République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Équation d'onde dans un domaine non régulier

Présenté par

Rekima Zeyneb

Devant le jury composé de :

Président	:	Menniche Linda	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Encadreur	:	Chikouche Wided	Professeur	Université de Jijel
Examinateur	:	Bekkouche Fatiha	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Ces quelques lignes ne pourront jamais exprimer la reconnaissance que j'éprouve envers tous ceux qui, de près ou du loin, ont contribué, par leurs conseils, leurs encouragements ou leurs amitiés à l'aboutissement de ce travail.

Mes vifs remerciements accompagnés de toute ma gratitude vont tout d'abord à mon encadreur **W. CHIKOUCHE**, professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir proposé ce sujet intéressant, pour ses conseils et orientations. je la remercie surtout pour m'avoir fait confiance durant toute cette année.

Mes plus sincères remerciements s'adressent aux membres de jury

Menniche Linda et **Bekkouche Fatiha**

pour avoir accepté de juger ce travail.

Un grand "MERCI" imperceptible se lance vers ma famille pour leurs sacrifices et encouragements.

Résumé

Nous étudions dans ce travail l'existence et la régularité des solutions d'une équation du type onde de la forme :

$$\partial_{tt}p - \rho_0\, c_0^2 \,\mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\, p) = 0 \;\text{ dans }\;]0, T[\times\Omega,$$

avec des données initiales appropriées dans un domaines Ω du plan et $T > 0$ donné. Les fonctions ρ_0 et c_0, indépendantes du temps, sont constantes par morceaux. Elles présentent des sauts le long d'une ligne brisée Σ qui coupe la frontière de Ω transversalement. On étudie la régularité de la solution de part et d'autre de Σ et on analyse son comportement singulier au voisinage des points singuliers de Σ.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des singularité des problèmes elliptiques a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. En effet, ils s'intéressent depuis longtemps au comportement de la solution au voisinage des singularités géométriques.
Une étude très détaillée de la théorie des singularités des problèmes elliptiques du second ordre a été menée par P. Grisvard [9].
La solution variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet pour le laplacien :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans}\,\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur}\,\Gamma, \end{aligned}$$

est régulière (de classe H^2) dans le cas où la frontière Γ est régulière.

Supposons que Ω est un domaine plan à frontière polygonale et que Ω a un seul coin rentrant de mesure $\omega > \pi$ à l'origine défini par $0 < \theta < \omega$ dans les coordonnées polaires (r, θ). La solution u admet la décomposition

$$u = u_r + c\,S,$$

où

• $u_r \in H^2(\Omega)$ est la partie régulière dont le comportement n'a pas été affecté par la présence des coins,

• $c\,S$ est la partie singulière, S -appelée fonction singulière- est explicitement donnée par

$$S = r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\Big(\frac{\pi}{\omega}\,\theta\Big),$$

et c est une constante appelée coefficient de singularité qui dépend seulement de la donnée f.

Nous nous intéressons dans ce travail à la propagation d'une onde sonore à travers un milieu hétérogène. Nous supposons que ce dernier est bidimensionnel constitué d'une partie fluide et d'une partie solide ou bien de deux solides élastiques de caractéristiques physiques différentes. Les deux milieux occupent des régions séparées par une interface non régulière dans le sens qu'elle présente des angles.

Nous nous plaçons dans la situation où les caractéristiques de chacun des milieux sont constantes et dans le cadre de la théorie linéarisée. Les équations linéaires qui régissent ce phénomène écrites en variables d'Euler ou de Lagrange sont les mêmes et conduisent aux systèmes suivants :
Dans les liquides, l'état du milieu physique est décrit par une pression acoustique p et une vitesse acoustique u. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement et l'équation d'état donnent :

$$(P_L)\begin{cases}\partial_t\rho+\rho_0\operatorname{div}u=0,\\ \rho_0\,\partial_t u+\operatorname{grad}p=0,\\ p=c_0^2\,\rho,\end{cases}$$

où ∂_t désigne la dérivation par rapport au temps, div et grad les opérateurs différentiels usuels de divergence et du gradient. ρ_0 et c_0 correspondent respectivement à la densité et la vitesse d'amplitude infinitésimale du fluide au repos. Ces deux fonctions sont indépendantes du temps.

Le système d'équations aux dérivées partielles (P_L) est valable de part et d'autre de l'interface. Il faut par la suite lui ajouter (en plus des conditions initiales et éventuellement aux limites) des conditions de transmission à travers l'interface pour tenir compte des quantités physiques (pression ou équivalent, composantes de vitesses, composantes de contraintes ...) qui doivent être continues à travers cette interface. Nous ne reviendrons pas ici sur la modélisation du problème que l'on peut trouver dans P. Germain [4] et [5] et B. Poirée [13], [14] et [15].

Le plan de ce travail est le suivant :
1) Dans le premier chapitre, on rappellera les définitions des espaces utilisés en équations aux dérivées partielles et quelques résultats de traces inspirés de P. Grisvard [7].
2) Dans le deuxième chapitre, composée de trois paragraphes, on étudie la régularité de la solution du problème stationnaire en pression.
3) Le dernier chapitre sera consacré à l'étude de l'existence et de la régularité de la solution du problème d'évolution d'acoustique en pression.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier, les définitions et les propriétés de base des espaces de Sobolev usuels lorsqu'ils sont définis sur des polygônes. Pour les preuves des propositions et des théorèmes énoncés dans ce chapitre, le lecteur peut consulter par exemple [1, 2].

1.1 Notations

• Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ de point générique $(x_1, x_2, ..., x_n)$. On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) l'espace de toutes les fonctions indéfiniment continument différentiables et à support compact dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$). On note aussi par ∂_i la dérivé partielle par rapport à la variable $x_i, 1 \leq i \leq n$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on a $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n}$.

• On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω comme étant l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.2 Régularité des domaines

Définition 1.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que sa frontière Γ est lipschitzienne ou que Ω est lipschitzien (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et des nouveaux axes de coordonnées orthogonaux $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que*

1. V est un hypercube dans les nouveaux axes de coordonnées :

$$V = \{(y_1, ..., y_n),\ -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}.$$

2. *Il existe une fonction lipschitzienne (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) φ, définie dans*

$$V' = \{(y_1, ..., y_{n-1}),\ -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

et telle que

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2} \quad \textit{pour tout} \quad y' = (y_1, ...y_{n-1}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V,\ y_n < \varphi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V,\ y_n = \varphi(y')\}.$$

En d'autres termes, dans un voisinage de x, la frontière Γ est le graphe de φ.

1.3 Rappels sur les espaces de sobolev $H^s(\Omega)$

Définition 1.3.1. *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que*

1. *$\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.*
2. *$u \in H^m(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dx\, dy < +\infty$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et σ la partie fractionnaire de s, $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$ de la norme (naturelle)

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{dans le cas 1 et}$$

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{1/2} \quad \text{dans le cas 2.}$$

Proposition 1.3.1. *$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{s,\Omega}$.*

Définition 1.3.2. *$H_0^s(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.*

Remarque 1.3.1. *$H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, car $H_0^s(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^s(\Omega)$ donc complet.*

Définition 1.3.3. *Pour $s < 0, H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Théorème 1.3.1 (**Inégalité de Poincaré**). *On suppose que Ω est un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $c(\Omega)$ qui ne dépend que du diamètre de Ω telle que*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{pour tout} \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Corollaire 1.3.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1 + c^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

où $c(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Lemme 1.3.1. *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$ tel que :*

$$D(\Delta, L^2(\Omega)) = \big\{ v \in L^2(\Omega) |\, \Delta v \in L^2(\Omega) \big\}$$

muni de la norme

$$v \mapsto \big(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 \big)^{1/2}.$$

Définition 1.3.4. *On note $\widetilde{H}^s(\Omega)$ le sous-espace de $H^s(\Omega)$ des fonctions u dont le prolongement $\widetilde{u}$ par zéro en dehors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.3.2. *Si le domaine Ω est à frontière lipschitzienne, la Définition* 1.3.4 *est équivalente à*

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \mid \frac{\partial^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^2(\Omega), |\alpha| = m \right\}, \tag{1.2}$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontière Γ de Ω, et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0, 1[$ (voir Corollary 1.4.4.10 dans [6]). Par conséquent, on peut définir une norme sur $\widetilde{H}^s(\Omega)$ par

$$\|u\|_{\sim,s,\Omega} = \left(\|u\|_{s,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

1.4 Résultats de densité

Nous rappelons ici les principaux résultats de densité. Remarquons que les résultats n'ont été établis que dans le cas d'un domaine à frontière lipschitzienne.

Théorème 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 1.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\widetilde{H}^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 1.4.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \in [0, 1/2]$, autrement dit $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.*

1.5 La géométrie polygonale

Nous allons donner dans ce paragraphe les notations concernant les domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$. Nous appelons "polygone du plan" un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et polygonale (ce qui exclut un domaine contenant une fissure ou coupure). La frontière Γ est constituée des segments Γ_j, $j = 1, ..., N$ où les Γ_j sont deux à deux disjoints. On note S_j le sommet commun aux arêtes Γ_j et Γ_{j+1} qui forment l'angle ω_j vers l'intérieur de Ω. Enfin, n_j désigne la normale orientée vers l'extérieur de Ω et τ_j la tangente dans le sens direct. Il est clair qu'un domaine polygonal vérifie les conditions de la Définition 1.2.1 puisque chaque arête Γ_j peut être représentée par une fonction $f : x \mapsto ax + b$, f est lipschitzienne car :

$$|f(x) - f(y)| = |a||x - y|.$$

Fonctions ayant une singularité isolée

Nous donnons ici un critère qui permet de vérifier si ou non une fonction appartient à un espace de Sobolev donné.

Proposition 1.5.1. *Soit Ω un polygone du plan. Supposons que $0 \in \Gamma$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de 0 tel que*

$$\mathcal{V} \cap \overline{\Omega} = \{(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) |\ 0 \leq r \leq R, a \leq \theta \leq b\},$$

pour un réel positif R et $b - a < 2\pi$. Soit enfin u une fonction régulière dans $\overline{\Omega} \backslash \{0\}$ qui coïncide avec $r^\alpha \varphi(\theta)$ dans $\mathcal{V} \cap \overline{\Omega}$, φ appartenant à $H^{s_0}(]a, b[)$. Alors, quel que soit $s < s_0$, on a

$$u \in H^s(\Omega) \quad si \quad \alpha > s - 1, \tag{1.4}$$

$$u \notin H^s(\Omega) \quad si \quad \alpha \leq s - 1 \ \ et \ \ r^\alpha \varphi(\theta) \notin \mathbb{R}[x, y], \tag{1.5}$$

où $\mathbb{R}[x, y]$ désigne l'anneau des polynômes en coordonnées cartésiennes x et y.

1.6 Rappels sur les espaces de traces dans un ouvert polygonal

Considérons un ouvert polygonal Ω de frontière $\Gamma = \cup_{j=1}^{N} \Gamma_j$; où Γ_j pour $j = 1, 2, \ldots, N$ est un segment de droite d'extrémités S_j et S_{j+1} (en convenant que $S_{N+1} = S_1$). Un tel ouvert est au mieux lipschitzien. Cela est une source de difficultés pour définir les espaces de traces sur Γ des fonctions de $H^s(\Omega)$ dès que l'on a $s > 3/2$. En effet, il n'y a pas de procédé simple permettant de définir de manière globale les espaces du type $H^{s-1/2}(\Gamma)$. On est donc amené à considérer ces espaces de traces comme des sous espaces du produit : $\prod_{j=1}^{N} H^{s-1/2}(\Gamma_j)$qui lui est bien défini d'après le paragraphe précédent :

Définition 1.6.1. *On note $H^{1/2}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ telles que*

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) < +\infty. \tag{1.6}$$

Cet espace est justement l'espace des traces sur Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$:

Théorème 1.6.1. *L'application **trace** $u \mapsto u_{|\Gamma}$ qui est bien définie sur $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ se prolonge par densité en un opérateur linéaire continu surjectif, γ, de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$ dont le noyau est l'espace $H_0^1(\Omega)$.*

Afin de mieux caractériser l'espace des traces $H^{1/2}(\Gamma)$, on considère la restriction é chacune des arêtes Γ_j des éléments de $H^1(\Omega)$. Comme chaque Γ_j est un ouvert de $\mathbb{R}$, la restriction $f_j = f_{|\Gamma_j}$ d'un élément de $H^{1/2}(\Gamma)$ appartient à $H^{1/2}(\Gamma_j)$ au sens de la Définition 1.3.1.
Au voisinage des sommets, les éléments de $H^{1/2}(\Gamma)$ satisfont certaines conditions de raccord qui sont précisées dans la proposition suivante.

Proposition 1.6.1. *La fonction f appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$ si et seulement si $f_j \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ pour tout j et si en plus (pour ε assez petit)*

$$\int_0^\varepsilon |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty \quad \forall\, 1 \leq j \leq N, \tag{1.7}$$

où, la notation $x_j(+\sigma)$ (resp. $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp. Γ_j) à distance σ du sommet S_j.

On peut dire que la condition (1.7) exprime le fait que les fonctions f_j et f_{j+1} se raccordent en S_j en un sens faible, et on écrit, pour alléger les notations,

$$f_j \equiv f_{j+1} \text{ en } S_j.$$

Enfin, on introduit encore l'opérateur linéaire continu surjectif de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma_j)$ qui définit la trace d'une fonction sur Γ_j par

$$\gamma_j u = (\gamma u)_{|\Gamma_j}. \tag{1.8}$$

Corollaire 1.6.1. *L'application $u \mapsto \{\gamma_j u\}_{j=1}^N$ est linéaire continue surjective de $H^1(\Omega)$ sur le sous-espace de $\prod_{j=1}^N H^{1/2}(\Gamma_j)$ défini par les conditions de raccord :*

$$\gamma_j u \equiv \gamma_{j+1} u \ \text{ en } \ S_j, \ \ \forall\, j = \overline{1, N}. \tag{1.9}$$

Traces des éléments de $H^m(\Omega)$

La situation se révèle plus compliquée si on s'intéresse aux traces des fonctions appartenant à l'espace $H^m(\Omega)$ pour $m > 1$. Dans la suite, nous n'aurons besoin de donner un sens à ces traces que si $m = 2$. Ainsi, nous allons caractériser l'espace des traces dans ce cas spécifique et nous renvoyons à [9] pour un entier m quelconque.

Considérons dans un premier temps les traces d'une fonction de $H^2(\Omega)$ sur une seule arête Γ_j.

Proposition 1.6.2. *Soit Ω un polygone du plan. Alors, quel que soit j, l'application*

$$u \mapsto \{\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} u\},$$

qui est définie pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ se prolonge de façon continue en une application linéaire et surjective de $H^2(\Omega)$ sur $H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$.

On est maintenant en mesure de caractériser de façon complète l'espace des traces de $H^2(\Omega)$:

Théorème 1.6.2. *L'image de $H^2(\Omega)$ par l'application*

$$u \mapsto \{g_j, h_j\}_{j=1}^N$$

où l'on a posé $g_j = \gamma_j u$ et $h_j = \gamma_j(\partial_{n_j} u)$, est le sous-espace de

$$\prod_{j=1}^N H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j),$$

défini par les conditions de raccord

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j) \ \forall 1 \leq j \leq N, \tag{1.10}$$

$$g'_j \equiv -\cos(\omega_j)g'_{j+1} + \sin(\omega_j)h_{j+1} \quad en\ S_j\ \forall 1 \leq j \leq N, \tag{1.11}$$

$$h_j \equiv -\cos(\omega_j)h_{j+1} - \sin(\omega_j)g'_{j+1} \quad en\ S_j\ \forall 1 \leq j \leq N. \tag{1.12}$$

1.7 Le lemme de Lax-Milgram

Définition 1.7.1. *Soit E un espace de Hilbert réel. Une application*

$$\begin{aligned} a(\cdot,\cdot) : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto a(u,v), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur E si elle est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.

Définition 1.7.2. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est*

1. *Continue sur $E \times E$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$| a(u,v) | \leq C\|u\|\,\|v\| \qquad \forall\, u,v \in E.$$

2. *Coercive (ou E-elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in E.$$

Lemme 1.7.1 (Lemme de Lax-Milgram). *Soient :*
(i) *E un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de norme $\|\cdot\|$.*
(ii) *Une forme bilinéaire $(u,v) \mapsto a(u,v)$ continue sur $E \times E$.*
(iii) *Une forme linéaire L continue sur E.*
On suppose que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est E-elliptique alors le problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} Trouver\ u \in E\ tel\ que \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in E, \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in E$.

1.8 Une formule de Green sur un polygone

Rappelons d'abord les formules de Green usuelles qui sont valides dans tout domaine lipschitzien borné suivant Nečas [12] :

Théorème 1.8.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne Γ. Alors pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega v\,\partial_i u\,dx = -\int_\Omega u\,\partial_i v\,dx + \int_\Gamma \gamma u\,\gamma v\,n_i\,d\sigma. \tag{1.13}$$

Ici, n_i désigne la i ème composante du vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω. Par conséquent, sous les mêmes hypothèses sur Ω, on a la demi-formule de Green

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx + \int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx = \int_\Gamma \gamma u\,\gamma\Big(\frac{\partial v}{\partial n}\Big)\,d\sigma \quad \forall u \in H^1(\Omega) \ \ et \ \ v \in H^2(\Omega),$$

ainsi que la formule de Green

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx - \int_\Omega v\,\Delta u\,dx = \int_\Gamma \gamma u\,\gamma\Big(\frac{\partial v}{\partial n}\Big)\,d\sigma - \int_\Gamma \gamma v\,\gamma\Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\,d\sigma \quad \forall u, v \in H^2(\Omega).$$

Théorème 1.8.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. Alors pour $u \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,u\,v\,dx = -\int_\Omega u\,\nabla v\,dx + \langle u.n, v\rangle_{\partial\Omega}, \tag{1.14}$$

tel que

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)^N ; \mathrm{div}\,u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Proposition 1.8.1. *Soit $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$. Alors, on a*

$$(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega = \sum_j \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, \gamma_j u\rangle_{-3/2,\sim} - \langle \gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} u\rangle_{-1/2,\sim}, \tag{1.15}$$

quel que soit $u \in H^2(\Omega)$ telle que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)$ et $\gamma_j \partial_{n_j} u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ pour $1 \leq j \leq N$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-3/2,\sim}$ (resp.$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1/2,\sim}$) désigne le produit de dualité dans $\widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)$ (resp. $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$), et $(\cdot, \cdot)_\Omega$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.8.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_+} \cup \overline{\Omega_-}$ une décomposition de $\overline{\Omega}$ telle que :*

1. *$\Omega_\pm$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne $\Gamma_\pm$.*
2. *$\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$ et $\overline{\Omega_+} \cap \overline{\Omega_-} = \Sigma$ (on note $n_\pm$ la normale orientée vers l'extérieur de $\Omega_\pm$).*

On suppose que $v \in H^1(\Omega^\pm)$ telle que $v_+ = v_-$ sur Σ ($v_\pm$ représente la restriction de v sur $\Omega_\pm$). Alors $v \in H^1(\Omega)$.

Lemme 1.8.1. *pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$, on a l'estimation suivante :*

$$\|\Delta u\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2}\|u\|_{2,\Omega}, \tag{1.16}$$

par conséquent Δ est un opérateur continu de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.1. *Soit $v \in H^1(\Omega)$ et $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Alors, l'application*

$$v \mapsto \gamma_j \partial_{n_j} v$$

qui est bien définie pour les fonctions de $H^2(\Omega)$ permet un prolongement unique et continu en une application de l'espace

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \big\{v \in H^1(\Omega) |\, \Delta v \in L^2(\Omega)\big\},$$

dans $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$. De plus, on a

$$(\Delta v, u)_\Omega = -(\nabla v, \nabla u)_\Omega + \sum_{j=1}^{N} \langle \gamma_j \partial_{n_j} v, \gamma_j u\rangle_{-1/2,\frown} \tag{1.17}$$

quel que soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ pour tout $1 \leq j \leq N$.

CHAPITRE 2

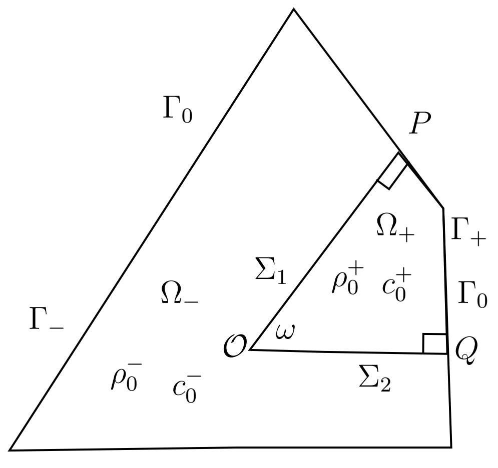
PROBLÈME STATIONNAIRE

2.1 Position du problème

On s'intéresse à l'étude de la régularité de la pression p, solution du problème (P_L), qui devient par élimination de la vitesse u

$$(P_L)' \begin{cases} \partial_{tt}p - \rho_0\, c_0^2 \operatorname{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, \mathrm{T}[,\ \mathrm{T} > 0, \\ p(0,x) = p_0(x) \text{ dans } \Omega, \\ \partial_t p(0,x) = p_1(x) \text{ dans } \Omega, \\ p = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, \mathrm{T}[, \end{cases}$$

p_0, p_1 sont des données que l'on précisera ultérieurement et $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω. Afin de faciliter l'étude, on se place dans le cas d'un quadrilatère convexe Ω dont Ia frontière rencontre Σ suivant des angles droits comme le montre la figure suivante :



On notera dans la suite par :
$\Omega = \Omega_+ \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Omega_-$;
$\partial\Omega = \Gamma_0$;
$\partial\Omega_+ = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma_+$;
$\partial\Omega_- = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma_-$;
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est l'interface dont le point singulier est placé en $\mathcal{O}$.
ω désigne l'angle intérieur de Ω_+ au sommet $\mathcal{O}$.
ρ_0 est une fonction constante par morceaux valant ρ_0^+ dans Ω_+ et ρ_0^- dans Ω_-.
On suppose : ρ_0^+, $\rho_0^- > 0$ et $\rho_0^+ \neq \rho_0^-$.

Nous nous intéressons à la singularité générée par un point anguleux de Σ. Cette singularité est indépendante des données p_0 et p_1 dès que l'on s'intéresse à des solutions p suffisamment régulières.
L'étude du problème $(P_L)'$ nécessite d'abord l'étude de problème stationnaire associé suivant :

$$(P_L)'' \begin{cases} -\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\, p) = f \text{ dans } \Omega, \\ p = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec l'hypothèse f dans $L^2(\Omega)$ pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle p dans $H_0^1(\Omega)$. Cette solution p n'est pas dans $H^2(\Omega)$ en général, et notre but est de donner de manière précise la structure de cette solution.
La solution $p \in H_0^1(\Omega)$ de $(P_L)''$ vérifie

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0^\pm}\,\Delta p_\pm = f_\pm \text{ dans } L^2(\Omega_\pm), \\ p_\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_\pm, \\ p_+ = p_- \text{ sur } \Sigma, \\ \dfrac{1}{\rho_0^+}\dfrac{\partial p_+}{\partial n_+} + \dfrac{1}{\rho_0^-}\dfrac{\partial p_-}{\partial n_-} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

où p_+ et f_+ (resp. p_- et f_-) sont les restrictions respectivement de p et f à Ω_+ (resp. Ω_-).
n_+ (resp. n_-) désigne la normale à Σ orientée vers l'extérieur de Ω_+ (resp. Ω_-), on note $[v]_{|\Sigma}$ le saut de v à travers l'interface Σ,

$$[v]_{|\Sigma} = (v_+ - v_-)_{|\Sigma}.$$

La dernière équation de (2.1) est entendue au sens de $H^{-1/2}(\Sigma)$.

2.2 Formulation variationnelle du problème stationnaire

Une solution de (2.1) se raccorde en valeurs à travers l'interface Σ et s'annule sur le bord de Ω. Ainsi, nous somme amenés naturellement à rechercher la solution dans $H_0^1(\Omega)$. Comme $p_\pm \in H^1(\Omega_\pm)$, alors d'après la première équation de (2.1), $p_\pm \in E(\Delta, L^2(\Omega_\pm))$ et on a

$$-\sum_{\pm}\int_{\Omega_\pm} \frac{1}{\rho_{0\,\pm}} \Delta p_\pm v_\pm dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, du fait que $v \in H_0^1(\Omega)$, on a $(v_\pm)_{|\Gamma_\pm} = 0 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_\pm)$; et $(v_+)_{|\Sigma} = (v_-)_{|\Sigma} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma)$. On est alors en mesure d'appliquer la formule de Green (1.17), d'où

$$-\frac{1}{\rho_0^+}\int_{\Omega_+} \Delta p_+ v_+ dx \;=\; \frac{1}{\rho_0^+}\int_{\Omega_+} \nabla p_+ \nabla v_+ dx - \frac{1}{\rho_0^+}\langle\, \partial_{n_+} p_+, v_{+|\Sigma}\,\rangle_{-1/2,\sim},$$

et

$$-\frac{1}{\rho_0^-}\int_{\Omega_-} \Delta p_- v_- dx \;=\; \frac{1}{\rho_0^-}\int_{\Omega_-} \nabla p_- \nabla v_- dx - \frac{1}{\rho_0^-}\langle\, \partial_{n_-} p_-, v_{-|\Sigma}\,\rangle_{-1/2,\sim},$$

En tenant compte des conditions de transmission, on trouve :

$$-\sum_{\pm}\int_{\Omega^\pm} \frac{1}{\rho_0^\pm}\Delta p_\pm v_\pm dx = \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\, \nabla p\, \nabla v\, dx.$$

Ainsi la formulation variationnelle du problème stationnaire est :

$$(P_{\rho_0}) \begin{cases} \text{Trouver } p \in H_0^1(\Omega) \ \text{ tel que} \\ a(p,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où pour tous $p, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(p,v) = (\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \nabla v)_\Omega \qquad \text{et} \qquad L(v) = (f,v)_\Omega.$$

Réciproquement, si $p \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (P_{ρ_0}), on a en particulier pou tout $v \in \mathcal{D}(\Omega_+)$

$$\begin{aligned} a(p,v) &= \sum_{i=1}^{2}(\frac{1}{\rho_0^+}\partial_i p_+, \partial_i v)_{\Omega_+} \\ &= \frac{1}{\rho_0^+}\sum_{i=1}^{2}\langle \partial_i p_+, \partial_i v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_+),\mathcal{D}(\Omega_+)} \\ &= -\frac{1}{\rho_0^+}\langle \Delta p_+, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_+),\mathcal{D}(\Omega_+)} \\ &= \langle f_+, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_+),\mathcal{D}(\Omega_+)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\rho_0^+}\Delta p_+ = f_+ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_+). \tag{2.2}$$

Comme $f_+ \in L^2(\Omega_+)$, cette équation est vérifiée dans $L^2(\Omega_+)$, donc presque partout sur Ω_+. De même, en choisissant v dans $\mathcal{D}(\Omega_-)$, on obtient

$$-\frac{1}{\rho_0^-}\Delta p_- = f_- \text{ dans } \Omega_-, \tag{2.3}$$

d'où la première équation de (2.1). La deuxième et la troisième équation de (2.1) sont satisfaites car $p \in H_0^1(\Omega)$.
Pour vérifier la dernière équation de (2.1), on applique la formule de Green (1.17) à la formulation variationnelle (P_{ρ_0}). On obtient en tenant compte de (2.2) et (2.3)
alors

$$\langle(\frac{1}{\rho_0}\partial_{n_+}p_+ + \frac{1}{\rho_0}\partial_{n_-}p_-)_{|\Sigma}, v_{+|\Sigma}\rangle_{-1/2,\sim} = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Soit $h \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma)$, alors $(h, 0, ..., 0) \in \prod_{j=1}^{N_\pm} H^{1/2}(\Gamma_j^\pm)$ et les conditions de raccord (1.9) sont vérifiées, d'après le Corollaire 1.6.1 (appliqué à Ω_+ et Ω_- séparément) il existe $v_1 \in H^1(\Omega_+)$ et $v_2 \in H^1(\Omega_-)$ tels que $(v_1)_{|\Sigma} = (v_2)_{|\Sigma} = h$, $(v_1)_{|\Gamma_+} = (v_2)_{|\Gamma_-} = 0$. En posant $v = v_1$ dans Ω_+ et $v = v_2$ dans Ω_-, il résulte alors de la Proposition 1.8.2 que, $v \in H_0^1(\Omega)$. Ceci nous permet d'écrire (2.4) comme suit :

$$\langle(\frac{1}{\rho_0}\partial_{n_-}p_+ + \frac{1}{\rho_0}\partial_{n_-}p_-)_{|\Sigma}, h\rangle_{-1/2,\sim} = 0 \quad \forall h \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma),$$

d'où la dernière équation de (2.1). En résumé, on vient de démontrer la

Proposition 2.2.1. *Une fonction p telle que $p_\pm \in H^1(\Omega_\pm)$ est solution du problème stationnaire* (2.1) *si et seulement si p solution du problème variationnel* (P_{ρ_0}).

Proposition 2.2.2 (Existence et unicité de la solution variationnelle). *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème (P_{ρ_0}) admet une solution unique $p \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. Pour tous $p, v \in H_0^1(\Omega)$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|a(p,v)| &\leq \int_\Omega \left|\frac{1}{\rho_0}(x)\nabla p(x)\nabla v(x)\right| dx \\
&\leq \max\left(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}\right) |p|_{1,\Omega}\, |v|_{1,\Omega} \\
&\leq \max\left(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}\right) \|p\|_{1,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}(x)(\nabla v(x))^2 dx \\ &\geq \min\Big(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}\Big)|v|_{1,\Omega}^2, \\ &\geq \min\Big(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}\Big)c(\Omega)\|v\|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

grâçe l'inégalité de Poincaré (1.1), d'où la $H_0^1(\Omega)$-ellipticité de $a(\cdot,\cdot)$.
Finalement, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

d'où la forme linéaire L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.
On conclut grâce au lemme de Lax-Milgram. □

2.3 Régularité en dehors du point singulier de l'interface

2.3.1 Régularité au voisinage d'un point régulier de Σ

La régularité H^2 à l'intérieur de Ω_+ ou Ω_- est bien connue [6]. Tout revient alors à étudier p dans un voisinage d'un point de Σ qui ne contient pas le point singulier $\mathcal{O}$ et des points anguleux de $\partial\Omega$. On considère par exemple un point M de Σ_2.
Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact au voisinage de M, paire par rapport à y et égale a un près de M.
On considère alors $q = \widetilde{\varphi p}$, prolongement de $\varphi\, p$ par zéro à $\mathbb{R}^2$ tout entier. Alors q est solution de

$$-\mathrm{div}(\frac{1}{\widetilde{\rho_0}}\mathrm{grad}\, q) = f_1 \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

avec $\widetilde{\rho_0} = \rho_0^+$ (resp. $\widetilde{\rho_0} = \rho_0^-$) dans $\mathbb{R}_+^2$ (resp. $\mathbb{R}_-^2$) et $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.
D'après [11], la restriction q_+ de q à $\mathbb{R}_+^2$ est dans $H^2(\mathbb{R}_+^2)$ et la restriction q_- de q à $\mathbb{R}_-^2$ est dans $H^2(\mathbb{R}_-^2)$. Ainsi, la solution p de $(P_L)'$ ne présente pas de singularité autre que le saut de la dérivée normale sur Σ.

2.3.2 Régularité au voisinage des points anguleux de Γ_0 et des points anguleux de $\Gamma_0 \cap \Sigma$

La régularité H^2 au voisinage des sommets de Ω est une conséquence de notre choix. En fait, les angles de Ω en ces sommet sont inférieurs à π et les conditions aux limites choisies sont celles de Dirichlet.
La régularité H^2 de part et d'autre de Σ au voisinage d'un des points P ou Q peut être obtenue par la méthode des réflexions après localisation qui nous permet de nous ramener à la situation du paragraphe 2.3.1. Par suite, les singularités sont localisées au voisinage de l'origine $\mathcal{O}$. En conclusion nous avons :

Proposition 2.3.1. *Soit V un voisinage de l'origine $\mathcal{O}$. Soit p_+ (resp. p_-) la restriction de p, solution variationnelle du problème $(P_L)''$, à Ω_+ (resp. Ω_-). Alors $p_+ \in H^2(\Omega_+ - V)$ et $p_- \in H^2(\Omega_- - V)$.*

2.4 Régularité au voisinage du point singulier de l'interface

L'étude de la régularité de la solution au voisinage du point anguleux de Σ sera faite en utilisant la technique des estimations a priori développée par Grisvard [8].

2.4.1 Estimation a priori pour les solutions régulières

Définition 2.4.1. *On définit l'espace des solutions régulières du problème (P_{ρ_0}) de la manière suivante :*

$$W = \Big\{ p = (p_+, p_-) \in H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-); p_{\pm|\Gamma_\pm} = 0, (p_+ - p_-)_{|\Sigma} = 0 \text{ et }$$
$$\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial p_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial p_-}{\partial n_-}|_{\Sigma_i} = 0 \quad i = 1, 2 \Big\}.$$

W est un sous-espace fermé de $H^2(\Omega_+) \times H^2(\Omega_-)$ pour la topologie associée à la norme :

$$\|p\|_W^2 = \|(p_+, p_-)\|_W^2 = \|p_+\|^2_{H^2(\Omega_+)} + \|p_-\|^2_{H^2(\Omega_-)}.$$

On notera que si $p = (p_+, p_-) \in W$ alors :

- $p \in H_0^1(\Omega)$ grâce à la Proposition 1.8.2.
- $-\mathrm{div}\Big(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\, p\Big) \in L^2(\Omega)$ puisque $-\mathrm{div}\Big(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\, p_\pm\Big) = -\dfrac{1}{\rho_0}\Delta p_\pm \in L^2(\Omega_\pm)$.

Définition 2.4.2. *On note W^0 le sous-espace de W formé des fonctions p nulles à l'origine.*

La proposition suivante [3, Proposition 4.1] permet de préciser les espaces des traces des fonctions $p = (p_+, p_-)$ de W ainsi que ceux de leurs dérivées normales sur Σ_1 et Σ_2.

Proposition 2.4.1. *L'application T :*

$$p = (p_+, p_-) \longmapsto ((p_{+|\Sigma_1}, p_{-|\Sigma_1}), (p_{+|\Sigma_2}, p_{-|\Sigma_2}), (\frac{\partial p_+}{\partial n_+}|_{\Sigma_1}, \frac{\partial p_-}{\partial n_-}|_{\Sigma_1}), (\frac{\partial p_+}{\partial n_+}|_{\Sigma_2}, \frac{\partial p_-}{\partial n_-}|_{\Sigma_2})),$$

est linéaire, continue et surjective de W^0 sur le sous-espace de $\widetilde{H}^{3/2}(\Sigma_1) \times \widetilde{H}^{3/2}(\Sigma_2) \times \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma_1)^2 \times \widetilde{H}^{3/2}(\Sigma_2)^2$ formé des triplets $(g_1, g_2), (h_1^+, h_1^-), (h_2^+, h_2^-)$ tels que :

$$\frac{1}{\rho_0^+} h_1^+ + \frac{1}{\rho_0^-} h_1^- = 0 \; sur \; \Sigma_1,$$

$$\frac{1}{\rho_0^+} h_2^+ + \frac{1}{\rho_0^-} h_2^- = 0 \; sur \; \Sigma_2.$$

Remarque 2.4.1. *Introduisons une fonction $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ à support dans Ω, qui vaut 1 au voisinage de l'origine $\mathcal{O}$ et qui ne dépend que de r, distance à l'origine $\mathcal{O}$.*
On vérifie facilement que $\varphi_0 \in W$. De plus, on peut écrire tout élément p de W sous la forme :

$$p = p(0,0)\, \varphi_0 + \bar{p} \quad avec \quad \bar{p} \in W^0.$$

Ainsi, l'espace des traces des fonctions de W est celui des traces des fonctions de W^0 augmenté de l'espace engendré par celles de φ_0.

Dans la suite, on aura aussi besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.4.2. *Pour tout $p \in W$, on a :*

$$\int_{\Omega_+} \frac{1}{\rho_0^+} |\Delta p_+|^2 dx + \int_{\Omega_-} \frac{1}{\rho_0^-} |\Delta p_-|^2 dx = \frac{1}{\rho_0^+} \int_{\Omega_+} \left(\left| \frac{\partial^2 p_+}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 p_+}{\partial y^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 p_+}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) dx$$
$$+ \frac{1}{\rho_0^-} \int_{\Omega_-} \left(\left| \frac{\partial^2 p_-}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 p_-}{\partial y^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 p_-}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) dx.$$

Preuve. Voir la preuve de la Proposition 2.2.2 de [10]. □

Finalement nous avons le

Théorème 2.4.1. *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des diamètres de Ω_+ et Ω_- et de la densité ρ_0 telle que :*

$$\|p\|_W \leq C(\|\Delta p_+\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\Delta p_-\|_{L^2(\Omega_-)}) \; \forall p \in W. \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $p \in W$. Posons

$$f = \begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0^+}\Delta p_+ & \text{dans } \Omega_+, \\ \\ -\dfrac{1}{\rho_0^-}\Delta p_- & \text{dans } \Omega_-. \end{cases}$$

Alors p est solution variationnelle du problème :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\, p) = f \in L^2(\Omega), \\ p \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

i.e. p est solution de

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho_0} \nabla p \, \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad \textit{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier, pour $v = p$, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho_0} |\nabla p|^2 \, dx = \int_\Omega f \, p \, dx.$$

Alors

$$\min(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}) \, \|\nabla p\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f\|_{0,\Omega} \, \|p\|_{0,\Omega} \, ,$$

ce qui donne par application de l'inégalité de Poincaré (1.1)

$$\min(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}) \, \|\nabla p\|_{0,\Omega}^2 \leq c(\Omega) \, \|f\|_{0,\Omega} \, \|\nabla p\|_{0,\Omega} \, ,$$

donc

$$\alpha \, \|\nabla p\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) \, \|f\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega)\beta \|\Delta p\|_{0,\Omega},$$

où $\alpha = \min(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-})$ et $\beta = \max(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-})$.
Ainsi

$$\|\nabla p\|_{0,\Omega} \leq \left(\frac{c(\Omega)\beta}{\alpha}\right) \|\Delta p\|_{0,\Omega}. \tag{2.6}$$

On en déduit en utilisant encore une fois l'inégalité de Poincaré que

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega)^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \|\Delta p\|_{0,\Omega}. \tag{2.7}$$

Il en résulte de (2.6) et (2.7) que

$$\|p\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla p\|_{0,\Omega}^2 \leq c(\Omega)^4 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \|\Delta p\|_{0,\Omega}^2 + c(\Omega)^2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \|\Delta p\|_{0,\Omega}^2,$$

d'où

$$\|p\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c(\Omega)^2(1 + c(\Omega)^2) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \|\Delta p\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.8}$$

La majoration de la semi norme d'ordre 2 de p est obtenue en utilisant la proposition 2.4.2. En effet, on a

$$\frac{1}{\rho_0^+}\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+}^2 + \frac{1}{\rho_0^-}\|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-}^2 = \sum_{\pm} \frac{1}{\rho_0^\pm} \left(\|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + \|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial y^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + 2\|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x \partial y}\|_{0,\Omega_\pm}^2 \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{\pm} \frac{1}{\rho_0^\pm} \left(\|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + \|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial y^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + \|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x \partial y}\|_{0,\Omega_\pm}^2 \right) &\leq \frac{1}{\rho_0^+}\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+}^2 + \frac{1}{\rho_0^-}\|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-}^2 \\ &\leq \beta \left(\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+}^2 + \|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-}^2 \right).\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{\pm} \left(\|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + \|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial y^2}\|_{0,\Omega_\pm}^2 + \|\frac{\partial^2 p_\pm}{\partial x \partial y}\|_{0,\Omega_\pm}^2 \right) \leq \frac{\beta}{\alpha} \left(\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+}^2 + \|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-}^2 \right). \tag{2.9}$$

On est maintenant en mesure de majorer $\|p\|_W^2$. En effet :

$$\|p\|_W^2 = \|p\|_{1,\Omega}^2 + \sum_{\pm} \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha p_\pm\|_{0,\Omega}^2.$$

En utilisant (2.8) et (2.9), on obtient :

$$\|p\|_W^2 \leq \left(c(\Omega)^2(1 + c(\Omega)^2) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+}^2 + \|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-}^2 \right).$$

Par conséquent

$$\|p\|_W \leq \frac{\beta}{\alpha} \left(c(\Omega)^2 + c(\Omega)^4 + \frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \left(\|\Delta p_+\|_{0,\Omega_+} + \|\Delta p_-\|_{0,\Omega_-} \right),$$

ce qui achève la démonstration. □

Considérons l'opérateur différentiel d'ordre 2, noté L, défini par

$$\begin{aligned} L\ :\quad W \quad &\longrightarrow L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-) \\ (p_+, p_-) &\longmapsto L(p_+, p_-) = (\frac{1}{\rho_0^+}\Delta p_+, \frac{1}{\rho_0^-}\Delta p_-). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.3. *L est un opérateur injectif à image fermée.*

Preuve. Soit $p \in W$ tel que $Lu = 0$, alors $\Delta p_\pm = 0$, ce qui permet de conclure grâce à l'inégalité (2.5) que

$$\|p_+\|_{2,\Omega_+} = \|p_-\|_{2,\Omega_-} = 0,$$

par conséquent $p_+ = p_- = 0$.
Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(L)$ est fermée dans $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$. En effet, soit (p^m) une suite de W telle que Lp_m converge vers (v_+, v_-) dans $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$. Ceci implique que $(\frac{1}{\rho_0^\pm}\Delta p_\pm^m)$ converge vers $v_\pm$ dans $L^2(\Omega_\pm)$, donc $(\Delta p_\pm^m)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega_\pm)$.
On déduit alors de l'inégalité (2.5) que $(p_\pm^m)$ est une suite de Cauchy dans $H^2(\Omega_\pm)$ qui est complet, ainsi $(p_\pm^m)$ converge dans cet espace. Soit

$$p_\pm := \lim_{m\to\infty} p_\pm^m \ \text{ dans}\, H^2(\Omega_\pm).$$

Comme l'opérateur de Laplace Δ est continu de $H^2(\Omega_\pm)$ dans $L^2(\Omega_\pm)$ (Lemme 1.8.1), $(\frac{1}{\rho_0^\pm}\Delta p_\pm^m)$ converge alors vers $(\frac{1}{\rho_0^\pm}\Delta p_\pm)$ dans $L^2(\Omega_\pm)$. Par conséquent $v_\pm = (\frac{1}{\rho_0^\pm}\Delta p_\pm)$ d'après l'unicité de la limite.
Il reste à vérifier que $p_\pm \in W$. En effet, il est clair que $p_\pm \in H^2(\Omega_\pm)$. D'autre part, grâce à la continuité de l'application :
$p_\pm \mapsto \{p_{\pm|\Gamma_\pm}, \partial_{n_\pm} p_{\pm|\Gamma_\pm}\}$ de $H^2(\Omega_\pm)$ dans $H^{3/2}(\Gamma_\pm) \times H^{1/2}(\Gamma_\pm)$ (Proposition 1.6.2), on a :

$$(p^m_{\pm|\Gamma_\pm}) \ \text{ converge vers } p_{\pm|\Gamma_\pm} \ \text{ dans } H^{3/2}(\Gamma_\pm), \tag{2.10}$$

$$(p^m_{\pm|\Sigma}) \ \text{ converge vers } p_{\pm|\Sigma} \ \text{ dans } H^{3/2}(\Sigma), \tag{2.11}$$

$$\text{et} \quad (\partial_{n_\pm} p^m_{\pm|\Sigma}) \ \text{ converge vers } \partial_{n_\pm} p_{\pm|\Sigma} \ \text{ dans } H^{1/2}(\Sigma). \tag{2.12}$$

Tenant compte de (2.10) et du fait que $p^m_{\pm|\Gamma_\pm} = 0$ ($p^m_\pm \in W$), on obtient $p_{\pm|\Gamma_\pm} = 0$.
D'autre part, (2.11) avec la continuité de p^m à travers l'interface ($p^m_{+|\Sigma} = p^m_{-|\Sigma}$) permet de conclure que $p_{+|\Sigma} = p_{-|\Sigma}$.
Finalement on a $(\frac{1}{\rho_0^+}\partial_{n_+} p_+ + \frac{1}{\rho_0^+}\partial_{n_-} p_-)_{|\Sigma} = 0$ grâce à (2.12) et la condition de transmission

$$(\frac{1}{\rho_0^+}\partial_{n_+} p_+^m)_{|\Sigma} = (-\frac{1}{\rho_0^-}\partial_{n_-} p_-^m)_{|\Sigma},$$

vérifiée par $p_\pm^m$ puisque $p_\pm^m \in W$. □

2.4.2 L'espace N

L'objectif de cette section consiste en l'étude du supplémentaire orthogonal de $Im(L)$ dans $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$. Pour cala, on notera : $R = Im(L)$ et $N = (Im(L))^\perp$ son orthogonal dans $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$. Par définition

$$N = \left\{ q_\pm \in L^2(\Omega_\pm) \mid \frac{1}{\rho_0^+}(q_+, \Delta p_+)_{\Omega_+} + \frac{1}{\rho_0^-}(q_-, \Delta p_-)_{\Omega_-} = 0 \quad \forall p_\pm \in W \right\}. \tag{2.13}$$

On notera aussi

$$D(L, L^2(\Omega_\pm)) = \left\{ q_\pm \in L^2(\Omega_\pm) \mid \Delta q_\pm \in L^2(\Omega_\pm) \right\},$$

le domaine d'extension maximale de l'opérateur L. Dans la suite, on aura besoin du résultat suivant qui permet de donner un sens à la trace des éléments de $D(L, L^2(\Omega_\pm))$.

Lemme 2.4.1 (Prolongement de l'application trace pour les éléments de $D(L, L^2(\Omega_\pm))$). *L'application trace γ, définie par*

$$\gamma : (q_+, q_-) \mapsto \left((q_\pm)_{|\Gamma_\pm}, [q]_{|\Sigma}, \left(\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_-}{\partial n_-}\right)_{|\Sigma} \right) \tag{2.14}$$

pour $(q_+, q_-) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega_+}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega_-})$ se prolonge par continuité en une application de $D(L, L^2(\Omega_\pm))$ sur

$$\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_\pm) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Sigma) \times \widetilde{H}^{-3/2}(\Sigma).$$

De plus, on a la formule de Green

$$\frac{1}{\rho_0^+}(\Delta p_+, q_+)_{\Omega_+} - \frac{1}{\rho_0^+}(p_+, \Delta q_+)_{\Omega_+} + \frac{1}{\rho_0^-}(\Delta p_-, q_-)_{\Omega_-} - \frac{1}{\rho_0^-}(p_-, \Delta q_-)_{\Omega_-}$$

$$= \sum_\pm \langle q_\pm, \frac{1}{\rho_0^\pm}\partial_{n_\pm} p_\pm \rangle_{-1/2,\sim} - \langle [q]_{|\Sigma}, \frac{1}{\rho_0^+}\partial_n p_+ \rangle_{-1/2,\sim} + \langle \left(\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_-}{\partial n_-}\right)_{|\Sigma}, p_+ \rangle_{-3/2,\sim} \tag{2.15}$$

pour toute fonction $p \in W$ qui vérifie la condition

$$(\partial_{n_\pm} p_\pm)_{|\Gamma_\pm} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_\pm),\ (\partial_{n_+} p_+)_{|\Sigma} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma) \text{ et } (p_+)_{|\Sigma} \in \widetilde{H}^{3/2}(\Sigma). \tag{$\mathcal{C}$}$$

Preuve. Voir Proposition 2.3.2 dans [10]. □

Proposition 2.4.4. *Soit* $(q_+, q_-) \in N$ *alors :*

$$
\begin{cases}
\Delta q_\pm = 0 \quad dans\, \mathcal{D}'(\Omega_\pm), \\
q_\pm = 0 \quad dans\, \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_\pm), \\
q_+ - q_- = 0 \quad dans\, \widetilde{H}^{-1/2}(\Sigma_i),\ i = 1, 2, \\
\dfrac{1}{\rho_0^+}\dfrac{\partial q_+}{\partial n_+} + \dfrac{1}{\rho_0^-}\dfrac{\partial q_-}{\partial n_-} = 0 \quad dans\, \widetilde{H}^{-3/2}(\Sigma_i),\ i = 1, 2.
\end{cases}
\tag{2.16}
$$

Preuve. Soit $(q_+, q_-) \in N$ alors $q_\pm \in L^2(\Omega_\pm)$ et pour tout $(p_+, p_-) \in W$, on a :

$$\frac{1}{\rho_0^+}\int_{\Omega_+} \Delta\, p_+\, q_+ + \frac{1}{\rho_0^-}\int_{\Omega_-} \Delta\, p_-\, q_- = 0.$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega_+) \times \mathcal{D}(\Omega_-) \subset W$, on a

$$\frac{1}{\rho_0^+}\int_{\Omega_+} \Delta\, p_+\, q_+ + \frac{1}{\rho_0^-}\int_{\Omega_-} \Delta\, p_-\, q_- = 0 \quad \forall (p_+, p_-) \in \mathcal{D}(\Omega_+) \times \mathcal{D}(\Omega_-).$$

En particulier, si $p_+ = 0$ on trouve

$$\frac{1}{\rho_0^-}\int_{\Omega_-} \Delta\, p_-\, q_- = 0 \quad \forall p_- \in \mathcal{D}(\Omega_-),$$

qu'on peut aussi écrire

$$\frac{1}{\rho_0^-}\langle q_-, \Delta p_-\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_-), \mathcal{D}(\Omega_-)} = 0 \quad \forall p_- \in \mathcal{D}(\Omega_-),$$

puisque $q_- \in L^2(\Omega_-)$. Ceci implique que $\Delta q_- = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_-)$.
On montre de manière similaire que $\Delta q_+ = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_+)$. D'où la première équation de (2.16). De plus, $(q_+, q_-) \in D(L, L^2(\Omega_\pm))$. Ceci permet de donner un sens à la trace de q_+ (resp. q_-) sur Γ_+ et Σ (resp. Γ_- et Σ) en tant qu'éléments de $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_+)$ et $\widetilde{H}^{-1/2}(\Sigma)$ (resp. $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_-)$ et $\widetilde{H}^{-1/2}(\Sigma)$).

Etant donnés $\varphi \in \widetilde{H}^{3/2}(\Sigma)$ et $\psi_\pm \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_\pm)$, le Théorème de trace 1.6.2 implique l'existence d'un relèvement $p_\pm \in H^2(\Omega_\pm)$ tel que

$$p_{\pm|\Gamma_\pm} = 0,\ \ \partial_{n_\pm} p_{\pm|\Gamma_\pm} = \psi_\pm,\ \ p_{\pm|\Sigma} = \varphi,\ \ \partial_{n_\pm} p_{\pm|\Sigma} = 0. \tag{2.17}$$

Il est clair que $(p_+, p_-) \in W$, ce qui permet d'appliquer la formule de Green (2.15) :

$$\frac{1}{\rho_0^+}(\Delta p_+, q_+)_{\Omega_+} - \frac{1}{\rho_0^+}(p_+, \Delta q_+)_{\Omega_+} + \frac{1}{\rho_0^-}(\Delta p_-, q_-)_{\Omega_-} - \frac{1}{\rho_0^-}(p_-, \Delta q_-)_{\Omega_-} =$$
$$\sum_{\pm} \langle q_\pm, \frac{1}{\rho_0^\pm}\psi_\pm\rangle_{-1/2,\sim} + \langle (\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_-}{\partial n_-})_{|\Sigma}, \varphi\rangle_{-3/2,\sim},$$

tenant compte de (2.17). Comme $\Delta q_\pm = 0$ et $p_\pm \in W$, les intégrales sur $\Omega_\pm$ s'annulent ce qui donne

$$\sum_{\pm} \langle q_\pm, \frac{1}{\rho_0^\pm}\psi_\pm\rangle_{-1/2,\sim} + \langle (\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_-}{\partial n_-})_{|\Sigma}, \varphi\rangle_{-3/2,\sim} = 0.$$

En faisant varier $\psi_\pm$ et φ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_\pm)$ et $\widetilde{H}^{3/2}(\Sigma)$ respectivement, on obtient la deuxième et la quatrième équation de (2.16).
D'autre part, d'après le Théorème de traces 1.6.2, étant donnés $\varphi, \psi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma)$, il existe $p_\pm \in H^2(\Omega_\pm)$ vérifiant :

$$p_{\pm|\Gamma_\pm} = 0, \;\; \partial_{n_\pm} p_{\pm|\Gamma_\pm} = 0, \;\; p_{\pm|\Sigma} = 0, \quad \partial_{n_+} p_{+|\Sigma} = \varphi, \quad \partial_{n_-} p_{-|\Sigma} = \psi,$$

la fonction ψ est choisie telle que $\frac{1}{\rho_0^-}\psi = -\frac{1}{\rho_0^+}\varphi$, de sorte que $p_\pm \in W$. Appliquons la formule de Green (2.15), on obtient

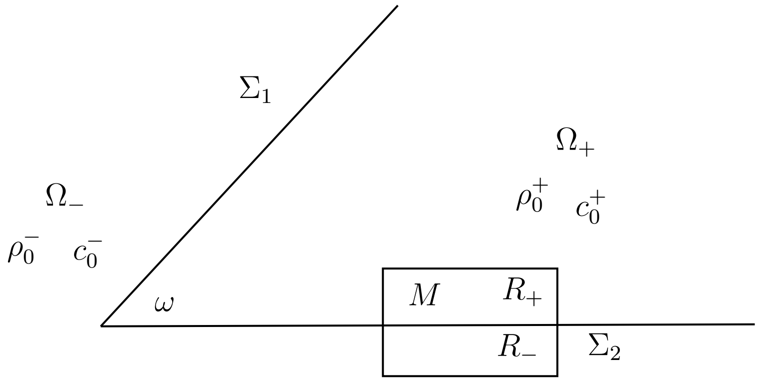
$$\langle [q]_{|\Sigma}, \frac{1}{\rho_0^+}\varphi\rangle_{-1/2,\sim} = 0 \quad \forall\, \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Sigma),$$

d'où la troisième équation de (2.16). □

Proposition 2.4.5. *Soit V un voisinage quelconque de l'origine $\mathcal{O}$ et $\widetilde{\Omega}_\pm = \Omega_\pm \backslash V$. Si $(q_+, q_-) \in N$, alors $q_{\pm|\widetilde{\Omega}_\pm} \in H^2(\widetilde{\Omega}_\pm)$.*

Comme dans la Proposition 2.4.1, nous allons étudier $q = (q_+, q_-)$ élément de N au voisinage d'un point M de Σ_1 ou Σ_2 et des points P et Q :

a) **Régularité au voisinage d'un point M de Σ_1 ou Σ_2**
Considérons par exemple un point M de Σ_2. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ valant 1 au voisinage de M. On suppose que le support de φ est contenu dans un rectangle R centré en M ne rencontrant pas $\Gamma \cup \bar{\Sigma}_1$. On suppose de plus que φ est paire par rapport à y.



Posons $\bar{q} = \varphi\, q$ restreinte au rectangle R. Alors $\bar{q}$ est nulle au voisinage de ∂R.
Notons $R_\pm = R \cap \Omega_\pm$.
Montrons que $\bar{q}_+ = \bar{q}_{|R_+} \in H^2(R_+)$. Pour cela on définit dans R_+ les fonctions :

$$\bar{q}_1 = \bar{q}(x,y) - \bar{q}(x,-y),$$

et

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{\rho_0^+}\bar{q}(x,y) - \frac{1}{\rho_0^-}\bar{q}(x,-y).$$

Par calcul direct, $\bar{q}$ est solution d'un problème de Dirichlet de la forme :

$$(P_1)\begin{cases}\Delta\, \bar{q}_1 = g_1 \ \in H^{-1}(R_+),\\ \bar{q}_1 = 0 \ \text{ sur } \ \partial R_+ \ \text{ au sens de } \ H^{-1/2}(\partial R_+).\end{cases}$$

Soit $s_1 \in H_0^1(R_+)$ la solution variationnelle du problème (P_1). Alors $q_1 - s_1$ est dans $L^2(R_+)$ et vérifie :

$$\begin{cases}\Delta(q_1 - s_1) = 0 \ \in \ \mathcal{D}'(R_+),\\ q_1 - s_1 = 0 \ \text{ sur } \partial R_+.\end{cases}$$

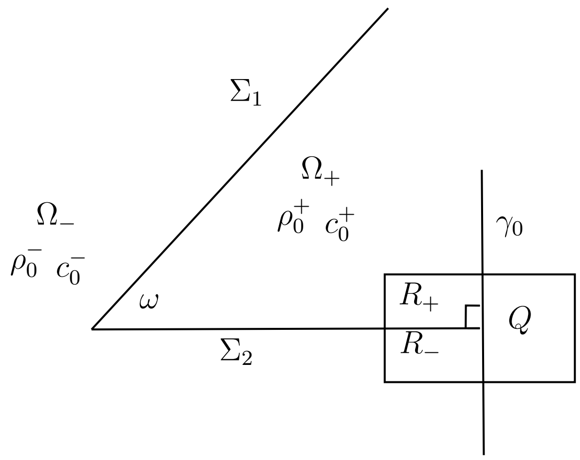
On en déduit que $q_1 - s_1 = 0$ (Grisvard [8]). On vérifie de même que $\bar{q}_2$ est solution d'un problème mêlé :

$$\begin{cases}\Delta\bar{q}_2 = g_2 \ \in \ V',\\ \bar{q}_2 = 0 \text{ sur } \partial R_+ \cap \Omega_+,\\ \dfrac{\partial \bar{q}_2}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial R_+ \cap \Sigma_2,\end{cases}$$

où V' est le dual de $V = \left\{p \in H^1(R_+), p_{|\partial R_+ \cap \Omega_+} = 0\right\}$.
En raisonnant comme pour $\bar{q}_1$, on en déduit que $\bar{q}_2 \in V$. Par suite, $\bar{q}_+ \in H^1(R_+)$.
On montre de même que $\bar{q}_- = \bar{q}_{|R_+} \in H^1(R_-)$. Comme $\bar{q}_+ = \bar{q}$ sur $\partial R_+ \cap \Sigma$, on a $\bar{q} \in H^1(R)$.
Ceci étant, on vérifie que $g_1 \in L^2(R_+)$. Donc $\bar{q}_+ \in H^2(R_-)$. De même $\bar{q}_- \in H^2(R_-)$.

b) **Régularité au voisinage du point** Q

L'étude de $q = (q_+, q_-)$ au voisinage de Q repose sur le principe des réflexions.
En effet, on considère une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support au voisinage de Q et valant 1 près de Q.
On considère encore une fois $\bar{q} = \varphi q$ dans un rectangle R contenu dans Ω et dont un côté γ_0 est porté par Γ_0.



Par réflexion, on prolonge $\bar{q}$ au rectangle double obtenu à partir de R par une symétrie par rapport à γ_0. On utilise à cette étape les résultats du cas a) pour conclure que q est H^2 par morceaux au voisinage de Q.

c) **Régularité au voisinage de l'origine $\mathcal{O}$**
Au voisinage de l'origine, Ω_+ et Ω_- sont décrits en coordonnées polaires (r, θ) par

$$\Omega_+ = \{(r, \theta) : 0 < r \text{ et } 0 < \theta < \omega\},$$

et

$$\Omega_- = \{(r, \theta) : 0 < r \text{ et } \omega < \theta < 2\pi\}.$$

Soit D_0 le disque de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1

$$D_0 = \{(r, \theta) : 0 < r < 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Un élément q de N est solution, en coordonnées polaires, de

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) = 0 \text{ dans } D_0. \tag{2.18}$$

Cette équation aux dérivées partielles nous amène à utiliser la méthode de séparation des variables. En effet, on pose : $q(r, \theta) = R(r)\varphi(\theta)$, ce qui donne l'équation différentielle homogène suivante

$$\frac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi(\theta)\,R'' + \frac{1}{r}R'\frac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi(\theta) + \frac{R}{r^2}\Big(\frac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi(\theta)'\Big)' = 0,$$

ce qui nous conduit au problème de Sturm-Liouville :

$$\text{(2.19)}\qquad \begin{cases} -\left(\dfrac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi'(\theta)\right)' = \lambda\dfrac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi(\theta) \text{ dans }]0,2\pi[; \\ \\ \varphi \in H^1(]0,2\pi[); \end{cases}$$

La notation " $'$ " désigne la dérivation par rapport à θ. Nous pouvons supposer que la fonction densité ρ_0 dépend uniquement de θ ; elle vaut :

$$\rho_0(\theta) = \begin{cases} \rho_0^+ \text{ pour } \theta \in]0,\omega[, \\ \rho_0^- \text{ pour } \theta \in]\omega,2\pi[. \end{cases}$$

Lemme 2.4.2. *Soit H l'espace de Hilbert $L^2(]0,2\pi[)$ muni du produit scalaire*

$$\text{(2.20)}\qquad (\varphi,\psi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho_0(\theta)}\varphi(\theta)\psi(\theta)\,d\theta.$$

L'opérateur A de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \left\{\varphi \in H^1(]0,2\pi[) \mid \ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho_0(\theta)}\frac{d\varphi}{d\theta}\right) \in L^2(]0,2\pi[)\right\},$$

défini par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(A),\ \ A\varphi = -\rho_0(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho_0(\theta)}\frac{d\varphi}{d\theta}\right),$$

est autoadjoint, positif et à résolvante compacte.

Preuve. Voir Lemme 2.3.8 de [10]. □

Proposition 2.4.6. *Les valeurs propres (λ_k) dépendent uniquement de ω, ρ_0^+ et ρ_0^- et vérifient :*

$$0 = \lambda_0 < 1/4 < \lambda_1 < 1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \cdots \le \lambda_k \to +\infty,$$

elles sont données par l'équation caractéristique :

$$(\rho_0^+ + \rho_0^-)^2 \sin^2 \pi\sqrt{\lambda} - (\rho_0^+ - \rho_0^-)^2 \sin^2(\pi-\omega)\sqrt{\lambda} = 0.$$

Les fonctions propres φ_k associées aux valeurs propres λ_k forment un système orthogonal *complet de $L^2(]0, 2\pi[)$ c'est à dire :*

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(\theta)\varphi_1(\theta)d\theta = C_k\delta_{lk}.$$

Preuve. Le problème de Sturm-Liouville (2.19) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_+''(\theta) + \lambda\varphi_+(\theta) = 0 & \text{dans }]0, \omega[, \\ \varphi_-''(\theta) + \lambda\varphi_-(\theta) = 0 & \text{dans }]\omega, 2\pi[, \\ \varphi_+(0) = \varphi_-(2\pi), \\ \varphi_+(\omega) = \varphi_-(\omega). \\ \rho_0^-\varphi_+'(0) = \rho_0^+\varphi_-'(2\pi), \\ \rho_0^-\varphi_+'(\omega) = \rho_0^+\varphi_-'(\omega), \end{cases}$$

où φ_+ (resp. φ_-) est la restriction de φ sur $]0, \omega[$ (resp. $]\omega, 2\pi[$).
Ce problème admet une solution générale de la forme

$$\varphi_\pm(\theta) = A^\pm \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B^\pm \sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Les conditions de transmission se traduisent par un système linéaire d'ordre 4 dont le déterminant, noté $F(\lambda)$, est donné par

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) & -\sin(2\pi\sqrt{\lambda}) \\ \cos(\omega\sqrt{\lambda}) & \sin(\omega\sqrt{\lambda}) & -\cos(\omega\sqrt{\lambda}) & -\sin(\omega\sqrt{\lambda}) \\ 0 & \rho_0^- & \rho_0^+\sin(2\pi\sqrt{\lambda}) & -\rho_0^+\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) \\ -\rho_0^-\sin(\omega\sqrt{\lambda}) & \rho_0^-\cos(\omega\sqrt{\lambda}) & \rho_0^+\sin(\omega\sqrt{\lambda}) & -\rho_0^+\cos(\omega\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix}$$

$$= (\rho_0^+ + \rho_0^-)^2 \sin^2 \pi\sqrt{\lambda} - (\rho_0^+ - \rho_0^-)^2 \sin^2(\pi - \omega)\sqrt{\lambda}.$$

On se propose d'étudier les zéros de F. Pour cela et sans perdre en généralité, on suppose $\varphi_0^+ > \varphi_0^-$ et $0 < \omega < \pi$.
Il est facile de voir que $F(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in]0, 1/4[$ et $F(1/4).F(1) < 0$. On en déduit alors grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\lambda_1 \in]1/4, 1[$ tel que $F(\lambda_1) = 0$.
L'unicité de λ_1 provient de la contraction forte de la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\arcsin((\frac{\rho_0^+ - \rho_0^-}{\rho_0^+ + \rho_0^-})\sin x(\pi - \omega)) \quad \forall\lambda \in]1/4, 1[.$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$ nous avons :

$$F(k) = -(\rho_0^+ - \rho_0^-)^2 \sin^2(k\omega) < 0,$$

$$F(k+1/2) = (\rho_0^+ + \rho_0^-)^2 - (\rho_0^+ - \rho_0^-)^2 \sin^2(k+1/2)(\pi - \omega) > 0,$$
$$F(k+1) = -(\rho_0^+ - \rho_0^-)^2 \sin^2((k+1)\omega) < 0,$$

ce qui implique d'après le théorème des valeurs intermédiaires que F admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $[k, k+1]$.
Pour la démonstration du deuxième résultat de la proposition, notons d'abord que l'opérateur non borné associé au problème de Sturm-Liouville (2.19) est autoadjoint, positif et à résolvante compacte (voir [10, Lemme 2.3.8]). Ainsi le résultat désiré est une conséquence directe du théorème spectral des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte. $\square$

Théorème 2.4.2. *Un élément q de N peut être décomposé sous la forme :*

$$q(r,\theta) = q_r(r,\theta) + q_s(r,\theta),$$

avec :

$$q_r(r,\theta) = a_0 + \sum_{K\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(\theta) \in H^1(D_0).$$

$$q_s(r,\theta) = b_1 r^{-\sqrt{\lambda_1}} \varphi_1(\theta) \in L^2(D_0) - H^1(D_0).$$

a_0, a_k et b_1 sont des constantes réelles. Les coefficients λ_k sont solutions de l'équation caractéristique de la Proposition 2.4.6.
De plus, la suite $(a_k)_k$ vérifie :

$$\sum_{K\geq 1} \lambda_k a_k^2 < +\infty.$$

Preuve. Pour tout $r > 0$ fixé, $q(r,\theta)$ élément de N, est dans $H^1(]0, 2\pi[)$. On conclut alors que pour un r fixé de l'intervalle $]0, 1[$, $q(r,\theta) \in \mathcal{D}(A)$, ceci nous permet de considérer $q(r,\theta)$ comme une application de $]0, 1[$ dans l'espace $\mathcal{D}(A)$, qui associe à chaque $r \in]0, R[$ l'application $q(r,\theta) \in \mathcal{D}(A)$.
Alors l'équation (2.18) peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A q = 0 \text{ dans } D_0. \tag{2.21}$$

Puisque $q(r,\theta) \in \mathcal{D}(A) \subset L^2(] - \omega_-, \omega_+[)$, on peut alors le développer en série de fonctions propres normalisées $\left(\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}\right)_{k\geq 1}$ de l'opérateur A, on a :

$$q(r,\theta) = q_r(\theta) = \sum_{k\geq 0} v_k(r)\varphi_k(\theta) \text{ dans } D_0,$$

où

$$v_k(r) = (q_r(\theta), \varphi_k) = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho_0(\theta)} q_r(\theta)\varphi_k(\theta)\, d\theta.$$

L'équation (2.21) devient alors :

$$\sum_{k\geq 1} v_k''(r)\varphi_k(\theta) + \frac{1}{r}\sum_{k\geq 1} v_k'(r)\varphi_k(\theta) - \frac{1}{r^2}\sum_{k\geq 1} v_k(r)A\varphi_k(\theta) = 0,$$

ce qui implique

$$\sum_{k\geq 1}\left(v_k''(r) + \frac{1}{r}v_k'(r) - \frac{1}{r^2}\lambda_k v_k(r)\right)\varphi_k(\theta) = 0.$$

Comme $(\varphi_k)_k$ est un système orthogonal complet de $L^2(]0,2\pi[)$, l'équation $\operatorname{div}(\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} q) = 0$ donne alors :

$$v_k^{''}(r) + \frac{1}{r}v_k^{'}(r) - \frac{1}{r^2}\lambda_k v_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La notation " $'$ " désigne la dérivation par rapport à r. Cette équation différentielle admet une solution générale de la forme

$$v_k(r) = a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} + b_k r^{-\sqrt{\lambda_k}} \quad \forall k > 0,$$

$$v_0(r) = a_0 + b\log r \quad \text{pour} \quad k = 0.$$

où a_k et b_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des constantes réelles.
D'une part, on a $v_k(r) = (q_r(\theta), \varphi_k)$, alors

$$\begin{aligned}
|v_k(r)|^2 &= |(q_r(\theta), \varphi_k)|^2 \\
&= \frac{1}{\|\varphi_k\|^4}\left(\left|\int_0^{2\pi} v_r(\theta)\varphi_k(\theta)\frac{1}{\rho_0(\theta)}\, d\theta\right|\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{\|\varphi_k\|^4}\int_0^{2\pi} v_r^2(\theta)\frac{1}{\rho_0(\theta)}\, d\theta \times \int_0^{2\pi} \varphi_k^2(\theta)\frac{1}{\rho_0(\theta)}\, d\theta \\
&= \frac{1}{\|\varphi_k\|^4}\int_0^{2\pi} v^2(r,\theta)\frac{1}{\rho_0(\theta)}\, d\theta \times \|\varphi_k\|^2 \\
&= \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_0^{2\pi} v^2(r,\theta)\frac{1}{\rho_0(\theta)}\, d\theta,
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\int_0^1 |v_k(r)|^2 r dr \leq \frac{1}{\| \varphi_k \|^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} v^2(r,\theta) \frac{1}{\rho_0(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{\| \varphi_k \|^2} \|v\|^2_{0,D_0} < \infty.$$

D'autre part, on a

$$v_k(r) = a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} + b_k r^{-\sqrt{\lambda_k}},$$

ce qui implique

$$v_k^2(r) = a_k^2\, r^{2\sqrt{\lambda_k}} + b_k^2\, r^{-2\sqrt{\lambda_k}} + 2a_k b_k,$$

d'où

$$\int_0^1 v_k^2(r) r dr = a_k^2 \int_0^1 r^{2\sqrt{\lambda_k}+1} dr + b_k^2 \int_0^1 r^{-2\sqrt{\lambda_k}+1} dr + 2a_k b_k.$$

On pose :

$$I_1 = a_k^2 \int_0^1 r^{2\sqrt{\lambda_k}+1} dr \ \text{ et } \ I_2 = b_k^2 \int_0^1 r^{-2\sqrt{\lambda_k}+1} dr.$$

L'intégrale I_1 est convergente car $\lambda_k >$-1, et l'intégrale I_2 est convergente si $\lambda_k < 1$, on en déduit que $b_k = 0$ pour $k > 1$.
D'autre part, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ à support au voisinage de 0 ne dépendant que de r telle que $\varphi(0) \neq 0$. Il est facile de vérifier que $\varphi \in W$. Par suite

$$\int_{D_0} \operatorname{div}(\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \varphi) q = 0.$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\rho_0} \nabla\varphi \nabla q\; r\, d\theta\, dr = b\Big(\frac{1}{\rho_0^+}\omega + \frac{1}{\rho_0^-}(2\pi - \omega)\Big)\varphi(0) = 0,$$

ainsi $b = 0$.
On obtient ainsi la décomposition :

$$q(r,\theta) = b_1 r^{-\sqrt{\lambda_1}} \varphi_1(\theta) + a_0 + \sum_{K \geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(\theta).$$

Comme $q(1,\theta) \in H^1(]0,2\pi[)$, on a :

$$\sum_{K \geq 1} \lambda_k a_k^2 < +\infty,$$

et par suite $q_r(r,\theta) \in H^1(D_0)$. $\square$

Revenons finalement à l'étude de la régularité de la solution p de $(P_L)'$.
Considérons une fonction de troncature $\phi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ valant 1 au voisinage du sommet $\mathcal{O}$.

Corollaire 2.4.1. *L'ensemble N est de dimension 1.*

Preuve. La fonction $q_1(r,\theta) = r^{-\sqrt{\lambda_1}}\ \varphi_1(\theta)\ \phi(r)$ vérifie

$$(P)\begin{cases} -\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\ q_1) = g \quad \text{dans } \Omega, \\ q_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En effet, $q^{\pm}_{1\,|\Gamma_\pm} = 0$, de plus $q_1^+ - q_1^- = r^{-\sqrt{\lambda_1}}\phi(r)\ (\varphi_1^+(0) - \varphi_1^-(0) = 0$ sur Σ, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_1^+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_1^-}{\partial n_-} &= -\frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial q_1^+}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial q_1^-}{\partial y} \\
&= -(\frac{1}{\rho_0^+}(\frac{\partial q_1^+}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial q_1^+}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dy}) + (\frac{1}{\rho_0^-}(\frac{\partial q_1^-}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial q_1^-}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dy}) \\
&= (\frac{\partial r^{-\sqrt{\lambda_1}}\phi(r)}{\partial r})(-\frac{1}{\rho_0^+}\varphi_1^+(\theta) + \frac{1}{\rho_0^-}\varphi_1^-(\theta))\sin\theta) \\
&\quad + (r^{-\sqrt{\lambda_1}}\phi(r)(-\frac{1}{\rho_0^+}\frac{d\varphi_1^+(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{d\varphi_1^-(\theta)}{d\theta}))\frac{d\theta}{dy}) \\
&= (\frac{\partial r^{-\sqrt{\lambda_1}}\phi(r)}{\partial r})(-\frac{1}{\rho_0^+}\varphi_1^+(0) + \frac{1}{\rho_0^-}\varphi_1^-(0))\sin 0) \\
&\quad + (r^{-\sqrt{\lambda_1}}\phi(r)(-\frac{1}{\rho_0^+}\frac{d\varphi_1^+(0)}{d\theta} + \frac{1}{\rho_0^-}\frac{d\varphi_1^-(0)}{d\theta}))\frac{d\theta}{dy}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\Delta q_1 &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial \theta^2} \\
&= \phi''(r)r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta) + \frac{1}{r}\phi'(r)r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta) + \phi(r)(\frac{\partial r^{-\sqrt{\lambda_1}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial r^{-\sqrt{\lambda_1}}}{\partial r})\varphi_k(\theta) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\phi(r)r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k''(\theta) + 2\phi'(r)\frac{\partial r^{-\sqrt{\lambda_1}}}{\partial r}\varphi_k(\theta) \\
&= \Delta\phi r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta) + \phi(r)\Delta(r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta)) + 2\nabla\phi\nabla(r^{-\sqrt{\lambda_1}})\varphi_k(\theta).
\end{aligned}$$

Et on a $r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta)$ est harmonique de part et d'autre de Σ, alors

$$\Delta q_1^{\pm} = \Delta\phi r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_k(\theta) + 2\nabla\phi\nabla(r^{-\sqrt{\lambda_1}})\varphi_k(\theta),$$

donc

$$-\frac{1}{\rho_0^{\pm}}\Delta q_1^{\pm} = g \ \text{ dans } \Omega.$$

Ceci montre que q_1 est solution du problème stationnaire (2.1) avec $f = g$.
g étant dans $L^2(\Omega)$, il existe alors une solution faible $U \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P).

Par conséquent :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\ (q_1 - U)) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ q_1 - U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons $S^* = q_1 - U$ appelée fonction singulière duale. Elle est non nulle puisque $q_1 \in L^2(\Omega) - H_0^1(\Omega)$ alors que $U \in H^1(\Omega)$.
Soit $q \in N$ et $q(r,\theta) = b_1 r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(\theta) + a_0 + \sum_{K\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(\theta)$ son développement dans D_0 donné par le Théorème 2.4.2. Vérifions que $q - b_1\ S^* \in H^1(\Omega)$. En effet :
la fonction de troncature ϕ vaut 1 au voisinage de l'origine donc $S^* - b_1 r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(\theta) \in H^1(D_0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} q(r,\theta) - a_0 - \sum_{k\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(\theta) &= -(b_1(S^* - r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(\theta) - S^*)) \\ &= -b_1(S^* - r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(\theta)) + b_1 S^*, \end{aligned}$$

alors

$$q(r,\theta) - a_0 - \sum_{k\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} - b_1 S^* = -b_1(S^* - r^{-\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1(\theta)),$$

d'où

$$q(r,\theta) - a_0 - \sum_{k\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} - b_1 S^* \in H^1(D_0). \tag{2.22}$$

D'après le Théorème 2.4.2, on a

$$a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \in H^1(D_0). \tag{2.23}$$

D'après (2.22) et (2.23), on trouve

$$q - b_1\ S^* \in H^1(D_0), \tag{2.24}$$

comme $q - b_1\ S^* \in N$, il résulte alors d'après la Proposition 2.4.5 que $q - b_1\ S^* \in H^1(\Omega)$.
D'autre part comme $q - b_1\ S^*$ appartient à N, $q - b_1\ S^*$ vérifie

$$-\mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\ (q - b_1\ S^*)) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Par suite $q - b_1\ S^* = 0$ c'est à dire que $q = b_1\ S^*$.
Donc N est de dimension 1 et est engendré par S^*. □

2.4.3 Décomposition de la solution variationnelle

Lemme 2.4.3. *La fonction singulière* $S(r,\theta) = r^{\sqrt{\lambda_1}}\, \varphi(\theta)\, \phi(r)$ *est solution du problème suivant*

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho_0^{\pm}}\, \Delta S_{\pm} &= S^*_{\pm} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}_{\pm}), \\
S_{\pm|\Gamma_{\pm}} &= 0 \qquad \text{sur}\, \Gamma_{\pm}, \\
[S]_{|\Sigma} &= 0 \qquad \text{sur}\, \Sigma, \\
\frac{1}{\rho_0^{+}}\frac{\partial S_+}{\partial n_+} + \frac{1}{\rho_0^{-}}\frac{\partial S_-}{\partial n_-} &= 0 \qquad \text{sur}\, \Sigma.
\end{aligned}$$

Théorème 2.4.3. *Soit* p *la solution variationnelle de* (P_{ρ_0})*, il existe un nombre réel* c *tel que*

$$p = p_r + c\, S \in H^1_0(\Omega).$$

Preuve. D'après la Proposition 2.4.3, $L(W)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$. On peut alors décomposer l'espace produit de Hilbert $L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$ en la somme directe de $L(W)$ et de son orthogonal N qui est engendré par la fonction (S^*_+, S^*_-)

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-) &= L(W) \oplus N \\
&= L(W) \oplus \left[(S^*_+, S^*_-)\right].
\end{aligned}$$

Pour $(f_+, f_-) \in L^2(\Omega_+) \times L^2(\Omega_-)$, il existe $p_r^{\pm} \in W$ et un nombre c unique tels que :

$$(f_+, f_-) = (-\frac{1}{\rho_0^{+}}\Delta p_r^{+}, -\frac{1}{\rho_0^{-}}\Delta p_r^{-}) + c\,(S^*_+, S^*_-).$$

D'après le Lemme 2.4.3, on en déduit que

$$(f_+, f_-) = (-\frac{1}{\rho_0^{+}}\Delta p_r^{+}, -\frac{1}{\rho_0^{-}}\Delta p_r^{-}) + c\,(\frac{1}{\rho_0^{+}}\Delta S_+, \frac{1}{\rho_0^{-}}\Delta S_-),$$

d'autre part $(f_+, f_-) = -\frac{1}{\rho_0^{\pm}}\Delta p_{\pm}$ donc

$$\Delta p_{\pm} = \Delta(p_r^{\pm} + c\, S_{\pm}),$$

Soit $w = p - (p_r + c\, S) \in H^1_0(\Omega)$, alors w est solution du problème de transmission

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\; w) &= 0 \;\text{ dans }\; \Omega, \\
w &= 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Ce problème admet une solution variationnelle unique qui n'est autre que la solution nulle.

Par suite $w = 0$, d'où $p = p_r + c\,S$. □

En résumé, on a

Théorème 2.4.4. *Le problème stationnaire*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\ p) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution variationnelle unique $p \in H_0^1(\Omega)$ pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante c telle que :

$$p(r,\theta) = p_r(r,\theta) + c\ S(r,\theta).$$

Avec $p_r = (p_r^+, p_r^-) \in W$ et $S(r,\theta) = r^{\sqrt{\lambda_1}}\ \varphi(\theta)\ \phi(r)$.

CHAPITRE 3

ETUDE DU PROBLÈME D'ÉVOLUTION

Revenons à notre problème d'évolution

$$(P_L)' \begin{cases} \partial_{tt} p - \rho_0\, c_0^2\, \mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0} \mathrm{grad}\, p) = 0 \quad \text{dans}\, \Omega \times]0, T[, \\ p(0, x) = p_0(x) \quad \text{dans}\, \Omega, \\ \partial_t p(0, x) = p_1(x) \quad \text{dans}\, \Omega, \\ p = 0 \quad \text{sur}\ \partial\Omega \times]0, T[. \end{cases}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution du problème $(P_L)'$, nous allons utiliser la méthode classique de Hille-Yosida pour des opérateurs maximaux monotones (voir Brésis [2]).

3.1 Réduction d'ordre

On commence par se ramener à un système du premier ordre, on procède de la manière suivante :

On pose : $\dfrac{\partial p}{\partial t} = v$, le problème $(P_L)'$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t p - v = 0, \\ \partial_t v - \rho_0\, c_0^2\, \mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0} \mathrm{grad}\, p) = 0 \quad \text{dans}\, \Omega \times]0, T[, \\ p(0, x) = p_0(x) \quad \text{dans} \ \ \Omega, \\ v(0, x) = p_1(x) \quad \text{dans} \ \ \Omega. \end{cases}$$

Posons : $P = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}$ et $P_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$ de sorte que $(P_L)'$ devient :

$$(P_L)'' \begin{cases} \partial_t P + \mathcal{A}P = 0 \quad \text{dans } \ \Omega\times]0,T[, \\ P(0,x) = P_0(x) \quad \text{dans } \ \Omega, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

où A est l'opérateur $-\rho_0\, c_0^2 \operatorname{div}\Big(\dfrac{1}{\rho_0}\text{grad}\Big)$.

3.2 Existence, unicité et régularité de la solution

On définit l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que l'on munit du produit scalaire :

$$(P,Q)_H = \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\, \nabla p_1\, \nabla q_1\, dx + \int_\Omega \frac{1}{\rho_0\, c_0^2}\, p_1\, q_1\, dx + \int_\Omega \frac{1}{\rho_0\, c_0^2}\, p_2\, q_2\, dx,$$

pour tous $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ éléments de H.
En utilisant les propriétés de ρ_0 et c_0, on vérifie facilement que ce produit scalaire induit sur H une norme équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
On pose

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ p \in H_0^1(\Omega) \; ; \; \Delta_{\rho_0} = \operatorname{div}\Big(\frac{1}{\rho_0}\text{grad}\, p\Big) \in L^2(\Omega) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|p\|^2_{\mathcal{D}(A)} = \|p\|^2_{0,\Omega} + \|\nabla p\|^2_{0,\Omega} + \|\Delta_{\rho_0}\|^2_{0,\Omega}.$$

On considérera alors $\mathcal{A}$ comme un opérateur non borné dans H de domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \times H_0^1(\Omega) \subset H,$$

tel que : $\quad \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H$ et

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ -\rho_0\, c_0^2 \operatorname{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\text{grad}\, p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ Ap_1 \end{pmatrix},$$

pour tout $(p_1, p_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Lemme 3.2.1. *$\mathcal{A} + Id$ est un opérateur maximal monotone.*

Preuve. i) On commence par montrer que $\mathcal{A}+Id$ est monotone.
En effet, on a pour tout $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}P,P)_H+(P,P)_H = &-\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1\,\nabla p_2 dx-\int_\Omega \frac{1}{\rho_0\,c_0^2}\,p_1\,p_2 dx-\int_\Omega \mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p_1)\,p_2 dx\\ &+\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,|\nabla p_1|^2 dx+\int_\Omega \frac{1}{\rho_0\,c_0^2}\,p_1^2 dx+\int_\Omega \frac{1}{\rho_0\,c_0^2}\,p_2^2 dx\end{aligned}$$

Appliquons la formule de Green (1.14), on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p_1)p_2 dx &= -\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1.\nabla p_2\,dx+\langle\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1.n,p_2\rangle_{\partial\Omega}\\ &= -\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1.\nabla p_2\,dx,\end{aligned}$$

car $p_2=0$ sur $\partial\Omega$. Ceci donne

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}P,P)_H+(P,P)_H &= \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,|\nabla p_1|^2 dx+\int_\Omega \frac{1}{\rho_0\,c_0^2}\,\left(p_1^2-p_1\,p_2+p_2^2\right)dx\\ &= \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,|\nabla p_1|^2 dx+\int_\Omega \frac{1}{\rho_0\,c_0^2}\,\left(\left(\frac{1}{2}p_1-p_2\right)^2+\frac{3}{4}p_1^2\right)dx\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}+Id$ est monotone.

ii) Montrons maintenant que $\mathcal{A}+2Id$ est surjectif.
En effet, il suffit de trouver $P\in\mathcal{D}(A)$ solution de l'équation $\mathcal{A}P+P=F$, où $F=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ donné dans H, ceci équivaut à :

$$\begin{cases}-p_2+2p_1=f,\\ -\rho_0\,c_0^2\,\mathrm{div}(\dfrac{1}{\rho_0}\mathrm{grad}\,p_1)+2p_2=g.\end{cases}$$

On élimine p_2 par multiplication de la première inégalité par 2 et en additionnant les deux égalités, on obtient :

$$-\mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1)+\frac{4}{\rho_0 c_0^2}p_1=\frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f).$$

Multiplions cette équation par une fonction test $p'\in H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω, on trouve

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1)p'\,dx+\int_\Omega \frac{4}{\rho_0 c_0^2}p_1\,p'\,dx=\int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f)p'\,dx.$$

En utilisant la formule de green (1.14), on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1\,\nabla p' dx - \langle \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1.n, p'\rangle_{\partial\Omega} + \int_\Omega \frac{4}{\rho_0 c_0^2} p_1 p' dx = \int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f)p' dx.$$

Comme $p' = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que :

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1\,\nabla p' dx + \int_\Omega \frac{4}{\rho_0 c_0^2} p_1 p' dx = \int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f)p' dx, \qquad \forall p' \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Or, pour p_1, $p_2 \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1\,\nabla p' dx + \int_\Omega \frac{4}{\rho_0 c_0^2} p_1 p' dx\right| &\leq \max(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-})\|p_1\|_{1,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega} \\
&\quad + 4\max(\frac{1}{\rho_0^+(c_0^+)^2}, \frac{1}{\rho_0^-(c_0^-)^2})\|p_1\|_{1,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega} \\
&\leq (\max(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-}) + 4\max(\frac{1}{\rho_0^+(c_0^+)^2}, \frac{1}{\rho_0^-(c_0^-)^2})\|p_1\|_{1,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega} \\
&\leq C\|p_1\|_{1,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme bilinéaire $(p_1, p') \to \int_\Omega \frac{1}{\rho_0}\,\nabla p_1\,\nabla p' dx + \int_\Omega \frac{4}{\rho_0 c_0^2} p_1 p' dx$.
De plus, cette forme est coercive puisque

$$\int_\Omega \frac{1}{\rho_0}|\nabla p'|^2 dx + 4\int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}|p'|^2 dx \geq \min(\frac{1}{\rho_0^+}, \frac{1}{\rho_0^-})c(\Omega)\|p'\|_{1,\Omega}^2,$$

grâce à l'inégalité de Poincaré (1.1).
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f)p' dx\right| &\leq \max(\frac{1}{\rho_0^+(c_0^+)^2}, \frac{1}{\rho_0^-(c_0^-)^2})\|g+2f\|_{0,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega} \\
&\leq C\|g+2f\|_{0,\Omega}\|p'\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

ce qui entraine la continuité de la forme linéaire $p' \to \int_\Omega \frac{1}{\rho_0 c_0^2}(g+2f)p' dx$.
Le lemme de lax-Milgram permet d'affirmer l'existence et l'unicité de $p_1 \in \mathcal{D}(A)$ solution de (3.1). p_2 s'obtient de l'identité $p_2 = 2p_1 - f$ d'où le résultat. □

Théorème 3.2.1. *Pour tout $(p_0, p_1) \in \mathcal{D}(A) \times H_0^1(\Omega)$, le problème $(P_L)'$ admet une solution et une seule p telle que*

$$p \in \mathcal{C}^0([0,T]; W \oplus \mathbb{R}\ S) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0,T]; L^2(\Omega)).$$

En plus, p peut être décomposée comme suit :

$$p(x,t) = p_r(x,t) + C(t)\ S(x),$$

avec $p_r(t,x) \in \mathcal{C}^0([0,T];W)$ et $c(t) \in \mathcal{C}^0([0,T])$.

Preuve. On a d'après le Théorème 3.3.1 de Hille-Yosida : Pour tout $(p_0,p_1) \in \mathcal{D}(A) \times H_0^1(\Omega)$, le problème $(P_L)''$ admet une unique solution P telle que

$$P \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,T],H).$$

On a :

$$P = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{D}(\mathcal{A})) \Longleftrightarrow \begin{cases} p \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathcal{D}(A)), \\ v \in \mathcal{C}^0([0,T],H_0^1(\Omega)), \end{cases}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1([0,T],H) \Longleftrightarrow \begin{cases} p \in \mathcal{C}^1([0,T],H_0^1(\Omega)), \\ v \in \mathcal{C}^1([0,T],L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Comme $v = \dfrac{\partial p}{\partial t}$, on en déduit que $p \in \mathcal{C}^2([0,T],L^2(\Omega))$, et on a d'après le Théorème 2.4.4, $p \in \mathcal{C}^0([0,T];W \oplus \mathbb{R}\ S)$, d'où le résultat. $\square$

APPENDICE

3.3 Théorème de Hille-Yosida

Définition 3.3.1. *Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$ et soit $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que :*
$\mathcal{A}$ ***monotone*** *si*

$$(\mathcal{A}u, u)_H \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ ***maximal monotone*** *si de plus $Im(\mathcal{A} + I) = H$ i.e.*

$$\forall f \in H, \exists u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \;\; \textit{tel que} \quad \mathcal{A}u + u = f.$$

Théorème 3.3.1 (Hille-Yosida). *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ il existe une fonction*

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 \quad \textit{sur } [0,T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

3.4 Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Soient E et F deux espaces de Hilbert réels dont les normes et les produits scalaires sont notés $\|\cdot\|_E, (\cdot,\cdot)_E, \|\cdot\|_F, (\cdot,\cdot)_F$.

Définition 3.4.1. *Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement si l'une des assertions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *L'image par A de $B_E(0,1)$ est d'adhérence compacte.*
2. *De toute suite (u_n) bornée dans E, on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) telle que la suite (Au_{n_k}) converge dans F.*

On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Définition 3.4.2. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ un opérateur dont le domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E. On appelle adjoint de l'opérateur A l'opérateur $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset F \to E$ défini par :*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in F \text{ tel que } \exists\, w \in E;\ (v, Au)_F = (w,u)_E \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\},$$

$$A^* v = w.$$

Par définition, on a toujours

$$(v, Au)_F = (A^*v, u)_E \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(A), \forall\, v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Définition 3.4.3. *On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ est symétrique si :*

$$(Au, v)_E = (u, Av)_E \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Définition 3.4.4. *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ de domaine dense est dit autoadjoint si $A = A^*$, cela signifie que l'on a à la fois $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $Au = A^*u$ pour tout $u \in D(A)$. La deuxième condition peut être remplacée par la symétrie de l'opérateur A.*

Remarque 3.4.1. *Si $A : E \to E$ est un opérateur borné, alors A est autoadjoint si et seulement si A est symétrique.*

Définition 3.4.5. *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ est dit fermé si son graphe*

$$Gr(A) = \big\{(u, Au);\ \ u \in \mathcal{D}(A)\big\}$$

est fermé dans $E \times F$.

Lemme 3.4.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors A est fermé.*

Théorème 3.4.1. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ un opérateur symétrique tel que $\mathrm{Im}(A + I) = E$. Alors le domaine de A est dense dans E et A est autoadjoint.*

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé de domaine dense.

Définition 3.4.6. *L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ est une bijection de $\mathcal{D}(A)$ sur E avec un inverse borné. Si $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ. La famille des opérateurs $R_\lambda(A)$ est appelée la résolvante de A.*

Définition 3.4.7. *On appelle spectre de A et on le note $\sigma(A)$, le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$.*

Définition 3.4.8. *$\lambda \in \sigma(A)$ est dite valeur propre de A, si l'opérateur $A-\lambda I$ n'est pas injectif i.e. $\exists u \in \mathcal{D}(A), u \neq 0\,; Au = \lambda u$, u est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres est appelé spectre ponctuel.*

Définition 3.4.9. *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ est dit borné inférieurement s'il existe une constante positive c telle que :*

$$(Au, u)_E + c\|u\|_E^2 \geq 0, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 3.4.2. *Il est évident que tout opérateur A positif i.e. $\forall u \in \mathcal{D}(A)\ \ (Au, u)_E \geq 0$ est borné inférieurement.*

Définition 3.4.10. *On dit que le système orthonormé $S = (e_n)_n$ (i.e. $\|e_n\|_E = 1$ et $(e_n, e_m)_E = 0$ pour $n \neq m$) est complet dans E ou qu'il forme une base hilbertienne de E si le sous-espace vectoriel engendré par les $(e_n)_n$ est dense dans E.*

Théorème 3.4.2. *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif et injectif . Alors A admet une suite de valeurs propres strictement positives décroissant vers 0 et il existe une base hilbertienne de E formée de vecteurs propres associés.*

Définition 3.4.11. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ un opérateur non borné. Alors A est dit à résolvante compacte si : $\rho(A) \neq \emptyset$ et*

$$\forall \lambda \in \rho(A), \qquad (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E).$$

Théorème 3.4.3. *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ est à résolvante compacte si et seulement s'il existe $\lambda \in \rho(A)$ tel que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.*

Théorème 3.4.4. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne de E, $\{w_m \in \mathcal{D}(A);\ m \geq 1\}$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m\geq 1}$ telles que :*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_m \leq ... \leq +\infty, \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m = +\infty, \\ Aw_m = \lambda_m w_m \qquad\qquad m = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.

[2] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] **H. Farah, M. Moussaoui**, *Modèle de transmission acoustique à coefficients discontinus*, Prépublication, **216**, Université Claude Bernard Lyon 1, Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 1995.

[4] **P. Germain**, *Mécanique des milieux continus*, Masson (1962) .

[5] **P. Germain**, *Mécanique*, Tome 1 et 2, Ecole polytechnique (1986).

[6] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[7] **P. Grisvard**,*Théorème de traces relatifs à un polyèdre*, C.R.Acad Sc Paris, t 278 serie A, 1974 p 1615.

[8] **P. Grisvard**, *Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre*, Bollettino de l'U.M.I., vol. 4, $n^0 5$, 1972, p. 132-164.

[9] **P. Grisvard**, *Singularities in Boundary Value Problems*, Masson, Paris, 1992.

[10] **S. Kouicem, Z. Menigher**, *Problème de transmission pour l'opérateur de Laplace dans un polygone*, Mémoire de Master, Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel, 2010/2011.

[11] **K. Lemrabet**, *Régularité de la solution d'un problème de transmission*, J. Math. pures et appl., 56, 1977, p. 1-38.

[12] **J. Nečas**, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[13] **B. Poirée**, *Les équations de l'acoustique linéaire dans un fluide parfait au repos à caractéristiques indéfiniment différentiables par morceaux*, CETHEDEC 52 (1977) 69-79.

[14] **B. Poirée**, *Les équations de l'acoustique linéaire, dans les fluides en mouvement*, Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1982.

[15] **B. Poirée**, *Les équations de l'acoustique linéaire dans les milieux continus hétérogènes au repos, in La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple*, N. GESPA, Ed. du CEDOCAR, Paris, chap1 (1987) 17-50.