REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master
Spécialité : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

Analyse Numériques des Equations de Stokes Couplées avec l'Equation de la Chaleur

Présenté par :
Halima Boutabouna

Devant le jury :

Président	O. Yakhlef	MCB Université de Jijel
Encadreur	Y. Daikh	MCA Université de Jijel
Examinateur	H. Zerroug	MAA Université de Jijel

Promotion : 2019/2020

Remerciement

Je souhaite remercier plusieurs personnes sans lesquelles ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Tout d'abord, merci ALLAH, le tout puissant qui m'a accordé la volonté, le courage et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Avec une immense estimation, je tiens à remercier chaleureusement ma directrice de recherche Madame Y. Daikh pour m'avoir dirigé tout au long de la réalisation de ce travail, pour ses précieux conseils, pour ses orientations, ses encouragements et sa disponibilité constante.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres de jury monsieur O. Yakhlef et madame H. Zerroug pour l'intérêt qu'ils ont apporté à lire et à présider et examiner ce travail.

Je tiens à remercier également tous mes enseignants du département de mathématiques qui ont participé à mes formations et à enrichir mes connaissances tout au long de mes années universitaires.

Pour finir, un grand merci à ma famille, à mes amis qui ont su me soutenir, me consoler durant cette longue année de travail et à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin dans l'èlaboration et la finalisation de ce mémoire.

Dédicaces

J e dédie ce modeste travail en signe de respect, de gratitude et de reconnaissance.

A mes chers parents pour leur amour, leurs soutiens et leurs sacrifices. que Dieu me le garde.

A mes frères et sœurs que j'estime beaucoup, pour leurs disponibilités, leurs présences et leurs soutiens. Tout mes souhaits de bonheur et de réussite dans leurs vies.

A toutes ma famille, mes amis qui ont été avec moi dans mes meilleurs ainsi mes pires moments.

A ceux qui ne sont pas cités ici mais que je porte dans mon cœur.

HALIMA.

Table des matières

Introduction

La mécanique des fluides est une branche de la physique qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou au mouvement. Un fluide est définit comme une substance formée d'un grand nombre de particules très petites, libres de se déplacer les une par rapport aux autres et qui se déforme continuellement sans l'action d'une quelconque contrainte de cisaillement. Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressible par exemple l'air, l'hydrogène. Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressible (eau, huile,...).

Les équations de Stokes et de Navier-Stokes régissant le mouvement d'un fluide visqueux compressible ou incompressible, en régime stationnaire ou instationnaire, on fait et font encore l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche. Ces équations apparaissent aussi dans l'étude de nombreux phénomènes lorsque elles sont couplées avec d'autres équations. En particulier l'étude de la convection de la chaleur dans un milieu liquide dont le mouvement est décrit par l'équation de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la chaleur ont été l'objet de plusieurs publications : Bernardi, Métivet and Pernaud-Thomas [13], Deteix, Jendoubi and Yakoubi [19] ou Gaultier and Lezaun [21]. Le couplage du système de Darcy avec l'équation de la chaleur, où la viscosité est constante mais la force extérieure dépend de la température, a été analysé par Bernardi, Maarouf et Yakoubi [9]. L'analyse mathématique et numérique du même système lorsque la viscosité dépend de la température ont été effectuées par Bernardi, Dib, Girault, Hecht, Murat et Sayah [7].

Dans le cadre de ce mémoire, nous choisissons de coupler les équations de Stokes avec l'équation de la chaleur dans le cas où la viscosité dépend de la température. Ces équations sont munies des conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse et sur la température. Ce modèle a été analysé dans [2] et [3] en considérant les équations de Navier-Stokes. Dans cette référence le problème est discrétisé par la méthode spectrale. L'existence, l'unicité et l'estimation d'erreur sont effectuées au moyen du théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart. Dans notre travail nous optons aussi pour la méthode spectrale. L'existence de solution du problème discret a été démontré en utilisant le théorème de Brouwer et l'estimation d'erreur a été effectué en utilisant le théorème de Céa. L'une des principales difficultés rencontrées est la présence du terme de convection non linéaire.

Les méthodes spectrales sont des classes de technique utilisées en mathématiques appliquées et calcul scientifique pour résoudre numériquement certaines équations aux dérivées partielles. Ce sont des méthodes de Galerkin avec intégration numérique. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. Les intégrales sont évaluées au moyen de formules de quadrature appropriées. Elles permettent d'obtenir des approximations d'équations aux dérivées partielles avec une bonne précision et une convergence rapide. Ces méthodes sont également très avantageuses, pour la simplicité des bases qu'elles fournissent et qui sont obtenues en dimension quelconque d'espace par une tensorisation de la base en dimension 1.

Notre travail est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons les principales propriétés des espaces de Sobolev [1] et quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Ensuite nous donnons les principales estimations d'erreur d'approximation et d'interpolation polynômiale aux nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto en normes des espaces de Sobolev usuels sur Λ^d [8] [12].

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les équations de Stokes stationnaires couplées avec l'équation de la chaleur et nous supposons que la viscosité dépend de la température. Le problème continu admet une formulation variationnelle qui comportent les trois inconnues la vitesse, la pression et la température. Nous démontrons l'existence grâce au théorème de point fixe de Brouwer et l'unicité de la solution. Puis nous donnons une autre méthode pour démontrer l'existence de la solution continue tel qu'il a été fait dans [20].

Nous discrétisons le problème continu par une méthode spectrale dans **le troisième chapitre**. C'est à dire, nous utilisons la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Ensuite, nous démontrons que le problème discret est bien posé. Finalement, nous donnons une estimation d'erreur a priori entre la solution continue et la solution discrète.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques nécessaires pour une bonne compréhension de l'étude du problème traité dans ce mémoire.

1.1 Espaces fonctionnels

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Allaire [4], Dautray et Lions [17], Grisvard [23], et Lions et Magenes [24].

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.

— $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω.

— On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

— On note maintenant pour un nombre p supérieur ou égal à 1 l'espace

$$L^p(\Omega) = \Big\{v \text{ mesurable dans } \Omega \int_\Omega |v(x)|^p \, dx \ < +\infty\Big\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_p = \Big(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(x) \, dx \ < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

On note $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norme

$$\|v\|_{0,\Omega} = \Big(\int_\Omega v^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [25]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d$-$uplet $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$, $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + ... + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la $j-$ième variable, $1 \leq j \leq d$.

— On introduit l'espace $L^\infty(\Omega)$ suivant :

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) = \big\{ & f \text{ mesurable dans } \Omega \text{ telle qu'il existe une constante } C \geq 0 \\ & \text{vérifiant } |f(x)| \leq C \text{ p.p.sur } \Omega \big\} \end{aligned}$$

muni de la norme

$$\|v\|_\infty = \inf\big\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\big\}.$$

— Pour tout entier $m \geq 0$, et $p \geq 1$ l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ définit par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^p(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Pour $p = 2$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ sera noté $H^m(\Omega)$, il sera donc définit comme suit : :

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Il est facile de vérifier que l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.2) :

$$(u,v)_{1,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u)(x)(\partial^\alpha v)(x)\, dx \Big).$$

Une autre propriété fondamentale est rappelée dans le lemme suivant (la démonstration se trouve dans le livre d'Adams [1, Théorème 3.16]) :

Lemme 1.1.1. *Pour tout entier positif m, l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Ce résultat conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.2. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs (voir Adams [1, Théorème 6.28]).

Lemme 1.1.3 (Inégalité de Poincaré-Friedrichs). *Il existe une constante positive C ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C \Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.1.4. *La semi norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Définition 1.1.5. *Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme duale :*

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{v\in H_0^m(\Omega)} \frac{< f, v >}{|\, v\,|_{m,\Omega}}, \tag{1.5}$$

où $< \cdot,\cdot >$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

Théorème 1.1.6. ***Inégalité de Hölder*** *[14]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et
$1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ et $1 \leq t \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$. Alors

$$\forall f \in L^r(\Omega), \forall g \in L^s(\Omega), f.g \in L^t(\Omega)$$

et

$$\|fg\|_{L^t(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|g\|_{L^s(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.1.7. *Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $r = s = 2$ et $t = 1$.*

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer quelques définitions, théorèmes et propositions qui sont importants pour la suite.

Définition 1.2.1. *Soit X et Y deux espaces de Hilbert.*
Un opérateur $T : X \to Y$ est dit compact, s'il est continu et à la propriété suivante : pour toute suite (x_n) borné dans X la suite (Tx_n) admet une sous suite convergente.

Définition 1.2.2. *Soit E un espace de Banach et E' le dual topologique de E*

1. ***Convergence faible.*** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $u \in E$. On dit que $u_n \to u$ faiblement dans E lorsque $n \to \infty$ si $T(u_n) \to T(u)$ pour tout $T \in E'$. Avec T une forme linéaire continue.*

2. ***Convergence forte****. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge fortement vers $u \in E$ si la suite $(\|u_n - u\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers 0 lorsque $n \to \infty$.*

Définition 1.2.3. *On dit qu'un espace topologique X est* ***connexe*** *s'il n'est pas réunion de deux ensemble ouverts non vides disjoints. Autrement dit, pour tout ouverts disjoints U et V tel que $X = U \cup V$, alors on ait $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Définition 1.2.4. *Soit $F : L^p(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$. Nous disons que la fonction F est λ-lipschitzienne dans $L^p(\Omega)$ si elle vérifie, pour tout $(f, g) \in L^p(\Omega)^2$, l'équation suivante :*

$$\|F(f) - F(g)\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda \|f - g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.5. ***Théorème de Brézis-Browder*** *[5]*
Si $f \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ *et si* $g \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *alors*

$$\langle f, g\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Théorème 1.2.6. ***Théorème de point fixe de Brouwer*** *[22]*
Soit H *un espace de Hilbert de dimension finie muni d'un produit scalaire noté* $(.,.)$ *auquel on associe la norme* $|.|$. *Soit* $\boldsymbol{\Phi}$ *une application continue de* H *dans* H *qui vérifie la propriété suivante :*

Il existe un réel μ *strictement positif telle que* $(\boldsymbol{\Phi}(f), f) \geq 0$ *pour tout* f *dans* H *avec* $|f| = \mu$.
Alors, il existe un élément f_0 *dans* H *tel que* $\boldsymbol{\Phi}(f_0) = 0$ *et* $|f_0| \leq \mu$.

Théorème 1.2.7. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^3$ *de frontière* $\partial\Omega$, *l'injection continue de* $H^1(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *est vérifiée pour* $1 \leq q \leq 6$ *et est compacte pour* $1 \leq q < 6$.

Théorème 1.2.8. ***Théorème de convergence dominée de Lebesgue*** *[15]*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$. *Nous supposons que :*

1. $f_n \to f$ *p.p dans* Ω,
2. $\exists\, F \in L^p(\Omega)$ *telle que* $|f_n| \leq F$ *p.p. dans* Ω, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   Alors la suite $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2.9. ***Théorème de Lax-Milgram*** *[4]*
Soit X *en espace de Hilbert,* $a : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue coercive pour la norme de* X *et* $l : X \mapsto \mathbb{R}$ *une forme linéaire et continue. Alors il existe un unique* $\boldsymbol{u} \in X$ *tel que*

$$\forall \boldsymbol{v} \in X, \quad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}).$$

Nous considérons deux espaces de Hilbert X et M de normes respectives $\|.\|_X$ et $\|.\|_M$, de produits scalaires respectives $(.,.)_X$ et $(.,.)_M$ et de duals X' et M' avec le crochet de dualité $\langle .,.\rangle$. Nous nous donnons une forme bilinéaire continue : $b : X \times M \mapsto \mathbb{R}$, et nous lui associons l'opérateur B tel que, pour tout $\boldsymbol{v} \in X$ et $q \in M$, nous avons :

$$b(\boldsymbol{v}, q) = \langle B\boldsymbol{v}, q\rangle_{M',M} = \langle B'q, \boldsymbol{v}\rangle_{X',X}$$

Nous introduisons les espaces suivants :

$$V = \{\ \boldsymbol{v} \in X; \ \ \forall q \in M, \ \ b(\boldsymbol{v}, q) = 0\}.$$

$$V^\perp = \{\ \boldsymbol{v} \in X; \ \ \forall w \in V, \ \ (\boldsymbol{v}, w)_X = 0\}.$$

$$V^\circ = \{\ l \in X'; \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V, \ \ \langle l, \boldsymbol{v}\rangle_{X',X} = 0\}$$

Théorème 1.2.10. ***Théorème de Babuška-Brezzi*** *[22]*
Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que*

$$\inf_{q\in M}\sup_{\boldsymbol{v}\in X}\frac{b(\boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_X\|q\|_M}\geq\beta\ ;$$

2. *l'opérateur B' est un isomorphisme de M dans V° et*

$$\forall q\in M,\ \ \|B'q\|_{X'}\geq\beta\|q\|_M$$

3. *L 'opérateur B est un isomorphisme de $V^\perp$ sur M' et*

$$\forall\boldsymbol{v}\in V^\perp,\ \ \|B\boldsymbol{v}\|_{M'}\geq\beta\|\boldsymbol{v}\|_X.$$

Théorème 1.2.11. ***Théorème de Riesz*** *[14]*
Soit H un espace de Hilbert et H' son dual. Pour tout $f\in H'$, il existe un unique $u\in H$ tel que

$$f(v)=(u,v)\ \ \forall v\in H,$$

de plus,

$$\|u\|_H=\|f\|_{H'}.$$

Théorème 1.2.12. *Voir[14]*
Soient $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, alors $E\times F$ est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_{E\times F}$, définie par :

$$\forall\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)\in E\times F,\ \|\boldsymbol{u}\|_{E\times F}=(\|u_1\|_E^2+\|u_2\|_F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 Quelques notations générales

On rappelle quelques outils utiles sur les opérateurs différentiel utilisées pour la modélisation des équations de Stokes.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On considère les fonctions p dans $L^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ dans $H^1(\Omega)^d$ avec $\boldsymbol{u}$=$(u_1,u_2,\cdots,u_d)$ et $\boldsymbol{v}$=$(v_1,v_2,\cdots,v_d)$. On définit alors les opérateurs différentiels suivants :

— Opérateur ∇ ("nabla") :
  - $\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial p}{\partial x_d}\right)$ est le gradient de p.

$\bullet \nabla \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq d}$ est la matrice jacobienne de $\boldsymbol{u}$.

$\bullet (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \sum\limits_{i,j=1}^{d} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j}$ nommé le terme de convection.

$\bullet \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$ le produit de deux matrices.

— Divergence : $\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \frac{\partial u_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}$ est un scalaire.

— Laplacien : $\Delta \boldsymbol{u} = \sum\limits_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j^2}$ est un vecteur.

1.4 Opérateur de traces

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [23]. On suppose que l'ouvert Ω étant assez régulier, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$.

Théorème 1.4.1. *L'application $\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu :* ***l'application de trace.***
l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u\in H^1(\Omega),\gamma_0 u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie $\gamma_0 \circ R = Id_{\partial\Omega}$.

Proposition 1.4.1. ***Formule de Stokes***
Soit Ω un ouvert assez régulier de $\mathbb{R}^d$. L'application $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ qui à $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^d$ associe $(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)^d$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on a la formule de Stokes suivante :

$$\forall \boldsymbol{u} \in H_0^1(\Omega)^d, \forall w \in H^1(\Omega), \int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla w \, dx + \int_\Omega w \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{u} \, dx = \langle \gamma_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}, \gamma_0 w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}},H^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.7)$$

où, γ_0 est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

1.5 Espaces discrets

Les preuves des théorèmes et propositions de cette section se trouvent dans les références de base suivantes : [8], [10] et [11].

Notation 1.5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de l'ensemble $\mathbb{P}_n$.*

Notation 1.5.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Ω.*

1.5.1 Polynômes de Legendre

On note par Λ l'intervalle $]-1,1[$.

Définition 1.5.1. *On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur Λ, deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$ et*

$$\|L_n\|^2_{L^2(\Lambda)} = \int_{-1}^{1} L_n^2(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2n+1}$$

1.5.2 Formule de Gauss-Lobatto

La formule de quadrature la plus naturelle dans le contexte polynomial est la formule de Gauss-Lobatto associée à la mesure de Lebesgue. Cette dernière tient compte des conditions aux bords. Nous référons à Bernardi, Maday et Rapetti [12], Crouzreix et Mignot [16] et à Davis et Rabinowitz [18] pour l' analyse numérique complète de la formule de Gauss-Lobatto. On rappelle cette formule dans la proposition suivante :

Proposition 1.5.1. *Soit N un entier positif fixé. On pose $\eta_0 = -1$ et $\eta_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N-1$ points ξ_j de Λ, $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N+1$ réels ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$:*

$$\int_{-1}^{1} \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\eta_j) \rho_j. \tag{1.8}$$

Les η_j, $1 \le j \le N-1$, sont les zéros du polynôme L'_N. Les ρ_j, $0 \le j \le N$, sont positifs, et données par :

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L^2(\zeta_j)},\ 0 \le j \le N$$

La formule (1.8) *est appelée formule de Gauss-Lobatto de type Legendre à N+1 points.*

1.5.3 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Pour simplifier les notations de cette partie, on présente les résultats uniquement dans le cas $d = 3$.

Notation 1.5.3. *On note Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda^3)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda^3)$.*

Théorème 1.5.2. *$\forall\ m \ge 0$, $\exists\ c > 0$ ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait :*

$$\|v - \Pi_N v\|_{L^2(\Lambda^3)} \le cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.9}$$

Notations 1.5.1. *On note $\Pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda^3)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^3)$ pour le produit scalaire associé à la norme $|\cdot|_{1,\Lambda^3}$.*

Théorème 1.5.3. *Pour tout entier $m \ge 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda^3) \cap H_0^1(\Lambda^3)$, on ait :*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{H^1(\Lambda^3)} \le cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.10}$$

Théorème 1.5.4. *$\forall\ m \ge 1$, $\exists\ c(m) > 0$, $\forall\ v \in H^m(\Lambda^3) \cap H_0^1(\Lambda^3)$:*

$$\|v - \Pi_N^{1,0} v\|_{L^2(\Lambda^3)} \le cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.11}$$

Notations 1.5.2. *On note $\mathcal{I}_N$ l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto ,i.e. pour toute fonction v continue sur $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda^3)$ et vérifie :*

$$(\mathcal{I}_N v)(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = v(\eta_i, \eta_j, \eta_k), \qquad 0 \le i, j, k \le N.$$

Théorème 1.5.5. *Pour tout $s > \frac{3}{2}$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction v de $H^s(\Lambda^3)$, on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^2(\Lambda^3)} \le cN^{-s}\|v\|_{H^s(\Lambda^3)}, \tag{1.12}$$

$$|v - \mathcal{I}_N v|_{H^1(\Lambda^3)} \le cN^{1-s}\|v\|_{H^s(\Lambda^3)}, \tag{1.13}$$

et

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^\infty(\Lambda^3)} \le cN^{\frac{3}{2}-s}\|v\|_{H^s(\Lambda^3)}. \tag{1.14}$$

Proposition 1.5.2. *Tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^3)$ vérifie les inégalités*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda^3)} \leq \sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\rho_j \leq 3^3 \, \|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda^3)}. \tag{1.15}$$

Chapitre 2

Les équations de Stokes couplées avec l'équation de la chaleur

L'objectif du chapitre est d'étudier les équations de Stokes couplées avec l'équation de la chaleur, munies des conditions aux limites sur la vitesse et la température. La formulation variationnelle qu'on va considérer est celle où les inconnues sont la vitesse, la pression et la température. Les principaux outils fonctionnels qui permettent de déduire l'existence et l'unicité de la solution sont aussi présentés. Dans notre travail, l'étude est faite en dimension $d = 3$.

2.1 Problème continu

2.1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$ à frontière assez régulière $\partial\Omega$. On considère le système de Stokes couplé avec l'équation de la chaleur stationnaire, c'est à dire les données et les variables ne dépendent pas du temps. Ce système modélise l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible. Dans notre travail la viscosité de ce fluide dépend de la température.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\nu(\mathrm{T})\nabla \boldsymbol{u}) + \nabla \mathrm{p} = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\alpha\Delta\, T + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)T = g & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les inconnues sont le champ de vecteurs $\boldsymbol{u}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, qui représente la vitesse du fluide. La fonction scalaire p représente la pression et T représente la température de ce fluide. La fonction $\boldsymbol{f}$ représente la densité de forces extérieures appliquées au fluide, la fonction g est une donnée. La fonction ν est la viscosité du fluide qu'on suppose dépendre de la température, positive et minorée par une constante strictement positive et la constante α est le coefficient de diffusion de la chaleur supposée positive. Nous introduisons notre problème avec des conditions aux limites sur la vitesse et la température.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\nu(\mathrm{T})\nabla \boldsymbol{u}) + \nabla \mathrm{p} = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\alpha\Delta T + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)T = g & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ T = T_b & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

Le cadre fonctionnel dans lequel le problème (2.2) est bien posé fait intervenir des espaces différents pour les trois inconnues. Il s'agit des espaces : $H_0^1(\Omega)^3$ pour la vitesse et $H^1(\Omega)$ pour la température. En ce qui concerne la pression, il est clair que la fonction p n'est définie qu'à une constante près : on va donc lui imposer d'être à moyenne nulle pour assurer son unicité, c'est-à-dire d'appartenir à l'espace $L_0^2(\Omega)$ défini par :

$$L_0^2(\Omega) = \Big\{ q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q(x)dx = 0 \Big\}.$$

2.1.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous établissons la formulation variationnelle associée au problème (2.2), nous supposons que les données $\boldsymbol{f}$ et g appartiennent à $H^{-1}(\Omega)^3$ et $H^{-1}(\Omega)$ respectivement, et la fonction $\nu \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \nu_1 \leq \nu(\theta) \leq \nu_2. \tag{2.3}$$

Avec ν_1 et ν_2 sont deux constantes positives. Une formulation variationnelle du problème (2.2) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\boldsymbol{u}, \mathrm{p}, \mathrm{T}) \text{ de } \mathrm{H}_0^1(\Omega)^3 \times \mathrm{L}_0^2(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tels que :} \\ \qquad\qquad\qquad T = T_b \text{ sur } \partial\Omega, \\ \\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \displaystyle\int_\Omega \nu(T)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x) \cdot p(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle, \\ \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{u}(x) \cdot q(x)\, dx = 0, \\ \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \displaystyle\int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)T)(x)S(x)dx = \langle g, S\rangle. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où $\langle ., .\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$.

Proposition 2.1.1. *Les problèmes* (2.2) *et* (2.4) *sont équivalents au sens des distributions.*

Démonstration. Nous commençons par la première implication :
soit $(\boldsymbol{u}, p, T)$ solution du problème (2.2). Montrons que cette solution est une solution du problème (2.4).
Pour toute fonction test $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, nous avons :

$$-\langle \mathrm{div}(\nu(\mathrm{T})\nabla \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} + \langle \nabla p, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3}.$$

On dérive au sens des distributions, on trouve :

$$\langle \nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} - \langle p, \mathrm{div}\boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3}.$$

Comme $\nu(T)\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^3$ et $p \in L^2(\Omega)$, donc, on peut remplacer les crochets de dualité par les intégrales dans le premier membre, on aurait :

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \int_\Omega \nu(T)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x) \cdot p(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega,$$

et par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ dans $H_0^1(\Omega)^3$, on conclut que cette identité et valable pour toute fonction $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ i.e :

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \int_\Omega \nu(T)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x) \cdot p(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega.$$

D'où la première équation du problème (2.4) est vérifiée. En passant à la deuxième équation du problème (2.2)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Nous multiplions cette équation par n'importe quelle fonction q de $L_0^2(\Omega)$ et intégrons sur Ω, nous obtenons :

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}(x) \cdot q(x)dx = 0.$$

Enfin, nous avons :

$$-\alpha \Delta T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = g.$$

Soit $S \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$-\alpha \langle \Delta T, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

On dérive le premier terme du premier membre au sens des distributions, on trouve :

$$\alpha \langle \nabla T, \nabla S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)},$$

comme ∇T et $\nabla \mathrm{S} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on remplace le crochet de dualité par l'intégrale dans le premier terme, on obtient :

$$\alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, S \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)},$$

de plus $\boldsymbol{u} \cdot \nabla T = g + \alpha \Delta T \in H^{-1}(\Omega)$, puisque g et $\Delta T \in H^{-1}(\Omega)$, et la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, donnent :

$$\forall S \in H_0^1(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle g, S \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

L' inégalité de Hölder (1.6) donne $\boldsymbol{u} \cdot \nabla T \in L^1(\Omega)$, puisque $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^3$ et $\nabla \mathrm{T} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. En particulier l'équation précédente est valable pour tout $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, donc d'après le théorème de Brézis-Browder (Théorème 1.2.5), on obtient :

$$\langle \boldsymbol{u} \cdot \nabla T, S \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla T(x) S(x)dx.$$

D'où ;

$$\forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla T(x) S(x)dx = \langle g, S \rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}.$$

Ce qui montre que $(\boldsymbol{u}, p, T)$ est une solution du problème (2.4).

Réciproquement, soit $(\boldsymbol{u}, p, T)$ une solution de (2.4). Montrons que $(\boldsymbol{u}, p, T)$ est une solution du problème (2.2). On prend $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3 \subset H_0^1(\Omega)^3$ dans la première équation de (2.4) :

$$\int_\Omega \nu(T) \nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}(x) \cdot p(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega.$$

Cette équation est équivaut à :

$$\langle \nu(T) \nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} - \langle p, \operatorname{div}\boldsymbol{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3}.$$

On dérive au sens des distributions, on obtient :

$$-\langle \mathrm{div}(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} + \langle \nabla p, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^3,\mathcal{D}(\Omega)^3}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^3.$$

D'où,

$$-\mathrm{div}(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega \text{ au sens des distributions.}$$

De plus,

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \int_\Omega q(x)\mathrm{div}\boldsymbol{u}(x)dx = 0.$$

Utilisons la formule de Stokes (1.7) avec $\boldsymbol{w} = 1$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{u}(x)dx = 0,$$

i.e $\mathrm{div}\boldsymbol{u} \in L_0^2(\Omega)$. Donc, Pour $q = \mathrm{div}\boldsymbol{u}$, on aurait :

$$\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}^2 = 0,$$

ceci implique,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

On prend $S \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans la troisième équation du problème (2.4), on remplace les intégrales par les crochets de dualité et on dérive au sens des distributions, on obtient :

$$-\alpha\langle \Delta T, S\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} + \langle \boldsymbol{u}\cdot\nabla T, S\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle g, S\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}$$

D'où, $-\alpha\Delta T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = g$ dans Ω au sens des distributions.
Finalement, la condition $\boldsymbol{u} = 0$ sur $\partial\Omega$, étant assurée par l'appartenance de $\boldsymbol{u}$ à $H_0^1(\Omega)^3$.
On déduit donc l'équivalence entre les deux problèmes. ■

2.1.3 Existence et unicité de solution exacte

La difficulté rencontrée en étudiant le problème (2.4) est liée au terme de convection $\boldsymbol{u}.\nabla T$ qui apparaît dans l'équation de la température, et à la forme trilinéaire associée

$$K(\boldsymbol{u}, S, W) := (\boldsymbol{u}.\nabla S, W).$$

La solvabilité du problème (2.4) entre dans le cadre d'application du théorème de point fixe de Brouwer (Théorème 1.2.6). Ce théorème est utilisé pour l'étude des problèmes non linéaire. L'idée est de travailler dans un premier temps dans des espaces appropriés de dimension finie. On commence par introduire l'espace suivant :

$$V(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3;\ \forall q \in L_0^2(\Omega),\ \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)q(x)dx = 0 \Big\}.$$

En utilisant la formule de Stokes (1.7), il est clair que $V(\Omega)$ coïncide avec l'espace des fonctions à divergence nulle dans $H_0^1(\Omega)^3$, i.e :

$$V(\Omega) = \{ \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \ \text{ dans } \Omega \}. \tag{2.5}$$

Il est clair aussi que $V(\Omega)$ représente le noyau de la forme linéaire div. L'espace $V(\Omega)$ est muni de la semi norme de $H_0^1(\Omega)$. On observe alors que, si $(\boldsymbol{u}, p, T)$ est une solution du problème (2.4), alors le couple $(\boldsymbol{u}, T)$ est une solution du problème réduit

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\boldsymbol{u}, \mathrm{T}) \text{ de } \mathrm{V}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ tels que :} \\ \qquad\qquad T = T_b \text{ sur } \partial\Omega, \\ \forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \nu(T)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega, \\ \forall S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \displaystyle\int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)T)(x)S(x)dx = \langle g, S \rangle_\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Lemme 2.1.1. *Soit* $\boldsymbol{u}$ *dans* $V(\Omega)$ *et* S, W *dans* $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Alors nous avons la formule de Green suivante :*

$$\int_\Omega ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)S)(x)W(x)dx = -\int_\Omega ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)W)(x)S(x)dx, \tag{2.7}$$

Démonstration. Comme $S \in L^2(\Omega)$ et $W \in L^\infty(\Omega)$, alors $SW \in L^2(\Omega)$. Et puisque $\nabla S, \nabla W$ sont dans $L^2(\Omega)$ et S, W sont dans $L^\infty(\Omega)$, alors, $\nabla(SW) \in L^2(\Omega)$ et nous avons

$$\nabla(SW) = W\nabla S + S\nabla W. \tag{2.8}$$

De plus, $S \in H_0^1(\Omega)$ ceci implique que $SW \in H_0^1(\Omega)$. Il suffit maintenant d'appliquer la formule de Green et d'utilisé le fait que $\boldsymbol{u} \in V(\Omega)$ pour avoir

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)(SW)(x)dx = -\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{u}(x) \cdot SW(x)dx + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u}.n)(\tau)SW(\tau)d\tau = 0,$$

et l'équation (2.8) nous donne le résultat désiré. ■

Corollaire 2.1.2. *En particulier, quand $S = W$, nous avons la relation d' antisymétrie suivante :*

$$\int_{\Omega} ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla) S)(x) S(x) dx = 0, \tag{2.9}$$

Lemme 2.1.3. *Il existe une constante $\beta > 0$ tel que la forme "$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) q(x) dx$" satisfait la condition :*

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \qquad \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3} \frac{\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) q(x) dx}{|\boldsymbol{v}|_{H_0^1(\Omega)^3}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.10}$$

Remarque. *La condition* (2.10) *est souvent appelée "la condition inf-sup", quelques auteurs l'appelent aussi "**la condition de Babuška-Brezzi**", le courant actuel semble utiliser l'expression "**LBB condition**" qui veut dire : la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi .*

Théorème 2.1.4. *Soient $\boldsymbol{f}$ de $H^{-1}(\Omega)^3$, g de $H^{-1}(\Omega)$ et T_b de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, alors le problème* (2.4) *admet au moins une solution $(\boldsymbol{u}, p, T)$. De plus, on a l'estimation suivante :*

$$|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + |T|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 (\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}). \tag{2.11}$$

Démonstration. La démonstration est divisée en plusieurs étapes :
On commence donc par étudier la solvabilité du problème (2.6).

1. Nous considérons d'abord l'opérateur de relèvement noté $\mathcal{R}$ i.e l'opérateur continu de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Le théorème de trace (Théorème 1.4.1) dit qu'il existe une fonction noté $\overline{T}_b$ de T_b qui satisfait : $\overline{T}_b = \mathcal{R} T_b$, la fonction $\overline{T}_b$ appartient à $H^1(\Omega)$ et satisfait
$$\|\overline{T}_b\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\diamond \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{2.12}$$

2. On pose $U = (\boldsymbol{u}, T)$ et $V = (\boldsymbol{v}, S)$, on définit l'application Φ de $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ sur son dual par :
$$\begin{aligned}\langle \Phi(U), V \rangle = &\int_{\Omega} \nu(T + \overline{T}_b) \nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x) dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla (T + \overline{T}_b)(x) \cdot \nabla S(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \nabla (T + \overline{T}_b)(x) S(x) dx - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Omega} - \langle g, S \rangle_{\Omega}. \end{aligned}\tag{2.13}$$
Démontrons que Φ vérifie les conditions du théorème de Brouwer (Théorème 1.2.6).
• Nous commençons par remarquer qu'on peut définir l'application Φ de l'espace de Hilbert $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ sur son dual, car les espaces de Hilbert sont dans un certain sens d'après le théorème de Riez (Théorème 1.2.11), le dual d' eux

même.

• Démontrons que Φ est continue i.e que : si la suite $U_n := (\boldsymbol{u}_n, T_n) \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ converge en norme vers $U := (\boldsymbol{u}, T)$ dans $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, alors $\Phi(U_n)$ converge fortement vers $\Phi(U)$ dans $(V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))'$, i.e : Si

$$\big(|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}|^2_{H_0^1(\Omega)^3} + |T_n - T|^2_{H_0^1(\Omega)}\big) \to 0, \text{ quand } n \to \infty,$$

alors

$$\big(\|\Phi(U_n) - \Phi(U)\|_{(V(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))'}\big) \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

On note :

$$\langle \Phi_1(U), V\rangle := \int_\Omega \nu(T + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx,$$

$$\langle \Phi_2(U), V\rangle := \alpha \int_\Omega \nabla(T + \overline{T}_b)(x) \cdot \nabla S(x)dx,$$

et

$$\langle \Phi_3(U), V\rangle := \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla(T + \overline{T}_b)(x)S(x)dx - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega - \langle g, S\rangle_\Omega.$$

Soit $V \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (2.3), on trouve

$$0 \le |\langle\big(\Phi_1(U_n) - \Phi_1(U)\big), V\rangle| \le \int_\Omega |\big(\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}_n(x) - \nu(T + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}(x)\big)\nabla \boldsymbol{v}(x)|dx$$

$$\le \int_\Omega \big(|\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla(\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}(x))\nabla \boldsymbol{v}(x)| + |\big(\nu(T_n + \overline{T}_b) - \nu(T + \overline{T}_b)\big)\nabla \boldsymbol{u}(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)|\big)dx$$

$$\le \big(\nu_2\|\nabla(\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)} + \|\nu(T_n + \overline{T}_b) - \nu(T + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\|\big)\big(|\boldsymbol{v}|^2_{H_0^1(\Omega)^3} + |S|^2_{H_0^1(\Omega)}\big).$$

Comme la suite $(T_n)_n$ converge fortement vers T, la suite $(\nu(T_n))_n$ converge vers $\nu(T)$ presque partout dans Ω (car ν est continue), et puisque $\nu(T_n + \overline{T_b}) \in L^\infty(\Omega)$ et $\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ alors $\nu(T_n + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$, de plus

$$\|\nu(T_n + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \le \nu_2\|\nabla \boldsymbol{u})\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}.$$

Et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2.8) la suite $(\nu(T_n + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{u})_n$ converge fortement vers $\nu(T + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)$. On conclut, en devisant les deux membres de l'inégalité par $|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |S|^2_{H^1(\Omega)}$, et en introduisant la limite sur n.

Soit $V \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. En Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} 0 \le |\langle(\Phi_2(U_n) - \Phi_2(U)), V\rangle| &\le \int_\Omega |(\nabla(T_n + \overline{T}_b) - \nabla(T + \overline{T}_b))\nabla S(x)|dx \\ &\le |T_n - T|_{H^1(\Omega)}(|\boldsymbol{v}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |S|^2_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

D'où : d'après la convergence forte de la suite $(T_n)_n$ vers T dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout n tend vers ∞, on trouve le résultat.
Soit $V \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}|\langle(\Phi_3(U_n) - \Phi_3(U)), V\rangle| &= \left| \int_\Omega \big(\boldsymbol{u}_n \cdot \nabla(T_n + \overline{T}_b)(x)S(x) - \boldsymbol{u} \cdot \nabla(T + \overline{T}_b)(x)S(x)\big)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\big((\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}).\nabla(T_n - T + T + \overline{T}_b)S(x) + (\boldsymbol{u}.\nabla)(T_n - T)S(x)\big)\right|dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (1.6) et le théorème d'injection de Sobolev (Théorème 1.2.7) on trouve

$$\begin{aligned}|\langle(\Phi_3(U_n) - \Phi_3(U)), V\rangle| &\leq \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(T_n - T)\|_{L^2(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(T + \overline{T}_b)\|_{L^2(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(T_n - T)\|_{L^2(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq c_s\big(|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}|T_n - T|_{H^1(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + |\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)}|T + \overline{T}_b|_{H^1(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)}|T_n - T|_{H^1(\Omega)}\|S\|_{L^4(\Omega)}\big),\end{aligned}$$

où c_s est la constante de Sobolev. On passe à la limite sur n, on trouve le résultat désiré. D'où la continuité de Φ.

- Vérifions maintenant que $\langle\Phi(U), U\rangle$ est positive sur $V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On prend $V = U$ dans (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle\Phi(U), U\rangle = &\int_\Omega \nu(T + \overline{T}_b)\nabla\boldsymbol{u}^2(x) + \alpha\int_\Omega \nabla(T + \overline{T}_b)(x) \cdot \nabla T(x)dx \\ &+ \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla(T + \overline{T}_b)(x)T(x)dx - \langle\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle_\Omega - \langle g, T\rangle_\Omega.\end{aligned}$$

On applique (2.7) et (2.9) sur l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle\Phi(U), U\rangle = &\int_\Omega \nu(T + \overline{T}_b)\nabla\boldsymbol{u}^2(x) + \alpha\int_\Omega \nabla(T + \overline{T}_b)(x) \cdot \nabla T(x)dx \\ &- \int_\Omega (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\overline{T}_b(x)T(x)dx - \langle\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle_\Omega - \langle g, T\rangle_\Omega.\end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2.7, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^4(\Omega)$. Alors l'inégalité de Hölder (1.6), et l'inégalité (2.12) impliquent que :

$$\begin{aligned}\langle\Phi(U), U\rangle \geq\ &\nu_1|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + \alpha|T|^2_{H^1(\Omega)} - \alpha c\|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}|T|_{H^1(\Omega)} \\ &- c|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}|T|_{H^1(\Omega)} - \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3}|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} - \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}|T|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Nous utilisons la relation $ab \leq \frac{1}{2\epsilon}a^2 + \frac{\epsilon}{2}b^2,\ \forall \epsilon > 0,$ dans l' inégalité précédente, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\langle \Phi(U), U\rangle \geq \nu_1 |\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + \alpha |T|^2_{H^1(\Omega)} - \alpha c \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)} \\ - \frac{c\,\max(\frac{1}{\epsilon}, \epsilon)}{2} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)}) \\ - \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} - \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

utilisons aussi la même relation précédente pour $\epsilon = 1$ sur $\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} - \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle \Phi(U), U\rangle \geq \nu_1 |\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + \alpha |T|^2_{H^1(\Omega)} - \alpha c \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \\ - \frac{c\,\max(\frac{1}{\epsilon}, \epsilon)}{2} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)}) \\ - (\|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}} (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

On prend ϵ tel que :

$$\frac{c\,\max(\frac{1}{\epsilon}, \epsilon)}{2} \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \min\{\nu_1, \alpha\}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\langle \Phi(U), U\rangle \geq \frac{\min(\nu_1, \alpha)}{2} (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)}) \\ - (\alpha c \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + (\|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}) (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \\ \geq \frac{2}{\min(\nu_1, \alpha)} (\alpha c \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + (\|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}) (|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'où la positivité de $\langle \Phi(U), U\rangle$ sur la sphère de rayon

$$\mu = \frac{2}{\min(\nu_1, \alpha)} (\alpha c \|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + (\|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}). \tag{2.14}$$

3. Comme $\mathcal{D}(\Omega)^3 \cap V(\Omega)$ est dense dans $V(\Omega)$, alors il existe une suite croissante $(\mathbb{V}_n)_n$ de sous-espaces de dimension finie de $V(\Omega)$ et une suite $(\mathbb{W}_n)_n$ de sous-espaces de dimension finie de $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tel que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$ est dense dans $V(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$. De plus, les conditions du théorème de Brouwer (Théorème 1.2.6) sont vérifiées sur la restriction de Φ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$. Par conséquent, il existe une suite $U_n = (\boldsymbol{u}_n, T_n)$ dans $\mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n$ telle que

$$\forall\, V_n \in \mathbb{V}_n \times \mathbb{W}_n,\ \langle \Phi(U_n), V_n\rangle = 0, \tag{2.15}$$

et

$$(|\boldsymbol{u}_n|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T_n|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \leq \mu. \tag{2.16}$$

4. On va démontrer dans cette étape que :

$$\forall V \in V(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(U_n), V_n \rangle = \langle \Phi(U), V \rangle.$$

On remarque tout d'abord que (2.15) implique

$$\forall V_m = (\boldsymbol{v}_m, S_m) \in \mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m : \langle \Phi(U_n), V_m \rangle = 0, \forall m \leq n,$$

puisque la suite $(\mathbb{V}_m \times \mathbb{W}_m)_m$ est croissante. On a

$$\begin{aligned}\langle \Phi(U_n), V_m \rangle = &\int_\Omega \nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}_n(x)\boldsymbol{v}_m(x)dx + \alpha \int_\Omega \nabla(T_n + \overline{T}_b)(x) \cdot \nabla S_m(x)dx \\ &+ \int_\Omega \boldsymbol{u}_n \cdot \nabla(T_n + \overline{T}_b)(x)S_m(x)dx - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_n \rangle_\Omega - \langle g, S_m \rangle_\Omega = 0. \quad (2.17)\end{aligned}$$

Puisque $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^4(\Omega)$, la suite $(\boldsymbol{u}_n, T_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ de (2.16), on déduit qu'il existe une sous-suite $\big($pour simplifier, elle sera notée aussi $(\boldsymbol{u}_n, T_n)_n\big)$ qui converge fortement vers $(\boldsymbol{u}, T^*)$ dans $L^4(\Omega)^3 \times L^4(\Omega)$ et faiblement dans $H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega)$.

• Commençons par le premier terme de droite dans l'égalité (2.17) : puisque $(\boldsymbol{u}_n)_n$ converge faiblement vers $\boldsymbol{u}$ dans $H_0^1(\Omega)^3$, alors $(\nabla \boldsymbol{u})_n$ converge faiblement vers $\nabla \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^3$. Et comme $(T_n)_n$ converge fortement vers T^* dans $L^4(\Omega)$, la suite $(\nu(T_n + \overline{T_b}))_n$ converge vers $\nu(T^* + \overline{T_b})$ presque partout dans Ω (car ν est continue), de plus $(\nu(T_n + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{v}_m)_m \in L^2(\Omega)^{3\times 3}$ car $\nu(T_n + \overline{T_b}) \in L^\infty(\Omega)$ et $(\nabla \boldsymbol{v}_m)_m \in L^2(\Omega)^{3\times 3}$ par la suite $(\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{v}_m)_n$ converge vers $\nu(T^* + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{v}_m$ p.p. dans Ω. Et on a

$$\|\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{v}_m\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \leq \nu_2 \|\nabla \boldsymbol{v}_m\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.2.8) la suite $(\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{v}_m)_n$ converge vers $\nu(T^* + \overline{T_b})\nabla \boldsymbol{v}_m$ dans $L^2(\Omega)^{3\times 3}$. Utilisant aussi le fait que $(\nabla \boldsymbol{u}_n)_n$ converge faiblement vers $\nabla \boldsymbol{u}$ dans $L^2(\Omega)^{3\times 3}$, de l'inégalité (2.16), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on conclut alors que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}_n(x)\nabla \boldsymbol{v}_m(x)dx = \int_\Omega \nu(T^* + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}(x)\nabla \boldsymbol{v}_m(x)dx.$$

En effet, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}_n(x)\nabla \boldsymbol{v}_m(x)dx = &\int_\Omega (\nu(T_n + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{v}_m(x) - \nu(T^* + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{v}_m(x))\nabla \boldsymbol{u}_n dx \\ &+ \int_\Omega \nu(T^* + \overline{T}_b)\nabla \boldsymbol{u}_n(x)\nabla \boldsymbol{v}_m(x)dx.\end{aligned}$$

Passons au second terme de droite dans (2.17) : comme la suite $(T_n)_n$ converge faiblement vers T^* dans $H_0^1(\Omega)$, la suite $(\nabla T_n)_n$ converge faiblement vers ∇T^* dans $L^2(\Omega)$, par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla(T_n+\overline{T}_b)\nabla S_m(x)dx = \int_\Omega \nabla(T^*+\overline{T}_b)\nabla S_m(x)dx.$$

Maintenant passons à la limite pour le terme de convection non linéaire,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{u}_n\cdot\nabla(T_n+\overline{T}_b)(x)S_m(x)dx &= \int_\Omega(\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u})\cdot\nabla(T_n+\overline{T}_b)(x)S_m(x)dx\\ &+\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla(T_n+\overline{T}_b)(x)S_m(x)dx,\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder sur le premier terme de droite , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{u}_n\cdot\nabla(T_n+\overline{T}_b)(x)S_m(x)dx &\le \|\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)^3}|T_n+\overline{T_b}|_{H^1(\Omega)}\|S_m\|_{L^4(\Omega)}\\ &+\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot\nabla(T_n+\overline{T}_b)(x)S_m(x)dx.\end{aligned}$$

La convergence forte de $\boldsymbol{u}_n$ vers $\boldsymbol{u}$ dans $L^4(\Omega)$ et la convergence faible de T_n vers T^* dans $H_0^1(\Omega)$ donnent le résultat. On arrive donc

$$\forall V_m\in\mathbb{V}_m\times\mathbb{W}_m, \langle\Phi(U),V_m\rangle=0.$$

On passe à la limite sur m et par la densité de $\underset{m\in\mathbb{N}}{\cup}\mathbb{V}_m\times\mathbb{W}_m$ dans $V(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ on obtient

$$\forall\boldsymbol{v}\in V(\Omega), \int_\Omega \nu(T)\nabla\boldsymbol{u}(x):\nabla\boldsymbol{v}(x)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_\Omega \tag{2.18}$$

On conclut que $U=(\boldsymbol{u},T)$ est une solution du problème (2.6).

5. Soit L la fonctionnelle définie par :

$$\begin{aligned} L: H_0^1(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \int_\Omega \nu(T)\nabla\boldsymbol{u}(x):\nabla\boldsymbol{v}(x)-\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_\Omega.\end{aligned}$$

Il est clair que L est bien définie et linéaire puisque $\int$ et ∇ sont linéaires. La forme L est continue. En effet : l'inégalité (2.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$|L(\boldsymbol{v})|\le(\nu_2|\boldsymbol{u}|_{H_0^1(\Omega)^3}+\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3})|\boldsymbol{v}|_{H_0^1(\Omega)^3}. \tag{2.19}$$

Puisque la condition "inf-sup" (2.10) et l'égalité (2.18) sont vérifiées, le théorème de Babuška-Brezzi (Théorème 1.2.10) assure l'existence de $p\in L_0^2(\Omega)$ tel que :

$$\forall\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p(x)dx=\int_\Omega \nu(T)\nabla\boldsymbol{u}(x):\nabla\boldsymbol{v}(x)-\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_\Omega.$$

On déduit alors que le triplet $(\boldsymbol{u}, p, T)$ est une solution de (2.4).
Finalement, nous vérifions l'estimation (2.11) : on a

$$\langle \Phi(U), U\rangle \leq \big(\nu_2 + \max(\alpha c_\diamond, c_\diamond)\|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\big)(|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)}), \tag{2.20}$$

l'inégalité (2.20) et (2.16) implique que

$$(|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \leq C\big(\|T_b\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\big). \tag{2.21}$$

Et d'après (2.19) on a

$$\exists p \in L^2_0(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)\ \ \frac{\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}(x)p(x)dx}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)}} = \frac{L(\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)}} \leq c(|\boldsymbol{u}|_{H^1_0(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}),$$

en particulier

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in H^1_0(\Omega)^3} \frac{\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}(x)p(x)dx}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\Omega)}} \leq c(|\boldsymbol{u}|_{H^1_0(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}).$$

de la condition inf-sup on déduit

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{c}{\beta}(|\boldsymbol{u}|_{H^1_0(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}). \tag{2.22}$$

On conclut en utilisant l'inégalité (2.21) et (2.22). ■

Nous allons voir que l'unicité de la solution faible pour le problème (2.4) nous peut être obtenue que si l'on impose une certaine régularité sur la solution $(\boldsymbol{u}, T)$.

Proposition 2.1.2. *On suppose que la fonction ν est ν^*–lipschitzienne et $T \in L^\infty(\Omega)$. Il existe une constante positive c_* telle que si le problème* (2.4) *admet une solution $(\boldsymbol{u}, p, T)$ tel que $\boldsymbol{u}$ dans $W^{1,3}(\Omega)^3$ et satisfait*

$$c_*\nu^*|\boldsymbol{u}|_{W^{1,3}(\Omega)^3} < 1. \tag{2.23}$$

Alors, cette solution est unique.

Démonstration. Soient $(\boldsymbol{u}_1, p_1, T_1)$ et $(\boldsymbol{u}_2, p_2, T_2)$ deux solutions du problème (2.4) avec $\boldsymbol{u}_1$ dans $W^{1,3}(\Omega)^3$ satisfaisant (2.23). On pose

$$T = T_1 - T_2, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \quad p = p_1 - p_2.$$

la preuve se fait en trois étapes :

1. On commence par la troisième équation du problème (2.4) :

   Pour tout $S \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty$, nous avons :

$$\alpha \int_\Omega \nabla T_1(x).\nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}_1.\nabla)T_1)(x)S(x)dx = \langle g, S\rangle_\Omega, \tag{2.24}$$

   et

$$\alpha \int_\Omega \nabla T_2(x).\nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}_2.\nabla)T_2)(x)S(x)dx = \langle g, S\rangle_\Omega. \tag{2.25}$$

   Nous ajoutons et nous retranchons $\boldsymbol{u}_2$ dans le deuxième terme du membre de gauche de l'équation (2.24) et nous soustrayons (2.24) de (2.25), nous obtenons :

$$\alpha \int_\Omega \nabla T(x).\nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}.\nabla)T_1)(x)S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}_2.\nabla)T)(x)S(x)dx = 0. \tag{2.26}$$

   On prend $S = T$ dans l'égalité (2.26), et utilise la relation (2.9) , on trouve :

$$\alpha \int_\Omega (\nabla T)^2(x)dx = -\int_\Omega ((\boldsymbol{u}.\nabla)T)(x)T_1(x)dx,$$

   l'inégalité de Hölder implique que :

$$\alpha |T|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^3}\|T_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla T\|_{L^2(\Omega)},$$

   l' inégalité de Poincaré donne :

$$\alpha |T|_{H^1(\Omega)} \leq c_\# |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\|T_1\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.27}$$

   Où $c_\#$ la constante de Poincaré.

2. On passe maintenant à la première équation du problème (2.4), on a :

$$\int_\Omega \nu(T_1)(x)\nabla \boldsymbol{u}_1(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p_1(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega, \tag{2.28}$$

   et

$$\int_\Omega \nu(T_2)(x)\nabla \boldsymbol{u}_2(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p_2(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega. \tag{2.29}$$

   Nous prenons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, avec $\boldsymbol{u} \in V(\Omega)$, nous retranchons (2.28) de (2.29) nous obtenons :

$$\int_\Omega \nu(T_1)(x)\nabla \boldsymbol{u}_1(x) : \nabla \boldsymbol{u}(x)dx - \int_\Omega \nu(T_2)(x)\nabla \boldsymbol{u}_2(x) : \nabla \boldsymbol{u}(x)dx = 0. \tag{2.30}$$

   Nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_2)$ dans le premier terme du premier membre de l'équation (2.30), nous trouvons l'équation suivant :

$$\int_\Omega \nu(T_2)(x)\nabla \boldsymbol{u}^2(x)dx = -\int_\Omega (\nu(T_1) - \nu(T_2))(x)\nabla \boldsymbol{u}_1(x) : \nabla \boldsymbol{u}(x)dx.$$

L'inégalité de Hölder donne :

$$\nu_1|\boldsymbol{u}|^2_{H^1_0(\Omega)^3} \leq \|\nu(T_1) - \nu(T_2)\|_{L^6(\Omega)}\|\nabla \boldsymbol{u}_1\|_{L^3(\Omega)^3}\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^3},$$

d'après la lipschizité de la fonction ν, la relation (2.3) et l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$, nous trouvons :

$$\nu_1|\boldsymbol{u}|^2_{H^1(\Omega)^3} \leq c_\diamond \nu^*|T|_{H^1(\Omega)}|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}|\boldsymbol{u}_1|_{W^{1,3}(\Omega)^3}.$$

Où $c_\diamond$ est la constante de l'injection.

$$|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} \leq c_\# c_\diamond \nu_1^{-1}\nu^*\alpha^{-1}\|T_1\|_{L^\infty(\Omega)}|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}|\boldsymbol{u}_1|_{W^{1,3}(\Omega)^3}.$$

En choisissant $c_* = c_\# c_\diamond \nu_1^{-1}\alpha^{-1}$, et d'après (2.23), on déduit que $\boldsymbol{u}$ est nul i.e. $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. L'inégalité (2.27) implique que T est aussi nul i.e. $T_1 = T_2$.

3. Finalement, on a pour tout $\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nu(T_1)(x)\nabla \boldsymbol{u}_1(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p_1(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega,$$

et

$$\int_\Omega \nu(T_2)(x)\nabla \boldsymbol{u}_2(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x)dx - \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p_2(x)dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega.$$

Comme $\boldsymbol{u}$ et T sont nuls, alors

$$\forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega), \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v}(x)p(x)dx = 0.$$

La condition "inf-sup" implique que p est nulle i.e. $p_1 = p_2$. Ce qui assure l'unicité de la solution $(\boldsymbol{u}, p, T)$.

$\blacksquare$

Un autre moyen pour démonter l'existence de la solution du problème (2.4) est de procéder comme suit (voir [20]) :
Pour simplifier on prend $T_b = 0$. L' idée est de remarquer que la formulation variationnelle (2.4) peut être écrite en fonction de T. En effet, pour un T donné, en utilisant le théorème de Lax-Milgram dans $V(\Omega)$ (Théorème 1.2.9) (applicable grâce à la relation (2.3)), puis le théorème de Babuška-Brezzi (Théorème 1.2.10) (applicable grâce à la condition inf-sup (2.10)), le système de Stokes admet une solution unique $(\boldsymbol{u}, p)$. Dans ce cas $\boldsymbol{u}$ et p sont des fonctions de T, i.e. $(\boldsymbol{u}, p) = (\boldsymbol{u}(T), p(T))$ et (2.4) devient équivalente à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Chercher T } \in \text{ H}^1_0(\Omega) \text{ tel que :} \\ \forall S \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \alpha \displaystyle\int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x)dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T) \cdot \nabla)T)(x)S(x)dx = \langle g, S\rangle_\Omega. \end{cases} \tag{2.31}$$

Où $\boldsymbol{u}(T)$ est la solution du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Chercher } (\boldsymbol{u}(T), p(T)) \ \in \ H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ \\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \nu(T(x)) \nabla \boldsymbol{u}(T)(x) : \nabla \boldsymbol{v}(x) dx - \int_\Omega p(x) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_\Omega, \\ \\ \forall q \in L_0^2(\Omega) \displaystyle\int_\Omega q(x) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(T)(x) dx = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Nous testons l' équation (2.32), en prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(T)$ et immédiatement nous dérivons de (2.3) et la condition inf-sup (2.10) les estimations suivantes :

$$|\boldsymbol{u}(T)|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu_1} \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

$$|\sqrt{\nu} \boldsymbol{u}(T)|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_1}} \|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

$$\|p(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} (\|\boldsymbol{f}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \nu_2 |\boldsymbol{u}(T)|_{H^1(\Omega)}).$$

L'étape suivante maintenant est de démontrer l'existence de la solution de (2.31). Pour cela nous optons pour la méthode de Galerkin, i.e. chercher une solution discrète de (2.31) dans un espace de dimension fini. Comme $H^2(\Omega)$ est séparable, il en est de même pour son sous-espace fermé $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui admet une base dénombrable $(\theta_i)_{i \geq 1}$. Soit Θ_m l'espace engendré par $(\theta_i)_{1 \leq i \leq m}$. Alors ce problème devient :

$$\begin{cases} \text{Chercher } \mathrm{T_m} = \displaystyle\sum_{\mathrm{1 \leq i \leq m}} \mathrm{w_i} \theta_\mathrm{i} \in \Theta_\mathrm{m} \text{ tel que :} \\ \\ \forall 1 \leq i \leq m, \quad \alpha \displaystyle\int_\Omega \nabla T_m(x) \cdot \nabla \theta_i(x) dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T_m) \cdot \nabla) T_m)(x) \theta_i(x) dx = \langle g, \theta_i \rangle_\Omega. \end{cases} \tag{2.33}$$

Où $(\boldsymbol{u}(T_m), p(T_m))$ est la solution de l'équation (2.32) avec $T = T_m$. On définit une fonction F par :

$$\forall S_m \in \Theta_m, \ \langle F(T_m), S_m \rangle = \alpha \int_\Omega \nabla T_m(x) \cdot \nabla S_m(x) dx + \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T_m) \cdot \nabla) T_m)(x) S_m(x) dx - \langle g, S_m \rangle_\Omega. \tag{2.34}$$

Il est clair que F est bien définie de Θ_m dans lui même. Nous procédons comme avec l'application Φ pour démonter la continuité de F. De plus, grâce à la relation (2.9) (applicable grâce à la régularité des fonctions T_m) nous donne

$$\langle F(T_m), T_m \rangle = \alpha |T_m|^2_{H^1(\Omega)} - \langle g, T_m \rangle_\Omega \geq |T_m|_{H^1(\Omega)} \big(\alpha |T_m|_{H^1(\Omega)} - \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \big). \tag{2.35}$$

Du théorème de point fixe de Brouwer (Théorème 1.2.6), il résulte l'existence d'une solution T_m dans Θ_m. De plus, elle vérifie la propriété suivante

$$|T_m|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.36}$$

D'où le résultat principal suivant :

Théorème 2.1.5. *Pour tout* $(\boldsymbol{f}, g) \in H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$, *le problème* (2.31) *admet au moins une solution* $T \in H_0^1(\Omega)$ *et de plus cette solution vérifie l'estimation* (2.36).

Avant de démontrer le Théorème 2.1.5, on a besoin du résultat auxiliaire suivant :

Lemme 2.1.6. *Soit* $(T_k)_{K\geq 1}$ *une suite de fonction dans* $L^2(\Omega)$ *qui converge fortement vers* T *dans* $L^2(\Omega)$. *Alors, la suite* $(\mathbf{u}(T_k), p(T_k))$ *converge faiblement vers* $(\mathbf{u}(T), p(T))$ *dans* $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$.

Démonstration. Voir [20, Lemme 1.1.21]. ■

Démonstration. (du Théorème 2.1.5**)**
Comme la suite $(T_m)_m$ est bornée, on peut extraire une sous-suite notée aussi $(T_m)_m$ qui converge faiblement vers T dans $H_0^1(\Omega)$. Donc d'après le Théorème 1.2.7, $(T_m)_m$ converge fortement vers T dans $L^r(\Omega)$, $r < 6$. Par la suite d'après le Lemme 2.1.6 nous aurons que $(\boldsymbol{u}(T_m), p(T_m))$ converge faiblement vers $(\boldsymbol{u}(T), p(T))$ dans $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$. Nous fixons l'indice i dans l'équation (2.33) et faisons tendre m tend vers l'infini. Comme la suite $(T_m)_m$ converge faiblement vers T dans $H_0^1(\Omega)$ alors $(\nabla T_m)_m$ converge faiblement vers ∇T dans $L^2(\Omega)^3$. Par la suite, le terme $\alpha \int_\Omega \nabla T_m(x) \cdot \nabla\theta_i dx$ tend vers $\alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla\theta_i dx$. Pour passer à la limite pour le terme non-linéaire, nous appliquons la formule de Green (applicable grâce à la régularité des fonctions de base) et nous écrivons :

$$\int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T_m) \cdot \nabla)T_m)(x)\theta_i(x)dx = -\int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T_m) \cdot \nabla)\theta_i)(x)T_m dx.$$

La convergence forte de $(T_m)_m$ dans $L^4(\Omega)$ et le fait que $\nabla\theta_i \in L^4(\Omega)^3$ implique que $(T_m \nabla\theta_i)_m$ converge vers $T\nabla\theta_i$ dans $L^2(\Omega)^3$. Et nous avons de plus que $(\boldsymbol{u}(T_m))$ converge faiblement vers $\boldsymbol{u}(T)$ dans $L^2(\Omega)^3$, ces deux convergences aboutissent à

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T_m) \cdot \nabla)T_m)(x)\theta_i(x)dx = -\int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T) \cdot \nabla)\theta_i)(x)T dx.$$

Par conséquent la limite des fonctions satisfait pour tout $i \geq 1$,

$$\alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla\theta_i(x)dx - \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T) \cdot \nabla)\theta_i)(x)T(x)dx = \langle g, \theta_i \rangle_\Omega.$$

En passant à la limite sur i et par la densité des bases dans $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\forall S \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \alpha \int_\Omega \nabla T(x) \cdot \nabla S(x) dx - \int_\Omega ((\boldsymbol{u}(T) \cdot \nabla)T)(x) S(x) dx = \langle g, S \rangle_\Omega.$$

$\blacksquare$

Chapitre 3

Discrétisation spectrale des équations de Stokes couplées avec l'équation de la chaleur

3.1 Problème discret

Dans ce chapitre, on effectue la discrétisation du problème variationnel (2.4) par une **méthode spectrale** ; c'est à dire la méthode de Galerkin avec une intégration numérique. On commence par écrire le problème discret, ensuite, on prouve l'existence et l'unicité de la solution de ce dernier. Enfin, on établit des estimations d'erreur à **priori** entre les solutions du problème continu et discret. On suppose que le domaine Ω est le cube $]-1,1[^3$. Dans ce cas, la formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto (1.8), le fait que cette formule possède des noeuds aux extrémités de l'intervalle $]-1,1[$ permet de traiter facilement les conditions aux limites. Le paramètre de discrétisation est un entier $N \geq 2$ et c désigne une constante indépendante de N.

3.1.1 Position du problème

Ici, nous optons pour la méthode $\mathbb{P}_N - \mathbb{P}_{N-2}$ qui consiste à chercher la vitesse dans l'espace des polynômes $\mathbb{P}_N^0(\Omega)^3$, et la pression dans $\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$.

On définit sur les fonctions continues $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sur $\overline{\Omega}$ le produit discret :

$$(u,v)_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j,\xi_k)v(\xi_i,\xi_j,\xi_k)\rho_i\rho_j\rho_k. \tag{3.1}$$

Les fonctions $\boldsymbol{f}$ et g sont supposées continues sur $\overline{\Omega}$, et pour simplifier on prend $T_b = 0$ sur $\partial\Omega$. Avant de donner notre problème discret, on définit les espaces discret suivants : $\mathbb{X}_N^0 = \mathbb{P}_N^0(\Omega)^3$, $\mathbb{M}_N = \mathbb{P}_{N-2}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, et $\mathbb{Y}_N^0 = \mathbb{P}_N^0(\Omega)$ ce sont les espaces associés à $H_0^1(\Omega)^3$, $L_0^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ respectivement.

Le problème discret construit à partir du problème variationnel (2.4) que l'on va étudier :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N) \text{ dans } \mathbb{X}_N^0 \times \mathbb{M}_N \times \mathbb{Y}_N^0 \text{ tels que :} \\ \forall\, \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N^0, \quad a_N(T_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) - b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N, \\ \forall\, q_N \in \mathbb{M}_N, \quad b_N(\boldsymbol{u}_N, q_N) = 0, \\ \forall\, S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad c_N(T_N, S_N) + d(\boldsymbol{u}_N, T_N; S_N) = (g, S_N)_N. \end{cases} \tag{3.2}$$

Où, les formes $a_N(.,.,.)$, $b_N(.,.)$, $c_N(.,.)$ et $d(.,.;.)$ sont définies par :

$$a_N(T_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) = (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N, \quad b_N(\boldsymbol{u}_N, q_N) = -(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_N, q_N)_N,$$

$$c_N(T_N, S_N) = \alpha(\nabla T_N, \nabla S_N)_N, \quad d(\boldsymbol{u}_N, T_N; S_N) = ((\boldsymbol{u}_N \cdot \nabla)T_N, S_N).$$

3.1.2 Existence et unicité de solution discrète

Pour analyser le problème (3.2), on procède comme avec le problème continu. On commence par introduire l'espace discret V_N.

$$V_N = \big\{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N^0;\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N;\ b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = 0\big\}.$$

On observe alors que pour toute solution $(\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ du problème (3.2) le couple $(\boldsymbol{u}_N, T_N)$ est une solution du problème réduit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}_N, T_N) \in \mathcal{W}_N \text{ telque :} \\ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N, \quad a_N(\boldsymbol{u}_N, T_N; \boldsymbol{v}_N) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N, \\ \forall S_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad c_N(T_N, S_N) + d(\boldsymbol{u}_N, T_N; S_N) = (g, S_N)_N. \end{cases} \tag{3.3}$$

Avec $\mathcal{W}_N = V_N \times \mathbb{Y}_N^0$.

Proposition 3.1.1. *Pour toutes données $\boldsymbol{f}, g$ continues sur $\overline{\Omega}$, le problème discret* (3.3) *admet une solution $(\boldsymbol{u}_N, T_N)$ dans $\mathcal{W}_N$. Cette solution satisfait :*

$$|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)3} + |T_N|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.4}$$

Démonstration. On introduit la forme Φ_N de $\mathcal{W}_N$ dans son dual :
$\forall(\boldsymbol{u}_N, T_N) \in \mathcal{W}_N,\ \forall(\boldsymbol{v}_N, S_N) \in \mathcal{W}_N,$

$$\begin{aligned}\langle\Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{v}_N, S_N)\rangle = (\nu(T_N)\nabla\boldsymbol{u}_N, \nabla\boldsymbol{v}_N)_N + \alpha(\nabla T_N, \nabla S_N)_N \\ + ((\boldsymbol{u}_N.\nabla)T_N, S_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (g, S_N)_N.\end{aligned} \tag{3.5}$$

L'application Φ_N est continue. On muni $\mathcal{W}_N$ de la norme $(|\boldsymbol{u}_N|^2_{H^1(\Omega)3} + |T_N|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$.
On prend $\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{u}_N, S_N = T_N$ dans (3.5), on trouve :

$$\begin{aligned}\langle\Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{u}_N, T_N)\rangle = (\nu(T_N)\nabla\boldsymbol{u}_N, \nabla\boldsymbol{u}_N)_N + \alpha(\nabla T_N, \nabla T_N)_N \\ + ((\boldsymbol{u}_N.\nabla)T_N, T_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N - (g, T_N)_N.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme

$$((\boldsymbol{u}_N.\nabla)T_N, T_N) = 0, \tag{3.7}$$

l'équation (3.6) devient :

$$\begin{aligned}\langle\Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{u}_N, T_N)\rangle = (\nu(T_N)\nabla\boldsymbol{u}_N, \nabla\boldsymbol{u}_N)_N + \alpha(\nabla T_N, \nabla T_N)_N \\ - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N - (g, T_N)_N.\end{aligned}$$

On utilise la relation d'équivalence (1.15) et l'inégalité (2.3), on trouve :

$$(\nu(T_N)\nabla\boldsymbol{u}_N, \nabla\boldsymbol{u}_N)_N \geq \nu_1\|\nabla\boldsymbol{u}_N\|^2_{L^2(\Omega)^3},$$

et

$$\alpha(\nabla T_N, \nabla T_N)_N \geq \alpha\|\nabla T_N\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

L' inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation d' équivalence (1.15), et l' inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.3) impliquent :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N = (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N &\leq (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \mathcal{I}_N\boldsymbol{f})^{\frac{1}{2}}_N(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)^{\frac{1}{2}}_N \\ &\leq 3^3\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^3}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &\leq 3^3 c_{p_1}\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

De plus,

$$(g,T_N)_N = (\mathcal{I}_N g, T_N)_N \leq (\mathcal{I}_N g, \mathcal{I}_N g)_N^{\frac{1}{2}} (T_N, T_N)_N^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq 3^3 \|\mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)} \|T_N\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq 3^3 c_{p_2} \|\mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)} |T_N|_{H^1(\Omega)}.$$

Où c_{p_1}, c_{p_2} sont les constantes de Poincaré. Par conséquent

$$\begin{aligned}\langle \Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{u}_N, T_N)\rangle \geq{}& \min(\nu_1,\alpha)(|\boldsymbol{u}_N|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T_N|^2_{H^1(\Omega)}) \\ &- 3^3 \min(c_{p_1}, c_{p_2})\big((\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathcal{I}_N g\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\big)(|\boldsymbol{u}_N|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T_N|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ceci implique que $\langle \Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{u}_N, T_N)\rangle$ est positive sur la sphère S_μ de rayon

$$\mu_N = \frac{3^3 \min(c_{p_1}, c_{p_2})}{\min(\nu_1,\alpha)} \big((\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathcal{I}_N g\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}\big). \tag{3.8}$$

Les conditions du théorème de Brouwer (Théorème 1.2.6) sont satisfaites, donc il existe un couple $(\boldsymbol{u}_N, T_N) \in \mathcal{W}_N$ tel que :

$$\forall (\boldsymbol{v}_N, S_N) \in \mathcal{W}_N,\ \langle \Phi(\boldsymbol{u}_N, T_N), (\boldsymbol{v}_N, S_N)\rangle = 0,$$

et vérifiant la propriété :

$$(|\boldsymbol{u}_N|^2_{H^1(\Omega)^3} + |T_N|^2_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \leq \mu_N. \tag{3.9}$$

L'estimation (3.4) découle immédiatement de (3.8) et (3.9). ■

Lemme 3.1.1. *Il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de N tel que la forme $b_N(.,.)$ satisfait la condition inf-sup suivante :*

$$\forall q_N \in \mathbb{M}_N, \qquad \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|q_N\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Démonstration. Voir [6, Lem. 3.9]. ■

Théorème 3.1.2. *Pour toutes données $\boldsymbol{f}, g$ continues sur $\overline{\Omega}$, le problème* (3.2) *admet une solution $(\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ dans $\mathbb{X}^0_N \times \mathbb{M}_N \times \mathbb{Y}^0_N$. De plus, la partie $(\boldsymbol{u}_N, T_N)$ de cette solution vérifie* (3.4).

Démonstration. L'existence de $(\boldsymbol{u}_N, T_N)$ a été démontrée.
D'autre part, de (3.2) et (3.3) on a :

$$\forall \boldsymbol{v}_N \in V_N,\ b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - a_N(T_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N)$$
$$= 0.$$

L'existence d'une solution p_N dans $\mathbb{M}_N$ est alors une conséquence de la condition (3.10) et le théorème de Babuška-Brezzi (Théorème 1.2.10) . ■

On déduit que le triplet $(\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ est une solution du problème (3.2). Passons maintenant pour démonter l'unicité.

Proposition 3.1.2. *On suppose que la fonction ν est ν^*-lipschitzienne dans $\mathbb{R}$. Il existe une constante positive c_* telle que si le problème* (3.2) *admet une solution $(\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ tel que*

$$c_*\nu^*|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} < 1. \tag{3.11}$$

Alors, cette solution est unique.

Démonstration. Soient $(\boldsymbol{u}_N^1, p_N^1, T_N^1)$ et $(\boldsymbol{u}_N^2, p_N^2, T_N^2)$ deux solutions du problème (3.2), on pose

$$\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{u}_N^1 - \boldsymbol{u}_N^2,\ p_N = p_N^1 - p_N^2,\ T_N = T_N^1 - T_N^2.$$

On commence la démonstration par l'équation de la température.

• Pour tout $S_N \in \mathbb{Y}_N^0$, on a

$$\alpha(\nabla T_N^1, \nabla S_N)_N + ((\boldsymbol{u}_N^1.\nabla T_N^1), S_N) = (g, S_N)_N, \tag{3.12}$$

et

$$\alpha(\nabla T_N^2, \nabla S_N)_N + ((\boldsymbol{u}_N^2.\nabla T_N^2), S_N) = (g, S_N)_N. \tag{3.13}$$

Nous ajoutons et nous soustrayons $\boldsymbol{u}_N^2$ dans le deuxième terme du membre de gauche de l'égalité (3.12) et nous retranchons (3.12) de (3.13), nous obtenons

$$\alpha(\nabla T_N, \nabla S_N)_N = -((\boldsymbol{u}_N.\nabla T_N^1), S_N) - ((\boldsymbol{u}_N^2.\nabla T_N), S_N),$$

on prend $S_N = T_N$ dans l'égalité ci-dessus et on applique la relation (3.7), on trouve

$$\alpha(\nabla T_N, \nabla T_N)_N = -((\boldsymbol{u}_N.\nabla T_N^1), T_N).$$

La relation d'équivalence et l'inégalité de Hölder donnent

$$\alpha|T_N|_{H^1(\Omega)} \leq c_1c_2|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}, \tag{3.14}$$

avec

$$c_1 = c\big(\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

c_2 la constante d'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$. Passons maintenant à la première équation du problème (3.2).

• On a

$$(\nu(T_N^1)\nabla\boldsymbol{u}_N^1, \nabla\boldsymbol{v}_N)_N - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p_N^1)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N, \tag{3.15}$$

et

$$(\nu(T_N^2)\nabla \boldsymbol{u}_N^2, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p_N^2)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.16}$$

En prenant $\boldsymbol{v}_N$ égal à $\boldsymbol{u}_N$ et en soustrayant (3.15) de (3.16), nous obtenons pour tout $\boldsymbol{u}_N$ dans V_N

$$(\nu(T_N^1)\nabla \boldsymbol{u}_N^1, \nabla \boldsymbol{u}_N)_N = (\nu(T_N^2)\nabla \boldsymbol{u}_N^2, \nabla \boldsymbol{u}_N)_N,$$

nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_N^2)$ dans le premier membre de l'égalité ci-dessus, nous trouvons

$$(\nu(T_N^2)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{u}_N)_N = \big((\nu(T_N^2) - \nu(T_N^1))\nabla \boldsymbol{u}_N^1, \nabla \boldsymbol{u}_N\big)_N.$$

Comme ν est lipschitzienne, alors d'après (2.3), la relation d'équivalence et l'équation (3.14), nous trouvons

$$|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha^{-1}\nu_1^{-1}\nu^* c_1 c_2 |\boldsymbol{u}_N^1|_{H^1(\Omega)^3} |\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}.$$

On prend $c_* = \alpha^{-1}\nu_1^{-1}c_1c_2$, alors l'hypothèse (3.11) entraîne que $\boldsymbol{u}_N$ est nul et d'après (3.14) on aura T_N est nul.

• Finalement, nous avons pour tout $\boldsymbol{v}_N$ dans $\mathbb{X}_N$,

$$(\nu(T_N^1)\nabla \boldsymbol{u}_N^1, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p_N^1)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N,$$

et

$$(\nu(T_N^2)\nabla \boldsymbol{u}_N^2, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p_N^2)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N.$$

Comme la vitesse $\boldsymbol{u}_N^1$ est égale à $\boldsymbol{u}_N^2$ et la température T_N^1 est égale à T_N^2, la pression p_N vérifie alors

$$-(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p_N)_N = 0,$$

et de (3.10), nous déduisons qu'elle est nulle. D'où l'unicité de la solution $(\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$. ■

3.2 Estimation d'erreur

Le but dans cette section et d'estimer l'erreur commise en approchant la solution du problème variationnel continu (2.4) par la solution du problème discret (3.2).

Théorème 3.2.1. *Soient* $(\boldsymbol{u}, p, T), (\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ *les solutions respectives de* (2.4) *et* (3.2). *Nous supposons que* $\boldsymbol{u} \in W^{1,3}(\Omega)$, *et* ν *est* ν^**-lipschitzienne dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$\nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)^3} |T|_{H^1(\Omega)} < \alpha\nu_1. \tag{3.17}$$

Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned}
\Big(1 - \frac{\nu^* c^2}{\nu_1 \alpha} \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H1(\Omega)}\Big) |T - T_N|_{H^1(\Omega)} &\leq 2|T - \Pi^{1,0}_{N-1} T|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{c}{\alpha} |T|_{H^1(\Omega)} \bigg(\Big(1 + \frac{3\nu_2}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_1} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) \inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} \\
&+ 2\Big(\frac{\nu_2 + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}} \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\nu_1}\Big) |\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}} \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + \frac{c_1}{\nu_1} \Big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3} \Big) + \Big(\frac{2}{\nu_1} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}} \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&+ \frac{1}{\nu_1} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \Big) |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}. \bigg) + \frac{1}{\nu_1 \alpha} \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} \\
&|T - \Pi^{1,0}_{N-1} T|_{H^1(\Omega)} + \frac{c}{\alpha} \big(\|g - \mathcal{I}_N g\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{g_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}} \|g - g_{N-1}\|_{L^2(\Omega)} \big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} &\leq \frac{\nu^* c}{\nu_1} \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T - T_N|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \Big(1 + \frac{3\nu_2}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_1} \|\mathcal{I}_N \nu(T_N) - \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) \inf_{\boldsymbol{w}_N \in V_N} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} \\
&+ 2\Big(\frac{\nu_2 + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}} \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\nu_1}\Big) |\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}} \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{c_1}{\nu_1} \Big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3} \Big) \\
&+ \Big(\frac{2}{\nu_1} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}} \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\nu_1} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \Big) |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2\|p - \Pi_{N-2} p\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu^* c}{\beta} \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T - T_N|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{3\nu_2}{\beta} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + 2\nu_2 |\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}} \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{2}{\beta} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}} \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \big(|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}} \boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} \big) \\
&+ \frac{1}{\beta} \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N \nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \big(|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3} \big) \\
&+ \frac{c_1}{\beta} \big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3} \big),
\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve se fait en trois étapes. Nous commençons par l'estimation d'erreur sur la vitesse, puis celle sur la pression et nous terminons par l'estimation sur la température.

1. Soit $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)$ et $\boldsymbol{v}_N \in V_N$, nous avons

$$(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}, q) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{3.18}$$

$$(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.19}$$

Nous prenons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_N$ dans (3.18), et nous retranchons (3.19) de (3.18), nous trouvons

$$(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.20}$$

Soit $\boldsymbol{w}_N$ un élément de V_N, Nous ajoutons et nous retranchons le terme $(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N$ dans le premier membre de (3.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla (\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{w}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N& \\ = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N.&\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}$ dans le premier terme du premier membre de l'équation (3.21) :

$$\begin{aligned}(\nu(T_N)\nabla (\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{w}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N)_N = \big((\nu(T) - \nu(T_N))\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N\big) + (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N)& \\ - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N.&\end{aligned} \tag{3.22}$$

Maintenant nous allons estimer les termes du membre de droite de l'égalité (3.22). L'inégalité de Hölder (1.6) implique que

$$\big((\nu(T) - \nu(T_N))\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N\big) \leq \|(\nu(T) - \nu(T_N))\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)} |\boldsymbol{v}_N|_{H_0^1(\Omega)},$$

la lipschizité de ν et le Théorème d'injection 1.2.7 donnent

$$\|(\nu(T) - \nu(T_N))\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)} |\boldsymbol{v}_N|_{H_0^1(\Omega)} \leq \nu^* c_s \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T - T_N|_{H^1(\Omega)} |\boldsymbol{v}_N|_{H_0^1(\Omega)},$$

où c_s est la constante de la continuité de l'injection. A présent, nous passons pour estimer le terme $(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N$, nous avons

$$\begin{aligned}(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N = (\nu(T_N)\nabla (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N)& \\ + (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N&\end{aligned}$$

Soit $\tilde{N}$ la partie entière de $\frac{N-1}{2}$, nous introduisons une approximation $\mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)$ de $\mathcal{I}_N\nu(T_N)$. Pour obtenir l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N &= (\nu(T_N)\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &+ (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &+ (\mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}) - \nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N, \quad (3.23)\end{aligned}$$

nous estimons chaque terme du deuxième membre de l'équation (3.23), d'après l'équation (3.8), le premier terme sera majoré comme suit :

$$(\nu(T_N)\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N) \leq \nu_2|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u})$ dans le deuxième terme, et nous utilisons l'inégalité de Hölder (1.6), et l'inégalité triangulaire trouvons :

$$\begin{aligned}(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v}_N) \leq \Big(& \nu_2|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \nu_2|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} & + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big)\Big)|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

Le dernier terme est majoré de la manière suivante : nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}), \nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N$, et nous utilisons l'inégalité de Hölder (1.6), et l'inégalité triangulaire, nous trouvons :

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}) - \nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N \leq \Big(& \nu_2|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \nu_2|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ & + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ & + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ & \big(|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big)\Big)|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.\end{aligned}$$

Reste à majorer le dernier terme de l'équation (3.22).
Soit $\boldsymbol{f}_{N-1}$ un polynôme quelconque de $\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$, et d'après l'exactitude de la formule quadrature de Gauss-Lobatto, on voit que $(\boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N) = 0$, alors

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N) \leq |(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)| = |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)|,$$

l'inégalité triangulaire donne :

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)| = |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)| \leq |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N| + |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)|.$$

Comme $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N = (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N$, on obtient :

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)| \leq |(\boldsymbol{f}_{N-1} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N| + |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)|.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation d'équivalence, on obtient :

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)| \leq \big(3^3\|\boldsymbol{f}_{N-1} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big)\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^3},$$

ensuite, nous ajoutons et soustrayons $\boldsymbol{f}$ dans le premier terme du deuxième membre, et appliquant l'inégalité triangulaire, de plus on utilise l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on trouve :

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)| \leq c\big(3^3\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big)|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.$$

D' où

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N) \leq c_1\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)}\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big)|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}. \tag{3.24}$$

Nous prenons $\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{w}_N$, puisque $\boldsymbol{u}_N$ et $\boldsymbol{w}_N$ appartiennent à V_N. D'après la relation d'équivalence (1.15) et l'équation (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\nu_1|\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} \leq{}& \nu^* c\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T - T_N|_{H^1(\Omega)} \\
&+ 3\nu_2|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + 2\nu_2|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\
&+ 2\|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\
&+ \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\
&+ c_1\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)}\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big).
\end{aligned}$$

Or, en utilisant l'inégalité triangulaire suivante :

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} \leq |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{w}_N - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3},$$

nous aurons finalement :

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} \leq{}& \frac{\nu^* c}{\nu_1}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T - T_N|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \Big(1 + \frac{3\nu_2}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\inf_{\boldsymbol{w}_N\in V_N}|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3} \\
&+ 2\Big(\frac{\nu_2 + \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\nu_1}\Big)|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \frac{c_1}{\nu_1}\Big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)}\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\Big) \\
&+ \Big(\frac{2}{\nu_1}\|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N) - \mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}.
\end{aligned}$$

2. Soit $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)$ et $\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N$, nous avons

$$(\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}, q) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \tag{3.25}$$

$$(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N)_N = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.26}$$

Nous prenons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_N$ dans (3.25), nous retranchons (3.26) de (3.25), et comme $q_N \in \mathbb{P}_{N-2}$, d'après la formule de quadrature de Gauss-Lobatto nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N - p) =& (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &+ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nous ajoutons et nous soustrayons le polynôme $\Pi_{N-2}p$ dans le premier membre de l'équation (3.27) nous trouvons

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N - \Pi_{N-2}p) =& (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\nu(T)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &+ (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p - \Pi_{N-2}p) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Nous ajoutons et nous soustrayons $\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}$ dans le deuxième terme du membre de droite de l'équation (3.28), pour avoir

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N - \Pi_{N-2}p) =& (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - ((\nu(T) - \nu(T_N))\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &- (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) + (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p - \Pi_{N-2}p) \\ &+ (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N),\end{aligned}$$

cette équation devient équivalente à :

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N - \Pi_{N-2}p) =& (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - ((\nu(T) - \nu(T_N))\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &- (\nu(T_N)\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N) - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N) \\ &+ (\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p - \Pi_{N-2}p) + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)\end{aligned}$$

A présent, nous allons estimer les termes du membre de droite.

$$((\nu(T) - \nu(T_N))\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_N) \leq \nu^* c \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T - T_N|_{H^1(\Omega)} |\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3},$$

$$(\nu(T_N)\nabla(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N), \nabla \boldsymbol{v}_N) \leq \nu_2 |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} |\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3},$$

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, p - \Pi_{N-2}p) \leq \|p - \Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)} |\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Pour estimer le terme $(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)$, il suffit de suivre les mêmes étapes que le terme $(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)_N - (\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{w}_N, \nabla \boldsymbol{v}_N)$ dans l'estimation d'erreur de la vitesse pour obtenir :

$$\begin{aligned}(\nu(T_N)\nabla \boldsymbol{u}_N - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v}_N) \leq \Big(& \nu_2 |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \nu_2 |\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \|\nu(T_N) - \mathcal{I}_{\tilde{N}}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \big(|\boldsymbol{u} - \Pi^1_{\tilde{N}}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big)\Big) |\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3},\end{aligned}$$

et

$$(\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\nabla(\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}) - \nu(T_N)\nabla\boldsymbol{u}_N, \nabla\boldsymbol{v}_N)_N \leq \Bigg(\nu_2|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \nu_2|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + \|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) + \|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \big(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big)\Bigg)|\boldsymbol{v}_N|_{H^1(\Omega)^3}.$$

Par la suite, Pour tout $\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N$, nous utilisons la condition inf-sup discrète (3.10), nous trouvons

$$\begin{aligned}\beta\|q_N - \Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)} \leq{}& \nu^* c\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T-T_N|_{H^1(\Omega)} \\ &+ 3\nu_2|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \|p-\Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)} + 2\nu_2|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ &+ 2\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\ &+ \|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \ \big(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\ &+ c\big(3^3\|\boldsymbol{f}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big).\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité triangulaire, pour avoir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|p-p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq{}& 2\|p-\Pi_{N-2}p\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu^* c}{\beta}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T-T_N|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{3\nu_2}{\beta}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + 2\nu_2|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{2}{\beta}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\big(|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\ &+ \frac{1}{\beta}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)} \ \big(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + |\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}\big) \\ &+ \frac{c_1}{\beta}\big(\|\boldsymbol{f}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big). \qquad (3.29)\end{aligned}$$

3. Pour tout $S \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $S_N \in \mathbb{Y}^0_N(\Omega)$, nous avons :

$$\alpha(\nabla T, \nabla S) + (\boldsymbol{u}.\nabla T, S) = (g, S), \qquad (3.30)$$

$$\alpha(\nabla T_N, \nabla S_N)_N + (\boldsymbol{u}_N.\nabla T_N, S_N) = (g, S_N)_N. \qquad (3.31)$$

Nous prenons $S = S_N$, nous retranchons l'équation (3.30) de (3.31) pour obtenir :

$$\alpha(\nabla T_N, \nabla S_N)_N - \alpha(\nabla T, \nabla S_N) + (\boldsymbol{u}_N.\nabla T_N, S_N) - (\boldsymbol{u}.\nabla T, S_N) = (g, S_N)_N - (g, S_N). \qquad (3.32)$$

Nous avons

$$(\nabla\Pi^{1,0}_{N-1}T, \nabla S_N)_N = (\nabla\Pi^{1,0}_{N-1}T, \nabla S_N).$$

Nous ajoutons et nous retranchons le terme $\alpha(\nabla\Pi^{1,0}_{N-1}T, \nabla S_N)_N$ dans le premier membre de l'équation (3.32), nous obtenons :

$$\alpha(\nabla(T_N - \Pi^{1,0}_{N-1}T), \nabla S_N)_N - \alpha(\nabla(T - \Pi^{1,0}_{N-1}T), \nabla S_N) + (\boldsymbol{u}_N.\nabla T_N, S_N) \\ - (\boldsymbol{u}.\nabla T, S_N) = (g, S_N)_N - (g, S_N). \quad (3.33)$$

Nous ajoutons et nous soustrayons $\nabla\Pi^{1,0}_{N-1}T$ et $\boldsymbol{u}_N$ respectivement dans le troisième et le quatrième terme du premier membre de l'égalité (3.33). Ceci nous conduit à l'équation suivante :

$$\alpha\big(\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N), \nabla S_N\big)_N - \big(\boldsymbol{u}_N.\nabla(T_N - \Pi^{1,0}_{N-1}T), \nabla S_N\big) \\ = \alpha\big(\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \nabla S_N\big) + \big((\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{u}).\nabla T, \nabla S_N\big) \\ + \big(\boldsymbol{u}_N.\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \nabla S_N\big) - (g, S_N) + (g, S_N)_N.$$

Nous choisissons $S_N = \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N$. D'après la propriété d'antisymétrie et la relation d'équivalence (1.15), nous obtenons

$$\alpha|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N|^2_{H^1(\Omega)} \le \alpha\big(\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N)\big) \\ + \big((\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{u}).\nabla T, \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N\big) \\ + \big(\boldsymbol{u}_N.\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N\big) \\ - (g, \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N) + (g, \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N)_N.$$

Passons à estimer chaque terme du deuxième membre. Le premier terme est majoré de la manière suivante :

$$\alpha\big(\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N) \le \alpha|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T|_{H^1(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N|_{H^1(\Omega)},$$

pour majorer le deuxième il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder (1.6), puis le Théorème d'injection 1.2.7, on trouve :

$$\big((\boldsymbol{u}_N - \boldsymbol{u}).\nabla T, (\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N)\big) \le c|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}|T|_{H^1(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Hölder (1.6), et le Théorème d'injection 1.2.7, nous trouvons :

$$\big(\boldsymbol{u}_N.\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N\big) \le |\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T|_{H^1(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N|_{H^1(\Omega)},$$

nous avons :

$$|\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} \le \frac{c}{\nu_1}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\big(\boldsymbol{u}_N.\nabla(\Pi^{1,0}_{N-1}T - T), \Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N\big) \le \frac{1}{\nu_1}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T|_{H^1(\Omega)}|\Pi^{1,0}_{N-1}T - T_N|_{H^1(\Omega)}.$$

Le dernier terme est majoré comme suit :

$$(g,\Pi^{1,0}_{N-1}T-T_N)-(g,\Pi^{1,0}_{N-1}T-T_N)_N\le c\Big(\|g-\mathcal{I}_Ng\|_{L^2(\Omega)}+\|g-g_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\Big)$$
$$|\Pi^{1,0}_{N-1}T-T_N|_{H^1(\Omega)}.$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|T-T_N|_{H^1(\Omega)}\le|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}+|\Pi^{1,0}_{N-1}T-T_N|_{H^1(\Omega)},$$

donc

$$\begin{aligned}|T-T_N|_{H^1(\Omega)}\le{}&2|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}+\frac{c}{\alpha}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}|T|_{H^1(\Omega)}\\&+\frac{c}{\nu_1\alpha}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}+\frac{c}{\alpha}\Big(\|g-\mathcal{I}_Ng\|_{L^2(\Omega)}\\&+\|g-g_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Nous remplaçons $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3}|$ par son estimation dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|T-T_N|_{H^1(\Omega)}\le{}&2|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}+\frac{c}{\alpha}|T|_{H^1(\Omega)}\bigg(\frac{\nu^*c}{\nu_1}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T-T_N|_{H^1(\Omega)}\\&+\Big(1+\frac{3\nu_2}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_N}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3}\\&+2\Big(\frac{\nu_2+\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\nu_1}\Big)|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)}\\&+\frac{c_1}{\nu_1}\Big(\|\boldsymbol{f}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}+\inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\Big)\\&+\Big(\frac{2}{\nu_1}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N)\\&-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}.\bigg)+\frac{c}{\nu_1\alpha}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}\\&+\frac{c}{\alpha}\big(\|g-\mathcal{I}_Ng\|_{L^2(\Omega)}+\|g-g_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

D'où la température est estimer comme suit :

$$\begin{aligned}&\big(1-\frac{\nu^*c^2}{\nu_1\alpha}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)}|T|_{H1(\Omega)}\big)|T-T_N|_{H^1(\Omega)}\le2|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}\\&+\frac{c}{\alpha}|T|_{H^1(\Omega)}\bigg(\Big(1+\frac{3\nu_2}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\inf_{\boldsymbol{w}_N\in V_N}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}_N|_{H^1(\Omega)^3}\\&+2\Big(\frac{\nu_2+\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}}{\nu_1}\Big)|\boldsymbol{u}-\Pi^1_{\tilde N}\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)}+\frac{c_1}{\nu_1}\Big(\|\boldsymbol{f}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}\\&+\inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\Big)+\Big(\frac{2}{\nu_1}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_{\tilde N}\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\\&+\frac{1}{\nu_1}\|\nu(T_N)-\mathcal{I}_N\nu(T_N)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)|\boldsymbol{u}|_{H^1(\Omega)^3}.\bigg)+\frac{c}{\nu_1\alpha}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}\\&|T-\Pi^{1,0}_{N-1}T|_{H^1(\Omega)}+\frac{c}{\alpha}\big(\|g-\mathcal{I}_Ng\|_{L^2(\Omega)}+\inf_{g_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}}\|g-g_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

■

Avant d'énoncer le théorème principal de ce mémoire nous allons d'abord rappeler le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction $\boldsymbol{v}$ de $H^m(\Omega)^3$, on ait*

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N \in V_N} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N\|_{H^1(\Omega)^3} \leq cN^{1-m}\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^3}. \tag{3.34}$$

Démonstration. Voir [10, chap.V, Thm. 24.3] ■

Théorème 3.2.3. *Soient $(\boldsymbol{u}, p, T), (\boldsymbol{u}_N, p_N, T_N)$ les solutions respectives de (2.4) et (3.2). Nous supposons que $(\boldsymbol{u}, p, T) \in H^s(\Omega)^3 \times H^{s-1}(\Omega) \times H^s(\Omega)$ pour tout $s > \frac{5}{2}$, les données $(\boldsymbol{f}, g) \in H^\sigma(\Omega)^3 \times H^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma > 2$, nous supposons aussi que ν est ν^*-lipschitzienne dans $\mathbb{R}$ et satisfait la condition suivante : il existe une constante $\nu_0 > 0$ tel que :*

$$\|\nu(T_N)\|_{H^s(\Omega)} \leq \nu_0. \tag{3.35}$$

Et la relation

$$\nu^* c(\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}) \leq \nu_1 \alpha.$$

Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{H^1(\Omega)^3} + \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} + |T - T_N|_{H^1(\Omega)} \leq C_* N^{1-s} \Big(& \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^3} + \|p\|_{H^{s-1}(\Omega)} \\
& + \|T\|_{H^s(\Omega)} \Big) + C_\diamond \Big(N^{\frac{3}{2}-s} + N^{\frac{5}{2}-s} \\
& + \tilde{N}^{1-s} + \tilde{N}^{\frac{3}{2}-s} + \tilde{N}^{\frac{5}{2}-s} \Big) \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^3} \\
& + C_\# N^{-\sigma} \Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^3} + \|g\|_{H^\sigma(\Omega)} \Big).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
C_* = & \frac{1}{1 - \frac{\nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1 \alpha}} + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}}{\alpha \nu_1 - \nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}} \\
& + 3 \frac{\frac{\nu^* c \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1}}{1 - \frac{\nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1 \alpha}} + 3\big(1 + \frac{3\nu_2}{\nu_1}\big),
\end{aligned}$$

$$C_\diamond = 3c\frac{\nu_0}{\nu_1} + \frac{\frac{\nu^* c \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1}}{1 - \frac{\nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1 \alpha}},$$

$$C_\# = \frac{1}{1 - \frac{\nu^* c^2 \|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,3}(\Omega)} |T|_{H^1(\Omega)}}{\nu_1 \alpha}}.$$

Sont indépendantes de N.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème 1.5.3, le Lemme 3.2.2, les inégalités (1.9), (1.12), (1.14) et la condition (3.35). ■

Bibliographie

[1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.

[2] **R. Agroum**, *Discrétisation Spectrale des Equations De Navier-Stokes Couplées avec l'Equation de la Chaleur.* PhD. Université Pierre et Marier Curie. Paris 6, France. 2014.

[3] **R. Agroum, S.M. Aouadi, C. Bernardi, J. Satouri**, *Spectral Discretization of the Navier-Stokes Problem Coupled with the Heat Equation*, Esaim Mathematical Modelling and Numerical Analysis 49(3), 621-639. 2015.

[4] **G. Allaire**, *Analyse Numérique et Optimisation*, l'Ecole Polytechnique, Paris 2005.

[5] **H.H. Bauschke, J.M. Borwein, X. wang and L. Yao**, *The Brezis-Browder Theorem in General Banach Space*, Journal of Functional Analysis, **262**, 2012. 4948-4971.

[6] **C. Bernardi, N. Chorfi**, *Spectral Discretization of the Vorticity, Velocity and Pressure Formulation of the Stokes Problem*, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 44, No. 2, pp. 826-850. 2006.

[7] **C. Bernardi, S. Dib, V. Girault, F. Hecht, F. Murat et T. Sayah**, *Finite Element Method for Darcy's Problem Coupled with the Heat Equation*, Numerische Mathematik, **139**, 2018. 315-348.

[8] **C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday**, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'Eléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.

[9] **C. Bernardi, M. Maarouf, D. Yakoubi,** *Spectral Discritization of Darcy's Equations Coupled with the Heat Equation.* IMA Journal of Numerical Analysis, 2015. $1-24$.

[10] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V*, P.G. Ciarlet & J.L. Lions eds. North-Holland 1997. 209-485.

[11] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Element and Mortar Element Methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre 1998.

[12] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisétions Variationnelles de Problème aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

[13] **C. Bernardi, B. Métivet, B. Pernaud-Thomas**, *Couplage des Equations de Navier-Stokes et de la Chaleur : le Modèle et son Approximation par Elément Finis* , Rairo modél. Math. Anal. Numér., 29(7), 1995, 871-921.

[14] **H. Brezis** : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.

[15] **J. F. Burnol**, *Le Théorème de la Convegence Dominée pour les Fonctions Riemann-Intégrables*, 2009.

[16] **M. Crouzeix, A. Mignot**, *Analyse Numérique des Equations Différentielles*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la maîtrise", Masson, Paris, 1984.

[17] **R. Daultray, J.-L. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Licences et les Techniques*, Masson, Paris, 1987.

[18] **P.J. Davis, P. Robinowitz**, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando, 1985.

[19] **J. Deteix, A. Jendoubi, D. Yakoubi,** *A coupled Prediction Scheme for Solving the Navier-Stokes and Convection-Diffusion Equations,* Siam J. Numer. Anal., 52(5), 2014, 2415-2439.

[20] **S. Dib**, *Méthode d'Elément Finis pour le Problème de Darcy Couplé avec l'Equation de la Chaleur.* PhD. Université Pierre et Marie Curie- Paris 6, France. 2017.

[21] **M. Gaultier, M. Lezaun,** *Equations de Navier-Stokes Couplées à des Equations de la Chaleur : Résolution par une Méthode de Point Fixe en Dimension Infinie.* Ann. Sci. Math. Québec, 13(1), 1989, 1-17.

[22] **V. Girault, P. Raviart**, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer. Berlin Heidelberg New York. 1986.

[23] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain.* Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[24] **J.-L. Lions, E. Magenes**, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume I. Dunod. Paris. 1968.

[25] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions.* Hermann. Paris, 1966.