de* $\mathcal{T}_h$ *et tout élément* e *de* $\mathcal{E}_K$, *il existe un opérateur* $\mathcal{R}_{K,e}$ *de l'espace* $\mathcal{P}_{k+d-1}^0(e)$ *de polynômes de* $\mathcal{P}_{k+d-1}(e)$ *s'annulant sur* ∂e *dans* $\mathcal{P}_{k+d-1}(K)$ *tel que, pour tout élément* φ *de* $\mathcal{P}_{k+d-1}^0(e)$,

(i)

$$\mathcal{R}_{K,e}\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi(\boldsymbol{x}) & \text{dans } e, \\ 0 & \text{sur } \partial K \setminus e, \end{cases}$$

(ii) on ait l'estimation

$$|\mathcal{R}_{K,e}\varphi|_{H^1(K)} + h_K^{-1}\|\mathcal{R}_{K,e}\varphi\|_{L^2(K)} \leq c\, h_e^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^2(e)}. \tag{1.7}$$

On présente les propriétés des opérateurs de projection orthogonale qui sont démontrées en détail dans [6]. On introduit les espaces

$$X_h^0 = \{\boldsymbol{v}_h \in H_0^1(\Omega)^d : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \boldsymbol{v}_h|_K \in \mathcal{P}_k(K)^d\},$$

$$M_h = \{p_h \in L_0^2(\Omega) : \forall\, l \in \mathcal{T}_h,\ p_h|_K \in \mathcal{P}_l(K)\}.$$

Notation 1.3.5. *On note* Π_h *l'opérateur de projection orthogonale de* $L^2(\Omega)$ *sur l'espace* M_h *pour le produit scalaire associé à la norme* $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Théorème 1.3.6. *Pour tout entier* m, $1 \leq m \leq k+1$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Omega)$, *on ait*

$$\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, h^m \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Notation 1.3.7. *On note* $\Pi_h^{1,0}$ *l'opérateur de projection orthogonale de* $H_0^1(\Omega)$ *sur l'espace* X_h^0 *pour le produit scalaire associé à la semi norme* $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 1.3.8. *Pour tout entier* m, $1 \leq m \leq k+1$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *on ait*

$$|v - \Pi_h^{1,0} v|_{H^1(\Omega)} \leq c\, h^{m-1}\|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.9}$$

1.4 Résultat d'approximation abstrait et condition 'inf-sup' discrète

Cette section est consacrée à l'approximation du problème variationnel abstrait présenté dans la section 1.2. On réfère à [15] pour plus de détail.

On note h le paramètre de discrétisation qui tend vers 0.

Soient X_h et M_h deux espaces de dimension finie tels que $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$. On définit l'espace de dimension finie analogue à l'espace V défini dans (1.5)

$$V_h = \{u_h \in X_h,\ b(u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h\}.$$

On introduit maintenant le problème approché du problème (1.4)
Trouver $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} \forall v_h \in X_h, & a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle_{X',X}, \\ \forall q_h \in M_h, & b(u_h, q_h) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Théorème 1.4.1. *Supposons qu'il existe une constante $\alpha^* > 0$ telle que*

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|_X^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Si il existe une constante $\beta^* > 0$ telle que

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta^* \|q_h\|_M, \quad \forall q_h \in M_h, \tag{1.11}$$

alors l'espace $V_h \neq \emptyset$ et il existe un unique p_h dans M_h tel que (u_h, p_h) est l'unique solution du problème (1.10)*. De plus, il existe une constante positive C ne dépendant que de α^*, β^* tel que*

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq C \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M \right).$$

Lemme 1.4.2. ***(Lemme de céa)*** *On a la majoration d'erreur a priori entre la solution $\boldsymbol{u}_h$ du problème variationnel et la solution du problème discret $\boldsymbol{u}_h$;*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \sup_{v_h \in H^1(\omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

où M et α sont les quantités qui interviennent de la continuité et la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

1.5 Outils de l'analyse d'erreur a posteriori

Dans cette partie, on réfère à [6] pour les détails et les démonstrations des propriétés.
Supposons que l'on ait à résoudre numériquement le problème suivant : trouver u dans un espace de Banach X tel que $A(u) = f$. Si h désigne le paramètre de discrétisation on va donc chercher une solution u_h de l'équation $A(u_h) = f$ dans un sous-espace de dimension finie X_h de X.

Les estimations d'erreur a priori fournissent des bornes sur la différence entre la solution exacte u de X et la solution approchée u_h dans la norme (ou semi-norme) $\|\cdot\|_X$ sous la forme,

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, h^{m-1}\|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{1.12}$$

Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique employée. De plus, la constante générique c qui apparaît dans l'estimation (1.12) est soit inconnue, soit difficile à estimer. La difficulté la plus importante est que la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ n'est pas calculable, simplement parce que la solution exacte u est inconnue explicitement.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur a posteriori.

Définition 1.5.1. *On appelle estimation d'erreur a posteriori, une estimation de la forme,*

$$\|u - u_h\|_X \leq c\, \eta(h, u_h, f), \tag{1.13}$$

où c est une constante réelle positive indépendante du paramètre h caractérisant la précision du maillage. La quantité $\eta(h, u_h, f)$ est appelée estimateur d'erreur a posteriori, et ne dépend que de la solution approchée u_h du maillage $\mathcal{T}_h$ et de la donnée f (le second membre de l'équation).

On attribue à un estimateur d'erreur a posteriori, certaines propriétés qui attestent de sa qualité. Ainsi, il doit satisfaire les trois propriétés suivantes :
• **Propriété de fiabilité.** Une première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur a posteriori est de satisfaire l'estimation

$$\|u - u_h\|_X \leq c_1\, \eta(h, u_h, f) + H_1, \tag{1.14}$$

où H_1 est une quantité ne dépendant que du second membre et des conditions de bord du problème.

L'estimation (1.14) s'interprète comme une propriété de fiabilité puisqu'elle garantit que l'erreur $\|u - u_h\|_X$ est effectivement contrôlée par l'estimateur d'erreur a posteriori.

• **Adaptation de maillage.** Un estimateur d'erreur a posteriori doit donner des informations sur la distribution locale de l'erreur. Il doit pouvoir être localisé, par exemple sur chaque élément du maillage sous la forme,

$$\eta(h, u_h, f) = \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(h, u_h, f) \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.15}$$

Alors on dit que les quantités $\{\eta_K(h, u_h, f)\}_{K \in \mathcal{T}_h}$ sont des indicateurs d'erreur locaux.

• **Propriété d'efficacité.** Pour qu'une procédure de raffinement adaptatif de maillage soit efficace, il faut que les indicateurs d'erreur locaux obéissent à l'estimation,

$$\eta_K(h, u_h, f) \leq c_2 \|u - u_h\|_{\Delta_K} + H_{2,K}(h, f), \tag{1.16}$$

où Δ_K désigne l'espace des restrictions des fonctions de X à un voisinage fixé de K et $H_{2,K}(h, f)$ ne fait intervenir que h et les valeurs du second membre f sur ce même voisinage.

Définition 1.5.2. *Une estimation de l'erreur a posteriori par une quantité $\eta(h, u_h, f)$ dépendant du paramètre de discrétisation h, de la solution discrète u_h et des données f est dite optimale si elle satisfait la propriété de fiabilité* (1.14) *et la propriété d'efficacité* (1.16).

Remarque 1.5.1. *Le critère d'optimalité assure l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur d'erreur a posteriori. Ce critère permet donc d'assurer numériquement le bon comportement des indicateurs d'erreur a posteriori.*

Pour minorer localement l'erreur par les indicateurs d'erreur locaux, nous aurons besoin des fonctions bulles satisfaisant certaines propriétés.

Définition 1.5.3. *Soit λ_j, $1 \leq j \leq d+1$, les coordonnées barycentriques associées à K.*
1. La fonction bulle ψ_K est un élément de $\mathcal{P}_{d+1}(K)$, définie sur une maille K par :

$$\psi_K = (d+1)^{d+1} \prod_{j=1}^{d+1} \lambda_j.$$

2. Pour tout élément e de $\mathcal{E}_h$, on désigne par ψ_e la fonction bulle sur e égale au produit des d coordonnées barycentriques associées aux sommets de e

$$\psi_e = d^d \prod_{j=1}^{d} \lambda_j.$$

Lemme 1.5.1. *Les fonctions bulles vérifient les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} \psi_K &= 0 \quad sur\ \partial K, \\ \psi_e &= 0 \quad sur\ \partial W_e = \partial(K \cup K'), \\ \|\psi_K\|_{L^\infty(K)} &= \|\psi_e\|_{L^\infty(W_e)} = 1, \\ 0 \leq \psi_K &\leq 1, \\ 0 \leq \psi_e &\leq 1. \end{aligned}$$

Nous donnons à présent certaines inégalités inverses, lesquelles sont systématiquement utilisées pour établir la minoration locale de l'erreur, c'est-à-dire une estimation locale du type (1.16). L'idée principale consiste à majorer successivement chacun des termes intervenant dans la définition de l'indicateur local $\eta_K(h, u_h, f)$.

Proposition 1.5.2. *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$ et conforme dans le sens de la Définition 1.3.2. Alors pour tous $v_K \in \mathcal{P}_k(K)$ et $v_e \in \mathcal{P}_k(e)$, avec $e \in \mathcal{E}_K$, on a les inégalités suivantes :*

$$c\ \|v_K\|_{L^2(K)} \leq \|\psi_K^{\frac{1}{2}} v_K\|_{L^2(K)} \leq c'\ \|v_K\|_{L^2(K)}, \tag{1.17}$$

$$c\ \|v_e\|_{L^2(e)} \leq \|\psi_e^{\frac{1}{2}} v_e\|_{L^2(e)} \leq c'\ \|v_e\|_{L^2(e)}. \tag{1.18}$$

Proposition 1.5.3. *Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c\ \rho_K^{-m-\frac{d}{2}}\ h_K^{\frac{d}{2}} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{1.19}$$

Corollaire 1.5.4. *On suppose la triangulation $\mathcal{T}_h$ régulière dans le sens de la Définition 1.3.3. Pour tout entier m positif ou nul, il existe une constante c ne dépendant que de k telle que l'on ait pour tout d-simplexe K*

$$\forall v \in \mathcal{P}_k(K), \quad |v|_{H^m(K)} \leq c\ h_K^{-m} \|v\|_{L^2(K)}. \tag{1.20}$$

On désire finalement construire un opérateur de régularisation, appelé aussi opérateur de projection locale tel qu'introduit par P. Clément [11]. Dans ce but, on note $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq N_h^0$ les nœuds qui appartiennent à Ω.

Définition 1.5.4. *On définit l'opérateur $\tilde{\Pi}_h^0$ par*

$$\tilde{\Pi}_h^0 v = \sum_{i=0}^{N_h^0} (\pi_i v)(\boldsymbol{a}_i) \varphi_i,$$

à valeurs dans X_h^0, où π_i est un opérateur de régularisation dans un voisinage de $\boldsymbol{a}_i$ construit par projection locale (opérateur de projection orthogonale de $L^2(K_i)$ sur $\mathcal{P}_k(K_i)$).

Notation 1.5.5. *Pour tout triangle K de $\mathcal{T}_h$,*

- *on note Δ_K l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ partageant au moins un sommet avec K.*
- *l'ensemble Δ_e désigne l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ dont l'intersection avec e est non vide.*

Théorème 1.5.6. *Pour tout entier m, $1 \leq m \leq k+1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et pour toute fonction v de $H^m(\Delta_K)$ s'annulant sur $\Delta_K \cap \partial\Omega$, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(K)} \leq c\, h_K^m |v|_{H^m(\Delta_K)},$$

et

$$|v - \tilde{\Pi}_h^0 v|_{H^1(K)} \leq c\, h_K^{m-1} |v|_{H^m(\Delta_K)}.$$

Corollaire 1.5.7. *Pour tout entier m, $1 \leq m \leq k+1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$ et tout côté $(d=2)$ ou face $(d=3)$ e de K non contenu dans $\partial\Omega$, et pour toute fonction v de $H^m(\Delta_e)$ s'annulant $\Delta_e \cap \partial\Omega$, on ait*

$$\|v - \tilde{\Pi}_h^0 v\|_{L^2(e)} \leq c\, h_e^{m-\frac{1}{2}} |v|_{H^m(\Delta_e)}.$$

Chapitre 2

Équations de Stokes et sa discrétisation par éléments finis

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation de Stokes. Premièrement, on s'intéresse à écrire la formulation variationnelle puis à démontrer l'équivalence entre le problème aux limites et le problème variationnel et ensuite s'assurer de l'existence et l'unicité de la solution avec sa stabilité. Dans la deuxième section, on va discrétiser par la méthode des élément finis notre problème.

2.1 Problème continu

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, de frontière $\partial\Omega$. On considère le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ div\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les inconnues sont le champs de vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression p. La constante $\nu > 0$ représente le coefficient de viscosité du fluide. La donnée $\boldsymbol{f}$ représente la densité des forces.

2.1.1 Formulation variationnelle

Supposons que $\boldsymbol{f}$ appartient à $H^{-1}(\Omega)^d$ et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ les crochets de dualité entre $H^{-1}(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$. On multiplie la première ligne de (2.1) par une fonction test $\boldsymbol{v}$ de $H_0^1(\Omega)^d$ et la deuxième ligne par une fonction test q de $L_0^2(\Omega)$, il vient que

$$\begin{cases} \langle -\nu\Delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle\nabla p,\boldsymbol{v}\rangle & = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \\ \displaystyle\int_\Omega q(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} & = 0, \end{cases}$$

grâce au le lemme 1.1.2, on obtient

$$\begin{cases} \nu\displaystyle\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}):\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \\ \displaystyle\int_\Omega q(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

On introduit les formes bilinéaires suivantes :

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nu\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}):\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \text{et} \quad b(\boldsymbol{v},p) = -\int_\Omega p(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

La formulation variationnelle correspondante au problème (2.1) s'écrit :

Trouver $(\boldsymbol{u},p)$ dans $H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \forall\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d, & a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \\ \forall q\in L_0^2(\Omega), & b(\boldsymbol{u},q) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.1. *Le problème variationnel* (2.3) *et le problème aux limites* (2.1) *sont équivalents dans le sens où*

(i) *toute solution* $(\boldsymbol{u},p)$ *dans* $H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ *de* (2.1) *est solution de* (2.3).

(ii) *toute solution* $(\boldsymbol{u},p)$ *de* (2.3) *est solution de* (2.1) *au sens des distributions.*

Preuve. La propriété (i) est déjà démontré dans la partie précédente.
Pour prouver (ii), on prennent $(\boldsymbol{v},q)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)^d\times\mathcal{D}(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ dans (2.2), en appliquant la relation (1.3) sur la première équation, il vient que

$$\begin{cases} \forall\boldsymbol{v}\in\mathcal{D}(\Omega)^d, & \langle -\nu\Delta\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} + \langle\nabla p,\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = \langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d}, \\ \forall q\in\mathcal{D}(\Omega), & \displaystyle\int_\Omega q(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\langle -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d,\mathcal{D}(\Omega)^d}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)^d$$

ceci implique que

$$-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \ dans \ \mathcal{D}'(\Omega)^d.$$

Et de la deuxième relation on a $div\ \boldsymbol{u} = 0$ dans Ω. Puisque $\boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d$ on a $\boldsymbol{u} = 0$ sur $\partial\Omega$.

■

2.1.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette partie, nous sommes en position de présenter le résultat d'existence de la solution du problème (2.3).

Théorème 2.1.2. *Pour tout $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$, il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ du problème (2.3). Cette solution vérifie l'estimation suivante*

$$\big(|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)}\big) \leq c\, \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}. \tag{2.4}$$

Preuve. • On applique le Théorème 1.2.1 sur le problème de Stokes.
On rappelle l'espace

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d,\ \forall q \in L_0^2(\Omega),\ b(\boldsymbol{v}, q) = 0\}$$

qui est caractérisé par

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad div\, \boldsymbol{v} = 0\},$$

il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est V-elliptique .i.e, pour tout $\boldsymbol{v} \in V$, $\quad a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \nu|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Omega)^d}$.
Montrons maintenant la condition 'inf-sup' (1.6). Soit $q \in L_0^2(\Omega)$, d'après [[15], corollaire 2.4], il existe une fonction $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ telle que $\quad H_0^1(\Omega)^d = V \oplus V^\perp$, et tel que :

$$div\ \boldsymbol{v} = q \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d} \leq c\, \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

On obtient de cette propriété

$$\frac{(q, div\ \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}} = \frac{\|q\|^2_{L^2(\Omega)}}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \frac{1}{c}\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite,

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(q, div\ \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta\, \|q\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $\beta = \frac{1}{c} > 0$.
Par conséquent, d'après le Théorème 1.2.1, il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ de problème (2.3).

• Pour montrer l'estimation (2.4), on pose $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ dans la première ligne de (2.2), et grâce à la coercivité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\nu|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^d} = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d},$$

d'où

$$|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} \leq (\frac{1}{\nu})\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d. \tag{2.5}$$

D'autre part, on utilise la condition 'inf-sup' et l'inégalité (2.5), il vient que pour tout $\boldsymbol{v}$ non nul

$$\begin{aligned}
\beta|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq\ & b(\boldsymbol{v},p) \\
&= \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle - a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\
&\leq \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d} + \nu|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d} \\
&\leq c\big(\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}\big)|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d} \\
&\leq c'\ \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d},
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c'}{\beta}\ \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}. \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6), on trouve

$$\big(|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)}\big) \leq c\ \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d},$$

où $c = (\frac{1}{\nu} + \frac{c'}{\beta})$.

■

2.2 Discrétisation par éléments finis

Dans cette partie, on s'intéresse à la discrétisation par la méthode des éléments finis pour l'équation de Stokes puis on étudie l'existence et l'unicité de la solution discrète et sa stabilité.

2.2.1 Problème discret

On suppose maintenant que le domaine Ω est un polygone ou un polyèdre. Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations (par des triangles ou des tétraèdres), h désignant le plus grand diamètre des éléments K de $\mathcal{T}_h$. Pour un entier $k \geq 1$ et un élément K de $\mathcal{T}_h$, on définit l'espace $\mathcal{P}_k(K)$ des polynômes de degré total $\leq k$ sur K. Puis on pose

$$X_h^0 = \{\boldsymbol{v}_h \in H_0^1(\Omega)^d : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \boldsymbol{v}_h|_K \in \mathcal{P}_k(K)^d\},$$

$$M_h = \{p_h \in L_0^2(\Omega) : \forall\, l \in \mathcal{T}_h,\ p_h|_K \in \mathcal{P}_l(K)\},$$

où $\quad X_h^0 \subset H_0^1(\Omega)^d \quad$ et $\quad M_h \subset L_0^2(\Omega)$.
Le problème discret est construit par la méthode de Galerkin comme suit
Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^0, & a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v}_h, p_h) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, & b(\boldsymbol{u}_h, q_h) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Qui équivalent à :
Trouver $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times M_h$ telle que

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^0, & \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p_h(\boldsymbol{x}) div\ \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, & \displaystyle\int_\Omega q_h(\boldsymbol{x}) div\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \end{cases}$$

2.2.2 Résultat d'existence

Théorème 2.2.1. *Pour tout $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$ si la condition 'inf-sup' discrète est satisfaite, le problème* (2.7) *admet une solution unique $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times M_h$. De plus, cette solution vérifie l'estimation suivante*

$$\left(|\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq c\, \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d},$$

où c est une constante positive indépendante de h.

Preuve. • On a $X_h^0 \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert de dimension finie. Dans le cas du problème de Stokes, on a l'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ sur tout l'espace $H_0^1(\Omega)^d$. Donc en particulier sur l'espace $V_h = \{\boldsymbol{v}_h \in X_h^0,\ div\ \boldsymbol{v}_h = 0\ ;\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ \boldsymbol{v}_h|_K \in \mathcal{P}_k(K)^d\}$.
• La condition 'inf-sup' discrète étant supposée vérifiée, démonstration ici se fait de manière similaire qu'au cas continue. ■

Remarque 2.2.1. *Il faut faire attention au choix des espaces d'approximation* X_h^0 *et* M_h *pour la vitesse* $\boldsymbol{v}_h$ *et la pression* p_h*. Ils doivent être choisis de telles sorte que la condition 'inf-sup' discrète soit satisfaite.*
En effet, dans la démonstration précédente de la condition 'inf-sup' discrète, l'existence d'un $v_h \in V_h^{\perp}$ *tel que :* $\mathrm{div}\, v_h = q_h$*, impose que le polynôme* v_h *doit être d'un degré supérieur à celui du polynôme* q_h*.*

Chapitre 3

Estimation d'erreur a priori et a posteriori

Dans ce chapitre, on s'intéresse à estimer l'erreur entre la solution exacte $\boldsymbol{u}$ et la solution numérique $\boldsymbol{u}_h$ avec deux façons d'estimation : estimation a priori et estimation a posteriori.

3.1 Estimation d'erreur a priori

Commençons par un premier résultat pour l'approximation de $\boldsymbol{u}$ dans V_h. Ce résultat est à rapprocher du Lemme de Céa pour les problèmes elliptiques.

Proposition 3.1.1. *Soit* $(\boldsymbol{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ *la solution du problème variationnel* (2.2) *et* $\boldsymbol{u}_h \in X_h^0$ *la solution approchée déterminée par* (2.7). *Alors, il existe une constante* C>0 *indépendante de h telle que*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} \leq C \left(\underset{\boldsymbol{w}_h \in V_h}{inf} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \underset{q_h \in M_h}{inf} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{3.1}$$

Preuve. On a

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d.$$

D'autre part

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h.$$

On prend alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_h \in V_h$ dans la première relation, il vient que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v}_h, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h,$$

on voit que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v}_h, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h) = a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h,$$

ceci donne

$$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=-b(\boldsymbol{v}_h,p).$$

Et comme $b(\boldsymbol{v}_h,q_h)=0$, $\forall \boldsymbol{v}_h\in V_h$, $\forall q_h\in M_h$, on aura

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)&=-b(\boldsymbol{v}_h,p)+b(\boldsymbol{v}_h,q_h)\\&=-b(\boldsymbol{v}_h,p-q_h),\quad \forall q_h\in M_h.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Soit $\boldsymbol{w}_h\in V_h$, on a

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)&=a(\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)\\&=a(\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)-b(\boldsymbol{v}_h,p-q_h),\quad \forall q_h\in M_h.\end{aligned}$$

En tenant compte de la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et de $b(\cdot,\cdot)$, il vient que

$$a(\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)\leq c\,|\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}\big(|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

on prend $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h$ et en utilisant la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$, on obtient

$$\nu|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h|^2_{H^1(\Omega)^d}\leq \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+c\,|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

donc

$$|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}\leq (\frac{C}{\nu})\bigg(|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}+\underset{q_h\in M_h}{inf}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\bigg).\tag{3.3}$$

On utilise l'inégalité triangulaire suivante

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}\leq|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}+|\boldsymbol{w}_h-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d},\quad \forall \boldsymbol{w}_h\in V_h,$$

on obtient

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}\leq C\left(\underset{\boldsymbol{w}_h\in V_h}{inf}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\underset{q_h\in M_h}{inf}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ceci donne le résultat de la proposition. ■

Remarque 3.1.1. La proposition 3.1.1 est valable sans la condition 'inf-sup' discrète et ne fait appel qu'à la continuité des formes $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ ainsi qu'à la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ (ce qui est suffisant pour assurer l'existence et l'unicité de l'approximation $\boldsymbol{u}_h\in V_h$).

Lemme 3.1.2. *Soit la condition 'inf-sup' discrète vérifiée alors l'espace M_h vérifie la propriété suivante*

$$\dim M_h=\dim V_h^{\perp}.$$

Preuve. On considère $\{\varphi_i, i = 1, \cdots, N_{X_h^0}\}$ et $\{\psi_i, i = 1, \cdots, N_{M_h}\}$ des bases de X_h^0 et M_h respectivement (voir [19], Section 4.4). Soit $B \in \mathcal{M}_{N_{M_h} \times N_{X_h^0}}$ la matrice définie par $B_{ji} = b(\varphi_i, \psi_j)$. On rappelle que

$$dim\, X_h^0 = dim\, Ker(B) + dim\, Im(B).$$

Si on note $U = (u_i, \cdots, u_{N_{X_h^0}})$ le vecteur associé à $\boldsymbol{u} \in V_h$, où les (u_i) sont les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans la base (φ_i), on a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \in V_h &\Longleftrightarrow b(\boldsymbol{u}, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \\
&\Longleftrightarrow b(\sum_{i=1}^{N_{X_h^0}} u_i\varphi_i, \psi_j) = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, N_{M_h} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N_{X_h^0}} u_i b(\varphi_i, \psi_j) = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, N_{M_h} \\
&\Longleftrightarrow BU = 0 \\
&\Longleftrightarrow U \in Ker(B).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$dim\, V_h = dim\, Ker(B).$$

Par ailleurs, puisque $X_h^0 = V_h \oplus V_h^\perp$, on a $dim\, X_h^0 = dim\, V_h + dim\, V_h^\perp$.
On obtient ainsi $dim\, X_h^0 = dim\, V_h + dim\, V_h^\perp = dim\, Ker(B) + dim\, Im(B)$, d'où l'on déduit que

$$dim\, V_h^\perp = dim\, Im(B).$$

De plus, $dim\, M_h = dim\, Ker(B^\perp) + dim\, Im(B^\perp)$. Or $dim\, Ker(B^\perp) = 0$ car la condition 'inf-sup' discrète est vérifiée. On obtient donc $dim\, M_h = dim\, Im(B^\perp)$. Puisque $dim\, Im(B^\perp) = rang\,(B^\perp) = rang\,(B) = dim\, Im(B)$, on en obtient

$$dim\, M_h = dim\, Im(B).$$

Par une combinaison, on obtient

$$dim\, V_h^\perp = dim\, Im(B) = dim\, M_h.$$

■

Un deuxième résultat pour l'estimation d'erreur entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}_h$ est donné dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.3. *On suppose que X_h^0 et M_h sont tels que la condition 'inf-sup' discrète (1.11) soit vérifiée. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$\underset{\boldsymbol{w}_h \in V_h}{inf} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} \leq C \underset{\boldsymbol{v}_h \in X_h^0}{inf} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}. \tag{3.4}$$

Preuve. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

— On va d'abord montrer que pour tout $\boldsymbol{z}_h \in V_h^\perp$, il existe $q_h \in M_h$ tel que

$$b(\boldsymbol{v}_h, q_h) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h^\perp. \tag{3.5}$$

Pour $\boldsymbol{v}_h \in X_h^0 = V_h \oplus V_h^\perp$, on a $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{r}_h + \boldsymbol{s}_h$ avec $\boldsymbol{r}_h \in V_h$, $\boldsymbol{s}_h \in V_h^\perp$ et on obtient

$$b(\boldsymbol{v}_h, q_h) = b(\boldsymbol{r}_h, q_h) + b(\boldsymbol{s}_h, q_h) = b(\boldsymbol{s}_h, q_h),$$

et comme $\boldsymbol{z}_h \in V_h^\perp$, $\boldsymbol{r}_h \in V_h$, on a $b(\boldsymbol{r}_h, q_h) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{r}_h \, d\boldsymbol{x} = 0$, et donc

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{v}_h \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{r}_h \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{s}_h \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{z}_h : \nabla \boldsymbol{s}_h \, d\boldsymbol{x}.$$

Par ailleurs, on a

$$\dim M_h = \dim V_h^\perp,$$

de sorte que (3.5) est un système linéaire carré. L'unicité implique l'existence. Vérifions l'unicité de $q_h \in M_h$, tel que (3.5) soit vérifié. Supposons qu'il existe $q_h^1, q_h^2 \in M_h$ vérifiant (3.5). Alors, on a

$$b(\boldsymbol{v}_h, q_h^1) = b(\boldsymbol{v}_h, q_h^2), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h^\perp.$$

Par la condition inf-sup discrète, il existe $\boldsymbol{v}_h \in X_h^0, \boldsymbol{v}_h \neq 0$ tel que

$$\beta^* |\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d} \|q_h^1 - q_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq b(\boldsymbol{v}_h, q_h^1 - q_h^2) = 0$$

et par conséquent on a $q_h^1 = q_h^2$.

— On montre que pour tout $\boldsymbol{z}_h \in V_h^\perp$:

$$b(\boldsymbol{z}_h, q_h) \geq \beta^* |\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q_h \in M_h. \tag{3.6}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$b(\boldsymbol{v}_h, q_h) \leq |\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} |\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^0.$$

Et d'après (3.5), en prenant $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{z}_h$, on a

$$b(\boldsymbol{z}_h, q_h) = |\boldsymbol{z}_h|^2_{H^1(\Omega)^d},$$

d'où
$$b(\boldsymbol{v}_h, q_h) \leq \frac{b(\boldsymbol{z}_h, q_h)}{|\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d}} |\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^0.$$
En utilisant la condition inf-sup discrète, on obtient
$$\beta^* \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \frac{b(\boldsymbol{v}_h, q_h)}{|\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}} \leq \frac{b(\boldsymbol{z}_h, q_h)}{|z_h|_{H^1(\Omega)^d}},$$
ce qui prouve (3.6).

— Soit $\boldsymbol{w}_h \in X_h^0$. Comme $X_h^0 = V_h \oplus V_h^\perp$ alors on a la décomposition $\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{v}_h + \boldsymbol{z}_h$ avec $\boldsymbol{v}_h \in V_h$, $\boldsymbol{z}_h \in V_h^\perp$. De plus, nous avons
$$b(\boldsymbol{z}_h, q_h) = b(\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{v}_h, q_h) = b(\boldsymbol{w}_h, q_h) - b(\boldsymbol{v}_h, q_h) = b(\boldsymbol{w}_h, q_h),$$
car $\quad b(\boldsymbol{v}_h, q_h) = b(\boldsymbol{u}, q_h) = 0$, on aura
$$b(\boldsymbol{z}_h, q_h) = b(\boldsymbol{w}_h, q_h) - b(\boldsymbol{u}, q_h) = b(\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}, q_h).$$
Grâce à la condition 'inf-sup' discrète (3.6) et par la continuité de $b(\cdot,\cdot)$, il vient que
$$\beta^* |\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} \|q_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, |\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} \|q_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q_h \in M_h,$$
par conséquent
$$\forall \boldsymbol{z}_h \in X_h^0, \quad |\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} \leq \frac{c}{\beta^*} |\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}. \tag{3.7}$$
Par ailleurs, comme $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{z}_h$ et d'après la relation (3.7) ceci implique
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d} &= |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h + \boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} + |\boldsymbol{z}_h|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \frac{c}{\beta^*} |\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq C |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}, \quad \forall \boldsymbol{w}_h \in X_h^0. \end{aligned} \tag{3.8}$$
D'où l'estimation cherchée.

■

Le résultat suivant est pour l'estimation d'erreur sur la pression p.

Proposition 3.1.4. *On suppose que X_h^0 et M_h sont tels que la condition 'inf-sup' discrète* (1.11) *soit vérifiée. Alors, il existe une constante C>0 indépendante de h telle que*
$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \underset{q_h \in M_h}{inf} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{3.9}$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p)&=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^d,\ p\in L_0^2(\Omega),\\
a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b(\boldsymbol{v}_h,p_h)&=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h\in X_h^0,\ p_h\in M_h.
\end{aligned}
$$

Pour tout $\boldsymbol{v}_h\in X_h^0$, en soustrayant les deux équations, on trouve

$$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b(\boldsymbol{v}_h,p-p_h)=0,$$

qui est équivalent à,

$$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=-b(\boldsymbol{v}_h,p-p_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h\in X_h^0.$$

Grâce à la condition 'inf-sup' discrète on a pour tout $q_h\in M_h$, il existe $\boldsymbol{w}_h\in X_h^0$, w_h non nul et par la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\beta^*|w_h|_{H^1(\Omega)^d}\|p_h-q_h\|_{L^2(\Omega)} &\le b(\boldsymbol{w}_h,p_h-q_h)\\
&= b(\boldsymbol{w}_h,p_h-p)+b(\boldsymbol{w}_h,p-q_h)\\
&= a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h)+b(\boldsymbol{w}_h,p-q_h)\\
&\le \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}|\boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}+c\,|\boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\beta^*\|p_h-q_h\|_{L^2(\Omega)}\le \nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+c\,\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante

$$\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}\le \|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}+\|p_h-q_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

On conclut

$$\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}\le C\left(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\underset{q_h\in M_h}{inf}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

■

Corollaire 3.1.5. *Soit $(\boldsymbol{u},p)\in H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$ la solution de (2.2) et $(\boldsymbol{u}_h,p_h)\in X_h^0\times M_h$ la solution approchée déterminée par (2.7) tels que la condition 'inf-sup' discrète soit vérifiée. Alors, il existe une constante $C>0$ indépendante de h telle que*

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}\le C\left(\underset{\boldsymbol{v}_h\in X_h^0}{inf}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\underset{q_h\in M_h}{inf}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.10}$$

Preuve. Pour montrer cette corollaire on va utiliser les résultats précédents, alors d'après la proposition 3.1.4, nous avons

$$\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}\le C\left(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\underset{q_h\in M_h}{inf}\|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

on ajoute le terme $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}$ sur les deux membres de cette inégalité, il vient que

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq (1+C)\,|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+C \underset{q_h\in M_h}{inf} \|p-q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

en insérant l'inégalité (3.1) dans ce dernier, on trouve

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \underset{\boldsymbol{w}_h\in V_h}{inf} |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_h|_{H^1(\Omega)^d}+(1+C) \underset{q_h\in M_h}{inf} \|p-q_h\|_{L^2(\Omega)},$$

Par une combinaison de l'inégalité (3.4), on obtient facilement

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}+ \leq C\left(\underset{\boldsymbol{v}_h\in X_h^0}{inf} |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}+ \underset{q_h\in M_h}{inf} \|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

■

Sous les hypothèses précédentes, on a le résultat d'estimations d'erreurs suivant :

Théorème 3.1.6. *On suppose la solution* $(\boldsymbol{u},p)$ *du problème variationnel* (2.2) *appartient à* $[H^{m+1}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]^d\times H^m(\Omega)$*, alors pour tout* $1\leq m\leq k+1$*, on a l'estimation suivante*

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,h^m\big(|\boldsymbol{u}|_{H^{m+1}(\Omega)^d}+\|p\|_{H^m(\Omega)}\big), \tag{3.11}$$

où C *est un constante positive indépendante de* h*.*

Preuve. D'après le corollaire 3.1.5, on a la majoration suivante

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}+ \leq C\left(\underset{\boldsymbol{v}_h\in X_h^0}{inf} |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}+ \underset{q_h\in M_h}{inf} \|p-q_h\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

En choisissant explicitement que $\boldsymbol{v}_h=\Pi_h^{1,0}\boldsymbol{u}$ et $q_h=\Pi_h p$, on aura

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\big(|\boldsymbol{u}-\Pi_h^{1,0}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d}+\|p-\Pi_h p\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

En utilisant les estimations (1.8) et (1.9) sur cette dernière inégalité, on trouve la majoration désirée (3.11).

■

3.2 Estimation d'erreur a posteriori

Nous présentons dans cette section comment calculer la borne inférieur de l'erreur a posteriori et la borne supérieur du problème de Stokes. Pour cela, nous introduisons les théorèmes suivants afin de trouver une majoration de l'indicateur d'erreur η_K. Désormais, nous supposons que la donnée $\boldsymbol{f}$ appartient à $L^2(\Omega)^d$.

3.2.1 L'équation du résidu pour l'erreur

Dans cette partie notre but est d'exprimer une équation du résidu pour l'erreur. On utilise l'orthogonalité de Galerkin dans la première équation de (2.7), on trouve comme suit

$$a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v}_h, p - p_h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in X_h^0,$$

et d'autre part,

$$b(\boldsymbol{u}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Pour tout $(\boldsymbol{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p - p_h) &= a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h, p - p_h) \\ &= a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) + b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h, p) - a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) - b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h, p_h), \end{aligned}$$

et

$$b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, q) = -b(\boldsymbol{u}_h, q).$$

Par la définition des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$, il permet d'écrire

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p - p_h) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h) - b(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h, p_h) \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \nu \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &\quad + \int_\Omega p_h(\boldsymbol{x}) div \; (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Et par la décomposition du triangulation de Ω pour tout K de $\mathcal{T}_h$, nous avons

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p - p_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Bigg(&\int_K \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &- \nu \int_K \nabla \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) : \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_K p_h(\boldsymbol{x}) div \; (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \Bigg), \end{aligned} \tag{3.12}$$

par ailleurs, on a

$$b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, q) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K div \; \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

En appliquant la formule de Green (1.2) sur le deuxième et le troisième terme du membre à gauche de (3.12) pour tout K, il vient que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p - p_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Bigg(&\int_K \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &+ \nu \int_K \Delta \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_K \nabla p_h(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) \; d\boldsymbol{x} \\ &- \int_{\partial K} (\nu \partial_{\boldsymbol{n}_K} u_h - p_h \boldsymbol{n}_K)(\tau) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\tau) d\tau \Bigg), \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $\boldsymbol{n}_K$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à K.

Dans l'équation (3.13), l'intégrale sur ∂K s'écrit comme une somme d'intégrales sur les éléments e de $\mathcal{E}_K$, ces éléments se repartissent en deux parties :

• ou bien e est contenu dans $\partial\Omega$ et l'intégrale sur e est nulle, car v et v_h s'annulent sur $\partial\Omega$.

• ou bien e est contenu dans la frontière de deux éléments K et K' et au total, la quantité à intégrer sur e s'écrit comme

$$\begin{aligned}(\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K)(\tau)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\tau) + (\nu\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_{K'})(\tau)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\tau)\\ = [\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\tau),\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K]$ désigne le saut $(\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K) + (\nu\partial_{\boldsymbol{n}_{K'}}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_{K'})$.

En insérant la relation (3.14) dans l'équation (3.13), on trouve

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p-p_h) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ -\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

À partir de cette équation, nous allons majorer l'erreur en fonction des normes appropriées de $\boldsymbol{f}+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h$, $[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K]$ et $div\ \boldsymbol{u}_h$. La difficulté est que la fonction $\boldsymbol{f}$ peut être compliquée à calculer, pour éviter cet inconvénient, on fixe un entier $\ell \geq 0$ et définit l'espace

$$Z_h^d = \{\ \boldsymbol{f}_h \in L^2(\Omega)^d;\ \forall K\in\mathcal{T}_h,\ \boldsymbol{f}_{h|K}\in\mathcal{P}_\ell(K)^d\ \},$$

et nous introduisons une approximation de la donnée $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{f}_h$ dans Z_h^d, on trouve

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p-p_h) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\int_K(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ +\int_K(\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ -\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)(\tau)d\tau\Bigg).\end{aligned} \tag{3.15}$$

De plus, pour tout q dans $L_0^2(\Omega)$

$$b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,q) = -\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K div\ (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K div\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

Pour montrer la fiabilité et l'efficacité de l'estimation d'erreur a posteriori, nous posons $U=(\boldsymbol{u},p)$, $V=(\boldsymbol{v},q)\in Y = H_0^1(\Omega)^d\times L_0^2(\Omega)$, et définissons la forme $A(\cdot,\cdot)$ comme suit

$$\begin{aligned}A(U,V) &= a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) + b(\boldsymbol{u},q)\\ &= \nu\int_\Omega\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p\ div\ \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x} - \int_\Omega q\ div\ \boldsymbol{u}\ d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Théorème 3.2.1. *La forme $A(\cdot,\cdot)$ vérifie la condition 'inf-sup' suivante*

$$\forall\, U \in Y, \quad \sup_{V\in Y} \frac{A(U,V)}{\|V\|_Y} \geq \beta \|U\|_Y. \tag{3.18}$$

Preuve. Soit $U = (\boldsymbol{u}, p) \in Y$,

on a

$$\|U\|_Y = |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\boldsymbol{g}\in H^{-1}(\Omega)^d} \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{g}\rangle}{\|\boldsymbol{g}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}} + \sup_{l\in L^2_0(\Omega)} \frac{(p,l)}{\|l\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Or, pour tout couple $(\boldsymbol{g}, l) \in H^{-1}(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega)$. Il existe unique couple $V = (\boldsymbol{v}, q) \in Y$ solution du problème de Stokes.

$$\begin{cases} -\nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla q &= \boldsymbol{g} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ -div\ \boldsymbol{v} &= l \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{v} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Notons que la solution $V = (\boldsymbol{v}, q)$ du problème de Stokes (3.19) dépend continument du couple $(\boldsymbol{g}, l)$ d'après [15]. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|V\|_Y &= |\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(\|\boldsymbol{g}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + \|l\|_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Comme $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 2\left(\frac{a+c}{b+d}\right)$, on obtient

$$\|U\|_Y \leq 2 \sup_{(\boldsymbol{g},l)\in H^{-1}(\Omega)^d\times L^2_0(\Omega)} \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{g}\rangle + (p,l)}{\|\boldsymbol{g}\|_{H^{-1}(\Omega)^d} + \|l\|_{L^2(\Omega)}}, \tag{3.21}$$

on construit la forme bilinéaire $A(\cdot,\cdot)$ du problème (3.19), et en remplaçant (3.20) dans l'inégalité (3.21), on trouve

$$\|U\|_Y \leq 2\, C \sup_{V\in Y} \frac{A(U,V)}{\|V\|_Y}.$$

D'où la forme $A(U,V)$ vérifie la condition 'inf-sup'. ■

-Le problème (2.3) est équivalent au problème suivant : Trouver U dans Y tel que

$$\forall\, V \in Y\ , \quad A(U,V) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} d\boldsymbol{x}.$$

On voit aussi que le problème (2.7) est équivalent à : Trouver U_h dans $Y_h = X^0_h \times M_h$ tel que

$$\forall\, V_h \in Y_h\ , \quad A(U_h, V_h) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x}.$$

Alors, pour tout $U_h = (\boldsymbol{u}_h, p_h)$ dans Y_h et $(\boldsymbol{v}, q) \in Y$ on a

$$A(U - U_h, V) = \nu \int_\Omega \nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) : \nabla\boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (p - p_h)\ div\ \boldsymbol{v}\ d\boldsymbol{x} - \int_\Omega q\ div\ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\ d\boldsymbol{x} \tag{3.22}$$

et pour tout $q \in L^2_0(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega q\; div\; (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega q\; div\; \boldsymbol{u}_h\; d\boldsymbol{x}. \tag{3.23}$$

Nous obtenons alors en combinant les relations (3.15) et (3.23) dans l'égalité (3.22) **l'équation du résidu pour l'erreur** suivante ;

$$\begin{aligned} A(U-U_h, V) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Bigg(& \int_K (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ & + \int_K (\boldsymbol{f}_h + \nu \Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h)(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ & + \int_K q(\boldsymbol{x}) div\; \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} \int_e [\nu \partial_{\boldsymbol{n}_K} \boldsymbol{u}_h - p_h \boldsymbol{n}_K](\tau) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)(\tau) d\tau \Bigg). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous définissons en premier lieu l'indicateur d'erreur de discrétisation par la définition suivante

Définition 3.2.1. *Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, l'indicateur d'erreur est défini par*

$$\eta_K = h_K \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\nu \partial_{\boldsymbol{n}_K} \boldsymbol{u}_h - p_h \boldsymbol{n}_K]\|_{L^2(\Omega)^d} + \|div\; \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.25}$$

où $\boldsymbol{f}_h$ est une approximation de $\boldsymbol{f}$ dans Z_h^d.

Nous prouvons les deux propriétés de **fiabilité** et **d'efficacité** de l'indicateur d'erreur dans les théorèmes 3.2.3 et 3.2.2 suivants ;

Théorème 3.2.2. *Soient $(\boldsymbol{u}, p) \in H^1_0(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega)$ une solution du problème (2.2) et $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h^0 \times M_h$ une solution du problème discret (2.7), on suppose que la donnée $\boldsymbol{f}$ dans $L^2(\Omega)^d$. Alors, il existe une constante C indépendante de h tel que*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}\right)\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

Preuve. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur l'équation (3.24) pour tout $V \in H^1_0(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega)$ et tout $\boldsymbol{v}_h \in X_h^0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} A(U - U_h, V) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Bigg(& \left(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} + \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta\boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}\right) \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{L^2(K)^d} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} \|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K} \boldsymbol{u}_h - p_h \boldsymbol{n}_K]\|_{L^2(e)^d} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{L^2(e)^d} + \|div\; \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(K)} \|q\|_{L^2(K)} \Bigg), \end{aligned}$$

nous appliquons la condition 'inf-sup' (3.18) et en remplaçant U par $U - U_h$, tel que $\|U - U_h\|_Y = |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$, on trouve la relation suivante

$$\beta\|U - U_h\|_Y\|V\|_Y \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\big(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} + \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta\boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}\big)\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{L^2(K)^d}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K]\|_{L^2(e)^d}\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\|_{L^2(e)^d} + \|div\ \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(K)}\|q\|_{L^2(K)}\Bigg).$$

On choisit $\boldsymbol{v}_h = \tilde{\Pi}_h^0\boldsymbol{v}$, d'après le Théorème 1.5.6, il vient que

$$\|\boldsymbol{v} - \tilde{\Pi}_h^0\boldsymbol{v}\|_{L^2(K)^d} \leq c\, h_K|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Delta_K)^d},$$

et du Corollaire 1.5.7, nous avons

$$\|\boldsymbol{v} - \tilde{\Pi}_h^0\boldsymbol{v}\|_{L^2(e)^d} \leq c\, h_e^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Delta_e)^d},$$

tels que Δ_K et Δ_e sont introduits par la Notation 1.5.5, alors

$$\beta\|U - U_h\|_Y\|V\|_Y \leq c\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(h_K\big(\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} + \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta\boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}\big)|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Delta K)^d}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}h_e^{\frac{1}{2}}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K]\|_{L^2(K)^d}|v|_{H^1(\Delta e)^d} + \|div\ \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(K)}\|q\|_{L^2(K)}\Bigg).$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\beta\|U - U_h\|_Y\|V\|_Y \leq c\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}h_K^2\big(\ \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} + \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta\boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}\big)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Delta K)^d}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}h_e\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K]\|^2_{L^2(e)^d}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Delta_e)^d}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|div\ \boldsymbol{u}_h\|^2_{L^2(K)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|q\|^2_{L^2(K)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme

$$\big(\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d}+\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)^d}\big)^2 \leq 2\ \big(\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}+\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|^2_{L^2(K)^d}\big),$$

on aura

$$\beta\|U-U_h\|_Y\|V\|_Y \le c\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2\big(\,\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}+\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|^2_{L^2(K)^d}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Delta_K)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\Big(\frac{1}{4}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h-p_h\boldsymbol{n}_K]\|^2_{L^2(e)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Delta_e)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|div\ \boldsymbol{u}_h\|^2_{L^2(K)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|q\|^2_{L^2(K)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

donc,

$$\beta\|U-U_h\|_Y\|V\|_Y \le c\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(h_K^2\big(\,\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}+\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|^2_{L^2(K)^d}\big)$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h-p_h\boldsymbol{n}_K]\|^2_{L^2(e)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(K)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|div\ \boldsymbol{u}_h\|^2_{L^2(K)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|q\|^2_{L^2(K)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors

$$\beta\|U-U_h\|_Y\|V\|_Y \le c\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big(\eta_K^2+h_K^2\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(K)^d}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|q\|^2_{L^2(K)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

grâce à l'inégalité $a^2+b^2\le(a+b)^2$ appliquée sur le dernier terme, et en rappelant qu'un même élément de $\mathcal{T}_h$ n'est contenu que dans un nombre fini (borné indépendamment de h) de Δ_K, on obtient

$$\beta\|U-U_h\|_Y\|V\|_Y \le c\Big(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big(\eta_K^2+h_K^2\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|^2_{L^2(K)^d}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}+\|q\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

En divisant les deux membres cette dernière relation par la valeur $\|V\|_Y=|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)^d}+\|q\|_{L^2(\Omega)}$, nous trouvons la majoration souhaitée.

■

Théorème 3.2.3. *On suppose la donnée $\boldsymbol{f}$ du problème (2.1) dans $L^2(\Omega)^d$. Pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, l'indicateur d'erreur η_K vérifie la majoration suivante*

$$\eta_K\le\big(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\omega_K)^d}+\|p-p\|_{L^2(\omega_K)}+\sum_{\kappa\in\omega_K}h_\kappa\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\big),\qquad(3.27)$$

où ω_K est l'union des triangles partageant au moins un côté ($d=2$) ou une face ($d=3$) avec K.

Preuve. Le principe de cette propriété est de majorer chaque terme de l'indicateur d'erreur, pour cela en prenant $\boldsymbol{v}_h = 0$ dans **l'équation du résidu** (3.24), nous avons que

$$\forall\, V \in Y, \quad A(U-U_h, V) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_K (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e [\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau)d\tau + \int_K q(\boldsymbol{x})\, div\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\Bigg). \tag{3.28}$$

La preuve se fait en trois étapes.

▶ Nous commençons par majorer le terme $h_K\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)^d}$, on choisit successivement dans l'équation précédente, $\boldsymbol{v}$ est égal à

$$\boldsymbol{v}_K = \begin{cases} (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)\psi_K & sur\ K,\\ 0 & sur\ \Omega\setminus K,\end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K, et on a $V_K = (\boldsymbol{v}_K, q_K)$ tel que $q_K = 0$. La fonction $\boldsymbol{v}_K$ est à support contenu dans le triangle K qui s'annule sur ∂K, donc le terme $\displaystyle\int_e [\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot\boldsymbol{v}_K(\tau)d\tau = 0.$

De (3.28), on obtient

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} A(U-U_h, V_K) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_K (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\Bigg),$$

donc

$$A(U-U_h, V_K) = \int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_K (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Et d'après (3.16) et (3.17), on obtient

$$\int_K (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \nu\int_K \nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x}) : \nabla\boldsymbol{v}_K d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_K (p-p_h)(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

on écrit $\boldsymbol{v}_K$ explicitement dans le membre à gauche

$$\int_K (\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)^2(\boldsymbol{x})\psi_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \nu\int_K \nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x}) : \nabla\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_K (p-p_h)(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

ceci est équivalent à

$$\|(\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(K)^d} = \nu\int_K \nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x}) : \nabla\boldsymbol{v}_K d\boldsymbol{x} + \int_K (p-p_K)(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$-\int_K (\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_K(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{f}_h + \Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(K)^d} \leq \nu |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d} |\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} + c\,\|p - p_h\|_{L^2(K)} |\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} \\ + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} \|\boldsymbol{v}_K\|_{L^2(K)^d}.\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité inverse (1.17), on aura

$$c\,\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d} \leq \|(\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h)\psi^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)^d},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}c\,\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|^2_{L^2(K)^d} \leq & \nu |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d} |\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} + c\,\|p - p_h\|_{L^2(K)} |\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} \\ & + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} \|\boldsymbol{v}_K\|_{L^2(K)^d}.\end{aligned}$$

De l'inégalité (1.20), il vient que

$$|\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} \leq c\, h_K^{-1} \|\boldsymbol{v}_K\|_{L^2(K)^d},$$

et, on a

$$\|\boldsymbol{v}_K\|_{L^2(K)^d} = \|(\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h)\psi_K\|_{L^2(K)^d} \leq c'\,\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}.$$

Donc

$$|\boldsymbol{v}_K|_{H^1(K)^d} \leq c\, h_K^{-1} \|\boldsymbol{v}_K\|_{L^2(K)^d} \leq c''\, h_K^{-1} \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}.$$

Nous obtenons, alors

$$\begin{aligned}c\,\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|^2_{L^2(K)^d} \leq c''\, h_K^{-1} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d} \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d} \\ + c\, h_K^{-1} \|p - p_h\|_{L^2(K)} \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d} \\ + c'\,\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d} \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d},\end{aligned}$$

en divisant les deux membres par $\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d}$, on trouve

$$c\,\|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d} \leq c\, h_K^{-1}\big(|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(K)}\big) + c'\,\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d}.$$

En multipliant cette dernière inégalité par h_K, on obtient

$$h_K \|\boldsymbol{f}_h + \nu\Delta \boldsymbol{u}_h - \nabla p_h\|_{L^2(K)^d} \leq c\,\big((|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(K)}) + h_K \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)^d}\big). \tag{3.29}$$

► Par ailleurs, on calcule une estimation pour le terme $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h^{\frac{1}{2}} \int_e [\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau)d\tau$.

Pour une arête e, soient K et K' les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e et soit $V = (\boldsymbol{v}_e, 0)$, on remplace $\boldsymbol{v}$ par $\boldsymbol{v}_e$ dans l'équation (3.24) avec

$$\boldsymbol{v}_e = \begin{cases} \mathcal{R}_{\kappa,e}\big([\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\big) & \kappa \in \{K, K'\}, \\ 0 & sur\ \Omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e, et la fonction $[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e$ s'annule sur ∂e de sorte que v_e s'annule sur $\partial(K \cup K')$ et $\mathcal{R}_{\kappa,e}$ étant l'opérateur de relèvement défini comme dans le lemme 1.3.4, et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_K}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_K](\tau)\cdot\boldsymbol{v}_e(\tau)d\tau &= \frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\{K,K'\}}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa](\tau)\cdot\boldsymbol{v}_e(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{2}\int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa](\tau)\cdot\boldsymbol{v}_e(\tau)d\tau\\ &= \int_e[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]^2(\tau)\psi_e(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Pour tout $\kappa \in \{K, K'\}$, en remplaçant la relation précédente dans l'équation (3.24), il vient que

$$\begin{aligned}\int_e[\nu\partial_{\nu\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]^2(\tau)\psi_e(\tau)d\tau = -A(U-U_h,V) + \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}&\Big(\int_\kappa(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+\int_\kappa(\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\Big),\end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(e)^d} = \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}&\Big(-\nu\int_\kappa\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x}):\nabla\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &-\int_\kappa(p-p_h)(\boldsymbol{x})div\ \boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}+\int_\kappa(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+\int_\kappa(\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h)(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}_e(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\Big).\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(e)^d} = \sum_{\kappa\in\{K,K'\}}&\Big(\nu|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d}|\boldsymbol{v}_e|_{H^1(\kappa)^d} + c\,\|p-p_h\|_{L^2(\kappa)}|\boldsymbol{v}_e|_{H^1(\kappa)^d}\\ &+\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|\boldsymbol{v}_e\|_{L^2(\kappa)^d}+\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|\boldsymbol{v}_e\|_{L^2(\kappa)^d}\Big),\end{aligned}$$

d'après l'inégalité l'inverse (1.18), on voit que

$$c\,\|[\nu\partial_{n_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d} \le \|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)^d}.$$

Or

$$|\boldsymbol{v}_e|_{H^1(\kappa)^d} + h_\kappa^{-1}\|\boldsymbol{v}_e\|_{L^2(\kappa)^d} \le c\,h_e^{-\frac{1}{2}}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d},$$

ceci implique

$$\begin{aligned}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|^2_{L^2(e)^d} \le c\sum_{\kappa\in\{K,K'\}}&\Big(h_e^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\|_{L^2(e)^d}\\ &+h_e^{-\frac{1}{2}}\|p-p_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\|_{L^2(e)^d}\\ &+h_\kappa h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\|_{L^2(e)^d}\\ &+h_\kappa h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\|_{L^2(e)^d}\Big).\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \psi_e \leq 1$ d'après lemme 1.5.1, on aura

$$\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\psi_e\|_{L^2(e)^d} \leq c' \, \|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d},$$

on trouve

$$\begin{aligned}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|^2_{L^2(e)^d} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(& h_e^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d} \\ & + h_e^{-\frac{1}{2}}\|p-p_h\|_{L^2(\kappa)}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d} \\ & + h_\kappa h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa\|_{L^2(e)^d} \\ & + h_\kappa h_e^{-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(\kappa)^d}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_\kappa}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_\kappa]\|_{L^2(e)^d}\Big),\end{aligned}$$

en divisant sur $\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_k}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_k]\|_{L^2(e)^d}$ et en multipliant par $h_e^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}h_e^{\frac{1}{2}}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_k}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_k]\|_{L^2(e)^d} \leq c \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(& |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d} + \|p-p_h\|_{L^2(\kappa)} \\ & + h_k\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d} + \|\boldsymbol{f}_h+\nu\Delta\boldsymbol{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(\kappa)^d}\Big).\end{aligned}$$

En utilisant (3.29) pour majorer le dernier terme dans l'inégalité précédente, on trouve

$$h_e^{\frac{1}{2}}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_k}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_k]\|_{L^2(e)^d} \leq C \sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d} + \|p-p_h\|_{L^2(\kappa)} + h_\kappa\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\Big),$$

en passant à la somme sur $e \in \mathcal{E}_K^0$, il vient que

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\mathcal{E}_K^0} h_e^{\frac{1}{2}}\|[\nu\partial_{\boldsymbol{n}_k}\boldsymbol{u}_h - p_h\boldsymbol{n}_k]\|_{L^2(e)^d} \leq C \sum_{e\in\mathcal{E}_K^0}\sum_{\kappa\in\{K,K'\}} \Big(& |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(\kappa)^d} + \|p-p_h\|_{L^2(\kappa)} \\ & + h_\kappa\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d}\Big).\end{aligned} \tag{3.30}$$

▶ De plus, pour majorer le dernier terme $\|div\ \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(K)}$ de l'indicateur, nous prenons $q = q_K$ dans (3.16) tels que

$$q_K = \begin{cases} div\ \boldsymbol{u}_h & sur\ K, \\ 0 & sur\ \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Alors, il vient que

$$\int_K q_K(\boldsymbol{x}) div\ (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\int_K q_K(\boldsymbol{x}) div\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve la majoration suivante

$$\|div\ \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(K)} \leq \|div\ (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{L^2(K)} \leq c\,|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|_{H^1(K)^d}. \tag{3.31}$$

En combinant des relations (3.29), (3.30) et (3.31), on trouve l'estimation cherchée.

■

Remarque 3.2.1. Par une combinaison des deux propriétés de fiabilité et d'efficacité prouvée dans les théorèmes précédentes (3.2.2 et 3.2.3), on obtient l'optimalité de l'estimation d'erreur a posteriori pour l'indicateur au sens de la Définition 1.5.2 .

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'équation de Stokes en décrivant une formulation variationnelle correspondante puis en proposant une discrétisation par la méthode des éléments finis. Ensuite nous avons écrit l'équation du résidu pour l'erreur. Ainsi, nous avons proposé une famille d'indicateurs d'erreur par résidu et nous avons validé l'estimation d'erreur a priori et a posteriori entre les solutions des problèmes exacte et discret puis l'optimalité des estimations d'erreur.

Bibliographie

[1] R.A. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 2003.

[2] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. *Error estimates for adaptative finite element computations.* SIAM, J. Numer. Anal., **15** : $736 - 754, 1978$.

[3] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. *A posteriori error estimates for the finite element method.* Int. J. Num. Meth. Engrg., **12** : $1597 - -1615, 1978$.

[4] C. Bernardi and O. Bonnin, C. Langouët and B. Métivet. *Residual error indicators for linear problems. Extension to the Navier-Stokes equations,* Proc. Int. Conf. Finite Elements in Fluids, Venezia, $347 - 356$, 1995.

[5] C. Bernardi and V. Girault. *A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements,* SIAM. Numer. Anal., **35** : $1893 - 1916$, 1998.

[6] C. Bernardi, Y. Maday, and F. Rapetti. *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques.* volume 45 of Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Paris, 2004.

[7] C. Bernardi, B. Métivet, and R. Verfürth. *Analyse numérique d'indicateurs d'erreur.* Rapport technique, Université Paris 6, 1993.

[8] C. Bernardi and R. Verfürth. *A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent stokes equations.* ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 38(3), 437-455.

[9] C.Bernardi,T.C.Rabollo, D.Yakoubi, *Finite element descretisation of the Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions on the pressure.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 53(3), 1256-1279.,

[10] J. Céa. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier Grenoble, **14** : 345-444, 1964.

[11] P. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization.* Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, **9**(R2) : $77 - 84$, 1975.

[12] J. Dakroub. *Analyse a posteriori d'algorithmes itératifs des problèmes non linéaires.* université pierre et marie curie, thèse de Doctorat, Paris, 2014.

[13] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques. Vol. 1.* Masson, Paris, 1987.

[14] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics.* Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[15] V. Girault,P. -A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations ,Theory and algorithms.* Université Pierre et Marie Curie,Springer-Verlag, 1986.

[16] F. Hecht. *Métriques et indicateurs d'erreur.* In cours maillage. Paris, INRIA, CEA, EDF, 2003.

[17] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1.* Dunod, Paris, 1968.

[18] M. Schatzman. *Analyse Numérique. Cours et Exercices pour la Licence.* InterEditions, Paris,1991.

[19] J.-F. Scheid. *Analyse numérique des équations de Navier Stokes.* Institut E. Cartan UMR, 7502, octobre 2017.

[20] L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[21] R. Verfürth. *A posteriori error analysis of space-time finite element discretizations of the time dependent stokes eqautions.* Calcolo, 47(3), 149-167.