Table des matières

Notations

Symbole	Description
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
H	Espace de Hilbert muni de produit scalaire $< ., . >$
E	Espace vectoriel normé
E'	Dual de l'espace E
B	Boule unitée ouverte de H
$\overline{B}$	Boule unitée fermé de H
$B(x, r)$	=x+rB , boule ouverte de centre x et de rayon r
$Co(C)$	Enveloppe convexe de C
$\overline{Co}(C)$	Enveloppe convexe fermé de C
$\partial f(\overline{x})$	Sous différentiel de f au point $\overline{x}$
$\partial^c f(\overline{x})$	Sous différentiel de Clarke de f au point $\overline{x}$
$\partial^P f(\overline{x})$	Sous différentiel proximal de f au point $\overline{x}$
$N_S(\overline{x})$	Cône normal de S au point $\overline{x}$
$N_S^c(\overline{x})$	Cône normal de Clarke de S au point $\overline{x}$
$N_S^P(\overline{x})$	Cône normal proximal de S au point $\overline{x}$
$\mathrm{dom}(f)$	Domaine effectif de la fonction f
$\mathrm{Dom}(F)$	Domaine effectif de la multi-application F
$\mathrm{epi}(f)$	Épigraphe de f
$\mathrm{Proj}_S(.)$	Projection sur S
$C(I, H)$	Espace des fonctions continue de I vers H muni de la norme $\\|x(t)\\|_\infty = \sup\{\\|x(t)\\|; t \in I\}$
C_a	$= C([-a, 0], H)$, espace des fonctions continues de $[-a, 0]$ dans H
$\mathcal{T}(t)$	$= (\mathcal{T}(t)x)(s) := x(t + s), s \in [-a, 0]$, opérateur défini de $C([-a, T], H)$ dans C_a
$L^1([a, b], H)$	Espace des fonctions Lebesgue intégrable de $[a, b]$ dans H muni de la norme $\\|f\\|_{L^1([a,b],H)} = \int_a^b \|f(t)\| dt$
$\longrightarrow$	Convergence forte
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$p.p$	Presque par tout
$i.e$	C'est à dire

Introduction

Le processus de Rafle consiste à trouver une trajectoire $t \in [0,T] \longmapsto x(t) \in C(t)$ qui satisfait le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t,x(t)) \quad p.p\ t \in [0,T], \\ x(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal de l'ensemble des contraintes $C(t)$ au point $x(t)$ dans le sens d'analyse convexe. Cette inclusion différentielle peut être interpréter de la façon suivante : le point $x(t)$, soumis au champ de force $F(t,x(t))$, doit rester dans l'ensemble mobile $C(t)$.

En 1972, J. J. Moreau a introduit le problème de "processus de Rafle" dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes et avec $F = 0$ (Voir [20], [21]). Plusieurs améliorations ont été apportées sur le problème de "processus de Rafle". Nous citons les travaux de C. Castaing, T. X. Duc Ha et M. Valadier [10] ainsi que ceux de C.Casting et M.D.P. Monteiro-Marques [11] où les auteurs résolvent ce problème en supposant une hypothèse de croissance linéaire sur la perturbation F et $C(\cdot)$ était supposé Hausdorff-continu. Une importante amélioration fut apportée pour contourner l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$ grâce à la notion d'ensemble prox-régulier. Plusieurs travaux traitent le processus de rafle par des ensembles prox-réguliers. Le cas sans perturbation à été tout d'abord traité par G. Colombo, V.V. Goncharov [14], H. Benabdellah [4] et ensuite par L. Thibault [23], G. Colombo et M.D.P. Monteiro- Marques [15] dans le cadre d'un espace de dimension finie. Dans le cadre d'un espace de Hilbert de dimension infinie, le problème perturbé a été étudié par J. F. Edmond et L. Thibault [16].

L'objectif de ce mémoire ; d'une part est d'étudier les ensembles uniformément prox-réguliers, et d'autre part de détailler un article de Myelkebir AitaLioubrahim [1] intitulé "On noncompact perturbation of nonconvex sweeping process" . Le but principal de l'auteur était d'étudier l'existence de solutions pour "le processus de Rafle" du premier ordre avec un ensemble des contraintes non convexe gouverné par une perturbation non compacte.

Notre travail est composé de trois chapitres. Le premier est consacré à un rappel d'analyse non lisse, des notions et des définitions de base avec quelques résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les ensembles uniformément ρ-prox réguliers et nous donnons quelques propriétés fondamentales qui caractérisent ce type d'ensembles.
Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'existence de solutions du processus de Rafle du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N^p_{C(t)}(x(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)x) \quad p.p \ sur \ [0,\tau]; \\ x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-a, 0]; \\ x(t) \in C(t) \quad \forall t \in [0,\tau], \end{cases}$$

où $N^p_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal proximal de l'ensemble $C(t)$ au point $x(t)$, $C(\cdot)$ est uniformément prox-régulier compacte et $F(\cdot, \cdot)$ est une application à valeurs non convexes non compactes, Lebesgue mesurable par rapport à la première variable et Lipschitzienne continue par rapport à la deuxième variable avec une application de retard $\mathcal{T}(t)$.

Chapitre 1

Notions de bases et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur la convexité des ensembles et des fonctions et des théorèmes de compacité. Une partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse non lisse. Pour plus de détails sur ces deux sections se référer à [3].

Dans les deux premières sections de ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé et E' son dual topologique muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

1.1 Ensembles convexes

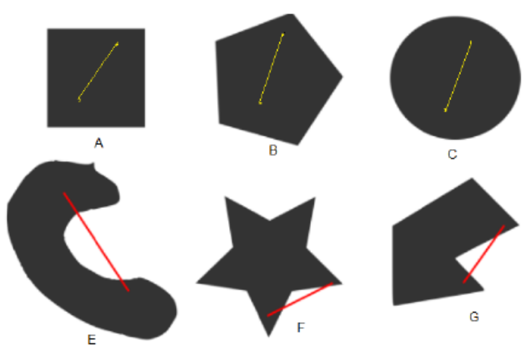

FIGURE 1.1 –

Soient les ensembles A, B, C, D, E, F, G définis sur un plan usuel, on remarque que pour tout deux points x et y des A, B et C le segment $[x, y]$ est inclus dans ces ensembles.

Mais dans les ensembles E, F et G cette propriété n'est pas toujours vérifiée. Les ensembles qui ont vérifiés cette propriété sont appelés des ensembles convexes.

Définition 1.1. *Soient x, y deux points de E. Le segment entre x et y noté $[x, y]$ est défini par*

$$[x, y] = (1 - t)x + ty, \quad t \in [0, 1].$$

Définition 1.2. *Un sous ensemble K de E est dit convexe si et seulement si pour tous $x, y \in K$, le segment $[x, y]$ est inclus dans K, i.e.,*

$$\big[K \textit{ est un ensemble convexe }\big] \Leftrightarrow \big[\forall x, y \in K,\ \forall t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in K\big].$$

Exemple 1.3. *Si on prend $E = \mathbb{R}^2$, l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ car si on prend $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ deux éléments de K et $t \in [0, 1]$, alors*

$$\begin{cases} x \in K \Leftrightarrow x_1 + y_1 \geq 0, \\ y \in K \Leftrightarrow x_2 + y_2 \geq 0, \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{aligned} tx + (1 - t)y &= (tx_1, ty_1) + ((1 - t)x_2, (1 - t)y_2) \\ &= (tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2), \end{aligned}$$

comme

$$tx_1 + (1 - t)x_2 + ty_1 + (1 - t)y_2 = t(x_1 + y_1) + (1 - t)(x_2 + y_2) \geq 0,$$

donc

$$tx + (1 - t)y \in K,$$

d'où la convexité de K.

Exemple 1.4. *L'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas convexe de $\mathbb{R}^2$ car si on prend $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$et $t = \dfrac{1}{2}$ alors*

$$tx + (1 - t)y = (\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

comme $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$, *on conclut donc que* $tx + (1-t)y \notin K$ *et par suite* K *n'est pas convexe.*

Exemple 1.5. ***(Cylindre de révolution)***

Le cylindre circulaire droit $C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_{n+1} \in \mathbb{R},\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$ *est convexe de* $\mathbb{R}^{n+1}$. *En effet, soient* x *et* y *deux éléments de* C *et soit* $t \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned}(tx_1 + (1-t)y_1)^2 + ... + (tx_n + (1-t)y_n)^2 &= t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) |\sum_{i=1}^n x_i y_i|\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}|(tx_1 + (1-t)y_1)^2 + ... + (tx_n + (1-t)y_n)^2| &\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &+ 2t(1-t) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Exemple 1.6. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé. Toutes les boules (fermées,ouvertes) sont des ensembles convexes. En effet, la boule fermée* $\overline{B}(x_0, r)$ *de centre* x_0 *et de rayon* r *est définie dans* E *par*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Soient $x, y \in \overline{B}(x_0, r)$ *et* $t \in [0,1]$, *montrons que* $tx + (1-t)y \in \overline{B}(x_0, r)$. *Pour ce but, il suffit de montrer que*

$$\|x_0 - tx - (1-t)y\| \leq r.$$

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y - x_0\| &= \|tx - tx_0 - (1-t)x_0 + (1-t)y\| \\ &\leq \|t(x - x_0) - (1-t)(y - x_0)\| \\ &\leq t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| \\ &\leq tr + (1-t)r \\ &\leq r.\end{aligned}$$

Donc $\overline{B}(x_0, r)$ *est convexe.*

Proposition 1.7. *Une combinaison linéaire de convexes est un convexe.*

Démonstration. Soient C_1 et C_2 deux convexes, $x_1, x_2 \in C_1$, $y_1, y_2 \in C_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a

$$t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) = tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 \in C_1 + C_2,$$

et

$$t\lambda x_1 + (1-t)\lambda x_2 = \lambda(tx_1 + (1-t)x_2) \in \lambda C_1,$$

ce qui montre que $(C_1 + C_2)$ et λC_1 sont convexes. ■

Proposition 1.8. *Si C, C_1 et C_2 sont des convexes alors on a*

(1) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$,

(2) pour tous $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$.

Démonstration. (1) Évident.

(2) L'inclusion $(\lambda + \mu)C \subset \lambda C + \mu C$ est facile. On montre que $\lambda C + \mu C \subset (\lambda + \mu)C$. Le cas où $\lambda = \mu = 0$ est trivial.
Supposons que l'un des coefficients n'est pas nul. Soient x_1, $x_2 \in C$, alors

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}x_2),$$

d'après la convexité de C on obtient

$$(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}x_2) \in C.$$

■

Proposition 1.9. *Toute intersection d'ensembles convexes est convexe.*

Démonstration. On note $G = \bigcap_{i\in I} K_i$ avec K_i sont des ensembles convexes de E. Pour montrer que G est convexe, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in G$ et tout $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in G$. Soient $x, y \in G$, $t \in [0,1]$ alors, pour tout $i \in I$, $x \in K_i$ et $y \in K_i$, et par suite

$$tx + (1-t)y \in K_i,$$

pour tout $i \in I$ et donc

$$tx + (1-t)y \in \bigcap_{i\in I} K_i,$$

ce qui montre que

$$tx + (1-t)y \in G,$$

d'où la convexité de G. ■

Remarque 1.10. *L'union d'ensembles convexes n'est pas forcément convexe. En effet, prenons*

$$B_1 = B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

et

$$B_2 = B((3,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Il est clair que $(0,0) \in B_1$ *et* $(3,0) \in B_2$*, d'où* $(0,0)$, $(3,0) \in B_1 \cup B_2$ *mais si nous prenons* $t = \frac{1}{2}$*, on trouve que*

$$\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(3,0) = (\frac{3}{2},0) \notin B_1 \cup B_2,$$

d'où $B_1 \cup B_2$ *n'est pas convexe.*

Proposition 1.11. *L'intérieur et l'adhérence d'un convexe* C *est un convexe.*

Démonstration. (1) Soient x, $y \in \mathring{C}$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset C$ et $B(y,r) \subset C$. Ce qui montre que
$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) \subset C.$$
Comme
$$tB(x,r) + (1-t)B(y,r) = B(tx + (1-t)y, r),$$
alors
$$B(tx + (1-t)y, r) \subset C.$$
Par conséquent
$$tx + (1-t)y \in \mathring{C}.$$
Ce qui montre que $\mathring{C}$ est convexe.

(2) Soient x, $y \in \overline{C}$ donc il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de C telles que
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x,$$
et
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = y.$$

Alors $(1-t)x_n + ty_n \in C$ car C est convexe. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(1-t)x + ty &= (1-t)\lim_{n\to\infty} x_n + t\lim_{n\to\infty} y_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\{(1-t)x_n + ty_n\},\end{aligned}$$

d'où

$$(1-t)x + ty \in \overline{C},$$

ce qui montre que $\overline{C}$ est convexe.

■

1.1.1 Enveloppe convexe

Définition 1.12. *Soit A une partie de E. On appelle enveloppe convexe de A notée $Co(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A.*
L'enveloppe convexe $Co(A)$ est évidemment un convexe contenant A, et c'est le plus petit : Si C est un convexe contenant A, il contient donc $Co(A)$.

Exemple 1.13. *1) $A = \{a, b\}$ alors $Co(A) = [a, b]$.*

2) $A = \{a, b, c\}$ alors $Co(A)$ est le triangle abc.

Définition 1.14. *(**Combinaison convexe**)*
Pour toute famille finie x_1, ..., x_n de points de E et tout système λ_1, ..., λ_n de réels positifs ou nuls avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, le point $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ s'appelle une combinaison convexe des points x_1, ..., x_n.

Proposition 1.15. *L'enveloppe convexe de A est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A, i.e.,*

$$Co(A) := \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i, n \geq 1, x_i \in A, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Proposition 1.16. *Soit C un convexe de E. Pour toute famille finie x_1, ..., x_n de points de E et tout système λ_1, ..., λ_n de réels positifs ou nuls avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, le point $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ appartient à C.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons maintenant que c'est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et considérons le point $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où les x_i sont dans C.

Si $\lambda_n = 1$, alors les autres coefficients sont nuls et donc il n'y a rien à démontrer.
Si $\lambda_n < 1$, alors $\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$ d'où $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 - \lambda_n > 0$, donc si on pose $t_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_n}$, on trouve $\sum_{i=1}^{n-1} t_i = 1$ d'où $z = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i$ appartient à C et donc $\lambda_n x_n + (1-\lambda_n) z \in C$ grâce à la convexité de C. ■

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.17. *On appelle domaine effectif (ou simplement domaine) d'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble*

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in E; f(x) < \infty\}.$$

Définition 1.18. *La fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite convexe si pour tous x, y dans* dom(f) *et tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 1.19. *Si $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, la fonction*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \|x\|, \end{aligned}$$

est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet, soient x, $y \in E$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \|tx + (1-t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Exemple 1.20. *Soit E un espace vectoriel et soit $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et positive $\big(a(u,u) \geq 0$ pour tout $u \in E\big)$. Alors la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = a(u,u)$ pour tout $u \in E$ est convexe. En effet, posons*

$$\begin{aligned} A &= f(\lambda u + (1-\lambda)v) - \lambda f(u) - (1-\lambda) f(v) \\ &= a(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v) - \lambda a(u,u) - (1-\lambda) a(v,v) \\ &= \lambda^2 a(u,u) + \lambda(1-\lambda) a(u,v) + (1-\lambda)\lambda a(v,u) + (1-\lambda)^2 a(v,v) - \lambda a(u,u) - (1-\lambda) a(v,v) \\ &= -\lambda(1-\lambda) a(u,u) - \lambda(1-\lambda) a(v,v) + 2\lambda(1-\lambda) a(u,v) \\ &= -\lambda(1-\lambda)\big[a(u,u) + a(v,v) - 2a(u,v)\big] \\ &= -\lambda(1-\lambda) a(u-v, u-v) \leq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v),$$

pour tous $u, v \in E$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

Remarque 1.21. *1) La somme de deux fonctions convexes à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est convexe.*

2) Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe et soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe croissante sur* $f(E) \setminus \{+\infty\}$. *Alors la fonction* $\varphi \circ f$ *définie par* $\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x))$ *si* $x \in \mathrm{dom}(f)$ *et* $(\varphi \circ f)(x) = +\infty$ *si* $x \notin \mathrm{dom}(f)$ *est convexe.*

Définition 1.22. *Soit* $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Alors son épigraphe est le sous ensemble de* $E \times \mathbb{R}$ *défini par*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points de l'ensemble produit $E \times \mathbb{R}$ *qui sont situés au dessus du graphe de* f *(voir Figure 1.2).*

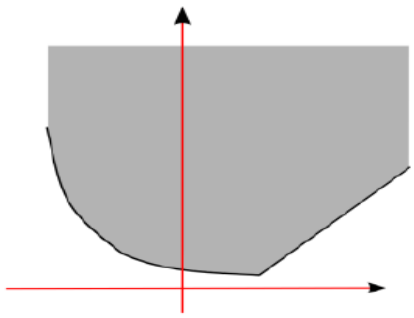

FIGURE 1.2 –

Théorème 1.23. *Soit* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Alors,* f *est convexe si et seulement si* $\mathrm{epi}(f)$ *est convexe.*

Démonstration. Supposons , en premier lieu, que f est convexe, alors pour tous (x,t) et (y,λ) dans l'épigraphe de f et tout $\mu \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(\mu x + (1-\mu)y) &\leq \mu f(x) + (1-\mu)f(y) \\ &\leq \mu t + (1-\mu)\lambda, \end{aligned}$$

et par suite

$$(\mu x + (1-\mu)y, \mu t + (1-\mu)\lambda) \in \text{epi}(f),$$

ce qui montre que

$$\mu(x,t) + (1-\mu)(y,\lambda) \in \text{epi}(f).$$

Réciproquement, si on suppose que $\text{epi}(f)$ est convexe, alors pour tous x, $y \in \text{dom}(f)$ et tout $\mu \in [0,1]$ on a $(x, f(x))$ et $(y, f(y)) \in \text{epi}(f)$, en utilisant le fait que $\text{epi}(f)$ est convexe on trouve que

$$\mu(x, f(x)) + (1-\mu)(y, f(y)) \in \text{epi}(f),$$

d'où

$$(\mu x + (1-\mu)y, \mu f(x) + (1-\mu)f(y)) \in \text{epi}(f),$$

par conséquent

$$f(\mu x + (1-\mu)y) \leq \mu f(x) + (1-\mu)f(y),$$

ce qui montre que f est convexe. ■

Définition 1.24. *Soit C une partie non vide de E, on définit sa fonction indicatrice par*

$$\tau_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

Remarque 1.25. • $\text{dom}(\tau_C) = \{x \in E, \tau_C(x) < +\infty\} = C$,

• $\text{epi}(\tau_C) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}, \tau_C(x) \leq t\} = C \times [0, +\infty[$,

• *la fonction indicatrice est convexe si et seulement si C est convexe.*

Définition 1.26. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est sous additive si pour tous x, y dans* $\text{dom}(f)$*, on a*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Et on dit que f est positivement homogène de degré k si pour tout x dans $\text{dom}(f)$ *et tout $\lambda > 0$, on a*

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$

Définition 1.27. *On appelle fonction support de $C \subset E$ qu'on note $\sigma(\cdot, C)$ la fonction définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ par $\sigma(\xi, C) = \sup\limits_{x \in C} \langle \xi, x \rangle$.*

La fonction support de C vérifie les propriétés suivantes

- *$\sigma(\cdot, C)$ est convexe même lorsque C ne l'est pas.*
- *$\sigma(\cdot, C)$ est positivement homogène de degré 1, i.e.,*

$$\sigma(\alpha\xi, C) = \alpha\sigma(\xi, C), \quad \forall \xi \in E, \forall \alpha > 0.$$

Théorème 1.28. *Pour tout sous ensemble non vide S de E, on a*

$$\overline{Co}(S) = \{x \in E, \forall x' \in E', \langle x', x \rangle \leq \sigma(x', S)\}.$$

Lemme 1.29. ***(Inégalité de Jensen)***
Soit C un ensemble convexe et $f : C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Soient x_1, x_2, .., x_n, n points appartenant à $\mathrm{dom}(f)$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des coefficients réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ alors

$$f\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Démonstration. On fait un raisonnement par récurrence. Pour $n = 1$ et $n = 2$ la propriété est vraie.
Supposons maintenant que la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.
Soient x_1, ..., x_{n+1} $(n + 1)$ points de C et α_1, ..., α_{n+1} des coefficients réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$.

- Si $\alpha_{n+1} = 1$, Alors il n'y a rien à démontrer.
- Si $\alpha_{n+1} < 1$, on définit y par $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i)y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, on pose $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et $t_i = \dfrac{\alpha_i}{\mu}$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ et par conséquent d'après la convexité de C on trouve que $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{\mu} x_i \in C$, grâce à l'hypothèse de recurrence pour $n = 2$ on trouve que

$$\begin{aligned} f\big(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\big) &= f\big(\mu y + \alpha_{n+1} x_{n+1}\big) \\ &\leq \mu f(y) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= f\big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu} x_i\big) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu} f(x_i), \end{aligned}$$

on obtient donc

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i).$$

■

1.3 Semi-continuité

Définition 1.30. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ définie sur un espace topologique E est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $x_0 \in E$ si pour tout réel $r < f(x_0)$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $r < f(x)$ pour tout $x \in V$.*
La fonction f est dite semi-continue inférieurement sur une partie C de E si f est semi-continue inférieurement en tout point de C.

Définition 1.31. *Une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ définie sur un espace topologique E est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in E$ si pour tout réel $r > f(x_0)$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $r > f(x)$ pour tout $x \in V$.*
La fonction f est dite semi-continue supérieurement sur une partie C de E si f est semi-continue supérieurement en tout point de C.

Remarque 1.32. *f est continue si et seulement si f est à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement.*

La semi continuité inférieurement (resp. la semi-continuité supérieurement) peut aussi être introduite en utilisant la notion de limite inférieure (resp. Limite supérieure) d'une fonction. Pour cela on donne la définition suivante

Définition 1.33. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction définie sur un espace topologique E.*

1. *La limite inférieure de f en $x_0 \in E$ est définie par*
$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf\{f(x) : x \in V, x \neq x_0\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$
2. *La limite supérieure de f en $x_0 \in E$ est définie par*
$$\limsup_{x \to x_0} f(x) := \inf_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \sup\{f(x) : x \in V, x \neq x_0\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

$\mathcal{V}(x_0)$ est l'ensemble des voisinages de x_0.

Proposition 1.34. *Une fonction $E \to \overline{\mathbb{R}}$ définie sur un espace métrique E est semi-continue inférieurement (resp. semi-continue supérieurement) si et seulement si*

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \left(resp.\, f(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \right).$$

Définition 1.35. *Soit E un espace normé et $f : E \to \mathbb{R}$, on dit que f est localement lipschitzienne en $\overline{x}$ si et seulement s'il existe un voisinage V de $\overline{x}$ et une constante $L > 0$ tels que*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

pour tous $x, y \in V$.

1.4 Sous différentiels

Nous commençons cette section par quelques concepts classiques de différentiabilité (dérivée directionnelle, dérivée directionnelle de Clarke, ...). Pour plus de détails voir [7]. Dans cette section, on désigne par E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f)$.

Définition 1.36. ***(Dérivée directionnelle)***
La dérivée directionnelle de f au point $\overline{x}$ dans la direction $v \in E$ est donnée par

$$f'(\overline{x}, v) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + hv) - f(\overline{x})}{h},$$

si la limite existe.

Définition 1.37. ***(Dérivée directionnelle de Clarke)***
Supposons que f est localement lipschitzienne en $\overline{x}$. La dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point $\overline{x}$ dans la direction $v \in E$ notée $f^0(\overline{x}, v)$, est définie par

$$f^0(\overline{x}, v) = \limsup_{x\to\overline{x}, t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

où x est un vecteur de E et t un scalaire positif.

Proposition 1.38. *Supposons que f est localement lipschitzienne de rapport k au point $\overline{x}$. Alors,*

a- La fonction $v \mapsto f^0(\overline{x}, v)$ est finie, positivement homogène, sous additive sur E, et satisfait

$$|f^0(\overline{x},v)| \leq k\|v\| \quad \forall v \in E.$$

b- La fonction $(x,w) \in E^2 \mapsto f^0(\overline{x},v)$ *est semi-continue supérieurement au point* $(\overline{x},v)$*, et la fonction* $v \mapsto f^0(\overline{x},v)$ *est k-lipschitzienne sur* E*.*

c- $f^0(\overline{x},-v) = (-f)^0(\overline{x},v)$ $\forall v \in E$*.*

Démonstration. Comme f est localement lipschitzienne au point $\overline{x}$ on obtient alors, pour $t > 0$ assez petit et pour x suffisamment proche de $\overline{x}$

$$|\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}| \leq k\|v\|,$$

pour tout $v \in E$. Ce qui nous donne

$$|f^0(\overline{x},v)| \leq k\|v\|,$$

pour tout $v \in E$ et par conséquent $f^0(\overline{x},v)$ est finie.
Maintenant soit $\lambda \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f^0(\overline{x},\lambda v) &= \limsup_{x\to\overline{x},t\to 0} \frac{f(x+t\lambda v)-f(x)}{t} \\ &= \lambda \limsup_{x\to\overline{x},t\to 0} \frac{f(x+(t\lambda)v)-f(x)}{\lambda t}, \end{aligned}$$

posons $t' = \lambda t$, alors

$$\begin{aligned} f^0(\overline{x},\lambda v) &= \lambda \limsup_{x\to\overline{x},t'\to 0} \frac{f(x+t'v)-f(x)}{t'} \\ &= \lambda f^0(\overline{x},v). \end{aligned}$$

Soient $v,w \in E$

$$f^0(\overline{x},v+w) = \limsup_{x\to\overline{x},t\to 0} \frac{f(x+tv+tw)-f(x)}{t},$$

comme la limite supérieure de la somme est bornée par la somme des limites supérieure on obtient

$$f^0(\overline{x},v+w) \leq \limsup_{x\to\overline{x},t\to 0} \frac{f(x+tv+tw)-f(x+tw)}{t} + \limsup_{x\to\overline{x},t\to 0} \frac{f(x+tw)-f(x)}{t}.$$

Puisque le terme $x+tw$ converge vers x lorsque $t \to 0$ on obtient

$$f^0(\overline{x},v+w) \leq f^0(\overline{x},v) + f^0(\overline{x},w),$$

ce qui établit (a).

Maintenant, soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes respectivement vers $\overline{x}$ et v. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, par définition de la limite supérieure, il existe $y_i \in E$ tel que

$$t_i \geq 0,\ \|y_i - x_i\| + t_i < \frac{1}{i},$$

et

$$\begin{aligned} f^0(x_i, v_i) - \frac{1}{i} &\leq \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} \\ &= \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'état lipschitzien, on voit que le dernier terme est majoré par $k\|v_i - v\|$, prenons donc la limite supérieure quand $i \to +\infty$, on obtient

$$\limsup_{i\to\infty} f^0(x_i, v_i) \leq f^0(x, v),$$

ce qui montre la semi continuité supérieure de $f^0(x, v)$. Finalement, soient $x, v \in E$, on a

$$f(x + tv) - f(y) \leq f(x + tw) - f(y) + k\|v - w\|t,$$

pour x près de $\overline{x}$ et pour $t > 0$, en divisant par t, et en prenant la limite supérieure pour $x \to \overline{x}$ et $t \to 0$ on trouve que

$$f^0(\overline{x}, v) \leq f^0(\overline{x}, w) + k\|v - w\|,$$

si on commute u et w dans l'inégalité précédente on obtient

$$f^0(\overline{x}, w) \leq f^0(\overline{x}, v) + k\|v - w\|,$$

et par suite

$$|f^0(\overline{x}, v) - f^0(\overline{x}, w)| \leq k\|v - w\|,$$

ce qui affirme (b).

Pour montrer (c) on calcule

$$f^0(\overline{x}, -v) = \limsup_{x\to\overline{x}, t\to 0} \frac{f(x - tv) - f(x)}{t},$$

posons $u = x - tv$, on obtient

$$\begin{aligned} f^0(\overline{x}, -v) &= \limsup_{x\to\overline{x}, t\to 0} \frac{(-f)(u+tv) - (-f)(u)}{t} \\ &= (-f)^0(\overline{x}, v). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Définition 1.39. ***(Sous différentiel d'une fonction convexe)***
Le sous différentiel $\partial f(\overline{x})$ d'une fonction convexe f en $\overline{x}$ est l'ensemble des $\xi \in E'$ tels que

$$f(x) - f(\overline{x}) \geq \langle \xi, x - \overline{x} \rangle,$$

pour tout $x \in E$.

Exemple 1.40. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|$. Le sous différentiel de f au point 0 est égal à la boule unitée fermée de E, i.e., $\partial f(0) = \overline{B}_{E'}$.*
En effet, soit $\xi \in \partial f(0)$, alors

$$< \xi, x - 0 > \leq \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

et

$$- < \xi, x > = < \xi, -x - 0 > \leq \| - x\| = \|x\|, \forall x \in E,$$

d'où

$$| < \xi, x > | \leq \|x\|, \forall x \in E$$

donc

$$\|\xi\|_{E'} = \sup_{x \in E, x\neq 0} \frac{| < \xi, x > |}{\|x\|} \leq 1,$$

i,e $\quad \xi \in \overline{B}_{E'}$.
Soit maintenant $\xi \in \overline{B}$

$$\begin{aligned} < \xi, x - 0 > &= < \xi, x > \\ &\leq \|\xi\|_{E'} \|x\| \\ &\leq \|x\| - \|0\|, \end{aligned}$$

et par suite $\xi \in \partial f(\overline{x})$, donc $\partial f(0) = \overline{B}$.

Proposition 1.41. *Le sous différentiel $\partial f(\overline{x})$ est un ensemble convexe fermé.*

Démonstration. Soient ξ_1, ξ_2 deux éléments de $\partial f(\overline{x})$. Pour tout $x \in E$, on a

$$< \xi_1, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

et

$$< \xi_2, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}).$$

Soit $\alpha \in [0,1]$, en multipliant la première inégalité par α, la deuxième par $(1-\alpha)$ et en sommant, on obtient

$$< \alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

donc $\alpha\xi_1 + (1-\alpha)\xi_2 \in \partial f(\overline{x})$.
Soit maintenant $\xi_n \in \partial f(\overline{x})$ tel que ξ_n converge vers ξ dans E'. On veut montrer que $\xi \in \partial f(\overline{x})$.
On a $\xi_n \in \partial f(\overline{x})$ alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\langle \xi_n, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}) \ \forall n \in \mathbb{N},$$

par passage à la limite quand $n \to \infty$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \langle \xi_n, x - \overline{x} \rangle \leq \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - f(\overline{x})\big),$$

donc

$$\langle \lim_{n\to\infty} \xi_n, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

d'où

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

et par conséquent, $\xi \in \partial f(\overline{x})$ et donc $\partial f(\overline{x})$ est fermé. Ce qui achève la démonstration. ∎

Définition 1.42. ***(Sous différentiel de Clarke)***
Le sous différentiel de Clarke d'une fonction localement Lipschitzienne en $\overline{x} \in E$ est défini par

$$\partial^C f(\overline{x}) = \{\xi \in E' :< \xi, v >\leq f^0(\overline{x}, v), \quad \forall v \in E\}.$$

Proposition 1.43. *Soit f une fonction k-lipschitzienne en $\overline{x}$. Alors,*

$$\partial^C f(\overline{x}) \subseteq B(0, k).$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.38, et la définition du sous différentiel de Clarke on a

$$< \eta, v >\leq f^0(\overline{x}, v) \leq k\|v\|,$$

pour tout $\eta \in E'$, donc on aura

$$< \eta, v >\leq k\|v\|, \forall v \in E,$$

ce qui nous donne

$$\partial^C f(\overline{x}) \subset B(0, k).$$

■

Théorème 1.44. *Si f est une fonction continûment différentiable au voisinage de x, alors*

$$\partial^C f(x) = \{f'(x)\},$$

et si f est une fonction convexe semi-continue inférieurement avec $x \in \overset{\circ}{\mathrm{dom}}(f)$, alors

$$\partial^C f(x) = \partial f(x).$$

Définition 1.45. ***(Sous différentiel proximal)***
Le sous différentiel proximal d'une fonction localement Lipschitzienne en $\overline{x} \in E$, est l'ensemble $\partial^P f(\overline{x})$ de tous les éléments $\xi \in E'$ tels qu'il existe deux constantes réelles positives $\sigma > 0$ et $\delta > 0$, vérifient

$$< \xi, x - \overline{x} >\leq f(x) - f(\overline{x}) + \sigma||x - \overline{x}||^2,$$

pour tout $x \in \overline{B}(\overline{x}, \delta)$.

Remarque 1.46. *Soit f une fonction localement lipschitzienne en $\overline{x} \in E$. Alors, on a toujours*

$$\partial^P f(\overline{x}) \subset \partial^C f(\overline{x}).$$

Si f est convexe continue alors

$$\partial^P f(\overline{x}) = \partial^C f(\overline{x}) = \partial f(\overline{x}).$$

1.5 Cônes normaux

Définition 1.47. *Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E. Pour tout $u \in E$ on note*

$$d_A(u) := \inf_{a \in A} d(u, a).$$

Définition 1.48. ***(La distance de Hausdorff)***
Soit (E,d) un espace métrique complet, on note par $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des compacts de E. Soient $A, B \in \mathcal{K}(E)$, l'écart entre A et B est défini par

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d_B(a).$$

La distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$H(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A)).$$

Propriétés 1.49. ***(Propriétés élémentaires)***

1) $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A = \emptyset$.

2) $e(\emptyset, B) = 0$.

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

4) $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$, *pour tout* $C \in \mathcal{K}(E)$.

5) $H(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Définition 1.50. *Soit H un espace de Hilbert et soit $A \subset H$. Pour tout $x \in H$ donné, le sous ensemble de A noté et défini comme suit*

$$\mathrm{Proj}_A(x) = \{a \in A : d_A x = \|x - a\|\},$$

s'appelle l'ensemble des points de meilleure approximation de x par rapport à A. On dit aussi que $\mathrm{Proj}_A(x)$ *est la projection de x sur A.*

Remarque 1.51. *Afin d'éviter que* $\mathrm{Proj}_A(x)$ *soit systématiquement vide pour certains x, on suppose que A est un fermé de H.*

Proposition 1.52. *Si S est convexe fermé d'un espace de Hilbert H, alors la projection est unique (dans ce cas on la note P_S) et les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1) $\forall y \in S$: $\|x - P_S(x)\| \leq \|x - y\|, \forall x \in H$,

2) $\forall y \in S$: $\big\langle x - P_S(x), y - P_S(x)\big\rangle \leq 0, \forall x \in H$.

Remarque 1.53. *Soit $x' \in \mathrm{Proj}_S(x)$, alors on peut écrire $x' \in S$ et $\|x - x'\|^2 \leq \|x - y\|^2$ pour tout $y \in S$. Il est facile à montrer que pour tout $x \in H$ on a*

$$x' \in \mathrm{Proj}_S(x) \Leftrightarrow x' \in S \text{ et } \langle x - x', y - x'\rangle \leq \frac{1}{2}\|y - x'\|^2 \quad \forall y \in S.$$

En effet, soient $x \in H$ et $y \in S$ alors

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 =& \|x - x' - (y - x')\|^2 \\ &= \langle x - x' - (y - x'), x - x' - (y - x')\rangle \\ &= \langle x - x', x - x'\rangle + \langle y - x', y - x'\rangle - 2\langle x - x', y - x'\rangle \\ &= \|x - x'\|^2 + \|y - x'\|^2 - 2\langle x - x', y - x'\rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 + \|y - x'\|^2 - 2\langle x - x', y - x'\rangle,\end{aligned}$$

donc

$$\langle x - x', y - x'\rangle \leq \frac{1}{2}\|y - x'\|^2.$$

Définition 1.54. *On dit qu'un sous ensemble $\Omega \subset E$ est un cône si $\lambda x \in \Omega$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\lambda \geq 0$.*

Définition 1.55. ***(Cône normal)***

Soit S un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel normé E, et $\overline{x} \in S$. Le cône normal à S en $\overline{x}$ est défini par

$$N_S(\overline{x}) := \{v \in E' \; :< v, x - \overline{x} > \leq 0 \quad \forall x \in S\}.$$

Remarque 1.56. *i) Un vecteur v est un normal de S en $\overline{x}$, i.e., $v \in N_S(x)$ si v ne fait pas l'angle aigu avec chaque segment de ligne en S à partir de $\overline{x}$.*

ii) Par convention si $\overline{x} \notin S$, $N_S(\overline{x}) = \emptyset$.

iii) On a toujours $\{0\} \subset N_S(\overline{x})$.

Exemple 1.57. $H = \mathbb{R}$, $S = [0,1]$, $\overline{x} = 0$ *et* $\overline{x} = 1$,

$N_S(0) =]-\infty, 0]$.

$N_S(1) = [0, +\infty[$.

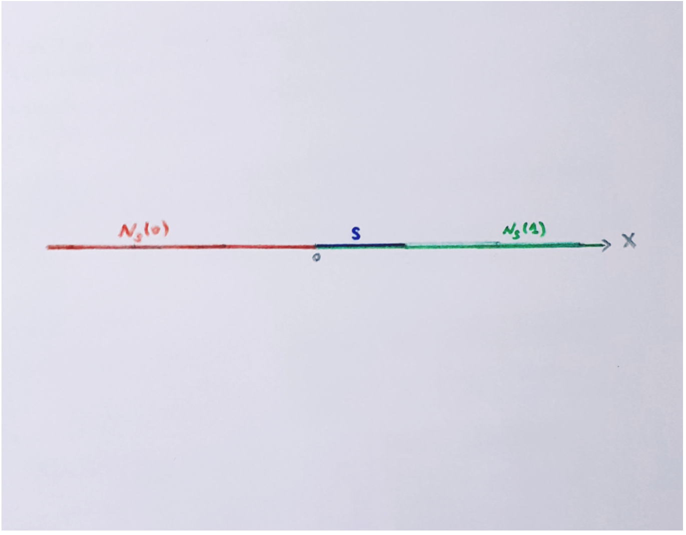

FIGURE 1.3 –

Exemple 1.58. $H = \mathbb{R}^2$, $S = \{1\} \times [0,1]$, $\overline{x} = (1,0)$ *et* $\overline{x} = (1,1)$,

$N_S((1.0)) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$.

$N_S((1,1)) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

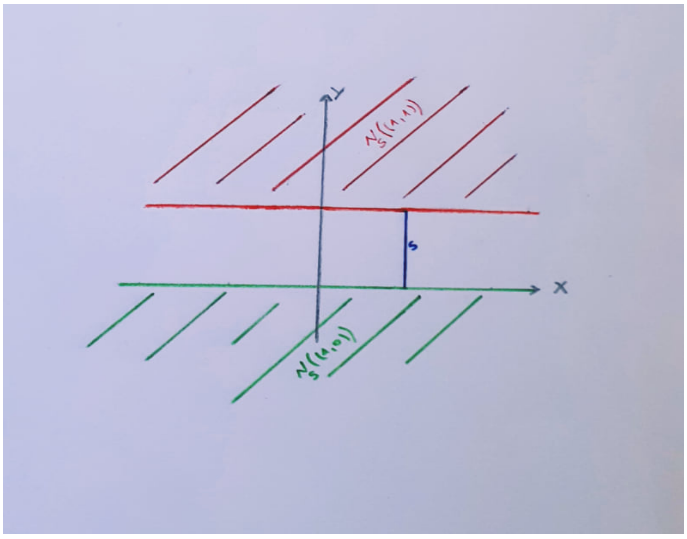

FIGURE 1.4 –

Proposition 1.59. *Soit S un sous ensemble convexe fermé de E, si $y = \mathrm{Proj}_S(x)$. Alors $y = (I + N_S)^{-1}(x)$, donc*

$$[I + N_S(.)]^{-1} = \mathrm{P}_S(.).$$

Démonstration. Soient $x, y \in E$ tels que $y = \mathrm{P}_S(x)$, on a

$$\begin{aligned} y = \mathrm{P}_S(x) &\Leftrightarrow < x - y, c - y > \leq 0 \quad \forall c \in S \\ &\Leftrightarrow x - y \in N_S(y) \\ &\Leftrightarrow x \in y + N_S(y) \\ &\Leftrightarrow x \in [I + N_S](y) \\ &\Leftrightarrow y = [I + N_S]^{-1}(x). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.60. *Soit f une fonction convexe définie sur un espace de Hilbert H et $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f)$ alors*

$$\partial f(\overline{x}) = \big\{\xi \in H, (\xi - 1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(\overline{x}, f(\overline{x}))\big\}.$$

Démonstration. Soit $\xi \in H$ tel que $(\xi - 1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(\overline{x}, f(\overline{x}))$ alors

$$\langle (\xi - 1), (x, \lambda) - (\overline{x}, f(\overline{x})) \rangle_{H \times \mathbb{R}} \leq 0,$$

pour tout $(x, \lambda) \in \mathrm{epi}(f)$. Donc

$$< \xi, x - \overline{x} > + < -1, \lambda - f(\overline{x}) >_{\mathbb{R}} \leq 0, \quad \forall (x, \lambda) \in \mathrm{epi}(f). \tag{1.1}$$

On veut montrer que

$$< \xi, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

on distingue deux cas

• Si $x \notin \mathrm{dom}(f)$ alors $f(x) = +\infty$ et donc le résultat est trivial.

• Si $x \in \mathrm{dom}(f)$ alors $f(x) < +\infty$ et donc $(x, f(x)) \in \mathrm{epi}(f)$, prenons $(x, \lambda) = (x, f(x))$ dans (1.1), on obtient

$$\langle \xi, x - \overline{x} \rangle + \langle -1, f(x) - f(\overline{x}) \rangle_{\mathbb{R}} \leq 0,$$

d'où

$$< \xi, x - \overline{x} > \leq f(x) - f(\overline{x}),$$

ce qui montre que $\xi \in \partial f(\overline{x})$.

Soit maintenant $\xi \in \partial f(\overline{x})$ alors $<\xi, x-\overline{x}> \leq f(x)-f(\overline{x})$ pour tout $x \in H$. Donc

$$\begin{aligned}\big\langle (\xi -1),(x,\lambda)-(\overline{x},f(\overline{x}))\big\rangle_{H\times\mathbb{R}} &= \langle \xi, x-\overline{x}\rangle + \langle -1, \lambda - f(\overline{x})\rangle_{\mathbb{R}}\\ &=<\xi, x-\overline{x}> -(\lambda - f(\overline{x}))\\ &\leq <\xi, x-\overline{x}> -(f(x)-f(\overline{x}))\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

et par conséquent $(\xi -1) \in N_{\mathrm{epi}(f)}(\overline{x}, f(\overline{x}))$. ■

Proposition 1.61. *Pour tout $s \in S$, $\sigma(x,S) =< x, s >$ si est seulement si $x \in N_S(s)$.*

Définition 1.62. ***(Cône tangent de Clarke)***
Soit E un espace vectoriel. On appelle cône tangent de Clarke de S au point $\overline{x}$ noté $T_S^c(\overline{x})$, l'ensemble défini par

$$T_S^c(\overline{x}) = \{v \in E : d^0(\overline{x}_0, v, S) = 0\}.$$

Définition 1.63. ***(Cône normal de Clarke)***
Soit E un espace vectoriel normé. On appelle cône normal de Clarke de l'ensemble S au point $\overline{x}$ qu'on note $N_S^c(\overline{x})$, l'ensemble défini par

$$N_S^c(\overline{x}) = (T_S^c(\overline{x}))^0 = \{\xi \in E' : \langle \xi, y\rangle \leq 0, \forall y \in T_S^c(\overline{x})\}.$$

Remarque 1.64.
1. *Si S est convexe, alors*

$$N_S^c(\overline{x}) = \{\xi \in E' : \langle \xi, y\rangle \leq 0, \forall y \in S\} = N_S(\overline{x}).$$

2. *Le cône normal de Clarke de l'ensemble S au point $\overline{x}$ et le sous différentiel de Clarke de la fonction indicatrice de l'ensemble S au point $\overline{x}$ coïncident.*

Définition 1.65. ***(Cône normal proximal)*** *Soit S un sous ensemble non vide d'un espace de Hilbert H, et soit $x \in S$. Le cône normal proximal de S au point $\overline{x}$ est donné par*

$$\begin{aligned}N_S^P(\overline{x}) &:= \{\xi \in H, \exists \alpha > 0 : x \in Proj_S(x+\alpha\xi)\}\\ &:= \{\xi \in H, \exists \alpha > 0 : d_S(x+\alpha\xi) = \alpha\|\xi\|\}.\end{aligned}$$

Remarque 1.66. *Si $\overline{x} \notin S$, le cône normal proximal est indéfini.*

Proposition 1.67. *Le cône normal proximal admet la caractérisation analytique suivante*

$$\begin{aligned}\varphi \in N_S^p(\overline{x}) &\Leftrightarrow \exists \sigma, \delta > 0 \textit{ tels que } \begin{cases}\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \sigma\|x-\overline{x}\|^2,\\ \forall x \in (\overline{x}+\delta\overline{B})\cap S\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \exists \sigma = \sigma(\varphi,\overline{x}) \textit{ tel que } \langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \sigma\|x-\overline{x}\|^2, \quad \forall x \in S.\end{aligned}$$

Démonstration. Nous commençons par la première caractérisation. Supposons que $\varphi \in N_S^P(\overline{x})$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi \in N_S^P(\overline{x}) &\Leftrightarrow d_S(\overline{x}+\alpha\varphi) = \alpha\|\varphi\|, \quad \textit{pour un certain } \alpha > 0\\
&\Leftrightarrow \|\overline{x}+\alpha\varphi-\overline{x}\|^2 \leq \|\overline{x}+\alpha\varphi-x\|^2, \quad \forall x \in S\\
&\Leftrightarrow \|\overline{x}+\alpha\varphi\|^2+\|\overline{x}\|^2-2\langle \overline{x}+\alpha\varphi, \overline{x}\rangle \leq \|\overline{x}+\alpha\varphi\|^2+\|x\|^2-2\langle \overline{x}+\alpha\varphi, x\rangle, \quad \forall x \in S\\
&\Leftrightarrow 2\langle \overline{x}+\alpha\varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \|x\|^2-\|\overline{x}\|^2, \quad \forall x \in S\\
&\Leftrightarrow 2\langle \overline{x}, x\rangle - 2\|\overline{x}\|^2 + 2\alpha\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \|x\|^2-\|\overline{x}\|^2, \quad \forall x \in S\\
&\Leftrightarrow 2\alpha\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \|x\|^2+\|\overline{x}\|^2-2\langle x, \overline{x}\rangle, \quad \forall x \in S\\
&\Leftrightarrow \langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \frac{1}{2\alpha}\|x-\overline{x}\|^2, \quad \forall x \in S,
\end{aligned}$$

ce qui montre la première caractérisation en posant $\sigma = \dfrac{1}{2\alpha}$.
Montrons l'équivalence entre les deux caractérisations du cône normal proximal. Supposons qu'il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \sigma\|x-\overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in S \cap (\overline{x}+\delta\overline{B})$. Soit maintenant $x \in S$ de sorte que $\|x-\overline{x}\| > \delta$. On distingue donc deux cas

1. Si $\|x-\overline{x}\| \geq 1$, donc

$$\big|\|x\|-\|\overline{x}\|\big| \leq \|x-\overline{x}\| \leq \|x-\overline{x}\|^2.$$

   Alors

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle &\leq \|\varphi\|\|x-\overline{x}\|\\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x\|+\|\overline{x}\|\big)\\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x\|-\|\overline{x}\|+2\|\overline{x}\|\big)\\
&\leq \|\varphi\|\big(\big|\|x\|-\|\overline{x}\|\big|+2\|\overline{x}\|\big)\\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x-\overline{x}\|^2+2\|\overline{x}\|\big)\\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x-\overline{x}\|^2+2\|\overline{x}\|\|x-\overline{x}\|^2\big)\\
&= \|\varphi\|\big(1+2\|\overline{x}\|\big)\|x-\overline{x}\|^2.
\end{aligned}$$

2. Si $\|x-\overline{x}\| < 1$, alors $\delta < \|x-\overline{x}\| < 1$, pour un certain $\delta > 0$. Ce qui montre que

$\frac{1}{\delta}\|x-\overline{x}\| > 1$ et $\frac{1}{\delta} > 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle &\leq \|\varphi\|\|x-\overline{x}\| \\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x\|+\|\overline{x}\|\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big(\|x-\overline{x}\|+2\|\overline{x}\|\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big(\frac{\|x-\overline{x}\|}{\delta}+2\|\overline{x}\|\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big(\frac{1}{\delta^2}\|x-\overline{x}\|^2+2\|\overline{x}\|\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big(\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2}+2\|\overline{x}\|\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2}\big) \\
&\leq \|\varphi\|\big(1+2\|\overline{x}\|\big)\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{\delta^2} \\
&\leq (\frac{\|\varphi\|}{\delta^2})(1+2\|\overline{x}\|)\|x-\overline{x}\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons donc $\overline{\sigma} = \max(\sigma, \|\varphi\|(1+2\|\overline{x}\|), \frac{\|\varphi\|}{\delta^2}(1+2\|\overline{x}\|))$ pour que

$$\langle \varphi, x-\overline{x}\rangle \leq \overline{\sigma}\|x-\overline{x}\|^2, \quad \forall x\in S.$$

L'implication inverse est évidente.

■

Proposition 1.68. *Soit S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert H et soit $x\in S$. Alors,*

$$\partial^p d_S(x) = N_S^p(x)\cap\overline{B}.$$

Démonstration. Soit $x^*\in\partial^p d_S(x)$, alors il existe $\sigma>0$ et $\delta>0$ tels que

$$\begin{aligned}
< x^*, x'-x > &\leq \sigma||x'-x||^2 + d_S(x') - d_S(x) \quad \forall x'\in x+\delta\overline{B} \\
&\leq \sigma||x'-x||^2 + d_S(x').
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x'\in S\cap(x+\delta\overline{B})$ on a

$$< x^*, x'-x >\leq \sigma||x'-x||^2,$$

ce qui montre que $x^*\in N_S^p(x)$.

D'autre part, on sait que

$$\partial^p d_S(x)\subset\overline{B},$$

d'où

$$x^* \in N_S^p(x) \cap \overline{B},$$

et donc

$$\partial^p d_S(x) \subset N_S^p(x) \cap \overline{B}.$$

Pour montrer la réciproque, on fixe $x^* \in N_S^p(x)$ avec $\|x^*\| \leq 1$, il existe alors $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tel que

$$< x^*, x' - x > \leq \sigma ||x' - x||,$$

pour tout $x' \in S \cap \overline{B}(x, \delta)$.
Prenons $\gamma = \min(1, \dfrac{\delta}{3})$ et fixons $z \in \overline{B}(x, \gamma)$ puis choisissons $y_z \in S$ tel que

$$\|y_z - z\| \leq d_S(z) + \|z - x\|^2 \; .$$

D'après le choix de y_z on trouve que $y_z \in \overline{B}(x, \gamma)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\|y_z - x\| &\leq \|y_z - z\| + \|z - x\| \\
&\leq \|z - x\|^2 + d_S(z) + \|z - x\| \\
&\leq \|z - x\| + \|z - x\|^2 + \|z - x\| \\
&\leq (2 + \|z - x\|)\|z - x\| \\
&\leq 3\|z - x\| \\
&\leq 3\gamma < \delta,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
< x^*, z - x > &= < x^*, y_z - x > + < x^*, z - y_z > \\
&\leq \sigma\|y_z - x\|^2 + \|y_z - z\|\|x^*\| \\
&\leq \sigma\|y_z - x\|^2 + d_S(z) + \|z - x\|^2 \\
&\leq 9\sigma\|z - x\|^2 + d_S(z) + \|z - x\|^2 \\
&\leq (9\sigma - 1)\|z - x\|^2 + d_S(z) - d_S(x).
\end{aligned}$$

ce qui montre que $x^* \in \partial^p d_S(x)$ d'où

$$N_S^p(x) \cap \overline{B} = \partial^p d_S(x).$$

■

Remarque 1.69. *Si l'ensemble S est convexe, alors tous les cônes cités ci-dessus coïncident*

$$N_S(\overline{x}) = N_S^c(\overline{x}) = N_S^P(\overline{x}).$$

1.6 Théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle

1.6.1 Théorèmes de Compacité

Les résultats que nous allons énoncer sont pris de la référence [2].

Théorème 1.70. ***(Théorème d'Ascoli-Arzéla)*** *Soient E un espace de Banach et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $C(I,E)$ l'espace des fonctions continues de I dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous intervalles compacts de I. Alors, le sous ensemble A de $C(I,E)$ qui satisfait*

i) A est équicontinu i.e.,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall y \in I, |x-y| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

ii) $\forall t \in I,\ A(t) = \{x(t),\ x \in A\}$ est précompact,

est précompact dans $C(I,E)$.

Théorème 1.71. ***(Conséquence du théorème d'Ascoli-Arzela)***
Considérons une suite de fonctions absolument continues $x_k(.)$ de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E qui satisfait

i) $\forall t \in I,\ \{x_k(t)\}_k$ est un sous ensemble relativement compact de E,

ii) il existe une fonction positive $C(.) \in L^1(I,E)$ telle que pour presque tout $t \in I$

$$\|x_k'(t)\| \leq C(t).$$

Alors, il existe une sous suite noté aussi $x_k(.)$ convergeant vers une fonction absolument continue $x(.)$ de I dans E au sens suivant

1) $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur les sous-ensembles compacts de I,

2) $x_k'(t)$ converge faiblement vers $x'(.)$ dans $L^1(I,E)$.

1.6.2 Topologie faible

Pour plus de détails on peut se référer à [9].

Définition 1.72. *Soient E un espace de Banach et $f \in E'$, considérons l'application*

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi_f(x) := \langle f, x\rangle,$$

on appelle topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Notation : Étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.73. *Soit E un espace de Banach, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Alors, on a les propriétés suivantes*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E et*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E' alors*
$$\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$$

Corollaire 1.74. *(**Lemme de Mazur**) Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge faiblement vers x dans E. Alors, il existe une suite $(y_n)_n$ avec chaque y_n combinaison convexe des $\{x_k, k \geq n\}$ qui converge fortement vers x dans E.*

1.7 Multi-application

Pour plus de détails sur cette section voir [12].

1.7.1 Définitions générales

Définition 1.75. *Une multi-application (ou application multivoque) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \to \mathcal{P}(Y)$, ($\mathcal{P}(Y)$ est l'ensemble de parties de Y). Les notations $F : X \to 2^Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ sont aussi utilisées dans la littérature .*

Définition 1.76. *Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$ *sont donnés par*

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\},$$

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\},$$

$$\mathrm{Im}(F) = \bigcup_{x \in Dom(x)} F(x).$$

Remarque 1.77. *Soit* X *un espace topologique.*

a) Une multifonction $F : X \to P(X)$ *est à valeurs fermées (resp. convexes) si F(x) est fermé (resp. convexe) pour tout* $x \in X$.

b) F *est dite bornée sur les bornés si l'ensemble*
$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x),$$
est borné dans Y *pour chaque sous ensemble* $A \in \mathcal{P}_b(X)$, *où* $\mathcal{P}_b(X)$ *est l'ensemble des parties bornées de* Y.

Définition 1.78. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application, on appelle sélection de* F *toute application* $f : X \to Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.79. *Soit* X *et* Y *deux ensembles et* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *une application multivoque,* B *un sous ensemble de* Y.

1) L'inverse F^{-1} *de* F *est l'application multivoque de* Y *dans* X *définie par la relation*
$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{gr}(F).$$
i.e.,
$$F^{-1}(y) = \{x \in X; y \in F(x)\} = \{x \in X; (x, y) \in \mathrm{gr}(F)\}.$$

2) L'image inverse de B *par* F *notée* $F^{-1}(B)$, *est définie par*
$$F^{-1}(B) = \{x \in X; F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

1.7.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.80. ***(Continuité au sens de Hausdorff)***
Soient X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs compactes. On dit que* F *est* H*-continue ou continue au sens de Hausdorff, si et seulement si, pour toute suite* (x_n) *de* X *qui converge vers* x_0, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} H(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Définition 1.81. ***(Scalairement semi-continue supérieurement)***
On dit qu'une multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ *est scalairement semi-continue supérieurement si, pour tout* $\xi \in X$*, la fonction réelle* $u \mapsto \sigma(F(u), \xi)$ *est semi-continue supérieurement.*

1.7.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.82. *Soit* Ω *un ensemble,* Σ *une famille de parties de* Ω*, i.e.,* $\Sigma \subset P(\Omega)$*. La famille* Σ *est une tribu (on dit aussi une* Σ*-algèbre) sur* Ω *si* Σ *vérifie*

1- $\emptyset \in \Sigma$, $\Omega \in \Sigma$,

2- Σ *est stable par union dénombrable, i.e., pour toute famille dénombrable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$*, on a* $\bigcup_{n\in N} A_n \in \Sigma$,

3- Σ *est stable par intersection dénombrable, i.e., pour toute famille dénombrable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$*, on a* $\bigcap_{n\in N} A_n \in \Sigma$,

4- Σ *est stable par passage au complémentaire, i.e., pour tout* $A \in \Sigma$*, on a* $A^c \in \Sigma$ *(on rappelle que* $A^c = \Omega \backslash A$*).*

Définition 1.83. *Soit* $(\mathcal{J}, \Sigma)$ *un espace mesurable,* X *un espace métrique et* $\Gamma : \mathcal{J} \rightrightarrows X$*. On dit que* Γ *est* Σ*-mesurable si pour tout ouvert* V *de* X*, on a*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in \mathcal{J} : \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.84. *Soient* H *un espace de Hilbert,* Ω *un sous ensemble non vide de* H*, et Soit* $F : [a,b] \times \Omega \rightrightarrows H$ *une multi-application à valeurs fermées non vides qui satisfait*

- *Pour tout* $x \in \Omega$, $F(., x)$ *est mesurable sur* $[a,b]$,
- *pour tout* $t \in [a,b]$, $F(t, .)$ *est continue au sens de Hausdorff sur* Ω.

Alors, pour toute fonction mesurable $x(.) : [a,b] \to \Omega$*, la multi-application* $F(., x(.))$ *est mesurable sur* $[a,b]$.

Lemme 1.85. *Soient* H *un espace de Hilbert,* $G : [a,b] \rightrightarrows H$ *une multi-application mesurable et* $y(.) : [a,b] \to H$ *une fonction mesurable. Alors, pour toute fonction positive mesurable* $r(.) : [a,b] \to \mathbb{R}^+$*, il existe une sélection mesurable* g *de* G *telle que, pour presque tout* $t \in [a,b]$*, on a*

$$\|g(t) - y(t)\| \leq d(y(t), G(t)) + r(t).$$

Pour la démonstration des Lemmes 1.84 et 1.85 voir [24].

Chapitre 2

Les ensembles uniformément prox-réguliers

Les ensembles uniformément prox réguliers sont initialement définis en 1959 par Federer dans $\mathbb{R}^n$ sous l'appellation "Positively Reached sets ". Cette nouvelle notion d'ensemble non convexe a fut étendue aux espaces de Hilbert par R. T. Clarke, R. J. Stern et P. R wolenski en 1998 [13] puis par R. A. Poloquin, R. T. Rochaflar et l. Thibault [22] en 2000, et très récemment dans les espaces de Banach par F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva [5].

Cette classe d'ensembles est une généralisation de la convexité, elle introduit la notion géométrique suivante : on peut rouler une boule de rayon ρ continûment sur toute la frontière d'un ensemble S ρ-prox-régulier.
Elle est équivalente à la propriété suivante : la projection sur S, Proj_S est une application continue en tout point à distance $d_S < \rho$.
Dans ce chapitre H est un espace de Hilbert.

Tout d'abord, nous rappelons la définition de
Le ρ-élargissement de S

$$S(\rho) = \{x \in X; d_S(x) \leq \rho\},$$

le ρ-tube ouvert autour de S

$$U_S(\rho) = \{x \in X; 0 < d_S(x) < \rho\},$$

et l'ensemble des points de distance ρ à S

$$D_S(\rho) = \{x \in X; d_S(x) = \rho\}.$$

Définition 2.1. *Soit S un ensemble fermé de H et $\rho \in]0, +\infty]$. On dit que l'ensemble S est uniformément ρ-prox-régulier si pour tout $x \in S$, et pour chaque $v \in N_S^p(x)$ avec $\|v\| \leq 1$ on a*

$$x \in P_S(x+tv),$$

pour tout nombre réel positif $t < \rho$.

Voici une autre définition de la prox-régularité

Définition 2.2. *Pour $\rho \in]0, +\infty]$, un ensemble S est uniformément ρ-prox-régulier, si et seulement si chaque normale proximale non nulle à S peut être réalisée par une boule de rayon ρ, ça signifie que*

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} \text{pour tout}\, \overline{x} \in S \,\text{et tout}\, \xi \in \mathrm{N}^p_S(\overline{x}) \,\text{on a} \\ \langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2. \end{cases}.$$

Remarque 2.3. *1) Pour tout $x \in S$, nous faisons la convention $\frac{1}{\rho} = 0$ pour $\rho = +\infty$ et donc*

$$S \text{ } \rho\text{-prox-régulier} \Leftrightarrow S \text{ convexe }.$$

2) Les deux définitions précédentes sont équivalentes. En effet, fixons $x \in S$ et $v \in N^p_S(x) \cap \overline{B}$, pour tout $x' \in H$ on a pour tout nombre réel positif $t \leq \rho$

$$\|x + tv - x'\|^2 = t^2\|v\|^2 - 2t < v, x' - x > + \|x' - x\|^2,$$

par conséquent

$$\|x + tv - x\|^2 \leq \|x + tv - x'\|^2 \quad \forall x' \in S,$$

si et seulement si on a

$$< v, x' - x > \leq \frac{1}{2t}\|x' - x\|^2.$$

Ce qui montre que $x \in P(x + tv)$ si et seulement si cette dernière inégalité est vérifiée.

Exemple 2.4. *1) L'union de deux ensembles prox-réguliers n'est pas prox-régulière,*

2) l'intersection de deux ensembles prox-réguliers n'est pas prox-régulier,

3) $H \diagdown B(0, \rho)$ est prox-régulier.

La proposition suivante résume certaines conséquences importantes qui nous seront utiles dans la suite

Proposition 2.5. *[22]*
Soit S un sous-ensemble fermé non vide de H et $x \in S$, les assertions suivantes sont satisfaites

(i) *Soit* $\rho \in]0,+\infty]$, *si* S *est uniformément* ρ*-prox-régulier alors pour tout* $x \in S$ *avec* $d_S(x) < \rho$ *on a* $P_S(x)$ *existe et est unique. De plus*

$$\partial^p d_S(x) = \partial^c d_S(x).$$

(ii) *Soit* $\rho \in]0,+\infty]$ *et* $\rho' \in]0,\rho]$, *si* S *est uniformément* ρ*-prox-régulier alors le sous ensemble*

$$S(\rho') = \{x \in H; d_s(x) \leq \rho'\} \text{ est } (\rho - \rho')\text{-prox-régulier.}$$

Pour la démonstration on peut se référer à [17], [18] et [19].

Théorème 2.6. *Soit* S *un sous-ensemble fermé non vide de* H *et* $\rho \in]0,+\infty]$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) *L'ensemble* S *est* ρ*-prox-régulier.*

(b) *Pour tout* $v \in N_S^p(x) \cap \overline{B}$, *tout nombre réel positif,* $t < \rho$, *on a* $x = P_s(x + tv)$.

(c) *Pour tout* $x_i \in S, v_i \in N_S^P(x), i = 1, 2$ *on a*

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\|v_1\|}{\rho} + \frac{\|v_2\|}{\rho}\right)\|x_1 - x_2\|^2.$$

Démonstration. $\bullet(a) \Leftrightarrow (b)$: Cette équivalence est facile à vérifier car il n'est pas difficile de voir que $x = \mathrm{Proj}_S(x + tv)$ lorsque $x \in \mathrm{Proj}_S(x + t'v)$ pour un certain $t' > t$.

$\bullet(a) \Rightarrow (c)$: Soit $v_i \in N_S^p(x_i)$ avec $i = 1, 2$. Comme S est ρ-prox-régulier, alors par définition on a

$$< v_1, x_1 - x_2 > \geq -\frac{\|v_1\|}{2\rho}\|x_1 - x_2\|^2,$$

et

$$< -v_2, x_1 - x_2 > \geq -\frac{\|v_2\|}{2\rho}\|x_2 - x_1\|^2,$$

en additionnant les dernières inégalités on trouve (c).

$\bullet$ Montrons maintenant que $(c) \Rightarrow (a)$, pour $x, x' \in S$ et $v \in N_S^p(x)$, il suffit de prendre $v_1 = v$, $x_1 = x$, $x_2 = x'$ et $v_2 = 0$ dans l'inégalité de (c) pour obtenir (a). ∎

Remarque 2.7. *Généralement, nous avons* $N_S^p(x) \subset N_S^c(x)$. *Cependant, pour un ensemble* S ρ*-prox-régulier, d'après la Proposition 1.68 le cône normal proximal à* S *coïncide avec tout les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point* $x \in S$, *i.e.,*

$$N_S^p(x) = N_S^c(x),$$

pour tout ensemble S uniformément ρ-prox-régulier. Dans ce cas, on a

$$N_S(x) = N_S^p(x) = N_S^c(x).$$

Proposition 2.8. *Soit S un sous ensemble ρ-prox-régulier de H avec $\rho \in]0, +\infty]$ et soient $x, x' \in H$. Si $x - x' \in N_S(x')$ et $\|x - x'\| \leq \rho$ (resp. $\|x - x'\| < \rho$), alors*

$$x' \in \mathrm{Proj}_S(x) \text{ (resp. } x' = \mathrm{P}_S(x)\text{)}.$$

Démonstration. Supposons que $x - x' \in N_S(x')$ et $\|x - x'\| \leq \rho$. La non vacuité du cône normal proximal montre que $x' \in S$. En utilisant la définition de la prox-régularité et le fait que $x, x' \in S$ on obtient

$$\begin{aligned} < x - x', y - x' > &\leq \frac{1}{2\rho}\|x - x'\|\|y - x'\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|y - x'\|^2, \end{aligned}$$

et ceci montre que $x' \in \mathrm{Proj}_S(x)$ d'après la Remarque 1.53.
Si en plus $\|x - x'\| < \rho$, alors

$$d_S(x) \leq \|x - x'\| < \rho,$$

d'après la Proposition 2.5 on obtient

$$x' = P_S(x).$$

■

Lemme 2.9. *Soit u un point de H.*

a) On a l'égalité

$$d_S(u)\partial^p d_S(u) = \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u).$$

b) Si $\partial^p d_S(x) \neq \emptyset$. Alors $p_S(u)$ existe et

$$d_S(u)\partial^p d_S(u) = \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2(u)) = \{u - P_S(u)\}.$$

Démonstration. a) Supposons que le membre gauche de (a) est non vide et fixons $v \in \partial^p d_S(u)$, par définition du sous différentiel proximal, il existe un nombre réel $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \in \overline{B}(u, \delta)$ on a

$$< v, y - u > \leq d_S(y) - d_S(u) + \sigma\|y - u\|^2,$$

multiplions cette inégalité par $d_S(u)$, on obtient

$$< d_S(u)v, y-u > \leq d_S(y)d_S(u) - d_S(u)^2 + \sigma d_S(u)\|y-u\|^2.$$

Observons que le deuxième membre de cette inégalité est égal à

$$\frac{1}{2}d_S^2(y) - \frac{1}{2}d_S^2(u) - \frac{1}{2}(d_S(y) - d_S(u))^2 + \sigma d_S(u)\|y-u\|^2,$$

on obtient donc pour tout $y \in \overline{B}(0,\delta)$

$$< d_S(u)v, y-u > \leq \frac{1}{2}d_S^2(y) - \frac{1}{2}d_S^2(u) + \sigma d_S(u)\|y-u\|^2,$$

d'où

$$d_S(u)v \in \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u),$$

et donc

$$d_S(u)\partial^p d_S(u) \subset \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u).$$

Maintenant, soit $v \in \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u)$ et supposons que $u \notin S$. Il existe un nombre réel $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \in \overline{B}(u,\delta)$ on a

$$< v, y-u > \leq \frac{1}{2}d_S^2(y) - \frac{1}{2}d_S^2(u) + \sigma\|y-u\|^2,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
< \frac{v}{d_S(u)}, y-u > &\leq \frac{d_S^2(y) - d_S^2(u)}{2d_S(u)} + \frac{\sigma}{d_S(u)}\|y-u\|^2 \\
&= d_S(y) - d_S(u) + \frac{(d_S(y) - d_S(u))^2}{2d_S(u)} + \frac{\sigma}{d_S(u)}\|y-u\|^2 \\
&\leq d_S(y) - d_S(u) + \frac{1+2\sigma}{2d_S(u)}\|y-u\|^2,
\end{aligned}$$

alors

$$\partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u) \subset d_S(u)\partial^p d_S(u).$$

Cette inclusion reste vraie pour $u \in S$ car pour $u \in S$, il est facile de montrer que les deux membres de l'inégalité sont égaux à $\{0\}$.

b) Supposons que $\partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u)$ est non vide. Soit $v \in \partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u)$. Donc d'après le **Théorème 11** dans [6], $\mathrm{Proj}_S(u) \neq \emptyset$. Choisissons $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \in \overline{B}(0,\delta)$, on a

$$< v, y - u > \leq \frac{1}{2}d_S^2(y) - \frac{1}{2}d_S^2(u) + \sigma\|y - u\|^2.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{Proj}_S(u)$ on a

$$< v, y - u > \leq \frac{1}{2}\|y - \omega\|^2 - \frac{1}{2}\|u - \omega\|^2 + \sigma\|y - u\|^2,$$

pour tout $y \in \overline{B}(0,\delta)$ et par conséquent $v \in \partial^p(\frac{1}{2}\|. - \omega\|^2)(u) = \{u - \omega\}$. Ce qui montre que l'ensemble $\{u - \mathrm{Proj}_S(u)\}$ est un singleton qui est égal à $\partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u)$, et d'après (a) on trouve que $P_S(u)$ existe et

$$\partial^p(\frac{1}{2}d_S^2)(u) = d_S(u)\partial^p d_S(u) = \{u - p_S(u)\},$$

lorsque $\partial^P d_S(u) \neq \emptyset$, ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 2.10. *Soit S un sous-ensemble fermé non vide de H, les propriétés suivantes peuvent être ajoutées à la liste des équivalences dans le Théorème* 2.6.

1) Pour tout $u \in \mathrm{dom}(\partial d_S)$ et tout $v \in \partial^p d_S(u)$ on a

$$d_S(u) + < v, x - u > \leq \frac{1}{2\rho}\|x - P_S(u)\|^2, \quad \forall x \in S. \tag{2.1}$$

2) Pour tout $u \in \partial d_S$ et tout $v \in \partial^p d_S(u)$ on a

$$< v, x - u > \leq \frac{1}{2\rho}\|x - P_S(u)\|^2, \quad \forall x \in S. \tag{2.2}$$

3) Pour tout $x \in S$ et tout $v \in N_S^P(x) \cap \overline{B}$ on a

$$< v, u - x > \leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}\|P_S(u) - x\|^2, \quad \forall u \in \mathrm{dom}(P_S). \tag{2.3}$$

4) Pour tout $x \in S$ et tout $v \in N_S^P(x) \cap \overline{B}$ on a

$$< v, u - x > \leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}(d_S(u) + \|u - x\|)^2, \quad \forall u \in H. \tag{2.4}$$

Démonstration. Rappelons que $\partial^p d_S(u) = N_S^p(u) \cap \overline{B}$ pour tout $u \in S$. Supposons que S est ρ-prox-régulier, alors pour tous $x, x' \in S$ et $v \in N_S^P$ on a

$$\langle v, x' - x \rangle \leq \frac{1}{2\rho}\|v\|\|x' - x\|^2. \tag{2.5}$$

Fixons $u \in \mathrm{Dom}(\partial^P d_S)$ et $v \in \partial^P d_S(x)$. D'après la Proposition 2.5, $P_S(x)$ existe. Si on suppose que $u \notin S$ alors d'après (b) du Lemme 2.9 on a $v = \dfrac{1}{\|x - P_S(x)\|}(x - P_S(x))$ et donc

$$\begin{aligned} d_S(u) &= \|u - P_S(u)\| \\ &= \frac{1}{\|u - P_S(u)\|}\|u - P_S(u)\|^2 \\ &= \Big\langle \frac{u - P_S(u)}{\|u - P_S(u)\|}, u - P_S(u)\Big\rangle \\ &=< v, u - P_S(u) >, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} d_S(u) + < v, x - u > &=< v, u - p_S(u) > + < v, x - u > \\ &=< v, x - p_S(u) >, \end{aligned}$$

comme $v = \dfrac{1}{\|u - P_S(u)\|}(u - P_S(u)) \in N_S^p(x) \cap \overline{B}$, alors d'après (2.5) on a

$$\begin{aligned} d_S(u) + < v, x - u > &=< v, x - P_S(u) > \\ &\leq \frac{1}{2\rho}\|v\|\|x - P_S(u)\|^2. \end{aligned}$$

En utilisons le fait que $\|v\| = 1$, on obtient (2.1).

• D'après (2.1), on a

$$d_S(x) + < v, x - u > \leq \frac{1}{2\rho}\|x - P_S(x)\|^2,$$

pour tout $x \in S$. Par conséquent

$$< v, x - u > \leq \frac{1}{2\rho}\|x - P_S(x)\|^2 - d_S(x),$$

et puisque $d_S(x) > 0$ alors

$$< v, x - u > \leq \frac{1}{2\rho}\|x - u\|^2.$$

Ce qui donne (2.2).

• Soient $x \in S$, $v \in N_S^P(x) \cap \overline{B}$. Pour tout $u \in \mathrm{dom}(P_S)$, alors d'après la prox-régularité de S et le fait que $\|v\| \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} < v, u - x > &= < v, u - P_S(u) > + < v, P_S(u) - x > \\ &\leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}\|v\|\|P_S(u) - x\|^2 \\ &\leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}\|P_S(u) - x\|^2, \end{aligned}$$

d'où (2.3).

• Supposons que (3) est satisfaite et fixons $x \in S$ et $v \in N_S^p(x) \cap \overline{B}$, pour chaque $u \in \mathrm{dom}(P_S)$, on a

$$\begin{aligned} \|P_S(u) - x\| &\leq \|P_S(u) - u\| + \|u - x\| \\ &= d_S(u) + \|x - u\|, \end{aligned}$$

d'après (2.3) on obtient

$$< v, u - x > \leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}\Big(d_S(u) + \|x - u\|^2\Big),$$

pour $u \in \mathrm{dom}(P_S)$. Grâce au Théorème de Lau dans [17], qui nous donne la densité de $\mathrm{dom}(P_S)$ dans H, on trouve que

$$< v, u - x > \leq d_S(u) + \frac{1}{2\rho}\Big(d_S(u) + \|x - u\|^2\Big),$$

pour tout $x \in H$. ■

Lemme 2.11. *Soit S un ensemble fermé non vide de H, $\rho > 0$ et $u \notin S(\rho)$, alors*

$$d_S(u) = \rho + d_{S(\rho)}(u). \tag{2.6}$$

Démonstration. Comme l'ensemble $\{u \in S : \mathrm{Proj}_S(u) \neq \emptyset\}$ est dense dans $H \backslash S(\rho)$ d'après [11] et comme les fonctions d_S et $d_{S(\rho)}$ sont continues, il est clair de montrer (2.6) seulement pour $u \notin S(\rho)$ qui satisfait $\mathrm{Proj}_S \neq \emptyset$. Fixons un tel point u et fixons p dans S tel que $d_S(u) = \|u - p\|$. Posons

$$x := p + (\frac{\rho}{\|u - p\|})(u - p).$$

Remarquons que $x \in S(\rho)$. En effet,

$$x - p = \frac{\rho}{\|u - \rho\|}(u - p),$$

d'où

$$\|x-p\| = \rho,$$

et donc

$$\inf_{p\in S}\|x-p\| \leq \|x-p\| = \rho.$$

Montrons maintenant que $x \in \mathrm{Proj}_{S(\rho)}(u)$. Considérons $y \in S(\rho)$, i.e., $d_S(y) \leq \rho$, et fixons un nombre positife ε. On peut choisir $y_\varepsilon \in S$ satisfaisant

$$\|y-y_\varepsilon\| \leq d_S(y)+\varepsilon \leq \rho+\varepsilon,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\|y-u\| \geq \|y_\varepsilon-u\|-\|y_\varepsilon-y\| &\geq \inf_{y_\varepsilon\in S}\|y_\varepsilon-u\|-\rho-\varepsilon\\ &\geq d_S(u)-\rho-\varepsilon\\ &\geq \|u-p\|-\rho-\varepsilon,\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|u-x\| &= \|u-p-\frac{\rho}{\|u-p\|}(u-p)\|\\ &= \|(1-\frac{\rho}{\|u-p\|})(u-p)\|\\ &= (1-\frac{\rho}{\|u-p\|})\|u-p\|,\end{aligned}$$

donc

$$\|u-x\| = \|u-p\|-\rho, \tag{2.7}$$

et par suite

$$\|y-u\| \geq \|u-p\|-\rho-\varepsilon = \|u-x\|-\varepsilon.$$

Ce qui montre que

$$d_{S(\rho)}(x) \geq \|u-x\|-\varepsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, en faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$d_{S(\rho)}(x) \geq \|u-x\|.$$

Comme $u \in S(\rho)$? on obtient donc que

$$d_{S(\rho)}(x) = \|u - x\|,$$

d'où $x \in \mathrm{Proj}_{S(\rho)}(u)$ et d'après (2.7) on a

$$\begin{aligned} d_{S(\rho)}(u) &= \|u - x\| = \|u - p\| - \rho \\ &= d_S(u) - \rho. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de ce lemme. ■

Proposition 2.12. *Dans la première définition de la prox-régularité on peut remplacer le cône normal proximal par le sous-différentiel proximal de la fonction distance, i.e.,*

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases} \textit{pour}\, \overline{x} \in S\, \textit{et}\, \xi \in \partial^p d_S(\overline{x}),\ \textit{on a} \\ \langle \xi, x - \overline{x} \rangle \leq \dfrac{1}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2,\ \textit{pour tout}\, x \in S. \end{cases}$$

Démonstration. • *Pour* $\xi = 0$: trivial.
• *Pour* $\xi \neq 0$
$(\mathrm{P}_1) \Rightarrow (\mathrm{P}_2)$.
Soit $\overline{x} \in S$ et $\xi \in \partial^p d_S(\overline{x})$. Donc d'après la Proposition 1.68, on obtient $\xi \in N_S^P(\overline{x})$ et comme

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2,$$

alors

$$\begin{aligned} \langle \xi, x - \overline{x} \rangle &\leq \frac{\|\xi\|}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2, \end{aligned}$$

car $\xi \in \partial^p d_S(\overline{x}) \subset \overline{B}$ ce qui montre que (P_2) est satisfaite.
$(\mathrm{P}_2) \Rightarrow (\mathrm{P}_1)$.
Soit $\overline{x} \in S$ et $\xi \in N_S^P(\overline{x})$. Alors, $\dfrac{\xi}{\|\xi\|} \in \partial^p d_S(\overline{x})$ et donc d'après (P_2) on a

$$\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - \overline{x} \rangle \leq \frac{1}{2\rho}\|x - \overline{x}\|^2,$$

pour tout $x \in S$. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème 2.13. *Soit S un sous ensemble non vide fermé de H ? et soit $\rho > 0$. Supposons que S est uniformément ρ-prox-régulier. Alors, la propriété suivante est satisfaite*

$$(P_3) \quad \begin{cases} pour\, tout\, x \in H, tel \;\; que \;\; d_S(x) < \rho \;\, et\, tout\, \xi \in \partial^p d_S(x), \\ on\, a \\ \langle \xi, x' - x\rangle \leq \dfrac{8}{r - d_S(x)}\|x' - x\|^2 - d_S(x),\; pour\, tout\, x' \in H \quad avec \quad d_S(x') \leq \rho. \end{cases}$$

Démonstration. Étape 1 : Montrons en premier lieu que,

$$(P_3)' \quad \begin{cases} Pour\, tout \quad x \in S\, et\, tout \quad \xi \in \partial^p d_S(x),\; on\, a \\ \langle \xi, x' - x\rangle \leq \dfrac{2}{\rho}\|x' - x\|^2 + d_S(x'), \\ pour\, tout\, x' \in H\, avec \quad d_S(x') < \rho. \end{cases}$$

Fixons $x \in S$ et $\xi \in \partial^p d_S(x)$. Fixons aussi $z \in H$ satisfaisant $d_S(z) < r$. Comme S est uniformément ρ-prox régulier, on peut trouver $y_z \in P_S(z) \neq \emptyset$, i.e., $y_z \in S$ et

$$\|z - y_z\| = d_S(z). \tag{2.8}$$

Alors,

$$\|y_z - x\| \leq \|y_z - z\| + \|z - x\| \leq 2\|z - x\|,$$

et donc d'après (P_2), l'inégalité $\|\xi\| \leq 1$ et (2.8) on trouve que

$$\begin{aligned} \langle \xi, z - x\rangle &= \langle \xi, y_z - x\rangle + \langle \xi, z - y_z\rangle \\ &\leq \frac{1}{2\rho}\|y_z - x\|^2 + \|\xi\|\|y_z - z\| \\ &\leq \frac{2}{\rho}\|z - x\|^2 + d_S(z) - d_S(x). \end{aligned}$$

Ce qui montre $(P_3)'$.

Étape 2 : D'après (**ii**) de la Proposition 2.5, pour chaque $0 < \rho' < \rho$ le sous ensemble $S(\rho')$ est uniformément $(\rho - \rho')$-prox régulier. De plus, pour tout $u' \in H$, on peut démontrer facilement qu'on a $d_{S(\rho')}(u') < \rho - \rho'$ si et seulement si $d_S(u') < \rho$. En effet, si on suppose que $d_{S(\rho')}(u') < \rho - \rho'$, alors il existe $z \in H$ avec $d_S(z) \leq \rho'$ et $\|u' - z\| < \rho - \rho'$, et donc

$$d_S(u') \leq d_S(z) + \|u' - z\| < \rho.$$

Supposons maintenant que $d_S(u') < \rho$. Dans le cas où $x' \in S(\rho')$, on peut écrire $d_{S(\rho')}(u') = 0 < \rho - \rho'$. Dans le cas où $u' \in S(\rho')$, on utilise le Lemme 2.11, on trouve que

$$d_{S(\rho)}(u') = d_S(u') - \rho' < \rho - \rho',$$

et donc l'équivalence entre les deux inégalités, par conséquent la propriété suivante est satisfaite

$$(P_4) \qquad \begin{cases} Pour\,tout\,x \in S(\rho'),\ et\,tout\,\xi \in \partial^p d_{S(\rho')}(u) \\ \langle \xi, x' - x\rangle \leq \dfrac{2}{\rho - \rho'}\|x' - x\|^2 + d_{S(\rho')}(u)\ Pour\,tout\,u' \in H,\ avec\ \ d_S(u') < \rho. \end{cases}$$

Fixons maintenant $x \in H$ avec $d_S(x) < \rho$ et tout $\xi \in \partial^p d_S(x)$.

On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $x \in S$, alors d'après $(P_3)'$, pour tout $x' \in H$ avec $d_S(x') < \rho$, on a

$$\langle \xi, x' - x\rangle \leq \frac{2}{\rho}\|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x). \tag{2.9}$$

Cas 2 : Observons tout d'abord que $\xi \in \partial^p d_{S(\rho')}(x')$. En effet, D'après le **Théorème 4.1** et le **Théorème 4.3** dans [8] on a

$$\partial^p d_S(x) = N^p_{S(\rho')}(x) \cap \{\xi : \|\xi\| = 1\} \subset \partial^p d_{S(\rho')}(x),$$

et donc pour ξ fini dans $\partial^p d_S(x)$, on trouve que $\xi \in \partial^p d_{S(\rho')}(x)$. Par (P_4), pour tout $x' \in H$ avec $d_S(x') < \rho$ on a

$$\langle \xi, x' - x\rangle \leq \frac{2}{\rho - \rho'}\|x' - x\|^2 + d_{S(\rho')}(x').$$

Par conséquent, pour tout $x' \in H$ satisfaisant $d_S(x') < \rho$ et $x' \in S(\rho')$, i.e., $\rho' < d_S(x') < \rho$. En tenant compte du Lemme 2.11, on trouve que

$$\langle \xi, x' - x\rangle \leq \frac{2}{\rho - \rho'}\|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x).$$

Fixons maintenant $x' \in H$ satisfaisant $d_S(x') < \rho$ et $x' \in S(\rho')$, alors (P_4) nous donne

$$\langle \xi, y - x\rangle \leq \frac{2}{\rho - \rho'}\|y - x\|^2, \tag{2.10}$$

avec $y \in H$ et $d_S(y) \leq \rho'$. En accordant à $\|\xi\| = 1$, choisissons $u \in H$ avec $\|u\| = 1$ et tel que $\langle \xi, u\rangle = 1$. Posons $t := d_S(x) - d_S(x') \geq 0$. Alors, $x' + tx \in S(\rho')$. En effet,

$$d_S(x' + tx) \leq d_S(x') + t = d_S(x) = \rho.$$

De plus, d'après l'inégalité (2.10)

$$\langle \xi, x' - x\rangle = \langle \xi, x' + tu - x\rangle - \langle \xi, tu\rangle \tag{2.11}$$

$$\leq \frac{2}{\rho - \rho'}\|x' + tu - x\|^2 - t. \tag{2.12}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\|x' + tu - x\| &\le \|x' - x\| + t\\ &\le 2\|x' - x\|.\end{aligned}$$

On en déduit donc d'après (2.12) que

$$\langle \xi, x' - x\rangle \le \frac{8}{\rho - \rho'}\|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x).$$

Alors, d'après (2.9), (2.10) et la dernière inégalité, on trouve que, pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < \rho$ et tout $\xi \in \partial^p d_S(x)$

$$\langle \xi, x' - x\rangle \le \frac{8}{\rho - \rho'}\|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x),$$

pour tout $x' \in H$ avec $d_S(x') < \rho$. Prenons la continuité des deux membres de l'inégalité en compte, on peut remplacer $d_S(x') < \rho$ par $d_S(x) < \rho$. Ce qui achève la démonstration. ∎

Proposition 2.14 (18). *Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une multi-application à valeurs non vides. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

1. *Soit $\rho > 0$, $S(t)$ est uniformément ρ-prox-régulier, pour tout $t \in I$,*
2. *il existe une fonction absolument continue $v : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$|d_{S(t)}(x) - d_{S(t')}(x)| \le |v(t) - v(t')| \quad \forall t, t' \in I. \tag{2.13}$$

Alors, pour $0 < \delta < \rho$ donné, la propriété de fermeture du sous différentiel proximal de la fonction distance est satisfaite.
Pour tout $\bar{t} \in I$ et $\overline{x} \in S(\bar{t}) + (\rho - \delta)\overline{B}$, tels que $x_n \to \overline{x}$, $t_n \to \bar{t}$ avec $t_n \in I$ et $\xi_n \in \partial^p d_{S(t_n)}(x_n)$ avec $\xi_n \rightharpoonup \xi$, on a

$$\overline{\xi} \in \partial^p d_{S(\bar{t})}(\overline{x}).$$

Autrement dit, $\partial^p d_{S(t)}$ est scalairement semi-continue supérieurement.

Démonstration. Fixons $\bar{t} \in I$ et $\overline{x} \in S(\bar{t}) + (r - \rho)\overline{B}$. Comme $x_n \to x$ on obtient alors pour n assez grand, $x_n \in \overline{B}(\overline{x}, \frac{\delta}{4})$.
D'autre part, comme $S(t)$ est uniformément ρ-prox-régulier, on peut choisir un point $\overline{y} \in S(\bar{t})$ avec $d_{S(\bar{t})}(\overline{x}) = \|\overline{y} - \overline{x}\|$. Alors, pour tout n assez grand on peut écrire d'après (2.13)

$$\Big|d_{S(t_n)}(x_n) - d_{S(\bar{t})}(\overline{y})\Big| \le \Big|v(t_n) - v(\bar{t})\Big| + \|x_n - \overline{y}\|,$$

et donc la continuité de v donne pour n assez grand

$$\begin{aligned} d_{S(t_n)}(x_n) &\leq d_{S(\bar{t})}(\overline{y}) + |v(t_n) - v(\bar{t})| + \|x_n - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{y}\| \\ &\leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + (\rho - \delta) \\ &= \rho - \frac{\delta}{2} < \rho. \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant la propriété (P_3) dans le Théorème 2.13 avec $\xi_n \in \partial^p d_{S(t_n)}(x_n)$, on obtient

$$\langle \xi_n, u - x_n \rangle \leq \frac{8}{\rho - d_{S(t_n)}(x_n)} \|u - x_n\|^2 + d_{S(t_n)}(u) - d_{S(t_n)}(x_n), \tag{2.14}$$

pour tout $u \in H$ avec $d_{S(t_n)}(u) < \rho$. Cette inégalité reste valable pour tout $u \in \overline{B}(\overline{x}, \delta')$ avec $0 < \delta' < \dfrac{\delta}{4}$ puisque pour un tel u on a

$$d_{S(t_n)}(u) \leq \|u - \overline{x}\| + \|\overline{x} - x_n\| + d_{S(t_n)}(x_n) \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + r - \rho.$$

Par conséquent, d'après la continuité de la fonction distance par rapport à (t, x), et par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité (2.14) on obtient

$$\langle \overline{\xi}, u - \overline{x} \rangle \leq \frac{8}{\rho - d_{S(\bar{t})}(\overline{x})} \|u - \overline{x}\|^2 + d_{S(\bar{t})}(u) - d_{S(\bar{t})}(\overline{x}),$$

pour tout $u \in \overline{B}(\overline{x}, \delta')$. Ce qui assure que $\overline{\xi} \in \partial^p d_{S(\bar{t})}(\overline{x})$. ■

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la prox-régularité implique l'équivalence entre les cônes normaux. Voici une autre proposition concernant le cône normal proximal d'un ensemble uniformément prox-régulier.

Proposition 2.15. *Soit S un sous ensemble fermé de H. Si S est ρ-prox-régulier, alors le graphe du cône normale proximal $N_S^P(.)$ est fortement $\times$ faiblement fermé.*

Démonstration. On suppose que S est ρ- prox-régulier et on fixe $x, x' \in S$.
Soit $(x_n)_n$ une suite de S qui converge vers x et $(v_n)_n$ une suite de $N_s^p(x_n)$ qui converge faiblement vers v. Alors par la définition de la prox-régularité, pour $\beta = \sup\limits_n \|v_n\| < +\infty$, on a

$$\begin{aligned} < v_n, x' - x_n > &\leq \frac{\|v_n\|}{2\rho} \|x' - x_n\|^2 \\ &\leq \frac{\beta}{2\rho} \|x' - x_n\|^2, \end{aligned}$$

par passage à la limite on obtient

$$< v, x' - x > \leq \frac{\beta}{2\rho} \|x' - x\|^2,$$

et donc $v \in N_S^P(x)$, d'où le résultat .

■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solutions pour le processus de Rafle non convexe perturbé

Dans ce chapitre, on veut montrer l'existence de solutions pour l'inclusion différentielle non convexe suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)x), & p.p.\ t \in [0.\tau], \\ x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-a, 0], \\ x(t) \in C(t) \quad \forall t \in [0, \tau], \end{cases}$$

où $C(t)$ est non vide, non convexe, uniformément ρ-prox-régulier avec une perturbation F qui est une multi-application non convexe, non compacte, intégrable mesurable par rapport à la première variable et Lipschitzienne continue par rapport à la deuxième variable, et une application de retard $\mathcal{T}(t)$, dans un espace de Hilbert H.

Pour cela, considérons les deux hypothèses suivantes
$(\mathcal{H}_1)$ Soit $C : [0, b] \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs compactes non vides qui satisfait les conditions suivantes

(a) Pour chaque $t \in [a, b]$, $C(t)$ est ρ-prox-régulier pour un certain $\rho > 0$ fixé,

(b) Il existe une fonction absolument continue $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que
$$\left| d_{C(t)}(x) - d_{C(s)}(x) \right| \leq |v(t) - v(s)|,$$
pour tout $x \in H$ et pour tous $s, t \in [a, b]$,

$(\mathcal{H}_2)$ Soit $F : [a, b] \times C_a \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées qui satisfait les conditions suivantes

(i) Pour chaque $\psi \in C_a, t \to F(t, \psi)$ est mesurable,

(ii) il existe une fonction $m(.) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^+)$ telle que, pour tout $t \in [a, b]$ et pour tous $\psi_1, \psi_2 \in C_a$, on a

$$H\Big(F(t,\psi_1),F(t,\psi_2)\Big) \leq m(t)\|\psi_1-\psi_2\|_\infty \ ,$$

(iii) Pour tout sous-ensemble borné S de C_a, il existe deux fonctions $g_s(.)$ et $p_s(.) \in L^1([0,b],\mathbb{R}^+)$ telles que pour tout $t\in[0,b]$ et pour tout $\psi\in S$ on a
$$\|F(t,\psi)\| := \sup_{y\in \mathrm{F}(t,\psi)} \|y\| \leq g_s(t)+p_s(t)\|\psi\|_\infty \ .$$

Théorème 3.1. *Soit H un espace de Hilbert, supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites, alors pour tout $\varphi\in C_a$ tel que $\varphi(0)\in C(0)$, il existe $T>0, r>0$ et une fonction absolument continue, $x(.):[-a,T]\to H$ telle que $x(.)$ est solution du problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t,\mathcal{T}(t)x) \quad p.p\ t\ \in[0,T],\\ x(t)=\varphi(t) \quad ,\forall t\ \in[-a,0],\\ x(t)\in C(t) \quad ,\forall t\ \in[0,T]. \end{cases}$$

De plus,

$$\|\dot{x}(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(\|\varphi\|_\infty + r) \quad p.p\ t\ \in[0,T].$$

Démonstration. Fixons $\varphi\in C_a$ tel que $\varphi(0)\in C(0)$.
Soient $r>0$ et $g(.),p(.)\in L^1([0,b],\mathbb{R}^+)$ tels que

$$\|F(t,\psi)\| \leq g(t)+p(t)\|\psi\|_\infty \quad \forall (t,\psi)\in[a,b]\times \overline{B}_a(\varphi,r). \tag{3.1}$$

Soit $T_1>0$ tel que

$$\int_0^{T_1}\Big(2g(t)+2p(t)(\|\varphi\|_\infty+r)+|\dot{v}(t)|\Big)dt < \inf\{\frac{r}{2},\frac{\rho}{2}\}. \tag{3.2}$$

Pour $\varepsilon>0$, nous fixons

$$\eta(\varepsilon) = \sup\Big\{\gamma\in]0,\varepsilon] : \Big|\int_{t_1}^{t_2}\big(|\dot{v}(s)|+2g(s)+2p(s)(\|\varphi\|_{+\infty}+r)\big)ds\Big)\Big| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\text{et } \|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\| < \varepsilon\, si\, |t_1-t_2|<\gamma\Big\},$$

et posons

$$T=\min\Big\{T_1,\frac{1}{2}\eta(\frac{r}{2}),b\Big\}. \tag{3.4}$$

Nous utiliserons le lemme suivant pour montrer notre résultat d'existence

Lemme 3.2. *Si les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $y(.)\in L^1([0,T],H)$, il existe une fonction continue $x_n(.):[-a,T]\to H$, des fonctions étagées $\theta_n(.), \overline{\theta}_n(.):[0,T]\to[0,T]$ et $f_n(.)\in L^1([0,T],H)$ telles que*

- $f_n(t) \in F\Big(t, \big(\mathcal{T}(\theta_n(t))\big)x_n\Big)$, $x_n\big(\overline{\theta}_n(t)\big) \in C(\overline{\theta}_n(t))$ *pour tout* $t \in [0,T]$,
- $\|f_n(t) - y(t)\| \leq d\Big(y(t), F\big(t, (\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n)\big)\Big) + \dfrac{1}{n}$ *pour tout* $t \in [0,T]$,
- $\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big) \in -N_{C(\overline{\theta}_n(t))}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$,
- $\|\dot{x}_n(t) - f_n(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(r + \|\varphi\|_\infty)$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$.

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $y(.) : [0,T] \to H$ une fonction mesurable, considérons une suite $(P_n)_n$ de subdivisions de l'intervalle $[0,T]$

$$P_n = \Big\{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_i^n < ... < t_{2^n}^n = T\Big\} ,$$

où $t_i^n = i\dfrac{T}{2^n}$, $0 < i < 2^n$. Fixons $x_n(s) = \varphi(s)$ pour tout $s \in [-a, 0]$. Posons $x_0^n = \varphi(0) \in C(t_0^n)$. D'après le Lemme 1.85, il existe une fonction $f_0^n \in L^1([0, t_1^n], H)$ telle que

$$f_0^n(t) \in F(t, \mathcal{T}(0)x_n)$$

et

$$\|f_0^n(t) - y(t)\| \leq d(y(t), F(t, \mathcal{T}(0)x_n)) + \frac{1}{n},$$

pour tout $t \in [0, t_1^n]$. En utilisant $(\mathcal{H}_1)$, on trouve que

$$\Big|d_{C(t_1^n)}\big(x_0^n + \textstyle\int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big) - d_{C(t_0^n)}\big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big)\Big| \leq \Big|v(t_1^n) - v(t_0^n)\Big|,$$

donc

$$\begin{aligned}
d_{C(t_1^n)}\big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big) &\leq d_{C(t_0^n)}\big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big) + |v(t_1^n) - v(t_0^n)| \\
&\leq \inf_{y \in C(t_0^n)} \|y - x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\| + |v(t_1^n) - v(t_0^n)| \\
&\leq \big\|x_0^n - x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big\| + \big|v(t_1^n) - v(t_0^n)\big| \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t_1^n} \|f_0^n(s)\|ds + \int_{t_0^n}^{t_1^n} |\dot{v}(s)|ds \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t_1^n} (g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty)ds + \int_{t_0^n}^{t_1^n} |\dot{v}(s)|ds \\
&= \int_{t_0^n}^{t_1^n} \Big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\Big)ds,
\end{aligned}$$

comme $t_i^n = i\dfrac{T}{2^n}$

$$\begin{aligned}
d_{C(t_1^n)}\big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big) &\leq \int_0^T \big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&\leq \int_0^{T_1} \big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&\leq \int_0^{T_1} \big(2g(s) + 2p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&\leq \inf\big\{\frac{r}{2}, \frac{\rho}{2}\big\} \leq \frac{\rho}{2} \\
&< \rho,
\end{aligned}$$

et puisque C est uniformément ρ-prox-régulier, alors d'après la Proposition (2.5), on a

$$\mathrm{Proj}_{C(t_1^n)}\bigg(x_0 + \textstyle\int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\bigg) \neq 0,$$

choisissons donc un point x_1^n dans $\mathrm{Proj}_{c(t_1^n)}\bigg(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\bigg)$. Notons que : $x_1^n \in C(t_1^n)$ et

$$\begin{aligned}
\bigg\|x_1^n - \Big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big)\bigg\| &= d_{C(t_1^n)}\Big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big) \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t_1^n} \Big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\Big)ds.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
\|x_1^n - \varphi(0)\| &= \|x_1^n - x_0^n\| \\
&= \Big\|x_1^n - x_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big\| \\
&\leq \Big\|x_1^n - x_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big\| + \Big\|\int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big\| \\
&\leq \Big\|x_1^n - \big(x_0^n + \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big)\Big\| + \int_{t_0^n}^{t_1^n} \|f_0^n(s)\|ds. \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t_1^n} \big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty\big)ds + \int_{t_0^n}^{t_1^n} \big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty\big)ds. \\
&= \int_{t_0^n}^{t_1^n} \big(2g(s) + 2p(s)\|\varphi\|_\infty + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&\leq \inf\big\{\frac{r}{2}, \frac{\rho}{2}\big\} \\
&\leq \frac{r}{2},
\end{aligned}$$

et donc $x_1^n \in \overline{B}\big(\varphi(0), r\big)$. Posons maintenant

$$x_n(t) = x_0^n + \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0^n)}{\alpha(t_1^n)-\alpha(t_0^n)}\big(x_1^n - x_0^n - \textstyle\int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big) + \int_{t_0^n}^{t} f_0^n(s)ds \quad \forall t \in [t_0^n, t_1^n],$$

où

$$\alpha(t) = \textstyle\int_0^t \big(|\dot{v}(s)| + g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty)\big)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Donc pour tout $t \in [t_0^n, t_1^n]$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - \varphi(0)\| &= \|x_n(t) - x_0^n\| \\
&= \Big\|x_0^n + \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0^n)}{\alpha(t_1^n)-\alpha(t_0^n)}(x_1^n - x_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds) + \int_{t_0^n}^{t} f_0^n(s)ds - x_0^n\Big\| \\
&\leq \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0^n)}{\alpha(t_1^n)-\alpha(t_0^n)}\Big\|x_1^n - x_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\Big\| + \Big\|\int_{t_0^n}^{t} f_0^n(s)ds\Big\| \\
&\leq \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0^n)}{\alpha(t_1^n)-\alpha(t_0^n)}\big\|x_1^n - x_0^n - \int_{t_0^n}^{t_1^n} f_0^n(s)ds\big\| + \int_{t_0^n}^{t} \big\|f_0^n(s)\big\|ds,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\alpha(t_1^n) - \alpha(t_0^n) &= \int_0^{t_1^n} \big(g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds - \int_0^{t_0^n} \big(g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&= \int_{t_0^n}^{t_1^n} \big(g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds.
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - \varphi(0)\| &\leq \alpha(t) - \alpha(t_0^n) + \int_{t_0^n}^{t} \|f_0^n(s)\|ds \\
&= \int_{t_0^n}^{t} \big(g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds + \int_{t_0^n}^{t} \big\|f_0^n(s)\big\|ds \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t} \big(g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds \int_{t_0^n}^{t} \big(g(s) + p(s)\|\varphi\|_\infty\big)ds \\
&\leq \int_{t_0^n}^{t} \big(2g(s) + 2p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds. \\
&\leq \int_0^{T_1} \big(2g(s) + 2p(s)(r + \|\varphi\|_\infty) + |\dot{v}(s)|\big)ds \\
&\leq \inf\{\frac{r}{2}, \frac{\rho}{2}\} \\
&\leq \frac{r}{2},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $x_n(t) \in \overline{B}(\varphi(0), \dfrac{r}{2})$ pour tout $t \in [t_0^n, t_1^n]$.

Maintenant, nous estimons $\|\big(\mathcal{T}(t_1^n)x_n\big)(s) - \varphi(s)\|$ pour tout $s \in [-a, 0]$.

- Si $-t_1^n \leq s \leq 0$, alors $t_1^n + s \in [0, t_1^n]$, utilisons le fait que $|s| \leq t_1^n \leq T \leq \eta\Big(\dfrac{r}{2}\Big)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{T}(t_1^n)x_n)(s)-\varphi(s)\| &= \left\|x_n(t_1^n+s)-\varphi(s)\right\|\\
&\leq \left\|x_n(t_1^n+s)-\varphi(0)\right\|+\|\varphi(s)-\varphi(0)\|\\
&\leq \frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r.
\end{aligned}$$

• si $-a\leq s\leq -t_1^n$, alors $t_1^n+s\in[-a,0]$ et

$$\begin{aligned}
\left\|\big(\mathcal{T}(t_1^n)x_n\big)(s)-\varphi(s)\right\| &= \left\|x_n(t_1^n+s)-\varphi(s)\right\|\\
&= \left\|\varphi(t_1^n+s)-\varphi(s)\right\|\\
&\leq r,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{T}(t_1^n)x_n\in\overline{B}_a\big(\varphi(.),r\big).$$

On répète ce processus pour construire les suites $\big(f_i^n(.)\big)_i,(x_i^n)_i$, qui satisfont pour tout $0\leq i\leq 2^n-1$ et pour tout $t\in[t_i^n,t_{i+1}^n]$ les assertions suivantes

$$f_i^n(t)\in F(t,\mathcal{T}(t_i^n)x_n),x_0^n\in C(t_0^n),x_{i+1}^n\in C(t_{i+1}^n)\cap\overline{B}(\varphi(0),r), \tag{3.5}$$

$$x_n(t)\in\overline{B}(\varphi(0),r),\mathcal{T}(t_i^n)x_n\in\overline{B}_a(\varphi(.),r), \tag{3.6}$$

$$\|f_i^n-y(t)\|\leq d\big(y(t),F(t,\mathcal{T}(t_i^n)x_n)\big)+\frac{1}{n}, \tag{3.7}$$

$$x_{i+1}^n\in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}\left(x_i^n+\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}f_i^n(s)ds\right), \tag{3.8}$$

$$\left\|x_{i+1}^n-\left(x_i^n+\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}f_i^n(s)ds\right)\right\|\leq\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Big(|\dot v(s)|+g(s)+p(s)(r+\|\varphi\|_\infty)\Big)ds, \tag{3.9}$$

$$x_n(t)=x_i^n+\frac{\alpha(t)-\alpha(t_i^n)}{\alpha(t_{i+1}^n)-\alpha(t_i^n)}\left(x_{i+1}^n-x_i^n-\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}f_i^n(s)ds\right)+\int_{t_i^n}^{t}f_i^n(s)ds. \tag{3.10}$$

Maintenant nous définissons les fonctions $\theta_n(.),\overline{\theta}_n(.):[0,T]\to[0,T]$ et $f_n(.)\in L^1([0,T],H)$, pour tout $t\in[t_i^n,t_{i+1}^n]$ comme suit

$$\overline{\theta}_n(t)=t_{i+1}^n,\overline{\theta}_n(T)=T,f_n(t)=f_i^n(t),$$

et pour tout $t\in]t_i^n,t_{i+1}^n]$

$$\theta_n(t)=t_i^n,\ \theta_n(0)=0.$$

La fonction $x_n(.)$ est absolument continue. En effet, pour tout $0 \le i \le 2^n - 1$ et tous $t, s \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ tels que $s \le t$, on a

$$\begin{aligned}
x_n(t) - x_n(s) &= x_i^n + \frac{\alpha(t) - \alpha(t_i^n)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\Big) + \int_{t_i^n}^{t} f_i^n(s)ds - x_i^n \\
&\quad - \frac{\alpha(s) - \alpha(t_i^n)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\Big) + \int_{t_i^n}^{s} f_i^n(s)ds \\
&= \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\Big) + \int_{s}^{t} f_i^n(s)ds,
\end{aligned}$$

donc

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \le \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\Big\|x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\Big\| + \int_{s}^{t} \|f_i^n(s)\|ds.$$

Alors les relations (3.1) et (3.9) nous donnent

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| &\le \alpha(t) - \alpha(s) + \int_{s}^{t} \big(g(\tau) + p(\tau)(\|\varphi\| + r)\big)d\tau \\
&= \int_{s}^{t} \big(g(\tau) + p(\tau)(\|\varphi\|_\infty + r) + |\dot{v}(\tau)|\big)d\tau + \int_{s}^{t} \big(g(\tau) + p(\tau)(\|\varphi\|_\infty + r)\big)d\tau,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|x_n(t) - x_n(s)\| \le \int_{s}^{t} \big(2g(\tau) + 2p(\tau)(\|\varphi\|_\infty + r) + |\dot{v}(\tau)|\big)d\tau. \tag{3.11}$$

En additionnant, on trouve que cette inégalité est valable pour tout $t, s \in [0, T]$ tel que $s < t$ et par conséquent $x_n(.)$ est absolument continue.
Remarquons que pour tout $0 \le i \le 2^n - 1$ et pour presque tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$, on a

$$\dot{x}_n(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\left(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\right) + f_n(t), \tag{3.12}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}_n(t) - f_n(t)\| &= \left\|\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\Big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\Big) + f_n(t) - f_n(t)\right\| \\
&= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}\big\|x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\big\|,
\end{aligned}$$

en utilisant (3.9), on obtient pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\|\dot{x}_n(t) - f_n(t)\| \le \dot{\alpha}(t) = |\dot{v}(s) + g(s) + p(s)(r + \|\varphi\|_\infty)|.$$

D'autre part, par construction on a $f_n(t) \in F(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n)$ et

$$\|f_n(t) - y(t)\| \le d(y(t), f(t, \mathcal{T}(\theta(t))x_n)) + \frac{1}{n},$$

pour tout $t \in [0,T]$. D'après (3.8), on a pour presque tout $t \in [0,T]$

$$x_{i+1}^n \in \mathrm{Proj}_{C(t_{i+1}^n)}\big(x_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\big),$$

et par suite

$$-\big(x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds\big) \in N^p_{C(t_{i+1}^n)}(x_{i+1}^n).$$

D'autre part, de la relation (3.12)

$$x_{i+1}^n - x_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f_i^n(s)ds = \frac{\alpha(t_{i+1}^n) - \alpha(t_i^n)}{\dot{\alpha}(t)}\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big),$$

donc

$$-\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big) \in N^p_{C(t_{i+1}^n)}(x_{i+1}^n).$$

Et puisque C est ρ-prox-régulier alors $N_C^p(\cdot) = N_C(\cdot)$ donc

$$\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big) \in -N_{C\left(\overline{\theta}_n(t)\right)}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big),$$

ce qui achève la démonstration. ∎

Revenons maintenant à la preuve du Théorème 3.1

D'après le lemme 3.2, on peut définir par induction les suites $(f_n(.))_{n\geq 1} \subset L^1([0,T],H)$, $(x_n(.))_{n\geq 1} \subset C([-a,T],H)$ et $(\theta_n(.))_{n\geq 1}, (\overline{\theta}_n(.))_{n\geq 1} \subset S([0,T],[0,T])$ où $S([0,T],[0,T])$ est l'espace des fonctions étagées définies de $[0,T]$ à valeurs dans $[0,T]$ tels que

(1) $f_n(t) \in F\big(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n\big), x_n\big(\overline{\theta}_n(t)\big) \in C\big(\overline{\theta}_n(t)\big)$ pour tout $t \in [0,T]$,

(2) $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq d\big(f_n(t), F(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n + 1)\big) + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $t \in [0,T]$,

(3) $\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big) \in -N_{C(\overline{\theta}_n(t))}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)$ presque pour tout $t \in [0,T]$,

(4) $\|\dot{x}_n(t) - f_n(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(r + \|\varphi\|_\infty)$ presque pour tout $t \in [0,T]$.

Pour tout $t \in [0,T]$, il existe $0 \leq i \leq 2^n - 1$ tel que $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$. Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on a

$$d_{C(t)}\big(x_n(t)\big) - d_{C(t)}\big(x_n(t_i^n)\big) \leq \|x_n(t) - x_n(t_i^n)\|,$$

donc

$$d_{C(t)}\big(x_n(t)\big) \leq d_{C(t)}\big(x_n(t_i^n)\big) + \|x_n(t) - x_n(t_i^n)\|,$$

par (3.11)

$$d_{C(t)}\big(x_n(t)\big) \leq \int_{t_i^n}^{t} \big(|\dot{v}(s) + 2g(s) + 2p(s)(\|\varphi\|_\infty + r)|\big)ds + |v(t) - v(t_i^n)|.$$

Le terme droit de l'inégalité converge vers 0 quand $n \to +\infty$, i.e.,

$$d_{C(t)}(x_n(t)) \to 0 \quad \text{ quand } n \to +\infty,$$

En utilisant la compacité de $C(t)$, et le fait que $d_{C(t)}(x_n(t)) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on trouve donc que $\{x_n(t), n \geq 1\}$ est relativement compacte dans H .
De plus, d'après (4) on a

$$\begin{aligned}\big|\|\dot{x}_n(t)\| - \|f_n(t)\|\big| &\leq \|\dot{x}_n(t) - f_n(t)\| \\ &\leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(\|\varphi\|_\infty + r),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_n(t)\| &\leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(\|\varphi\|_\infty + r) + \|f_n(t)\| \\ &\leq |\dot{v}(t)| + g(t) + p(t)(\|\varphi\|_\infty + r) + g(t) + p(t)\|\varphi\|_\infty \\ &\leq |\dot{v}(t)| + 2g(t) + 2p(t)(\|\varphi\|_\infty + r),\end{aligned}$$

par suite

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq |\dot{v}(t)| + 2g(t) + 2p(t)(\|\varphi\|_\infty + r) \quad p.p.\, t \in [0, T].$$

Alors, d'après le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut extraire de $(x_n(.))_n$ une sous suite notée aussi $(x_n(.))_n$ qui converge uniformément vers la fonction absolument continue $x(.)$ sur $[0, T]$. De plus, $\dot{x}_n(.)$ converge faiblement vers $\dot{x}(.)$ dans $L^1([0, T], H)$.
Comme $x_n(s) = \varphi(s)$ sur $[-a, 0]$, alors on peut évidement dire que $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur $[-a, T]$, si on étend $x(.)$ de telle sorte que $x(.) \equiv \varphi(.)$ sur $[-a, 0]$.
Remarquons que $x_n(\overline{\theta}_n(t))$ converge uniformément vers $x_n(t)$ sur $[0, T]$. en effet,
Pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned}\|x_n(\overline{\theta}_n(t)) - x(t)\| &\leq \|x_n(\overline{\theta}_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| \\ &\leq \int_{t}^{\overline{\theta}_n(t)} \big(|\dot{v}| + 2g(s) + 2p(s)(\|\varphi\|_\infty + r)\big)ds + \|x_n(t) - x(t)\|,\end{aligned}$$

le terme droit de cette inégalité converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, d'où $x_n(\overline{\theta}_n(t))$ converge vers $x(t)$ quand n tend vers ∞. Comme $d_{C(t)}(x_n(t)) \to 0$ sur $[0, T]$, on conclut que

$$x(t) \in C(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ et $y \in C(t)$, on a d'après $(\mathcal{H}_1)$

$$d_{C(\overline{\theta}_n(t))}(y) - d_{C(t)}(y) \leq |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)|,$$

donc

$$\begin{aligned} d_{C(\overline{\theta}_n(t))}(y) &\leq d_{C(t)}(y) + |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)| \\ &\leq |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)|, \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{y \in C(t)} d_{C(\overline{\theta}_n(t))}(y) \leq |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)|.$$

De la même manière, on obtient

$$\sup_{y \in C(\overline{\theta}_n(t))} d_{C(t)}(y) \leq |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)|,$$

par conséquent

$$H(C(\overline{\theta}_n(t)), C(t)) \leq |v(\overline{\theta}_n(t)) - v(t)|,$$

alors $C(\overline{\theta}_n(t))$ converge vers $C(t)$.
Maintenant on veut montrer que $\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n$ converge vers $T(t)x$ dans C_a.
Tout d'abord, nous définissons la continuité modulaire d'une fonction $\psi(.)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par

$$\omega(\psi(.), I, \eta) := \sup \left\{ \|\psi(t) - \psi(s)\| ; s, t \in I, |s-t| < \eta \right\}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $t, t' \in [0,T]$, supposons que $0 \leq t' - t < \eta(\frac{\varepsilon}{2})$. Par (3.3) et (3.11), on a

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_n(t')\| &\leq \int_t^{t'} (|\dot{v}(s)| + 2g(s) + 2p(s)(\|\varphi\|_\infty + r))ds, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\omega(x_n(.), [0,T], \eta(\frac{\varepsilon}{2})) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $t, t' \in [-a, 0]$ tels que $|t' - t| < \eta(\frac{\varepsilon}{2})$ on a aussi par (3.3)

$$\|\varphi(t) - \varphi(t')\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\omega(\varphi(.), [-a, 0], \eta(\frac{\varepsilon}{2})) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, soit $t \in [0, T]$, $\theta_n(t)$ converge vers t, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|\theta_n(t) - t| < \eta(\dfrac{\varepsilon}{2})$. Donc, pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|x_n(\theta_n(t) + s) - x_n(t + s)\| &\leq \sup \left\{ \| \|x_n(\theta_n(t) + s) - x_n(t + s)\|, s \in [-a, 0], t \in [0, T], |\theta_n(t) - t| < \eta(\right. \\
&= \omega\big(x(.), [-a, T], \eta(\frac{\varepsilon}{2})\big) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t)x_n) - \mathcal{T}(t)x_n\|_\infty = \sup \|x_n(\theta_n(t) + s) - x_n(t + s)\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent $\|\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n - \mathcal{T}(t)x_n\|_\infty$ converge vers 0 lorsque n tend vers ∞. De plus, comme $x_n(.)$ converge uniformément vers $x(.)$ sur $[-a, T]$ alors $\mathcal{T}(t)x_n$ converge uniformément vers $\mathcal{T}(t)x$ sur $[-a, 0]$, on déduit donc que

$$\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n \textit{ converge vers } \mathcal{T}(t)x \textit{ dans } C_a. \tag{3.13}$$

D'autre part, de (1) et (2)

$$\begin{aligned}
\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq d(f_n(t), F(t, \mathcal{T}(\theta_{n+1}(t))x_{n+1})) + \frac{1}{n+1} \\
&\leq d(F(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n), F(t, \mathcal{T}(\theta_{n+1}(t))x_{n+1})) + \frac{1}{n+1} \\
&\leq H(F(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n), F(t, \mathcal{T}(\theta_{n+1}(t))x_{n+1})) + \frac{1}{n+1} \\
&\leq m(t)\|\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n - \mathcal{T}(\theta_{n+1}(t))x_{n+1}\|_\infty + \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

d'après (3.13)

$$\|\mathcal{T}(\theta_n(t))x_n - \mathcal{T}(\theta_{n+1}(t))x_{n+1}\|_\infty \to 0,$$

donc

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ce qui montre que $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans H et par suite $(f_n(.))_{n\geq 1}$ converge vers $f(t)$.
De plus, d'après (1) on a

$$\begin{aligned} d\big(f(t), F(t, \mathcal{T}(t)x)\big) &\leq d\big(f_n(t), F(t, \mathcal{T}(t)x)\big) + \|f(t) - f_n(t)\| \\ &\leq \|f(t) - f_n(t)\| + H\big(F(t, \mathcal{T}(\theta_n(t))x_n), F(t, \mathcal{T}(t)x)\big) \\ &\leq \|f(t) - f_n(t)\| + m(t)\|\mathcal{T}\big(\theta_n(t)\big)x_n) - \mathcal{T}(t)x\|_\infty, \end{aligned}$$

comme $f_n(t) \to f(t)$ alors

$$d\big(f(t), F(t, \mathcal{T}(t))x\big) = 0,$$

d'où

$$f(t) \in \overline{F(t, \mathcal{T}(t)x)},$$

et puisque F est à valeurs fermées, on conclut que

$$f(t) \in F\big(t, \mathcal{T}(t)x\big) \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après (3) et (4), on a

$$\dot{x}_n(t) - f_n(t) \in -N_{C\left(\overline{\theta}_n(t)\right)}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big) \cap \dot{\alpha}(t)\overline{B},$$

et grâce à la Proposition 1.68

$$-\big(\dot{x}_n(t) - f_n(t)\big) \in \dot{\alpha}(t)\partial d_C\big(\overline{\theta}_n(t)\big)x_n(\overline{\theta}_n(t)). \tag{3.14}$$

Comme $-\dot{x}_n + f_n$ converge faiblement dans $L^1([0,T], H)$ vers $(-\dot{x} + f)$, alors d'après le lemme de Mazur on a

$$\xi_n \in Co\{-\dot{x}_q + f_q, q \geq n\}, \tag{3.15}$$

tel que ξ_n converge fortement dans $L^1([0,T], H)$ vers $-\dot{x} + f$.
Par extraction d'une sous suite, on peut supposer que ξ_n converge vers $-\dot{x} + f$ presque partout, d'où l'existence d'un ensemble Lebesgue négligeable $N \subset [0, T]$ tel que pour chaque $t \in [0, T] \setminus N$, $\xi_n(t)$ converge fortement vers $-\dot{x}(t) + f(t)$ dans H. Par conséquent

$$-\dot{x}(t)+f(t)\in\bigcap_n\overline{Co}\{-\dot{x}_q(t)+f_q(t),q\geq n\}.$$

D'après (3.14), pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $t\in[0,T]\setminus N$ et pour tout $y\in H$, on a

$$< y,-\dot{x}_n(t)+f_n(t) >\leq \sigma\Big(y,\dot{\alpha}(t)\partial d_{C(\overline{\theta}_n(t))}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)\Big),$$

et par (3.15), pour chaque $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,T]\setminus N$

$$< y,\xi_k(t) >\leq \sup_{q\geq n} < y,-\dot{x}_q(t)-f_q(t) > \ \forall k\geq n.$$

Passons à la limite, on trouve que lorsque $n\to+\infty$

$$\begin{aligned}\big\langle y,-\dot{x}(t)+f(t)\big\rangle &\leq \sup_{q\geq n}\big\langle y,-\dot{x}_q(t)+f_q(t)\big\rangle\\ &\leq \sup_{q\geq n}\sigma\Big(y,\dot{\alpha}(t)\partial d_{C\left(\overline{\theta}_n(t)\right)}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)\Big)\\ &\leq \inf_n\sup_{q\geq n}\sigma\Big(y,\dot{\alpha}(t)\partial d_{C\left(\overline{\theta}_n(t)\right)}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)\Big)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\sigma\Big(y,\dot{\alpha}(t)\partial d_{C\left(\overline{\theta}_n(t)\right)}\big(x_n(\overline{\theta}_n(t))\big)\Big).\end{aligned}$$

En utilisons le fait que le sous différentiel proximal de la fonction distance est scalairement semi-continue supérieurement, on obtient

$$\big\langle y,-\dot{x}(t)+f(t)\big\rangle\leq\sigma\Big(y,\dot{\alpha}(t)\partial d_{C(t)}\big(x(t)\big)\Big),$$

ce qui nous assure que

$$-\dot{x}(t)+f(t)\in\dot{\alpha}(t)\partial d_{C(t)}x(t)\subset N_{C(t)}(x(t)).$$

Par conséquent

$$\big(\dot{x}(t)-f(t)\big)\in -N_{C(t)}x(t),$$

et comme $f(t)\in F\big(t,\mathcal{T}(t)x\big)$, on obtient

$$\dot{x}(t)\in -N_{C(t)}x(t)+F\big(t,\mathcal{T}(t)x\big).$$

Finalement, pour presque tout $t\in[0,T]$,

$$\dot{x}(t)\in -N_{C(t)}x(t)+F\big(t,\mathcal{T}(t)x\big).$$

Pour tout $t \in [0, T], x(t) \in C(t)$. Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'existence pour le processus de Rafle du premierù ordre avec une perturbation à valeurs non convexes non compactes et avec un retard dans un espace de Hilbert. Notre approche emploie des propriétés appartenant à la classe d'ensembles prox-réguliers ainsi que des techniques de théorie de compacité et de topologie faible.

Bibliographie

[1] **M. Aitalioubrahim**, *on non compact perturbation of non convexe sweeping process.* Commentations Mathematical universitatics carolinae, voi.53, No. 1, 65–77, 2012.

[2] **J. P. Aubin, A. Cellina** , *Differential inclusion, Set and valued maps and Viability Theory*, Springer-verlag, Berlin (1984).

[3] **D. Azé**, *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, Édition Marketing. 1997.

[4] **H. Benabdellah**, *Existence of solution to the nonconvex sweeping process.* J. Differ. Equ. 164. 286-295, 2000.

[5] **F. Bernard, L. Thibault** et **N. Zlateva**, *Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach space*, J. Convex Anal. 13, no. 3-4, 525–559, 2006.

[6] **J. M. Borwein** and **J. R-Giles**, *the proximal normal formula in Banach spaces.* trans.Amer. Math. Soc. 302, 371-381,1987 .

[7] **M. Bounkhel**, *Regularity concepts in nonsmooth analysis, Theory and application*, Optimization and Application, Springer, 2012.

[8] **M. Bounkhel. et L. Thiboult**, *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space.* J. Nonlinear Convex Anal, 6, 359-374, 2005.

[9] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[10] **C. Casting, T. X. Duc Ha et M. Valadier**, *Evolution equations governed by the sweeping process.* Set-Valued Anal. 1, 109-139, 1993.

[11] **C. Castaing et M. D. P. Monteiro-Marques**, *B.V periode solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets.* Set. Valued Anal, 3(4) :381-399, 1995.

[12] **C. Casting et M. Valadier**, *Convexe Analysis and Measurable Multifonctions*, Springer-verlage, Berlin, 1977.

[13] **F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R Wolenski**, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] **G. Colombo, V. V. Goncharov** , *The sweeping processes without convexity*, Set-Valued Anal. 7, 357-374, 1999.

[15] **G. Colombo et M. D. P. Monteiro-Marques**, *Sweeping by continuons prox-regular set J. Diff : Equations*, 187 : 46-62, 2003.

[16] **J. F. Edmond et L. Thibault**, *B.V solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with pertubation.* J. Diff. Equation, 226 : 135-179, 2006.

[17] **K. S Lau**, *Almost Chebychev subsets in reflexive Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J., Vol 2, pp.791-795, 1978.

[18] **M. D. P. Monteiro- Marques** , *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems Shocks and Dry Friction*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[19] **B. S. Mordukhovich** , *Approximation Method in Problems of Optimization and Control.* Nauka, Moscow, 1988.

[20] **J. J. Moreau**, *Rafle par un convexe variable I.* Sém. Anal. Convexe Montp, Exp, 15, 1971.

[21] **J. J. Moreau**, *Numerical aspects of the sweeping process*, compt. Methodes appl. Mech. 177, 329-349, 1999.

[22] **R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar ,L. Thibault**, *Local differentiability of distance functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 352, no. 11, 5231–5249, 2000.

[23] **l. Thibault**, *Sweeping process with regular and nonregular sets*, J. Differential Equations 193, 1–23, 2003.

[24] **Q. Zhu** , *On the solution set of differential inclusions in Banach space*, J. Differential Equations 93, 213–237, 1991.