République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahya-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et informatiques
Département de Mathématiques

Mémoire

de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de
Master
Spécialité Mathématiques Appliquées
Option EDP et Applications

Thème

Etude comparative des différents schémas numériques pour le problème de Stokes

Presenté par :
Boussoufa Oussama

Devant le jury :

Dr.	Y. Daïkh	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Présidente
Dr.	H. Benhassine	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Encadreur
Dr.	A. Zazoua	Université Mohamed Seddik Ben Yahia.	Examinatrice

Promotion 2019/2020

Remerciement

Un Grand Merci à ma Mère,
Mon Père,
Toute la Famille,
Mon Prof. Encadreur H.Benhassine
et à Tous Les Profs. qui m'ont enseigné durant mon parcours universitaire.

Table des matières

Introduction

Les équations de Stokes régissent les écoulements lents des fluides incompressibles. L'approximation des solutions de ce système d'équations a fait l'objet de nombreuses recherches et les résultats proposés dans ce mémoire n'en représentent qu'une partie très limitée.

La méthode des éléments finis sera notre méthode adoptée afin d'approximer les solutions et parmi les formulations faibles (équivalentes) déjà existantes, on considèrera la formulation *vitesse-pression*. Dans le chapitre 1, on verra que cette formulation fait partie de la classe des problèmes du "point-selle". On montrera l'importance de la condition "inf-sup" qui va jouer un rôle essentiel au niveau continu et discret. Le plus grand intérêt de cette condition est qu'elle permettra de construire des schémas de discrétisation bien posés et dont les solutions convergent optimalement. Dans le chapitre 2, on présentera quelques éléments finis "mixtes" stables pour l'approximation du problème de Stokes, notamment l'élément de Crouzeix-Raviart, Taylor-Hood et les éléments de Scott-Vogelius. Les résultats de stabilité et de convergence seront démontrés pour la plupart de ces éléments. A la fin, on mettra le point sur des résultats assez récents [16] montrant l'impact de la contrainte de la divergence nulle sur la simulation.

Enfin, au troisième chapitre, on verra comment construire des schémas numériques reposant sur des discrétisations de Galerkin généralisées et permettant d'échapper à la condition inf-sup, il s'agit des méthodes de stabilisation. Une propriété intéressante relatives à ces méthodes est que la famille des éléments finis mixtes ayant un ordre d'interpolation égal seront permis et mêmes favorables, contrairement au cas de la formulation vitesse-pression où ces éléments sont instables.

Chapitre 1

Formulation faible et problèmes du point-selle

Dans ce chapitre, on rappellera brièvement la définition du problème de Stokes d'un point de vue physique et mathématique. Ensuite, puisque la méthode des éléments finis est considérée, on s'intéressera à la formulation variationnelle dite "mixte", qui va nous amener vers un cadre abstrait et plus général : celui des problèmes du point-selle pour lesquels le problème de Stokes ne représente qu'un cas particulier.
Le théorème principal de ce chapitre, établi par Brezzi-Babuska, va assurer l'existence et l'unicité des solutions de ce type de problème et ensuite la stabilité et la convergence des solutions des problèmes discrets associés. Après, on donne un théorème de régularité (en 2 et 3 dimensions) qui sera important pour les résultats de convergence.

1.1 Les équations de Stokes

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, un ouvert borné rempli par un fluide. Notre objectif n'est pas d'établir les équations de Stokes mais seulement de rappeler leur signification physique et mathématique. D'abord, on définit quelques notions relatives à ses équations.

- **La vitesse** : soit $\mathbf{x} \in \Omega$ et considérons la particule du fluide se déplaçant à travers $\mathbf{x}$

au temps t.

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ dénote la vitesse de la particule en $\mathbf{x}$ au temps t (voir 1.1).

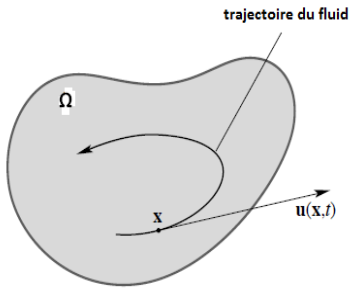


FIGURE 1.1 – Représentation du vecteur vitesse.

- **La pression :** si S est une surface dans le fluide et $\mathbf{n}$ le vecteur normal unitaire sortant choisi, alors

$$\text{la force (de pression) à travers } S \text{ par unité de surface } = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}.$$

  La fonction $p(\mathbf{x}, t)$ est appelée pression.
- **La masse volumique** désignée par $\rho(\mathbf{x}, t)$ est la masse par unité de surface, i.e. si $m(W, t)$ est la masse de la région du fluide W au temps t, alors

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{dV}.$$

  Si $\rho =$ constant, alors $m(W, t) = m(W) = \rho \cdot \text{volume}(W)$.
- **L'incompressibilité et l'homogénéité** : soit W une région du fluide (voir fig 1.2). On dit qu'un écoulement est incompressible si pour toute sous-région W on a :

$$\text{volume}(W_t) = \int_{W_t} \mathrm{dV} = \text{constant en } t,$$

  c-à-d, la masse volumique est constante en suivant le fluide. On peut aussi montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Le fluide est incompressible } \textbf{ssi } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

  On dit que le fluide est homogène si ρ est constante dans l'espace. Clairement, pour un fluide incompressible homogène on a $\rho(\mathbf{x}, t) =$ constante.

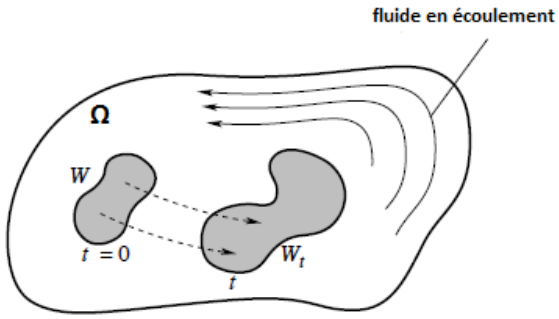


FIGURE 1.2 – W_t est l'image de W après un temps t.

- **La viscosité dynamique** d'un fluide notée ν, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de la **résistance** du fluide au glissement ou à la déformation. Elle exprime les forces de frottement (tangentielles) qui s'opposent directement à l'écoulement. On supposera par la suite que ν est constante.

Les équations de **Navier-Stokes** décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible homogène visqueux ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}\left[\nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)\right] + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Le terme $\mathbf{f}$ représente les forces volumiques s'appliquant sur le fluide. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, i.e. $\partial_t \mathbf{u} = \partial_t \rho = \partial_t p = 0$, les équations (1.1) deviennent

$$\begin{cases} -\nu\Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}\ , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

On définit le nombre de Reynolds comme le quotient

$$R = \frac{|\mathbf{U}|L}{\nu},$$

où $\mathbf{U}$ est une vitesse caractéristique du fluide et L est une longueur caractéristique (ex. le rayon de la sphère dans laquelle le fluide s'écoule). Ce nombre est en fait considéré pour déterminer les équations "similaires" et pour faire les modèles expérimentales [7]. Lorsque

$R \ll 1$, le terme non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est négligé et les équations suivantes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

constituent une bonne approximation pour (1.2). Ce sont les **équations de Stokes** stationnaires incompressibles. Par la suite, on considèrera le problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

C'est un système d'EDPs linéaires avec une condition au bord de type Dirichlet homogène. Dans tout la suite, $\mathbf{f}$ sera (au moins) dans l'espace $H^{-1}(\Omega)^n$.

1.2 Formulation faible

Dorénavant, notre domaine d'étude Ω sera un domaine polygonal ou polyédrique. Ce qui supposera que le théorème de trace et la formule de Green

$$\int_\Omega \psi \operatorname{div} \mathbf{w} \, dx = -\int_\Omega \nabla \psi \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^n \tag{1.5}$$

seront valides.

Il est bien connu que le problème (1.4) admet la formulation variationnelle suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V_{\text{div}} \text{ tel que } \quad \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V_{div}, \tag{1.6}$$

où $V_{div} = \{v \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}$.

Le théorème de Lax-Milgram appliqué à (1.6) assure l'existence et l'unicité de la solution $u \in V_{div}$.
Le problème discret associé s'écrira sous la forme :

$$\text{Trouver } \quad \mathbf{u}_h \in V_{\text{div},h} \text{ tel que } \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{div,h}, \tag{1.7}$$

où $V_{div,h} \subset V_{div}$ est un sous espace de dimension finie.
Cette approche, bien quelle est séduisante pour la théorie, est loin de l'être d'un point de vu pratique pour deux raisons : d'abord, c'est très difficile de trouver une famille de sous espaces $\{V_{div,h}\}$ qui est suffisamment "riche" pour permettre d'approximer $\mathbf{u}$ par une fonction $\mathbf{u}_h \in V_{div,h}$. Le deuxième inconvénient est la difficulté de construire une base de $V_{div,h}$ pour formuler le système linéaire associé à (1.7).
En d'autres termes, c'est très difficile d'approcher la solution $\mathbf{u}$ par des fonctions à **divergence nulle** [1].
Pour ces raisons, on considèrera une autre formulation faible équivalente et qui sera plus facile à gérer lors de l'analyse numérique.

Remarquons que p n'apparait dans le problème (1.4) qu'avec son gradient. Par conséquent, si $(\mathbf{u}, p)$ est solution, ce sera aussi le cas pour $(\mathbf{u}, p + c)$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Afin d'éviter cela, on supposera que p est à moyenne nulle sur Ω.

On s'intéresse maintenant à la formulation faible du problème. Supposons que $\mathbf{u}$, p et $\mathbf{f}$ sont régulières (de classe $C^2(\overline{\Omega})$ par exemple). En "multipliant" la première équation de (1.4) par une fonction $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$, nous obtenons après intégration par parties :

$$\nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Maintenant, on multiplie la deuxième équation par $q \in L_0^2(\Omega)$ et on intègre sur Ω. On obtient :

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0,$$

où $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0\}$ est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions à moyenne nulle dans Ω.

1. Néanmoins, dans le chapitre 2, on donnera un exemple et on discutera l'avantage, dans certains cas, des méthodes ayant cette propriété.

On a donc la formulation faible suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \qquad \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}\, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{1.8}$$

Réciproquement, soit $(\mathbf{u}, p)$ solution de (1.8). En prenant $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^n$ dans la première équation et en dérivant au sens des distributions, il vient que

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{dans } \Omega.$$

De plus, puisque div $u \in L_0^2(\Omega)$ et d'après la deuxième équation de (1.8), $\operatorname{div} \mathbf{u}$ est orthogonal à tous les éléments de $L_0^2(\Omega)$, alors $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. La condition $\gamma_0 \mathbf{u} = 0$ est triviale [2].
La formulation variationnelle (1.8) est dite mixte.

1.3 Problèmes du point-selle

La formulation mixte du problème de Stokes rentre dans le cadre général des problèmes du point-selle que nous allons présenter ci-après.

Soit V et Q deux espaces de Hilbert munis des normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_Q$ respectivement. Avant d'entamer notre étude, on rappelle la définition de l'opérateur transposé et quelques de ses propriétés.

Définition/Proposition 1.1. *Soit $B \in \mathscr{L}(V, Q')$ un opérateur linéaire continu. On peut lui associer un autre opérateur $B^T \in \mathscr{L}(Q, V')$, appelé opérateur transposé, défini par :*

$$\langle B^T q, v \rangle_{V',V} = \langle Bv, q \rangle_{Q',Q} \quad \forall v \in V, \forall q \in Q.$$

De plus, on a :
1) $\|B\|_{\mathscr{L}(V,Q')} = \|B^T\|_{\mathscr{L}(Q,V')}$,
2) B est inversible ssi B^T l'est et dans l'un des deux cas, on a $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$,

2. γ_0 est l'opérateur trace.

3) les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $Im(B)$ *est fermé dans* Q',
ii) $Im(B^T)$ *est fermé dans* V',
iii) $Im(B) = (\ker(B^T))_{pol}$,
iv) $Im(B^T) = (\ker(B))_{pol}$,
où $\ker(B)_{pol} := \{g \in V' : \langle g, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \ker(B)\}$ *est le polaire de* $\ker(B)$.

1.3.1 Formulation du problème

Soit $a(\cdot,\cdot) : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b(\cdot,\cdot) : V\times Q :\longrightarrow \mathbb{R}$ deux formes bilinéaires et $\gamma, \delta > 0$ les constantes de continuité respectives associées.
Les problèmes dits du point-selle considérés ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,\eta) \in V\times Q \text{ tel que} \\ a(u,v) + b(v,\eta) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in V, \\ b(u,\mu) = \langle \sigma, \mu\rangle \qquad \forall \mu \in Q, \end{cases} \tag{1.9}$$

où $l \in V'$ et $\sigma \in Q'$.

Afin de simplifier l'étude, on réécrit le problème (1.9) sous la "forme opérateur". Soit donc $A \in \mathscr{L}(V, V')$ et $B \in \mathscr{L}(V, Q')$ deux opérateurs définis par :

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \quad \forall u, v \in V, \tag{1.10}$$

$$\langle Bv, \mu\rangle = b(v,\mu) \quad \forall v \in V, \forall \mu \in Q. \tag{1.11}$$

On note $B^T \in \mathscr{L}(Q, V')$ l'opérateur transposé de B, c-à-d :

$$\langle B^T\mu, v\rangle = \langle Bv, \mu\rangle = b(v,\mu). \tag{1.12}$$

Le problème (1.9) est donc équivalent à

$$\begin{cases} Au + B^T\eta = l \qquad \text{dans } V', \\ Bu = \sigma \qquad \text{dans } Q'. \end{cases} \tag{1.13}$$

1.3.2 Analyse du problème

Afin d'analyser le problème (1.13), on introduit le sous-ensemble suivant :

$$V^\sigma = \{v \in V : b(v,\mu) = \langle \sigma, \mu \rangle \ \ \forall \mu \in Q\}.$$

En particulier,

$$V^0 = \{v \in V : b(v,\mu) = 0 \ \ \forall \mu \in Q\} = \ker(B).$$

Il est clair que si $(\mathbf{u}, \eta)$ est solution de (1.13), la composante $\mathbf{u}$ sera, a fortiori, solution du problème suivant :

$$\text{Trouver} \quad u \in V^\sigma \text{ tel que } a(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V^0. \tag{1.14}$$

L'objectif est d'introduire des conditions convenables afin d'avoir la réciproque.

Lemme 1.2. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
a. Il existe une constante $\beta > 0$ t.q. la propriété suivante soit satisfaite :

$$\forall \mu \in Q, \exists v \in V, \ \textit{avec } v \neq 0 : b(v,\mu) \geq \beta \|v\|_V \|\mu\|_Q; \tag{1.15}$$

b. L'opérateur B^T est un isomorphisme de Q dans V^0_{pol}. De plus,

$$\|B^T\mu\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\langle B^T\mu, v \rangle}{\|v\|_V} \geq \beta \|\mu\|_Q \quad \forall \mu \in Q; \tag{1.16}$$

c. L'opérateur B est un isomorphisme de $(V^0)^\perp$ dans Q'. De plus,

$$\|Bv\|_{Q'} = \sup_{\mu \in Q, \mu \neq 0} \frac{\langle Bv, \mu \rangle}{\|\mu\|_Q} \geq \|v\|_V \quad \forall v \in (V^0)^\perp. \tag{1.17}$$

Preuve. On montre l'équivalence entre a. et b.
D'après la définition de B^T, les deux inégalités (1.15) et (1.16) coïncident.
Montrons que a. implique que B^T est un isomorphisme de Q dans V^0_{pol}.
De (1.16), il en découle que B^T est injectif de Q dans son image $Im(B^T)$ avec un inverse continu, donc $Im(B^T)$ est un sous-espace fermé de V' et le point 3) de la Proposition 1.1 implique que $Im(B^T) = V^0_{pol}$. D'où le résultat.
On passe maintenant à l'équivalence entre b. et c. Nous allons identifier V^0_{pol} avec l'espace

dual de $(V^0)^\perp$.
Soit $g \in ((V^0)^\perp)'$. On lui associe la forme linéaire $\tilde{g} \in V'$ satisfaisant la relation

$$\langle \tilde{g}, v \rangle = \langle g, \pi_{(V^0)^\perp}(v) \rangle \quad \forall v \in V,$$

où $\pi_{(V^0)^\perp}$ dénote la projection orthogonale de V dans $(V^0)^\perp$. Clairement, $\tilde{g} \in V^0_{pol}$ et on peut vérifier que l'application linéaire $g \longrightarrow \tilde{g}$ est une isométrie bijective entre $((V^0)^\perp)'$ et V^0_{pol}. Par conséquent, B^T est un isomorphisme de Q dans $((V^0)^\perp)'$ satisfaisant la relation

$$\|(B^T)^{-1}\|_{\mathscr{L}(V^0_{pol},Q)} \leq \frac{1}{\beta},$$

si et seulement si B est un isomorphisme de $(V^0)^\perp$ dans Q' satisfaisant la relation

$$\|B^{-1}\|_{\mathscr{L}(Q,(V^0)^\perp)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

□

Il est facile de voir que la condition (1.15) est équivalente à supposer l'existence d'une constante $\beta > 0$ t.q.

$$\inf_{\mu \in Q, \mu \neq 0} \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_V \|\mu\|_Q} > \beta.$$

D'où l'appellation *condition inf-sup* pour (1.15).
On termine ce paragraphe par ce théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes du point-selle.

Théorème 1.3. ***(Théorème de Brezzi-Babuska)*** *Supposons que :*
1. la forme bilinéaire continue $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur l'espace V^0, c-à-d

$$\exists \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V^0; \tag{1.18}$$

2. la forme bilinéaire continue $b(\cdot,\cdot)$ satisfait la condition inf-sup (1.15).
Alors,
1. pour tout $l \in V'$ et $\sigma \in Q'$, il existe une unique solution u pour le problème (1.14),
2. il existe une unique fonction $\eta \in Q$ telle que (u,η) est l'unique solution du problème (1.9),
3. les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left[\|l\|_{V'} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta}\|\sigma\|_{Q'}\right], \tag{1.19}$$

$$\|\eta\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\|l\|_{V'} + \frac{\gamma(\alpha+\gamma)}{\alpha\beta}\|\sigma\|_{Q'}\right]. \tag{1.20}$$

Preuve. La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ assure l'unicité de la solution du problème (1.14). Montrons l'existence. Comme (1.15) est vérifiée, le point c. du Lemme 1.2 montre qu'il existe une unique fonction $u^\sigma \in (V^0)^\perp$ telle que

$$Bu^\sigma = \sigma, \tag{1.21}$$

$$\|u^\sigma\|_V \leq \frac{1}{\beta}\|\sigma\|_{Q'}. \tag{1.22}$$

Posons $\tilde{u} = u - u^\sigma \in V^0$. Le problème (1.14) est donc équivalent à

$$\text{Trouver} \quad \tilde{u} \in V^0 \text{ t.q.} \quad a(\tilde{u}, v) = \langle l, v\rangle - a(u^\sigma, v) \quad \forall v \in V^0. \tag{1.23}$$

A ce stade, le Théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution $\tilde{u}$ du problème (1.23) et l'estimation

$$\|\tilde{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left(\|l\|_{V'} + \gamma\|u^\sigma\|_{Q'}\right).$$

Tenant compte de (1.22), on obtient

$$\|\tilde{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left(\|l\|_{V'} + \frac{\gamma}{\beta}\|\sigma\|_{Q'}\right). \tag{1.24}$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (1.14) est une conséquence directe de l'existence et l'unicité de la solution de (1.23). L'estimation (1.19) résulte de (1.22), (1.24) et de l'identité $u = \tilde{u} + u^\sigma$.
On s'intéresse maintenant à la composante η.
Comme (1.23) est équivalent à

$$\langle Au - l, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V^0,$$

alors $Au - l \in V^0_{pol}$. Donc on peut exploiter le point b. du Lemme 1.2 et conclure qu'il existe un unique $\eta \in Q$ tel que :

$$Au - l = -B^T\eta, \tag{1.25}$$

$$\|\eta\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\|Au - l\|_{V'}. \tag{1.26}$$

Donc (u, η) est l'unique solution de (1.9). De plus, l'inégalité (1.26) implique que

$$\|\eta\|_Q \leq \frac{1}{\beta}\|A\|_{\mathscr{L}(V,V')}\|u\|_V + \|l\|_{V'} \leq \frac{\gamma}{\beta}\|u\|_V + \frac{1}{\beta}\|l\|_{V'}.$$

L'estimation (1.20) découle de l'inégalité ci-dessus et de l'estimation (1.19) déjà démontrée.

□

1.3.3 Approximation de Galerkin

On s'intéresse à l'approximation de Galerkin pour le problème (1.9). Soit donc V_h et Q_h deux sous-espaces de V et Q respectivement de dimensions finies. Le problème discret est tout simplement :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \eta_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, \eta_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, \mu_h) = \langle \sigma, \mu_h \rangle \quad \forall \mu_h \in Q_h. \end{cases} \tag{1.27}$$

De manière analogue à la section précédente, on introduit l'ensemble

$$V_h^\sigma = \{v_h \in V_h : b(v_h, \mu_h) = \langle \sigma, \mu_h \rangle \quad \forall \mu_h \in Q_h\}.$$

Le théorème suivant assurant l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du problème (1.27) est une conséquence directe du Théorème 1.3.

Théorème 1.4. ***(Existence, unicité et stabilité)*** *Supposons que :*
1. la forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur l'espace V_h^0,c-à-d

$$\exists \alpha_h > 0 : a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|_V^2 \quad \forall v \in V_h^0; \tag{1.28}$$

2. la forme bilinéaire continue $b(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition de compatibilité discrète suivante : il existe $\beta_h > 0$ t.q.

$$\forall \mu_h \in Q_h, \exists v_h \in V_h, \text{ avec } v_h \neq 0 : b(v_h, \mu_h) \geq \beta_h \|v_h\|_V \|\mu_h\|_Q. \tag{1.29}$$

Alors, pour tout $l \in V'$ et $\sigma \in Q'$, il existe une unique solution $(u_h, \eta_h) \in V \times Q$ pour le problème (1.27) satisfaisant les estimations suivantes :

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h}\left[\|l\|_{V'} + \frac{\alpha_h + \gamma}{\beta_h}\|\sigma\|_{Q'}\right], \tag{1.30}$$

$$\|\eta_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta_h}\left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha_h}\right)\|l\|_{V'} + \frac{\gamma(\alpha_h+\gamma)}{\alpha_h\beta_h}\|\sigma\|_{Q'}\right]. \tag{1.31}$$

Lorsque α_h,β_h sont indépendantes de h, les deux estimations ci-dessus donnent les résultats de stabilité désirés.

Remarque 1.5. ***(Les pressions instables)*** *La condition inf-sup* (1.29) *est* ***inévitable*** *pour assurer l'unicité de la composante η_h de la solution du problème* (1.27)*. En effet, supposons qu'elle n'est pas vérifiée, c-à-d*

$$\forall\beta > 0 \quad ,\exists\mu_\beta \in Q_h, \mu_\beta \neq 0 : \quad b(v_h,\mu_\beta) < \beta\|\mu_\beta\|_Q\|v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h.$$

En remplaçant μ_β par $\mu_\beta/\|\mu_\beta\|$, un argument de compacité implique l'existence d'un $\mu_h^* \in Q_h, \mu_h^* \neq 0$, tel que

$$b(v_h,\mu_h^*) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Par conséquent, si (v_h,η_h) est solution du problème(1.27)*, $(u_h,\eta_h+\tau\mu_h^*)$ le sera aussi pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Les fonctions μ_h^* sont appelées modes instables ou, dans le cas du problème de Stokes, pressions instables. Cette non unicité de la solution donne naissance à des instabilités numériques. Pour cette raison, un bon choix du couple (V_h,Q_h) est celui qui garantit la condition*(1.29) *avec β_h indépendant de h : ces couples sont dits* ***stables*** *ou* ***compatibles****. C'est pour cela que la condition* (1.29) *est souvent appelée condition de compatibilité.*
Afin d'éviter le piège des pressions instables, deux stratégies pour le problème de Stokes se dégagent :
1. Stratégie des couples compatibles *: elle consiste à chercher les couples (V_h,Q_h) pour lesquels la condition de compatibilité est vérifiée.*
2. Stratégie de stabilisation *: ça consiste à modifier convenablement le problème discret afin d'échapper à la condition de compatibilité.*

Théorème 1.6. ***(Estimation de type Céa)***
Sous les hypothèse des Théorème 1.3 et 1.4, les solutions (u,η) et (u_h,η_h) des problèmes (1.9) *et* (1.27) *respectivement satisfont les estimations d'erreurs suivantes :*

$$\|u-u_h\|_V \leq \left(1+\frac{\gamma}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\beta_h}\right)\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V + \frac{\delta}{\alpha_h}\inf_{\mu_h\in Q_h}\|\eta-\mu_h\|_Q, \tag{1.32}$$

$$\|\eta-\eta_h\|_Q \leq \frac{\gamma}{\beta_h}\left(1+\frac{\gamma}{\alpha_h}\right)\left(1+\frac{\delta}{\beta_h}\right)\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V+\left(1+\frac{\delta}{\beta_h}+\frac{\delta\gamma}{\alpha_h\beta_h}\right)\inf_{\mu_h\in Q_h}\|\eta-\mu_h\|_Q. \tag{1.33}$$

Preuve. **Etape 1.**
Soit $v_h \in V_h, v_h^* \in V_h^0, \mu_h \in Q_h$. En prenant $v = v_h$ dans $(1.9)_1$, il vient que

$$a(u, v_h) + b(v_h, \eta) = a(u_h, v_h) + b(v_h, \eta_h).$$

Ensuite, en additionnant et en soustrayant les quantités $a(v_h^*, v_h^*)$ et $b(v_h, \mu_h)$, on obtient

$$a(u_h - v_h^*, v_h) + b(v_h, \eta_h - \mu_h) = a(u - v_h^*, v_h) + b(v_h, \eta - \mu_h).$$

On choisit $v_h = u_h - v_h^* \in V_h^0$. En utilisant la définition de V_h^0, la coercivité de $a(\cdot.\cdot)$ et la continuité des deux formes, on trouve

$$\|u_h - v_h^*\|_V \leq \frac{1}{\alpha_h}\left(\gamma\|u - v_h^*\|_V + \delta\|\eta - \mu_h\|_Q\right).$$

Comme $v_h^* \in V_h^0, \mu_h \in Q_h$ sont arbitraires, il suffit de tenir compte de l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - v_h^*\|_V + \|u_h - v_h^*\|_V$$

pour avoir

$$\|u - v_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha_h}\right)\inf_{v_h^*\in V_h^0}\|u - v_h^*\|_V + \frac{\delta}{\alpha_h}\inf_{\mu_h\in Q_h}\|\eta - \mu_h\|_Q.$$

Etape 2. On montre maintenant les estimations(1.32) et (1.33).
1. La condition (1.29) permet d'utiliser la version discrète du Lemme 1.2. Soit $v_h \in V_h$. D'après le point c. du Lemme 1.2, on sait qu'il existe un unique $z_h \in (V_h^0)^\perp$ tel que

$$\begin{cases} b(z_h, \mu_h) = b(u - v_h, \mu_h) \quad \forall \mu_h \in Q_h, \\ \|z_h\|_V \leq \frac{\delta}{\beta_h}\|u - v_h\|_V. \end{cases}$$

Alors, la fonction $v_h^* = z_h + v_h \in V_h^\sigma$. De plus,

$$\|u - v_h^*\|_V \leq \|u - v_h\|_V + \|z_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\delta}{\beta_h}\right)\|u - v_h\|_V.$$

L'estimation (1.32) résulte de cette inégalité et de l'**étape 1**.
2. Pour tout $\mu_h \in Q_h$, la condition inf-sp (1.29) implique que

$$\|\eta_h - \mu_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{v_h \in V_h, v_h \neq 0} \frac{b(v_h, \eta_h, -\mu_h)}{\|v_h\|_V}. \tag{1.34}$$

Or, en soustrayant $(1.27)_1$ de $(1.9)_1$ et en additionnant et soustrayant $b(v_h, \mu_h)$, on obtient

$$b(v_h, \eta_h - \mu_h) = a(u - u_h, v_h) + b(v_h, \eta - \mu_h).$$

En utilisant cette identité dans (1.34) et tenant compte da la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$, il vient que

$$\|\eta_h - \mu_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta_h} \left(\gamma \|u - u_h\|_V + \delta \|\eta - \mu_h\|_Q\right) \quad \forall \mu_h \in Q_h.$$

L'inégalité triangulaire et l'estimation (1.32) déjà démontrée implique (1.33). □

1.4 Application au problème de Stokes continu

A présent, nous allons simplement appliquer le Théorème 1.3 de la section précédente afin de montrer que le problème de Stokes (1.8) est bien posé.

Pour ce cas particulier on a

$$V = H_0^1(\Omega)^n \quad , \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx,$$

$$Q = L_0^2(\Omega) \quad , \quad b(\mathbf{v}, q) = -\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

De même,

$$V^0 = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

et

$$V_{pol}^0 = \{g \in H^{-1}(\Omega) : \langle g, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^0\}.$$

Les deux formes bilinéaire $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$ sont continues :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \nu |\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad , \quad b(\mathbf{v}, q) \leq |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}.$$

Comme la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est clairement coercive sur $V($ et non seulement sur $V^0)$, il suffit de vérifier la condition inf-sup

$$\inf_{q\in L_0^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^n} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|q\|_{0.\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \beta, \tag{1.35}$$

où $\beta > 0$. On verra par la suite que la condition (1.35) est une conséquence du Lemme suivant [14] :

Lemme 1.7. ***(Lemme de De Rham)***
Si $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ *est telle que* $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V^0$, *alors il existe* $p \in L^2(\Omega)$ *unique à une constante additive près telle que*

$$\mathbf{f} = \nabla p.$$

Remarque 1.8. *1. Le Lemme précédent est équivalent à dire que l'opérateur gradient* $\nabla : L^2(\Omega)\backslash\mathbb{R} \longrightarrow V_{pol}^0$ *est* ***bijectif****.*
2. Puisque $L_0^2(\Omega)$ *est orthogonal dans* $L^2(\Omega)$ *à l'espace des fonctions constantes, on a*

$$\|q\|_{0,\Omega} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|q+c\|_{0,\Omega} := \|\dot{q}\|_{L^2(\Omega)\backslash\mathbb{R}} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Donc, $L_0^2(\Omega)$ *peut être identifié via cet isomorphisme isométrique avec* $L^2(\Omega)\backslash\mathbb{R}$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe des Lemmes 1.2, 1.7 et de la remarque ci-dessus.

Corollaire 1.9. *Ces assertions sont équivalentes et satisfaites :*
1. la condition inf-sup (1.35) *est vérifiée,*
2. l'opérateur ∇ *est un isomorphisme de* $L_0^2(\Omega)$ *dans* V_{pol}^0,
3. l'opérateur div *est un isomorphisme de* $(V^0)^\perp$ *dans* $L_0^2(\Omega)$.

Preuve. Puisque le gradient est l'opérateur transposé de $-$div, l'équivalence découle du Lemme 1.2. Il suffit donc de montrer une des assertions ; on montre la deuxième.
D'après le Lemme 1.7 et la Remarque 1.8, On sait que $\nabla \in \mathscr{L}(L_0^2(\Omega), V_{pol}^0)$ est bijectif. Alors, comme $L_0^2(\Omega)$ et V_{pol}^0 sont des espaces de Banach, le Théorème d'isomorphisme de Banach implique que ∇ est un isomorphisme.
Noter que dans 3. on a identifié $(L_0^2(\Omega))'$ avec $L_0^2(\Omega)$. $\square$

Dans le cas particulier du problème de Stokes, le Théorème 1.3 prend la forme suivante :

Théorème 1.10. *Soit Ω un ouvert polygonal ou polyédrique. Pour toute fonction $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$, le problème de Stokes* (1.4) *admet une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C = C(\nu, \beta)$ t.q.*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}. \tag{1.36}$$

On termine cette section par un théorème de régularité. Lorsque Ω est régulier (de classe C^2 par exemple), les résultats de régularité sont très nombreux [13]. Lorsque Ω est seulement polygonal, on a ce résultat [11],[17] :

Théorème 1.11. *Soit Ω un ouvert polygonal ou polyédrique convexe et $\mathbf{f} \in H^m(\Omega)^n$, $m = -1, 0$. Alors, la solution $(\mathbf{u}, p)$ du problème de Stokes* (1.4) *satisfait*

$$(\mathbf{u}, p) \in \left[H^{m+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right]^n \times \left[H^{m+1} \cap L_0^2(\Omega)\right]. \tag{1.37}$$

Dans le cas bidimensionnel, on a l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{m+2,\Omega} + \|p\|_{m+1,\Omega} \leq C\|\mathbf{f}\|_{m,\Omega}. \tag{1.38}$$

Remarque 1.12. *[11] Notons qu'en 2D on a un meilleur résultat de régularité. Par exemple si $\mathbf{f} \in H^1(\Omega)^2$ et que tous les angles de Ω sont $\leq 2\pi/3$ (c'est le cas pour un rectangle ou un carré), alors*

$$(\mathbf{u}, p) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega).$$

Chapitre 2

Schémas numériques relatifs à la stratégie des couples compatibles

Dans les 3 premières sections de ce chapitre nous allons présenter les résultats permettant d'exploiter les estimations de type Céa démontrées dans le chapitre précédent. Les espaces discrets (V_h, Q_h) seront des espaces d'éléments finis standards dont on présentera les propriétés d'approximation dans la première section. Ensuite, dans la 2ème section, on verra que ce choix d'espaces discrets va en fait mener vers les résultats de convergence désirés pour le problème de Stokes. Dans la section 4, on s'intéressera aux quelques éléments finis mixtes stables les plus populaires pour lesquels tous les résultats de convergence seront acquis.

2.1 Quelques résultats d'approximation par la MEF

Dans cette section, on rappelle quelques notions basiques relatives à la méthode des éléments finis et on présente des résultats classiques et non classiques d'approximation nécessaires pour l'analyse des schémas numériques par la suite.

2.1.1 Eléments finis triangulaires

D'abord on rappelle quelques définitions telles intoduites dans P.G. Ciarlet [8] :

• **n-simplexe** : un 2-simplexe (resp. 3-simplexe) est un triangle (resp. un tétraèdre).

• **Elément fini triangulaire :** un élément fini dans $\mathbb{R}^n$ est un triplet $\{K, P, \Sigma\}$, où K est un n-simplexe (appelé élément), P est un espace (de dimension N) de polynômes définis sur K et Σ est un ensemble de formes linéaires $\{\phi_i, 1 \leq i \leq N\}$ définies sur l'espace P et telles que

$$p = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(p) p_i \qquad \forall p \in P, \tag{2.1}$$

avec $\{p_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une base de l'espace P.

• **Triangulation régulière :** on pose

$$h_K = \text{diamètre de } K, \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

et

$$\rho_K = \sup\{\text{diamètre de la boule} B : B \subset K\}.$$

Soit $\{\mathcal{T}_h\}_h$ une famille de triangulations de Ω, i.e. pour tout h, $\mathcal{T}_h$ est une partition de $\overline{\Omega}$ par des n-simplexes. On dit que $\{\mathcal{T}_h\}_h$ est régulière si $h \longrightarrow 0$ et s'il existe $\sigma > 0$ t.q.

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h.$$

Dorénavant, par abus de langage, on dira que $\mathcal{T}_h$ est régulière lorsque la famille $\{\mathcal{T}_h\}_h$ le sera.

• **Elément de référence :** c'est le n-simplexe unité $\widehat{K}$ dans l'espace de référence $(\hat{x}_1, .., \hat{x}_n)$. Tous les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ sont affine-équivalents à $\widehat{K}$, i.e. il existe une application affine inversible $F_K : \widehat{K} \longrightarrow K$ telle que

$$F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$$

et

$$F_K(\hat{a}_i) = a_i \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

où B_K est une matrice inversible, b_K est un vecteur colonne et $\hat{a}_i, a_i, 1 \leq i \leq n+1$, sont respectivement les sommets de $\widehat{K}$ et K. De plus, on a les majorations suivantes :

$$\|B_K\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\widehat{K}}}, \quad \|B_K^{-1}\| \leq \frac{h_{\widehat{K}}}{\rho_K}. \tag{2.2}$$

La norme $\|\cdot\|$ est la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne.

• **Coordonnées barycentriques :** les coordonnées barycentriques λ_i^K d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ par rapport au sommets $a_i, 1 \leq i \leq n+1$, de K sont définies par

$$\lambda_i^K \in P_1, \quad \sum_{1=1}^{n+1} \lambda_i^K = 1, \quad \lambda_i^K(a_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n+1.$$

Une propriété intéressante de $\lambda_i^K, i = 1, n+1$, est qu'elle s'annule sur le côté (ou la face) opposé à a_i.

Le Lemme suivant sera utile par la suite.

Lemme 2.1. *[8] Soit K un n-simplexe. Pour tout $m \geq 0$, si $v \in H^m(K)$, alors*

$$\widehat{v} := v \circ F_K \in H^m(\widehat{K})$$

et on a les estimations suivantes

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^m |\det(B_K)|^{-1/2} |v|_{m,K} \quad \forall v \in H^m(K), \tag{2.3}$$

$$|v|_{m,K} \leq C_2 \|B_K^{-1}\|^m |det(B_K)|^{1/2} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \quad \forall \widehat{v} \in H^m(\widehat{K}), \tag{2.4}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes positives ne dépendant que de m et n.

On s'intéresse maintenant aux résultats d'approximation par la méthode des éléments finis. On commence par ce résultat général [8] :

Lemme 2.2. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et k, m deux entiers tels que $0 \leq m \leq k+1$. Soit $\widehat{\pi} \in \mathscr{L}(H^{k+1}(\widehat{K}), H^m(\widehat{K}))$ un opérateur préservant l'espace P_k des polynômes de degré inférieur ou égal à k :*

$$\widehat{\pi} p = p \quad \forall p \in P_k.$$

Si $\pi \in \mathscr{L}(H^{k+1}(K), H^m(K))$ est un autre opérateur défini par

$$\widehat{\pi v} = \widehat{\pi} \widehat{v} \quad \forall v \in H^{k+1}(K),$$

alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|v - \pi v|_{m,K} \leq Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,K} \quad \forall v \in H^{k+1}(K). \tag{2.5}$$

Définition/Proposition 2.3. ***(Treillis principal)***
Soit K un n-simplexe et a_i, $1 \leq i \leq n+1$, ses sommets. Tout polynôme de l'espace $P_k, k \geq 1$, est déterminé de manière unique en précisant ses valeurs sur l'ensemble

$$T_k(K) = \{x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \alpha_i \in \{0, 1/k, ..., (k-1)/k, 1\}\}$$

appelé treillis principal d'ordre k pour le n-simplexe K.

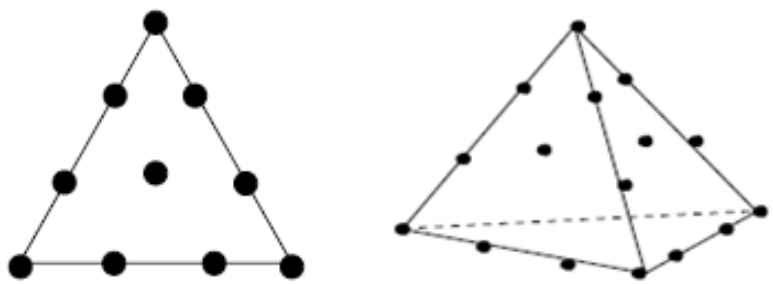


FIGURE 2.1 – Treillis principaux d'ordre 3 : les • représentent les points de $T_3(K)$.

Considérons les espaces des éléments finis standards

$$X_h^k = \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v_{h|K} \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 1, \tag{2.6}$$

$$\mathring{X}_h^k := X_h^k \cap H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

L'opérateur d'interpolation standard $I_h \in \mathscr{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \mathring{X}_h^k)$ est défini par :

$$(I_h v)_{|K} \in P_k, \quad I_h v(a) = v(a) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall a \in T_k(K).$$

Lemme 2.4. *[8] Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et $k \geq 1$. On a l'estimation suivante :*

$$|v - I_h v|_{1,\Omega} \leq Ch^k |v|_{k+1} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

où $C \geq 0$ est une constante indépendante de h.

On définit l'espace des éléments finis discontinu M_h^k comme suit :

$$M_h^k := \{q_h \in L^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{2.8}$$

Lemme 2.5. *[8] Pour tout $k \geq 0$, l'opérateur de projection-L^2 orthogonale $\rho_h : L^2(\Omega) \longrightarrow M_h^k$ satisfait l'estimation suivante :*

$$\|v - \rho_h v\|_{0,\Omega} \leq Ch^k |v|_{k,\Omega} \quad \forall q \in H^k(\Omega),$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h.

2.1.2 Eléments finis quadrangulaires

On ne traite ici que le cas bidimensionnel. Le cas tridimensionnel est une simple généralisation. La plupart des notions relatives aux éléments finis triangulaires restent sans grande modification. On se concentre donc sur ce qui est spécifique au cas quadrangulaire.

On considère maintenant une "triangulation" $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ par des éléments quadrangulaires **convexes**. Soit K un élément de $\mathcal{T}_h$ dont les sommets sont $a_i, 1 \leq i \leq 4$. De manière analogue au cas triangulaire, on pose

$$h_K = \text{ diamètre de } K \quad , \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

et

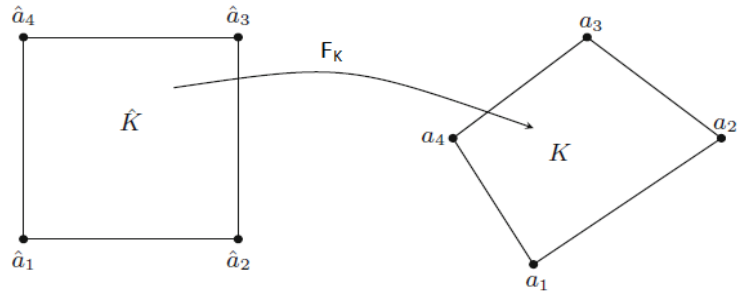
$$\rho_K = 2 \min_{1 \leq i \leq 4} \{\text{diamètre du plus grand cercle inscrit dans } S_i\},$$

où S_i est le triangle de sommets a_{i-1}, a_i, a_{i+1} (avec $a_0 = a_4$). On dit que la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière si $h \longrightarrow 0$ et si

$$\exists \sigma > 0, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h.$$

L'élément de référence est cette fois-ci le carré unité $\widehat{K}$ =[0,1] ×[0,1].
Pour tout $k \geq 0$, on note $\mathcal{Q}_k$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable. Il existe une application inversible $F_K \in \mathcal{Q}_1(\widehat{K})$ telle que

$$F_K(\widehat{K}) = K \text{ et } F_K(\hat{a}_i) = a_i \quad , 1 \leq i \leq 4,$$



où les $\hat{a}_i, a_i, i \leq i \leq 4$, sont les sommets de $\widehat{K}$ et K respectivement.

De manière analogue au cas triangulaire, on définit les espaces d'approximation

$$X_h^{[k]} := \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v_{h|K} \in \mathcal{Q}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathring{X}_h^{[k]} := X_h^{[k]} \cap H_0^1(\Omega),$$

où $\mathcal{Q}_k(K) = \{q = \hat{q} o F_K^{-1} : \hat{q} \in \mathcal{Q}_k(\widehat{K}\}$.
On définit l'opérateur d'interpolation standard $I_h \in \mathscr{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \mathring{X}_h^{[k]})$, $k \geq 1$, comme suit

$$I_h v = \widehat{I}\widehat{v} \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

où

$$\widehat{I} : H^2(\widehat{K}) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{Q}_k(\widehat{K}),$$
$$\widehat{I}\widehat{v}(\hat{a}) = \widehat{v}(\hat{a}) \quad \forall \hat{a} \in T_k(\widehat{K}).$$

Lemme 2.6. *[8] Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et $k \geq 1$. On a l'erreur d'interpolation suivante :*

$$|v - I_h v|_{1,\Omega} \leq C h^k |v|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h.

On s'intéresse maintenant à l'opérateur ρ_h de projection-L^2 orthogonale sur l'espace discret suivant où les fonctions sont P_k par morceaux (et non $\mathcal{Q}_k$ par morceaux) :

$$M_h^k := \{q_h \in L^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Lemme 2.7. *[14] Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et $k \geq 1$. L'opérateur ρ_h de la projection-L^2 orthogonal sur M_h^k satisfait*

$$\|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq Ch^k |q|_{k,\Omega} \quad \forall q \in H^k(\Omega).$$

2.1.3 L'opérateur de Clément

Nous allons maintenant définir un opérateur d'interpolation r_h ayant les mêmes propriétés d'approximation que l'opérateur I_h, mais qui peut travailler sur des fonctions beaucoup moins régulières.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\bar{\Omega}$ par des n-simplexes. On pose $N_h =$ le nombre de nœuds a_i dans $\mathcal{T}_h$ et on note $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$ l'ensemble de fonctions de base de X_h^k associées à $\{a_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$, i.e. $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le delta de Kronecker.

Définition 2.8. ***(Macroélément)***
Pour tout $1 \leq i \leq N_h$, le macroélément Δ_i est l'ensemble de tous les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ contenant a_i, i.e.

$$\Delta_i = \{K \in \mathcal{T}_h : a_i \in K\}.$$

Il y a un nombre fini de configurations possibles pour les Δ_i. De plus, le nombre d'éléments K contenus dans chaque Δ_i est borné par un nombre M indépendant de h (voir [2]).

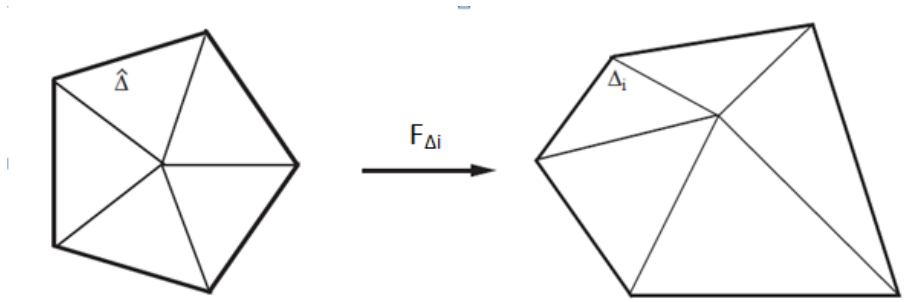


FIGURE 2.2 – (à droite) un macroélément, (à gauche) le macroélément de référence correspondant.

Définition/Proposition 2.9. ***(Macroélément de référence)***
A chaque Δ_i correspond un $\widehat{\Delta}_i$ de référence tel que $\widehat{\Delta}_i \subset B(0,1)$ et $\widehat{\Delta}_i = \bigcup_{j=1}^{M} \widehat{K}_j$, où $\widehat{K}_j$ sont des n-simplexes. De plus, il existe une application continue inversible $F_{\Delta_i} : \widehat{\Delta}_i \longrightarrow \Delta_i$ t.q.

$$F_{\Delta_i|\widehat{K}_j} : \widehat{K}_j \longrightarrow K_j \text{ est affine pour tout } 1 \leq j \leq M.$$

On définit maintenant notre opérateur $r_h \in \mathscr{L}(L^2(\Omega), X_h^k)$ par une projection-L^2 locale. Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour tout $1 \leq i \leq N_h$, on note $\hat{\rho}_i$ la projection de $\hat{v}$ sur l'espace $P_k(\widehat{\Delta}_i)$, i.e.

$$\hat{\rho}_i \in P_k(\widehat{\Delta}_i) \text{ et } \int_{\hat{\Delta}} (\hat{v} - \hat{\rho}_i)\hat{p}\, dx = 0 \quad \forall \hat{p} \in P_k(\widehat{\Delta}_i).$$

L'opérateur r_h est défini par

$$r_h v = \sum_{i=1}^{N_h} \hat{\rho}_i(\hat{a}_i)\varphi_i.$$

On donne enfin l'erreur d'approximation pour l'opérateur de Clément [2] :

Lemme 2.10. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ et m, l deux entiers tels que $0 \leq m \leq l \leq k+1$. Alors,*

$$\|v - r_h v\|_{m,\Omega} \leq C h^{l-m} \|v\|_{l,\Omega} \quad \forall v \in H^l(\Omega),$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h.

2.2 Conditions suffisantes de convergence

Rappelons l'approximation de Galerkin pour le problème de Stokes :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ t.q.} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ et les formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ sont définies comme dans la section 1.4. On va utiliser le Théorème 1.6 pour montrer le résultat de convergence suivant :

Proposition 2.11. *Supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites :*
1. la condition inf-sup discrète est uniformément satisfaite, i.e. β_h est indépendant de h,
2. il existe deux sous espaces denses $\mathscr{V} \subset H_0^1(\Omega)^n$ et $\mathscr{Q} \subset L_0^2(\Omega)$ pour lesquels il existe deux applications $S_h : \mathscr{V} \longrightarrow V_h$ et $R_h : \mathscr{Q} \longrightarrow Q_h$ telles que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |S_h v - v|_{1,\Omega} = 0 \quad \forall v \in \mathscr{V},$$
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|R_h q - q\|_{0,\Omega} = 0 \quad \forall q \in \mathscr{Q}.$$

Alors,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |u - u_h|_{1,\Omega} = \lim_{h \longrightarrow 0} \|p - p_h\|_{0,\Omega} = 0,$$

où $(\mathbf{u}, p)$ est la solution du problème de Stokes continu.

Preuve. D'une part, puisque $\mathscr{V}$ et $\mathscr{Q}$ sont denses dans V et Q respectivement, on peut trouver deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\mathbf{u}$ et p respectivement :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |u - v_n|_{1,\Omega} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|p - q_n\|_{0,\Omega} = 0. \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega} \leq |u - S_h v_n|_{1,\Omega} \leq |u - v_n|_{1,\Omega} + |S_h v_n - v_n|_{1,\Omega}, \tag{2.11}$$

$$\inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \leq \|p - R_h q_n\|_{0,\Omega} \leq \|p - q_n\|_{0,\Omega} + \|R_h q_n - q_n\|_{0,\Omega}. \tag{2.12}$$

Le résultat découle du Théorème 1.6, de (2.10)- (2.12) et des propriétés d'approximation de S_h et R_h. □

Soit $M_h \subset L^2(\Omega)$ un sous-espace de dimension finie tel que $Q_h = M_h \cap L_0^2(\Omega)$. Considérons maintenant les hypothèses suivantes :

Hypothèse H1. Il existe un opérateur $S_h \in \mathscr{L}((H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n, V_h)$ et un entier l tels que

$$|\mathbf{v} - S_h \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C_1 h^m |\mathbf{v}|_{m+1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in (H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n \quad , 1 \leq m \leq l,$$

Hypothèse H2. Il existe un opérateur $R_h \in \mathscr{L}(L^2(\Omega), M_h)$ tel que

$$\|q - R_h q\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^m |q|_{m,\Omega} \quad \forall q \in H^m(\Omega) \quad , 0 \leq m \leq l,$$

Hypothèse H3. L'hypothèse 3 est la condition inf-sup discrète uniforme.

Théorème 2.12. *Sous les hypothèses* ***H1,H2,H3****, le problème discret* (2.9) *admet une solution unique* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *convergeant vers* $(\mathbf{u}, p)$*, i.e.*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \left(|u - u_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \right) = 0. \tag{2.13}$$

De plus, si $(\mathbf{u}, p) \in H^{m+1}(\Omega)^n \times H^m(\Omega)$*,* $1 \leq m \leq l$*, alors*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C h^m \left(|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega} \right), \tag{2.14}$$

où $C = \max\{C_1, C_2\}$*.*

Preuve. Comme la condition inf-sup discrète est satisfaite et que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)^n$, on sait que le problème de Stokes discret admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$. De plus le Théorème 1.6 assure que

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right). \tag{2.15}$$

Remarquons maintenant que si l'opérateur R_h n'injecte pas $L_0^2(\Omega)$ dans Q_h, il suffit de le remplacer par l'opérateur $\overline{R}_h$ défini par

$$\overline{R}_h q = R_h q - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega R_h q \, dx \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Dans ce cas, $\overline{R}_h \in \mathscr{L}(L^2(\Omega), Q_h)$ et pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$, on a

$$\|\overline{R}_h q - q\|_{0,\Omega} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|\overline{R}_h q - q + c\|_{0,\Omega} \leq \|R_h q - q\|_{0,\Omega}.$$

Donc, si on suppose que $(\mathbf{u}, p) \in H^{m+1}(\Omega)^n \times H^m(\Omega)$, les hypothèses **H1-H2** impliquent que

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \leq |\mathbf{u} - S_h \mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq C_1 h^m |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega},$$

$$\inf_{q_h \in Q_h} |p - q_h|_{0,\Omega} \leq |p - R_h p|_{0,\Omega} \leq C_2 h^m |p|_{m,\Omega}.$$

L'estimation (2.14) découle de (2.15) et des deux inégalités ci- dessus.
Afin de montrer (2.13), on applique la Proposition 2.11. On sait que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est

dense dans $H_0^1(\Omega)$ et que $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ est dense dans $L_0^2(\Omega)$. De plus, les hypothèses **H1-H2** assurent que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} |S_h v - v|_{1,\Omega} = 0 \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|R_h q - q\|_{0,\Omega} = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

□

Le Théorème 2.12 donne des conditions qui assurent que $|u - u_h|_{1,\Omega} = O(h^m)$ et donc, a fortiori, $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ est au moins du même ordre. Nous allons établir un théorème permettant d'améliorer l'erreur d'approximation dans $L^2(\Omega)^n$. Pour ce but, on va utiliser le fameux argument d'Aubin-Nitsche pour le cas des formulation mixtes [14].

Théorème 2.13. *Supposons que :*
*1. Ω est **convexe**,*
2. les hypothèses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont satisfaites,*
3. la solution $(\mathbf{u}, p)$ du problème de Stokes appartient à $H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega), m \geq 1$.
Alors, on a l'estimation-L^2 améliorée suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega}).$$

Preuve. L'astuce d'Aubin-Nitsche consiste à considérer la solution $(\mathbf{u_g}, p_\mathbf{g})$ du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u_g} + \nabla p_\mathbf{g} = \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u_g} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u_g} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^n$. On peut montrer l'estimation suivante [14] :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C \left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \right) \tag{2.16}$$
$$\times \sup_{\mathbf{g} \in L_0^2(\Omega)^n} \frac{1}{\|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}} \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u_g} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p_\mathbf{g} - q_h\|_{0,\Omega} \right),$$

où $C = \max\{\nu, 1\}$.
Puisque Ω est convexe et $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)^n$, le Théorème 1.11 assure que $(\mathbf{u_g}, p_\mathbf{g}) \in H^2(\Omega)^n \times H^1(\Omega)$.

Ensuite, des hypothèses (**H1**) – (**H2**) on obtient

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u_g} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega} \leq C_1 h |\mathbf{u_g}|_{2,\Omega} \quad , \quad \inf_{q_h \in Q_h} \|p_{\mathbf{g}} - q_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h |p_{\mathbf{g}}|_{1,\Omega}. \tag{2.17}$$

Or, on sait que le Théorème 1.11 assure aussi l'estimation suivante

$$|\mathbf{u_g}|_{2,\Omega} + \|p_{\mathbf{g}}\|_{1,\Omega} \leq C \|\mathbf{g}\|_{0,\Omega}, \tag{2.18}$$

alors, en combinant (2.16), (2.17) et (2.18) on aura

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \right).$$

Le résultat découle de l'estimation (2.14). □

2.3 Techniques de vérification de la condition de compatibilité

Lors de l'analyse des schémas numériques dans la section 2.4, on aura besoin de quelques techniques qui facilitent la vérification de la condition de compatibilité :

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}} \geq \beta \, \|q_h\|_{0,\Omega} \quad \forall q_h \in Q_h. \tag{2.19}$$

Trois techniques sont présentées ici.

2.3.1 L'astuce de Fortin

Il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 2.14. *La condition de compatibilité* (2.19) *est satisfaite* ***si et seulement s****'il existe un opérateur* $\Pi_F \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega)^n, V_h)$ *tel que*
1. Π_F *est B-compatible, i.e.*

$$b(\Pi_F \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h, \, \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \tag{2.20}$$

2. il existe une constante C_F *indépendante de* h *telle que*

$$|\Pi_F \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C_F |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n. \tag{2.21}$$

Preuve. 1. Supposons Π_F existe. De (2.20), on a pour tout $q_h \in Q_h$

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}} \geq \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{b(\Pi_F \mathbf{v}, q_h)}{|\Pi_F \mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{b(\mathbf{v}, q_h)}{|\Pi_F \mathbf{v}|_{1,\Omega}}.$$

Maintenant, tenant compte du fait que $(H_0^1(\Omega)^n, L_0^2(\Omega))$ vérifie la condition inf-sup continue [1]avec une constante notée β^*, l'inégalité (2.21) implique

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{C_F} \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{b(\mathbf{v}, q_h)}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq \frac{\beta^*}{C_F} \|q_h\|_{0,\Omega}.$$

C'est la condition (2.19).

2. Réciproquement, supposons (2.19) vérifiée.
Soit $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$, comme $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L_0^2(\Omega)'$, le Lemme 1.2 assure l'existence d'un élément de V_h (unique dans $(V_h^0)^\perp$) qu'on note $\Pi_F \mathbf{v}$ tel que

$$b(\Pi_F \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h$$

et

$$|\Pi_F \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\beta} |\mathbf{v}|_{1,\Omega},$$

i.e. $\Pi_F \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega)^n, V_h)$ et satisfait (2.21) avec $C_F = 1/\beta$. □

Remarque 2.15. *1. Afin de construire l'opérateur Π_F, il suffit de trouver deux opérateurs $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathscr{L}(H_0^1(\Omega)^n, V_h)$ vérifiant*

$$|\Pi_1 \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \tag{2.22}$$

$$|\Pi_2 (I - \Pi_1) \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C_2 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \tag{2.23}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} (\mathbf{v} - \Pi_2 \mathbf{v})\, q_h = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n, \forall q_h \in Q_h, \tag{2.24}$$

où les constantes C_1, C_2 sont indépendantes de h. Ensuite, l'opérateur Π_F satisfaisant (2.22)- (2.24) *sera défini comme suit*

$$\Pi_F \mathbf{v} = \Pi_1 \mathbf{v} + \Pi_2 (\mathbf{v} - \Pi_1 \mathbf{v}).$$

2. On peut remarquer que dans la partie 1 de la preuve précédente on n'a pas utilisé le fait que V_h est un sous-ensemble de $H_0^1(\Omega)^n$. Dans ce cas, si on remplace dans la Proposition 2.14 la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ par une norme (discrète) définie sur V_h, Cela va permettre

1. voir section 1.4

de vérifier la condition inf-sup pour les méthodes ***non conformes*** *juste en cherchant l'opérateur* Π_F.

2.3.2 Technique des macroéléments : un cas particulier

Cette technique introduite par R.Stenberg [2], consiste à réduire, sous certaines conditions, la vérification de la condition inf-sup en un problème algébrique "local". Elle est basée sur la décomposition de la triangulation $\mathcal{T}_h$ en des macroéléments, où chaque macroélément est la réunion d'élément adjacents.
Pour notre part, on ne s'intéresse qu'au cas particulier où tous les macroéléments sont les éléments de $\mathcal{T}_h$.

Considérons les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned}
&V_{0,K} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(K)^n : \ \mathbf{v} = \mathbf{w}_{|K}, \mathbf{w} \in V_h\},\\
&Q_{0,K} = \{q \in L_0^2(K) : q = p_{|K}, p \in Q_h\},\\
&N_K = \{q \in Q_{0,K} : \int_K q \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = 0, \forall \mathbf{v} \in V_{0,K}\}.
\end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant

Proposition 2.16. *Si le couple* (V_h, M_h) *est compatible, où*

$$M_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{|K} \in P_0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

alors :

$$N_K = \{0\} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \Longrightarrow \text{le couple } (V_h, Q_h) \text{ est compatible.}$$

2.3.3 Technique de décomposition du domaine

L'intérêt de cette technique est de montrer que la validité de la condition inf-sup locale assure la condition globale.

2. voir [5, page 482]

Proposition 2.17. *[3] Supposons que* $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i, N \geq 1$. *Pour tout* $i = \overline{1, N}$, *on pose*

$$V_h(\Omega_i) = \{\mathbf{v}_h \in V_h : \mathbf{v}_h = 0 \text{ dans } \Omega \backslash \Omega_i\}.$$

Supposons de plus que :
1. la condition de compatibilité est satisfaite par les couples $(V_h(\Omega_i), Q_{h|\Omega_i})$ *avec les constantes* β_i,
2. le nombre $m \geq 0$ *des* Ω_i *qui s'intersectent est fini.*
Alors, la condition (2.19) *est vérifiée avec la constante* $\beta = 1/\sqrt{m} \min_{i=\overline{1,N}} (\beta_i)$.
Noter que $q \in Q_{h|\Omega_i}$ *ssi* q *est la restriction d'une fonction de* Q_h.

Maintenant, on est en mesure de présenter quelques éléments finis mixtes stables qui existent dans la littérature.

2.4 Quelques éléments stables

Avant de s'intéresser aux éléments stables, nous allons mettre en évidence le fait que V_h et Q_h ne peuvent être choisis arbitrairement.

La méthode la plus simple qu'on puisse imaginer pour approximer le problème de Stokes est de prendre V_h étant l'espace des fonction continues P_1 par morceaux et Q_h l'espace des fonctions discontinues P_0 par morceaux.
Malheureusement, ce couple est en général instable. En effet, soit Ω un domaine carré et considérons une triangulation uniforme avec un pas égal à $1/N, N \geq 1$ (voir fig. 2.3).
On peut montrer facilement qu'il y a $2(N-1)^2$ degré de liberté pour l'espace V_h (car les $\mathbf{v}_h \in V_h$ s'annulent sur le bord) et $2N^2 - 1$ degrés de liberté pour Q_h (car les $q_h \in Q_h$ sont à moyenne nulle). Ce qui implique que la contrainte

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \tag{2.25}$$

inclut $2N^2 - 1$ équations indépendantes avec $2(N-1)^2$ inconnus. Donc, l'unique $\mathbf{u}_h \in V_h$ vérifiant (2.25) est $\mathbf{u}_h = 0$. C'est ce qu'on appelle un phénomène de verrouillage sur la

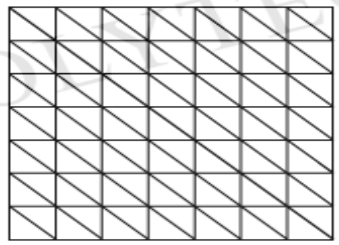


FIGURE 2.3 – Maillage triangulaire uniforme d'un carré.

vitesse.
Il existe d'autres couples (V_h, Q_h) pour lesquels les pressions discrètes sont discontinues. D'une manière générale, les couples définis par des espaces polynomiaux identiques (P_1/P_1, P_2/P_2, Q_1/Q_1... etc) sont instables.

En jetant un coup d'œil sur la condition de compatibilité (2.19), on voit que plus l'espace V_h est "riche" et plus la probabilité que (2.19) soit satisfaite est grande. Mais il est déconseillé que V_h soit trop riche par rapport à Q_h car ceci peut donner des propriétés d'approximation non équilibrées. C'est le cas pour l'élément stable $P_2 - P_0$ pour lequel la vitesse $\mathbf{u}_h$ est convergente d'ordre 2 pour la norme $H^1(\Omega)$ ($|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} = O(h^2)$), alors que q_h est convergente d'ordre 1 dans $L^2(\Omega)$ ($\|p - p_h\|_{0,\Omega} = O(h)$).

Par la suite, le domaine Ω sera un polygone.

2.4.1 Elément de Crouzeix-Raviart :$\mathcal{P}_2^{bulle}/P_1$

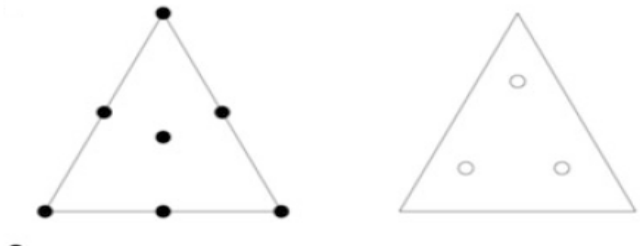


FIGURE 2.4 – L'élément de Crouzeix-Raviart : les • dénotent les degrés de libertés de la vitesse discrète et les ∘ dénotent celles de la pression discrète.

Cet élément, introduit dans [10], est un enrichissement de l'élément stable P_2/P_0 donnant

des propriétés d'approximation bien équilibrées. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ et $K \in \mathcal{T}_h$. Considérons l'espace polynomial suivant

$$\mathcal{P}_2^{bulle}(K) = [P_2 + \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K P_0]^2.$$

L'élément de Crouzeix-Raviart consiste à approximer la vitesse par des fonctions continues $\mathcal{P}_2^{bulle}$ par morceaux et la pression par des fonctions discontinues P_1 par morceaux, i.e.

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v} \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}_2^{bulle} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ Q_h &= \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Les degrés de libertés relatives à la vitesse sont choisis comme suit

$$\begin{cases} \text{les valeurs de } \mathbf{v} \text{ sur le treillis principal } T_2(K) \\ \text{et l'intégrale } \int_K \mathrm{v}\, dx. \end{cases} \tag{2.26}$$

Lemme 2.18. *[14] Tout polynôme* $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_2^{bulle}(K)$ *est déterminé de manière unique par* (2.26). *De plus, la restriction de* $\mathbf{p}$ *sur un côté quelconque de* K *dépend seulement des degrés de liberté définies sur ce côté.*

On définit l'opérateur d'interpolation local π_K qui à tout $\mathbf{v} \in H^2(K)^2$ lui associe l'unique polynôme de $\mathcal{P}_2^{bulle}$(K) ayant les mêmes degrés de liberté (2.26) que $\mathbf{v}$ sur K. Notre opérateur d'interpolation global est défini par

$$\pi_h \mathbf{v}_{|K} = \pi_K \mathbf{v} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Le Lemme 2.18 et le Théorème d'injection de Sobolev impliquent que

$$\pi_h \in \mathscr{L}([H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2, V_h).$$

De plus, il est facile de voir que π_K est invariant par les transformations affines, i.e.

$$\widehat{\pi_K \mathbf{v}} = \pi_{\widehat{K}} \widehat{\mathbf{v}},$$

et qu'il préserve l'espace P_2

$$\pi_K(p) = p \quad \forall p \in P_2.$$

Donc, le Lemme 2.2 assure l'hypothèse **H1** :

$$|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq Ch^k |\mathbf{v}|_{k+1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2, k = 1, 2.$$

De même le Lemme 2.5 assure la deuxième hypothèse **H2** :

$$\|q - \rho_h q\|_{0,\Omega} \leq Ch^k |q|_{k,\Omega} \quad \forall q \in H^k(\Omega), k = 1, 2.$$

Proposition 2.19. ***(Stabilité)***
Si la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière, alors le couple (V_h, Q_h) est compatible.

Preuve. Afin de vérifier la condition de compatibilité, nous allons construire un opérateur de Fortin comme indiqué dans la Remarque 2.15. A cet effet, on prend Π_1 comme étant l'opérateur de Fortin de l'élément stable $P_2 - P_0$.
La Proposition 2.14 implique que

$$|\Pi_1 \mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C|\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \tag{2.27}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_1 \mathbf{v})\, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2. \tag{2.28}$$

Afin de définir l'opérateur Π_2, on note $b_{3,K} := \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$ et on introduit l'espace

$$B_3 = \{\mathbf{v}_h \in V_h : \mathbf{v}_{h|K} = b_{3,K} P_0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'opérateur $\Pi_2 : H_0^1(\Omega)^2 \longrightarrow B_3$ est défini comme suit :

$$\Pi_2 \mathbf{v}_{|K} = (\alpha_1, \alpha_2)\, b_{3,K} \quad , \alpha_i \in \mathbb{R}, \tag{2.29}$$

$$\int_K \operatorname{div}(\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) q\, dx = 0 \quad \forall q \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{2.30}$$

Le système linéaire (2.30) contient 3 équations avec 2 inconnus ! Mais en tenant compte de la Remarque 2.15 et de l'équation (2.28), on voit qu'il suffit de définir Π_2 sur l'espace

$$V^0 := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2 : \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

et comme $\int_\Omega \operatorname{div} b_{3,K}\, dx = 0$, alors l'équation dans (2.30) où $q = constant$ est trivialement satisfaite. $\Pi_2 \mathbf{v}$ est donc défini de manière unique par (2.30).

Il ne reste qu'à montrer que $|\Pi_2\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C|\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in V^0$.
Grâce à la formule de Green, l'équation (2.30) est équivalente à

$$\int_K \Pi_2\mathbf{v} \cdot \nabla q \, dx = \int_K q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \forall q \in P_1(K)$$

ou bien

$$\int_K \alpha_i \, b_{3,K} \, dx = \int_K x_i \, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx \quad , i = 1, 2. \tag{2.31}$$

En utilisant un changement de variables et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} |\alpha_i| = \frac{|\int_K x_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \, dx|}{\int_K b_{3,K} \, dx} &= \frac{|\int_{\widehat{K}} \widehat{x}_i \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \widehat{x}_i} \, d\hat{x}|}{\int_{\widehat{K}} b_{3,\widehat{K}} \, d\hat{x}} \\ &\leq \widehat{C_1} \|\widehat{x}_i\|_{0,\widehat{K}} \|\frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial \widehat{x}_i}\|_{0,\widehat{K}} \\ &\leq \widehat{C_2} |\widehat{v}_i|_{1,\widehat{K}}, \end{aligned}$$

où $\widehat{C}_2 = \left(\int_{\widehat{K}} b_{3,\widehat{K}}\right)^{-1} \|\widehat{x}_i\|_{0,\widehat{K}}$ est une constante indépendante de K et h.
Maintenant, en appliquant deux fois le Lemme 2.1 et les estimations (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} |\Pi_2\mathbf{v}|_{1,K} &\leq C_1 \rho_K^{-1} |\det(B_K)|^{1/2} |\widehat{\Pi_2\mathbf{v}}|_{1,\widehat{K}} \\ &\leq C_2 \rho_K^{-1} |\det(B_K)|^{1/2} |\widehat{\mathbf{v}}|_{1,\widehat{K}} \\ &\leq C_3 \frac{h_K}{\rho_K} |\det(B_K)|^{1/2} |\det(B_K)|^{-1/2} |\mathbf{v}|_{1,K} \end{aligned}$$

La régularité de $\mathcal{T}_h$ donne le résultat. □

Toutes les hypothèse des Théorèmes 2.12 et 2.13 sont donc vérifiées.

Théorème 2.20. *Supposons que la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière et que la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega)^2 \times H^k(\Omega)$, k=1,2. Alors,*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^k \left(|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}\right).$$

De plus, si Ω est convexe, on aura

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{k+1} \left(|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}\right). \tag{2.32}$$

Les constante C_1, C_2 étant indépendantes de h. Lorsque $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, on a seulement la convergence.

Remarque 2.21. ***(L'élément de Crouzeix-Raviart tridimensionnel)***
Le schéma numérique tridimensionnel n'est pas une simple généralisation du cas bidimensionnel.
Considérons l'espace polynomial suivant :

$$BF_3 := \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, b_{3,F_i} \, \mathbf{n}_i; \; \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

où b_{3,F_i} est la fonction bulle cubique associée à la face F_i de K, i.e. $b_{3,F_i} := \lambda_j \lambda_k \lambda_l, j, k, l \neq i$. $\mathbf{n}_i$ est le vecteur unitaire normal à F_i. Cette fois-ci, l'espace définissant V_h sur chaque élément est

$$\mathcal{P}_2^{bulle}(K) = [P_2 + \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K \lambda_4^K P_0]^3 + BF_3.$$

Les espaces d'approximation correspondant à l'élément de Crouziex-Raviart tridimensionnel sont les suivants

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}_2^{bulle}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ Q_h &= \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

La condition de compatibilité pour le couple (V_h, Q_h) se démontre exactement comme dans le cas bidimensionnel (mais en remplaçant Π_2 par l'opérateur de Fortin de l'élément de Bernardi-Raugel [5, page 493]). L'analogue du Théorème 2.20 en 3D reste valable sauf (2.32).

2.4.2 L'élément quadrangulaire $\mathcal{Q}_2/P_1$

On s'intéresse maintenant à l'un des éléments les plus populaires pour l'approximation du problème de Stokes. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ par des quadrangles convexes et $K \in \mathcal{T}_h$. Les espaces discrets correspondant sont constitués par des fonctions continues $\mathcal{Q}_2$

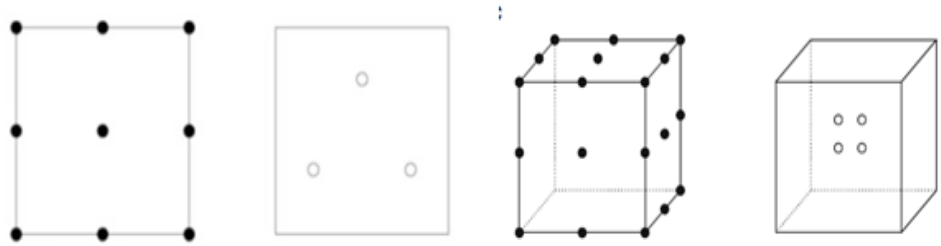


FIGURE 2.5 – (à gauche)l'élément $Q_2 - P_1$ bidimensionnel et (à droite) l'élément tridimensionnel correspondant.

par morceaux pour la vitesse et des fonctions discontinues P_1 par morceaux :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{Q}_2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Les Lemme 2.6 et 2.7 assurent les hypothèses **H1** et **H2** avec $l = 2$. Reste à montrer la condition de compatibilité. On aura besoin du Lemme suivant [5, page 473]

Lemme 2.22. *Lorsque la triangulation $\mathcal{T}_h$ est régulière, l'élément Q_2/P_0 est stable.*

Proposition 2.23. ***(Stabilité)*** *Si $\mathcal{T}_h$ est régulière, alors le couple (V_h, Q_h) est compatible.*

Preuve. On utilise les notations de la sous-section 2.3.2 et on applique la Proposition 2.16. Tenant compte du Lemme 2.22, on sait que pour vérifier la condition de compatibilité, il suffit de vérifier la condition des macroéléments $N_K = \{0\}$.
Soit $K \in \mathcal{T}_h$ et $q_h = a_0 + a_x x + a_y y \in N_K$. On note $b(x, y)$ la fonction bulle bi-quadratique sur K, i.e. $b(x, y) = \widehat{b}\, o F_K^{-1}(\hat{x}, \hat{y})$, où $\widehat{b} = \hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y})$ et F_K est la transformation définie dans la sous-section 2.2.2.
On pose $\mathbf{v}_h = (a_x b(x, y), 0)$ qu'on peut montrer facilement qu'il appartient à $V_{0,K}$. De plus,

$$0 = \int_K q_h \mathrm{div}\, \mathbf{v}_h \, dx\, dy = \int_K \nabla q_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx\, dy = -a_x^2 \int_K b(x, y)\, dx\, dy.$$

Ce qui implique que $a_x = 0$. De la même manière, on trouve $a_y = 0$, et puisque q_h est à moyenne nulle sur K, on aura $q_h = 0$. □

Théorème 2.24. *Supposons que $\mathcal{T}_h$ est régulière et que la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega), k = 1, 2$. Alors,*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^k (|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}).$$

De plus, si Ω est convexe, on aura

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{k+1} \left(|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + \|p\|_{k,\Omega}\right). \tag{2.33}$$

Les constante C_1, C_2 étant indépendantes de h.
Lorsque $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, on a seulement la convergence.

Remarque 2.25. ***(L'élément Q_2/P_1 tridimensionnel)***
En considérant une triangulation par des hexaèdres convexes, on définit les espaces discrets suivants :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{Q}_2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

La démonstration des hypothèses **H1**, **H2** *et* **H3** *est une simple généralisation de la version bidimensionnelle correspondante et on a les mêmes résultats de convergence sauf* (2.33).

2.4.3 L'élément de Taylor-Hood :P_2/P_1

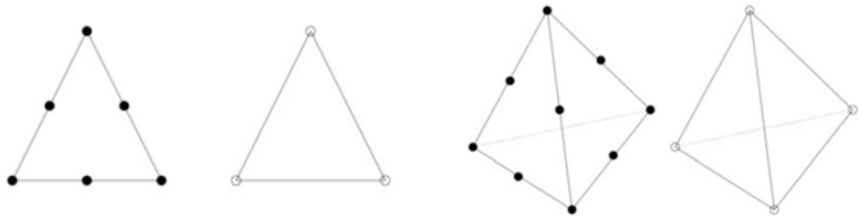


FIGURE 2.6 – (à gauche) l'élément de Taylor-Hood bidimensionnel et (à droite) l'élément correspondant en 3D.

On arrive maintenant au très populaire élément de Taylor-Hood. C'est le premier membre de la grande famille "Taylor-Hood"[5]. Les vitesses discrètes sont continues P_2 par morceaux et contrairement aux cas précédents, les pressions discrètes sont **continues** P_1 par

morceaux. Les espaces discrets sont donc définis par :

$$V_h = \{V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v}_{h|K} \in P_2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Les degrés de liberté de la vitesse sont les valeurs sur le treillis principal $T_2(K), K \in \mathcal{T}_h$. L'opérateur d'interpolation standard I_h du Lemme 2.4 assure l'hypothèse **H1** :

$$I_h \in \mathscr{L}([H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2, V_h),$$
$$|\mathbf{v} - I_h\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq Ch^k|\mathbf{v}|_{k,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2, k = 1, 2.$$

De même, l'opérateur de Clément assure l'hypothèse **H2** :

$$r_h \in \mathscr{L}(L^2(\Omega), Q_h),$$
$$\|q - r_h q\|_{0,\Omega} \leq Ch|q|_{1,\Omega} \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

On s'occupe maintenant de la condition de compatibilité. La démonstration, établie par D.Boffi [3], s'appuie sur la Proposition 2.17 et sur un résultat établi par R.Verfürth [20] affirmant que la condition inf-sup modifiée suivante :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_\Omega q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx}{\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}|q_h|_{1,\Omega}} \geq \beta \tag{2.34}$$

implique la condition inf-sup classique (remarquer que q_h et $\mathbf{v}_h$ échangent de normes). Il faut noter qu'afin de montrer (2.34), il suffit de montrer que $\forall q_h \in Q_h$, il existe $\mathbf{v}_h \in V_h$ tel que

$$-\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h \, dx \geq C_1 \|\nabla q_h\|_{0,\Omega}^2, \tag{2.35}$$

$$\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 \|\nabla q_h\|_{0,\Omega}. \tag{2.36}$$

C_1, C_2 sont deux constantes indépendantes de h.

Proposition 2.26. ***(Stabilité)*** *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ contenant au moins trois triangles. Alors, le couple (V_h, Q_h) est compatible.*

Preuve. Comme déjà indiqué, on utilisera la Proposition 2.17. L'idée consiste à considérer, pour tout h, une décomposition de $\overline{\Omega}$ par des sous-domaines chaqu'un contenant exactement

trois triangles et ensuite vérifier la condition (2.34) sur chaque sous-domaine. Il est facile de voir que le nombre des sous-domaines qui s'intersectent ne peut dépasser deux.
Soit $a^{'} \cup b^{'} \cup c^{'}$ un sous-domaine quelconque et fixons un système de coordonnées cartésiennes tel que $a^{'} \cup b^{'} \cup c^{'}$ soit comme dans la fig. 2.7 gauche. Les coordonnés des sommets du triangle $b^{'}$ sont : $B^{'} = (0,0), D^{'} = (1,0), E^{'} = (\alpha, \gamma)$.

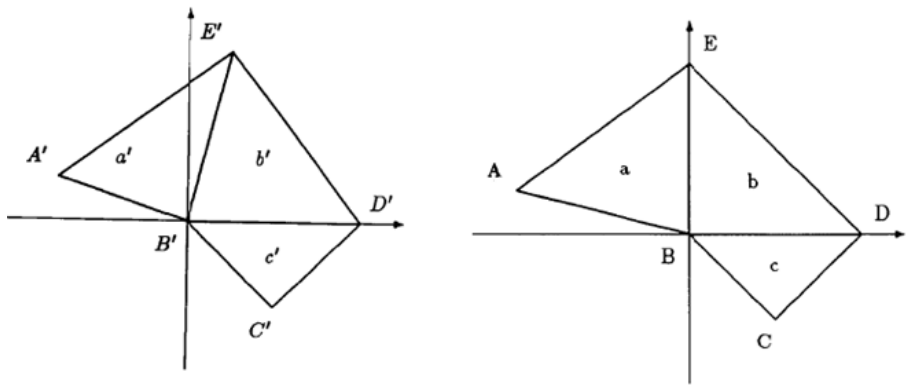


FIGURE 2.7 – Sous domaines composés de trois triangles

On peut se limiter au cas où $b^{'}$ est le triangle unité via la transformation affine :

$$\begin{cases} x^{'} = x + \alpha\, y, \\ y^{'} = \gamma y, \end{cases} \tag{2.37}$$

qui a un jacobien égal à γ (et donc n'influence pas sur la formule (2.34)). On notera λ^a_{AB} la coordonné barycentrique du triangle a qui s'annule sur le coté AB (définitions similaires pour λ^b_{EB} et λ^c_{BD}). Par un abus de notation, on note $\Omega = a^{'} \cup b^{'} \cup c^{'}$ et $Q_{h|\Omega_i}, V_h(\Omega_i)$ par Q_h et V_h respectivement.
Pour $p \in Q_h$ quelconque, on construit $\mathbf{v}_h \in V_h$ sur chaque triangle de Ω comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_h(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y)), \\
&v_1(x,y)_{|a} = -\sigma \lambda^a_{AB} \lambda^a_{AE} \|\nabla p\|_{0,\Omega}, \\
&v_2(x,y)_{|a} = -\lambda^a_{AB} \lambda^a_{AE} \frac{\partial p}{\partial y}, \\
&v_1(x,y)_{|b} = \sigma \lambda^b_{ED} \lambda^b_{BD} \|\nabla p\|_{0,\Omega} - \lambda^b_{ED} \lambda^b_{EB} \frac{\partial p}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_2(x,y)_{|b} &= -\lambda^b_{ED}\lambda^b_{BD}\frac{\partial p}{\partial y} - \tau\lambda^b_{EB}\lambda^b_{ED}\|\nabla p\|_{0,\Omega},\\
v_1(x,y)_{|c} &= -\lambda^c_{BC}\lambda^c_{CD}\frac{\partial p}{\partial x},\\
v_2(x,y)_{|c} &= -\tau\lambda^c_{BC}\lambda^c_{CD}\|\nabla p\|_{0,\Omega},
\end{aligned}
$$

où σ et τ sont choisis égaux à ± 1 afin que les expressions suivantes soient positives :

$$
H = \sigma\|\nabla p\|\left(\int_a \lambda^a_{AB}\lambda^a_{AE}\frac{\partial p}{\partial x} + \int_b \lambda^b_{ED}\lambda^b_{BD}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{2.38}
$$

$$
K = \tau\|\nabla p\|\left(\int_b \lambda^b_{EB}\lambda^b_{ED}\frac{\partial p}{\partial y} + \int_c \lambda^c_{BC}\lambda^c_{CD}\frac{\partial p}{\partial y}\right). \tag{2.39}
$$

D'abord, on observe que $\mathbf{v}_h \in V_h$. En effet, $\mathbf{v}_h$ est un polynôme de degré 2 par morceaux et s'annule sur $\partial\Omega$. De plus, la continuité des dérivées partielles de q_h sur les interfaces EB et ED et les propriétés relatives aux coordonnées barycentriques assurent la continuité de $\mathbf{v}_h$ sur Ω.

L'inégalité (2.36) se démontre facilement. Afin de vérifier (2.35), montrons que

$$
-\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla p\, dx = 0 \Longrightarrow \nabla p = 0.
$$

On a

$$
-\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla p\, dx = \int_a \lambda^a_{AB}\lambda^a_{AE}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + H + \left(\int_b \lambda^b_{ED}\lambda^b_{EB}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \lambda^b_{ED}\lambda^b_{BD}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right) + K + \int_c \lambda^c_{BC}\lambda^c_{CD}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2.
$$

Donc, si on suppose que $-\int_\Omega \mathbf{v}_h \cdot \nabla p = 0$, on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{dans } a,\\
\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{dans } b,\\
\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \quad \text{dans } c,\\
H = K &= 0.
\end{aligned}
$$

Tenant compte de ces équations et du fait que ∇p est constant, il vient que $\nabla p = 0$ dans Ω. $\square$

Remarque 2.27. *Dans [3], il n'est pas démontré que les constantes C_1, C_2 sont indépendantes de h et des géométries de a et c. Pour qu'il en soit le cas, il suffit que les dimensions des triangles a et c soient indépendantes de h. On utilise la propriété suivante :*
Si $\mathcal{T}_h$ est régulière et $K, K^{'}$ sont deux triangles adjacents, alors $h_K \leq \sigma h_{K'}$ (σ est la constante de régularité, voir sous-section 2.2.1).
On note B la transformation (2.37)*. Remarquons que B injecte l'élément de référence b dans $b^{'}$ et donc les estimations* (2.2) *sont valables.*
D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\|AE\| = \|B^{-1}(A^{'}E^{'})\| &\leq \|B^{-1}\|\|A^{'}E^{'}\| \\ &\leq \frac{h_b}{\rho_{b'}} h_{a'} \\ &\leq \sqrt{2}\sigma \frac{h_{b'}}{\rho_{b'}} \leq \sqrt{2}\sigma^2.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|A^{'}E^{'}\| = \|B(AE)\| \leq \|B\|\|AE\|$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \|AE\| \geq \|B\|^{-1}\|A^{'}E^{'}\| &\geq \frac{\rho_b}{h_{b'}} \rho_{a'} \\ &\geq \sigma \frac{h_{a'}}{h_{b'}} \rho_b \\ &\geq \rho_b \geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En effectuant le même raisonnement avec les autres côtés de a et c, on aura montrer que

$$\frac{1}{2} \leq S \leq \sqrt{2}\sigma^2, \tag{2.40}$$

où S est un côté quelconque des triangles a et c, ce qui implique que C_1 est indépendante de h et de a et c.
De même pour la constante C_2 ; des calculs directes montrent que

$$\|v_1\|^2 \leq (3/2 + |a|)\|\nabla p\|^2_{0,\Omega}, \quad \|v_2\|^2 \leq (3/2 + |c|)\|\nabla p\|^2_{0,\Omega}.$$

Or, de (2.40) *on obtient :*

$$|a| \leq \frac{h_a}{2} \leq \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}}.$$

De même pour $|c|$*. On a donc*

$$\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \leq (3 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}})^{1/2} \|\nabla p\|_{0,\Omega}.$$

Remarque 2.28. *Strictement parlant, afin d'avoir un sous-domaine comme dans la figure 2.7 droite, il faut considérer 4 transformations affines : une translation, une rotation, une transformation assurant que* $\|B^{'}E^{'}\|$ *=1 et la dernière c'est* (2.37)*.*

Les Théorèmes 2.14 et 2.13 donnent le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.29. *Supposons que* $\mathcal{T}_h$ *est une triangulation régulière contenant au moins trois triangles et que la solution du problème de Stokes satisfait* $(\mathbf{u}, p) \in H^{m+1}(\Omega)^2 \times H^m(\Omega)$*,* $m = 1, 2$*. Alors, on a*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1 h^m (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega}).$$

Si de plus Ω *est convexe, on aura*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega}). \tag{2.41}$$

Les constantes C_1, C_2 *étant indépendantes de* h*.*
Lorsque $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$*, on a la convergence.*

Remarque 2.30. ***(L'élément de Taylor-Hood tridimensionnel)***
Le cas tridimensionnel est une généralisation directe. Pour une triangulation de $\overline{\Omega}$ par des tétraèdres, les espaces discrets sont donnés par

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v}_{h|K} \in P_2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Contrairement au cas bidimensionnel, la stabilité est assurée sous une restriction sur la triangulation [4] :
Si $\mathcal{T}_h$ est une triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ par des tétraèdres et que tout élément contient au moins un sommet dans Ω, alors le couple (V_h, Q_h) est compatible.
Sous cette restriction supplémentaire sur $\mathcal{T}_h$, le Théorème 2.29 reste valable sauf (2.41).

2.4.4 L'élément de Crouzeix-Raviart non conforme :P_1^{NC}/P_0

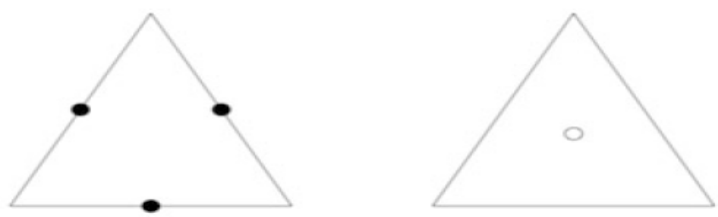


FIGURE 2.8 – L'élément de Crouzeix-Raviart non conforme

Voilà un élément pas comme les autres. Il est dit non conforme car il n'obéit pas à l'inclusion $V_h \subset H_0^1(\Omega)^2$.
Soit une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ par des triangles. Les vitesses discrètes sont linéaires par morceaux et les valeurs aux milieux des côtés des triangles sont choisies comme degrés de liberté (voir fig.2.8) ; ceci va assurer la continuité seulement en ces points. Les pressions discrètes sont constantes par morceaux. Les espaces d'approximation sont donc :

$$V_h = \{\mathbf{v}_h : \mathbf{v}_{h|K} \in P_1^{NC} \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h \text{ s'annulle sur les points milieux appartenant à } \partial\Omega\},$$
$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega) : q_{h|K} \in P_0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

On définit sur l'espace V_h la norme discrète

$$|\mathbf{v}_h|_{1,h} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Puisqu'on s'intéresse à une méthode non conforme, on doit définir le problème perturbé et les formes bilinéaires discrètes associées. Pour ce fait, on pose :

$$\begin{aligned} a_h(\cdot,\cdot) :& V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \longmapsto \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, dx \\ b_h(\cdot,\cdot) :& V_h \times Q_h :\longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\mathbf{v}_h, q_h) \longmapsto - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx. \end{aligned}$$

Dans cette partie, on suppose que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$. Le problème discret a la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases}$$

Proposition 2.31. *Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière. Alors, le couple (V_h, Q_h) vérifie la condition inf-sup discrète uniforme.*

Preuve. Considérons l'opérateur d'interpolation locale suivant :

$$\begin{gathered} \pi_K : H^1(K)^2 \longrightarrow P_1^{NC}(K) \\ \int_{F_i} \pi_K \mathbf{v} \, ds = \int_{F_i} \mathbf{v} \, ds \quad , 1 \leq i \leq 3 \quad . \end{gathered} \tag{2.42}$$

où F_i est le côté du triangle K opposé au sommet a_i, $1 \leq i \leq 3$.
Pour chaque composante d'un polynôme de $P_1^{NC}(K)$, les fonctions de base associées aux points milieux $b_{i,K}$ des côtés F_i sont donnés par :

$$\varphi_i^K = 1 - 2\lambda_i^K \quad , 1 \leq i \leq 3.$$

Puisque

$$\int_{F_i} \varphi_i^K \, ds = \left(\int_{F_i} ds \right) \delta_{ij},$$

l'équation (2.42) détermine $\pi_K \mathbf{v}(b_{i,K})$ par :

$$\pi_K \mathbf{v}(b_{i,K}) = \frac{\int_{F_i} \mathbf{v} \, ds}{\int_{F_i} ds} \quad , 1 \leq i \leq 3.$$

On montre maintenant que l'opérateur π_h défini par

$$\pi_h \mathbf{v}_{|K} = \pi_K \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$$

est un opérateur de Fortin.

L'opérateur π_h est B-compatible. En effet, la formule de Green implique que :

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \pi_K \mathbf{v} \, dx &= \int_{\partial K} \pi_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{F_i} \pi_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \sum_{i=1}^{3} \int_{F_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_K \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2. \end{aligned}$$

De plus, comme $\pi_K p = p \quad \forall p \in P_1$, le Lemme 2.2 implique que

$$|\pi_K \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,K} \leq C |\mathbf{v}|_{1,K} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |\pi_K \mathbf{v}|_{1,K} &\leq |\pi_K \mathbf{v} - \mathbf{v}|_{1,K} + |\mathbf{v}|_{1,K} \\ &\leq C |\mathbf{v}|_{1,K} + |\mathbf{v}|_{1,K} \\ &\leq (1 + C) |\mathbf{v}|_{1,K} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de la norme $|\cdot|_{1,h}$, on obtient

$$|\pi_K \mathbf{v}|_{1,h} \leq C |\mathbf{v}|_{1,h},$$

avec C une constante indépendante de h. □

Puisque la condition inf-sup est vérifiée et que la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ est clairement coercive, on peut montrer que le problème discret admet une unique solution et on a l'estimation

suivante [5, Proposition 5.5.6] :

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,h}+\|p-p_h\|_{0,\Omega}\leq C_1(\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h|_{1,h}+\inf_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\|_{0,\Omega})+E_h(\mathbf{u},p), \tag{2.43}$$

où le terme de consistance

$$\begin{aligned}E_h(\mathbf{u},p)&=\sup_{\mathbf{v}_h\in V_h}|\mathbf{v}_h|_{1,h}^{-1}(\left\{a_h(\mathbf{u},\mathbf{v}_h)+b_h(\mathbf{v}_h,p)-\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}_h\,dx\right\}\\&\leq C_2h(|\mathbf{u}|_{2,\Omega}+\|p\|_{1,\Omega}).\end{aligned}$$

Les constantes C_1, C_2 étant indépendantes de h.

Remarquons maintenant que $\pi_K\in\mathscr{L}(H^2(K),H^1(K))$ et comme π_K préserve l'espace P_1, le Lemme 2.2 assure l'estimation suivante

$$|\mathbf{v}-\pi_K\mathbf{v}|_{1,K}\leq Ch|\mathbf{v}|_{2,K}\quad\forall\mathbf{v}\in H^2(K)^2. \tag{2.44}$$

De plus, le Lemme 2.5 assure que

$$\|q-\rho_hq\|_{0,\Omega}\leq Ch\|q\|_{1,\Omega}\quad\forall q\in H^1(\Omega). \tag{2.45}$$

En tenant compte des estimations (2.43)-(2.45) et en généralisant l'argument d'Aubin-Nitsche au cas des méthodes non conformes (voir [10]) on obtient le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.32. *Supposons que $\mathcal{T}_h$ est une triangulation régulière et que la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u},p)\in H^2(\Omega)^2\times H^1(\Omega)$. Alors, on a*

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,h}+\|p-p_h\|_{0,\Omega}\leq C_1h(|\mathbf{u}|_{2,\Omega}+\|p\|_{1,\Omega}). \tag{2.46}$$

Si de plus Ω est convexe, on aura

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}\leq C_2h^2(|\mathbf{u}|_{2,\Omega}+\|p\|_{1,\Omega}). \tag{2.47}$$

Les constantes C_1, C_2 étant indépendantes de h.
Lorsque $(\mathbf{u}_h,p)\in H_0^1(\Omega)^2\times L_0^2(\Omega)$, on a la convergence.

Remarque 2.33. ***(L'élément tridimensionnel correspondant)***
Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation par des tétraèdres. Les espaces discrets sont définis comme suit

$$V_h=\{\mathbf{v}_h:\mathbf{v}_{h|K}\in P_1^{NC}\ \ \forall K\in\mathcal{T}_h,\mathbf{v}_h\ \textit{s'annulle sur les barycentres des faces appartenant à}\ \partial\Omega\},$$
$$Q_h=\{q_h\in L_0^2(\Omega):q_{h|K}\in P_0\quad\forall K\in\mathcal{T}_h\}.$$

Encore une fois, la condition de compatibilité se démontrent exactement comme dans le cas bidimensionnel et le Théorème 2.32 reste valable sauf (2.47).

2.4.5 Les éléments de Scott-Vogelius :P_k/P_{k-1}

On présente ici une famille d'éléments finis stables pour lesquels les vitesses discrètes sont continues P_k par morceaux, $k \geq 4$, et ayant la propriété d'avoir une *divergence nulle*. Les pressions sont discontinues P_{k-1} par morceaux et avec une contrainte sur les sommets "singuliers".
Afin de définir l'espace approximant la pression, on a besoin de définir la notion de sommet singulier.
Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$. Posons

$$\mathcal{S}_h = \{x : x \text{ est un sommet de } \mathcal{T}_h\},$$

$$\mathcal{T}_h(z) = \{K \in \mathcal{T}_h : z \text{ est un sommet de } K\}.$$

Soit $z \in \mathcal{S}_h$ et supposons que $\mathcal{T}_h(z) = \{K_1, K_2, ..., K_N\}$. Si $z \in \partial\Omega$, on numérote les triangles tels que K_1 et K_N aient un côté sur le bord. Dans le cas où z est un sommet intérieur, les triangles sont numérotés d'une façon que K_i, K_{i+1} partagent un côté pour $i = 1, ..., N-1$ et K_1, K_N soient adjacents. On note θ_i l'angle du triangle K_i au sommet z et on définit

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \max\{|\theta_1 + \theta_2 - \pi|, ...|\theta_{N-1} + \theta_N - \pi|, |\theta_N + \theta_1 - \pi|\} \text{ si } z \in \Omega, \\ \max\{|\theta_1 + \theta_2 - \pi|, ...|\theta_{N-1} + \theta_N - \pi|\} \text{ si } z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 2.34. ***(Sommet singulier)*** *Un sommet $z \in \mathcal{S}_h$ est dit singulier si $\Gamma(z) = 0$. Il est non-singulier si $\Gamma(z) > 0$. L'ensemble des sommets non-singuliers est noté par*

$$\mathcal{S}_h^1 = \{x \in \mathcal{S}_h : x \textit{ est non-singulier}\}$$

et on pose $\mathcal{S}_h^2 = \mathcal{S}_h \backslash \mathcal{S}_h^1$.

On peut voir clairement que l'unique façon pour que z soit singulier est que tous les côtés sortant de z se trouvent sur deux lignes droites (voir Fig.2.9).

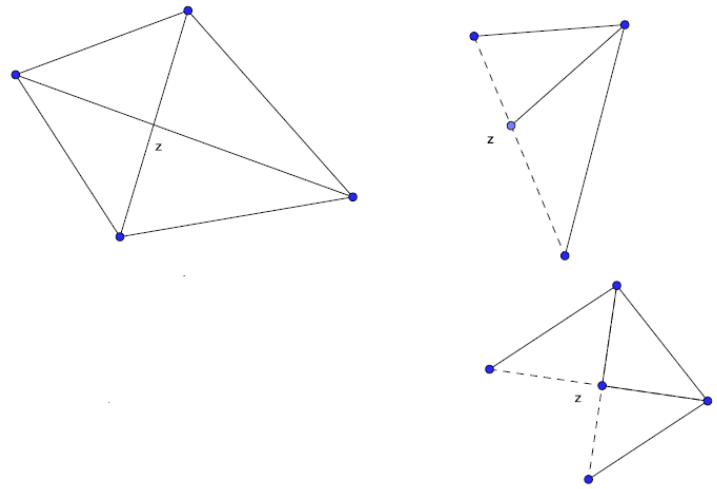


FIGURE 2.9 – Exemple de points singuliers. les côtés en pointillé dénotent les côtés sur le bord.

On peut maintenant définir les espaces discrets de Scott-Vogelius pour $k \geq 4$:

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)^2 : \mathbf{v}_{h|K} \in P_k \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$
$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{|K} \in P_{k-1} \ \forall K \in \mathcal{T}_h, A_h^z(q) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{S}_h^2\},$$

où

$$A_h^z(q) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{N-i} q_{|K_i}(z).$$

En fait, c'est la contrainte $A_h^z(q) = 0 \ \ \forall z \in \mathcal{S}_h^2$ qui va assurer que les vitesses discrètes vérifient la propriété suivante [15] :

Lemme 2.35. *Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$\operatorname{div} V_h \subset Q_h. \tag{2.48}$$

Une conséquence directe du Lemme précédent est que les fonctions de V_h sont exactement à **divergence nulle** dans $L^2(\Omega)$. En effet, la deuxième équation du problème de Stokes s'écrit

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx = 0 \quad \forall q \in Q_h,$$

i.e. $\operatorname{div} V_h$ est orthogonale à Q_h dans $L^2(\Omega)$. Le Lemme 2.35 permet de conclure.

Afin d'énoncer le résultat de stabilité, on a besoin de la définition suivante :

$$\Theta(z) = \begin{cases} \max\{|\sin(\theta_1+\theta_2), ...|\sin(\theta_{N-1}+\theta_N)|, |\sin(\theta_N+\theta_1)|\} \text{ si } z \in \Omega, \\ \max\{|\sin(\theta_1+\theta_2)|, ...|\sin(\theta_{N-1}+\theta_N)|\} \text{ si } z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose

$$\Theta_{min} = \min_{z\in\mathcal{S}_h^1} \Theta(z).$$

Proposition 2.36. *[15]* ***(Stabilité)*** *Supposons que $\mathcal{T}_h$ est régulière. Alors, pour tour $k \geq 4$, le couple (V_h, Q_h) est stable et la constante de la condition inf-sup est donnée par*

$$\beta = 1/\left(C\left(\frac{1}{\Theta_{min}}+1\right)\right), \tag{2.49}$$

où C est une constante qui dépend seulement de la constante de régularité, k et de Ω.

De l'identité (2.49), on voit que la constante de compatibilité dépend de $\min_{z\in\mathcal{S}_h^1} \Theta(z)$. On sait de plus que $\Theta(z)$ s'approche de 0 lorsque z est "presque singulier". Donc, afin d'assurer la stabilité des éléments de Scott-Vogelius, on supposera l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que

$$\Theta_{\min} \geq \delta \quad \text{pour tout } h.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à une propriété importante relative aux éléments de Scott-Vogelius (et qui reste valable pour tout (V_h, Q_h) tel que $\operatorname{div} V_h \subset Q_h$).

Lemme 2.37. *[16] Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière, $(\mathbf{u}_h, p_h)$ la solution du problème de Stokes discret relative au espaces de Scott-Vogelius et $\rho_h p$ la projection-L^2 orthogonale de p sur Q_h. Alors, on a les estimations suivantes :*

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq 2(1+C_F)\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}, \tag{2.50}$$

$$\|p-\rho_h p\|_{0,\Omega} \leq \frac{\nu}{\beta}|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}, \tag{2.51}$$

$$\|p-p_h\|_{0,\Omega} \leq \|p-\rho_h p\|_{0,\Omega} + \frac{\nu}{\beta}|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}. \tag{2.52}$$

La constante C_F est la constante de continuité de l'opérateur de Fortin associé au couple (V_h, Q_h) (voir Proposition 2.14).

Remarque 2.38. *Malgré le fait que les éléments de Scott-Vogelius nécessitent une attention particulière lors de la construction du maillage (pas de point presque singuliers), ils ont l'avantage important de donner une majoration de l'erreur de convergence pour la vitesse discrète qui est* ***indépendante de la pression et de la constante*** β*, ce qui est un grand avantage lorsque le terme* $\inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega}$ *prend largement le dessus sur* $\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega}$ *ou lorsque* β *est trop petit. Noter que cette propriété ne peut être vérifiée pour aucun des éléments stables déjà étudiés. En effet, dans les schémas d'approximation présentés précédemment, l'erreur* $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}$ *dépendait de la pression* p *et de la constante* β*.*

Afin de mieux voir l'influence de la pression continue sur la convergence de la vitesse discrète, on considère l'exemple suivant [16] : considérons le problème de Stokes avec $\nu = 1, \Omega = [0,1]^2$ *et* $\mathbf{f} = (0, Ra\,(1 - y + 3y^2))^T$*, où* $Ra > 0$ *est un paramètre. On peut vérifier que* $\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = Ra(y^3 - y^2/2 + y - 7/12)$ *est la solution du problème. Remarquons que seule la pression dépend du paramètre* Ra*. Malgré cela, appliquant les méthodes des éléments finis mixtes standards, on peut clairement voir l'influence de ce paramètre sur la convergence de la vitesse discrète ! (voit figure 2.10). On voit que la vitesse discrète est loin de s'annuler même lorsque* $Ra = 1$*. Ce phénomène n'apparait pas pour les couples* (V_h, Q_h) *vérifiant* (2.48)*.*

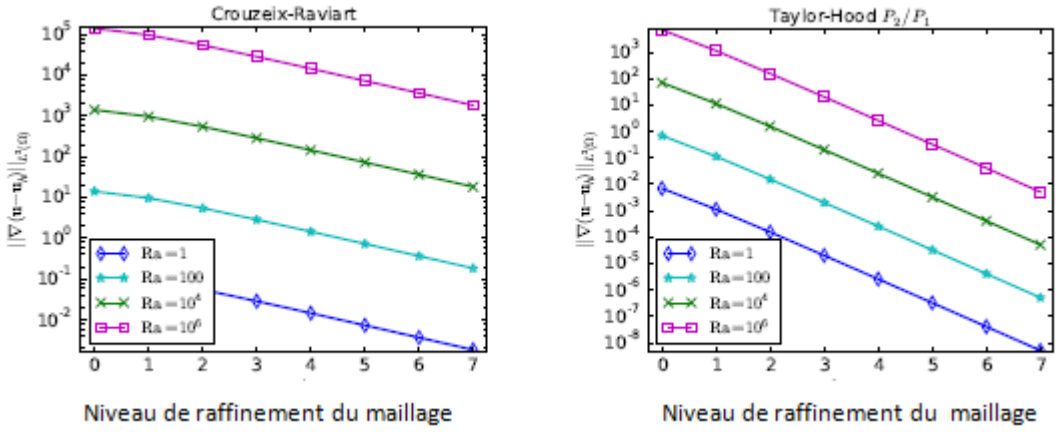


FIGURE 2.10 – Représentation des erreurs d'approximation de la vitesse discrète pour (à droite) l'élément de Crouzeix-Raviart non conforme et (à gauche) l'élément de Taylor-Hood [16].

Maintenant, le théorème de convergence suivant découle du Lemme 2.37, des résultats d'approximation de la sous-section 2.1.1 et de l'argument d'Aubin-Nitsche.

Théorème 2.39. *Supposons que $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et que la solution $(\mathbf{u}, p)$ du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{m+1}(\Omega) \times H^m(\Omega), 1 \leq m \leq k+1$. Alors, pour tout $k \geq 4$, on a :*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C_1 h^m |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega},$$
$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^m (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \|p\|_{m,\Omega}).$$

Si de plus Ω est convexe, alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_3 h^{m+1} |\mathbf{u}|_{m,\Omega}.$$

Les constante C_1, C_2 et C_3 sont indépendante h.
Lorsque $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$, on a la convergence.

Les éléments de Scott-Vogelius ont des analogues tridimensionnels [21], mais ils ne seront pas abordés dans ce mémoire.

2.5 Formulation algébrique du problème discret

Dans cette section, on s'intéresse au système linéaire associé au problème de Stokes discret. Soit $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ et $\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq M}$ les fonctions de base des sous-espaces V_h et Q_h respectivement. Les solutions discrètes se décomposent sous la forme :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad , \quad p_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} p_j \phi_j(\mathbf{x}),$$

où $u_i, p_j \in \mathbb{R}$.
Il est facile de montrer que le problème de Stokes discret équivaut au système linéaire suivant

$$S := \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.53}$$

où $A \in \mathbb{R}^{N\times N}, B \in \mathbb{R}^{M\times N}$ sont les matrices associées respectivement aux formes bilinéaires $a(\cdot,\cdot)$ et $b(\cdot,\cdot)$ et sont définies par :

$$A = [a_{ij}] = [a(\varphi_j, \varphi_i)] \quad , \quad B = [b_{ij}] = [b(\varphi_j, \phi_i)].$$

$\mathbf{U}$ et $\mathbf{P}$ sont les vecteurs inconnus :

$$\mathbf{U} = [u_i]_{1\leq i\leq N} \quad , \quad \mathbf{P} = [p_j]_{1\leq j\leq M}.$$

Le second membre est donné par

$$\mathbf{F} = [\langle \mathbf{f}, \varphi_i\rangle]_{1\leq i\leq N}.$$

Comme la matrice A est symétrique, la matrice S l'est aussi.
On peut aussi montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{la matrice } S \text{ est inversible } &\Longleftrightarrow \text{la condition inf-sup est vérifiée} \\ &\Longleftrightarrow \ker B^T = \{0\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.40. *Pour l'élément de Crouzeix-Raviart non conforme, les matrices A et B sont définies comme suit :*

$$A = [a_{ij}] = [a_h(\varphi_j, \varphi_i)] \quad , \quad B = [b_{ij}] = [b_h(\varphi_j, \phi_i)].$$

Chapitre 3

Schémas numériques relatifs à la stratégie de stabilisation

On présentera dans ce chapitre trois techniques de stabilisation les plus populaires pour le problème de Stokes. Tous les schémas numériques relatifs à ces méthodes sont obtenus en considérant des approximations de Galerkin généralisées, c-à-d que les espaces discrets restent des sous-espaces de dimensions finis, mais les formes bilinéaires et linéaires associées au problème variationnel seront modifiées en y ajoutant des termes dépendant du maillage. L'objectif principal des ces méthodes est d'échapper à la condition inf-sup.

3.1 Préliminaires

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert, $L(\cdot,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $G(\cdot) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Définition 3.1. *On dit que la forme bilinéaire $L(\cdot,\cdot)$ est faiblement coercive s'il existe une constante positive C telle que :*

$$\sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{L(u,v)}{\|v\|_X} \geq C\|u\|_X \quad \forall u \in X \tag{3.1}$$

et

$$\sup_{u \in X, u \neq 0} \frac{L(u,v)}{\|u\|_X} > 0 \quad \forall v \in X.$$

On a l'équivalent du Théorème de Lax-Milgram suivant :

Théorème 3.2. *[1] Supposons que la forme bilinéaire $L(\cdot,\cdot)$ est continue et faiblement coercive et que la forme linéaire $G(\cdot)$ est continue. Alors, le problème variationnel*

$$\textit{Trouver } u \in X \textit{ tel que } L(u,v) = G(v) \quad \forall v \in X, \tag{3.2}$$

admet une unique solution $u \in X$. De plus,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{C}\|G\|,$$

où C est la constante définie dans (3.1).

Soit $X_h \subset X$ un sous-espace de dimension finie et considérons le problème discret associé :

$$\text{Trouver } u_h \in X_h \text{ tel que } L_h(u_h, v_h) = G_h(v_h) \quad \forall v_h \in X_h, \tag{3.3}$$

où L_h et G_h sont des formes bilinéaires et linéaires définies sur $X_h \times X_h$ et X_h. On a alors le théorème :

Théorème 3.3. *Supposons que le problème continu* (3.2) *admet une unique solution et que :*
1. $L_h(\cdot,\cdot) : X_h \times X_h \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et faiblement coercive :

$$\begin{aligned} L_h(u_h, v_h) &\leq C_1^h \|u_h\|_X \|v_h\|_X \quad \forall u_h, v_h \in X_h, \\ \sup_{v_h \in X_h, v_h \neq 0} \frac{L_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_X} &\geq C_2^h \|u_h\|_X \quad \forall u_h \in X_h \end{aligned} \tag{3.4}$$

et

$$\sup_{u_h \in X_h, u_h \neq 0} \frac{L_h(u_h, v_h)}{\|u_h\|_X} > 0 \quad \forall v_h \in X_h.$$

2. $G_h(\cdot) : X_h \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue,
3. le problème variationnel approché (3.3) *est* ***consistant****, i.e. la solution du problème continu* (3.2) *est aussi solution du problème* (3.3).
Alors, le problème (3.3) *admet une unique solution $u_h \in X_h$ et on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{C_1^h}{C_2^h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u_h - v_h\|_X.$$

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3) est une conséquence directe du Théorème 3.2.
Puisque le schéma défini par (3.3) est consistant, alors

$$L_h(u, v_h) = L_h(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in X_h. \tag{3.5}$$

Soit $v_h \in X_h$ pour lequel le supremum dans (3.4) est atteint. On a donc d'une part

$$L_h(u_h - v_h, v_h) \geq C_2^h \|u_h - v_h\|_X \|v_h\|_X.$$

D'autre part, la continuité de $L_h(\cdot, \cdot)$ et (3.5) assurent que

$$L_h(u_h - v_h, v_h) = L_h(u - v_h, v_h) \leq C_1^h \|u - v_h\|_X \|v_h\|_X.$$

En combinant les deux inégalité précédentes, on obtient

$$\|u_h - v_h\|_X \leq \frac{C_1^h}{C_2^h} \|u - v_h\|_X \quad \forall v_h \in X_h.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité triangulaire pour avoir

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X &\leq \|u - v_h\|_X + \|u_h - v_h\|_X \\ &\leq \left(1 + \frac{C_1^h}{C_2^h}\right) \|u - v_h\|_X \quad \forall v_h \in X_h. \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant aborder la technique de stabilisation pour le problème de Stokes.

3.2 Méthodes de stabilisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$ par des n-simplexes, des quadrangles ou par des hexaèdres. Dans toute la suite on supposera $\nu = 1$ et $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n$.

On définit l'espace polynomial

$$R_k(K) = \begin{cases} P_k(K) \text{ si } K \text{ est un n-simplexe,} \\ Q_k(K) \text{ si } K \text{ est un quadrangle ou un hexaèdre.} \end{cases}$$

Considérons aussi les espaces d'éléments finis suivants

$$V_h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \mathbf{v}_{|K} \in R_k(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad , k \geq 1,$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{|K} \in R_l(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad , l \geq 0,$$

ou

$$Q_h = \{q \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : q_{|K} \in R_l(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad , l \geq 1.$$

On aura besoin par la suite de la norme discrète suivante :

$$\|q\|_h := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Lemme 3.4. ***(Deux inégalités inverses)***
Supposons que $\mathcal{T}_h$ est régulière. On a les inégalités suivantes :

$$\|q\|_h \leq C\|q\|_{0,\Omega} \quad \forall q \in Q_h, \tag{3.6}$$

$$C_I \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \leq |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \tag{3.7}$$

où $C, C_I > 0$ sont deux constantes indépendantes de h.

Il est facile de voir que le problème de Stokes discret peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ &a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h. \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'idée est maintenant de modifier (3.8) afin d'avoir une discrétisation de Galerkin généralisée vérifiant les hypothèses du Théorème 3.2. Clairement, si on réussit à le faire, la condition inf-sup pour le couple (V_h, Q_h) ne sera pas nécessaire : on aura donc stabilisé le problème.

Considérons les formes bilinéaires discrètes modifiées :

$$L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\alpha \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K}$$

et les formes linéaires associées

$$G_h(\mathbf{v}_h, q_h) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, -\alpha \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K},$$

où $(\cdot,\cdot)_{0,K}$ dénote le produit scalaire de $L^2(K)$, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ et $\delta > 0$ est le paramètre de stabilisation. Les problèmes stabilisés considérés dans ce chapitre ont la forme

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ &L_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Remarque 3.5. *En écrivant* (3.9) *sous la forme*[1]

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}, -\alpha \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h),$$

on peut identifier le terme ajouté afin de stabiliser le problème. De plus, lorsque la solution $(\mathbf{u}, p)$ *du problème de Stokes continu est suffisamment régulière, on sait que le terme* $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}$ *s'annule presque partout dans* Ω*, ceci assure que les schémas numériques définis par* (3.9) *sont tous* ***consistants****.*

Ci-après, on va présenter trois variantes de la technique de stabilisation qui découlent toutes de (3.9).

3.2.1 La méthode GLS

Cette méthode (Galerkin Least-squares method), qui est peut être la plus populaire, consiste à prendre $\alpha = 1$ dans (3.9), i.e. le problème discret est le suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h^{gls}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h^{gls}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$L_h^{gls}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, -\Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K}$$

1. $(\cdot,\cdot)$ dénote le produit scalaire de $L^2(\Omega)^n$

et

$$G_h^{gls}(\mathbf{v}_h, q_h) =: (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, -\Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K}.$$

Considérons l'espace polynomial

$$S(K) = \begin{cases} P_n(K) \text{ si } K \text{ est un n-simplexe (rappelons que } n \text{ est la dimension de } \Omega), \\ Q_2(K) \text{ si } K \text{ est un quadrangle} \end{cases}$$

On définit l'espace des éléments finis

$$S_h := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \mathbf{v}_{|K} \in S(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Considérons maintenant les deux hypothèses suivantes
(i) $S_h \subset V_h$,
(ii) $Q_h \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (et donc $l \geq 1$).
Nous allons à présent vérifier les conditions d'application du Théorème 3.3.

Lemme 3.6. ***(Continuité)*** *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) \leq C \left(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2} \left(|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2} \quad \forall (\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h.$$

Afin montrer la coercivité faible, on a besoin du résultat intermédiaire suivant [12] :

Lemme 3.7. *Supposons que l'une des deux hypothèses (i),(ii) est satisfaite. Alors, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de h telles que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, p)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega}} \geq C_1 \|p\|_{0,\Omega} - C_2 \|p\|_h \quad \forall p \in Q_h. \tag{3.11}$$

Lemme 3.8. ***(Coercivité faible)*** *Supposons que l'une des hypothèses (i),(ii) est satisfaite et que $0 < \delta < C_I$. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $(\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h$ on a*

$$\sup_{(\mathbf{v},q) \in V_h \times Q_h} \frac{L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q)}{(|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}} \geq C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}. \tag{3.12}$$

Preuve. Noter qu'afin de montrer la coercivité faible [2], il suffit de trouver deux constantes

2. Noter que la forme bilinéaire $L_h^{gls}(\cdot;\cdot)$ est symétrique et donc il suffit de montrer (3.12).

$C^{'}, C^{''} > 0$ pour lesquelles : $\forall(\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h, \exists(\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h$ tel que

$$L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) \geq C^{'}(|\mathbf{u}_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2), \tag{3.13}$$

$$|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 \leq C^{''}(|\mathbf{u}_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2). \tag{3.14}$$

Soit $(\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h$. L'inégalité (3.7) implique que

$$\begin{aligned} L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{u}\|_{0,K}^2 + \delta \|p\|_h^2 \\ &\geq (1 - \delta C_I^{-1})|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta \|p\|_h^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Soit $\mathbf{w}_h \in V_h$ pour lequel le supremum (3.11) est atteint et tel que $|\mathbf{w}|_{1,\Omega} = \|p\|_{0,\Omega}$. Tenant compte de la bilinéarité de $L_h^{gls}(\cdot;\cdot)$, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du Lemme 3.7, il vient que

$$\begin{aligned} L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \text{-}\mathbf{w}, 0) &= L_h^{gls}(\mathbf{u}, 0; -\mathbf{w}, 0) + L_h^{gls}(0, p; -\mathbf{w}, 0) \\ &\geq -|\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} + (\operatorname{div} \mathbf{w}, p) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla p, \Delta \mathbf{w})_{0,K} \\ &\geq -|\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} + (\operatorname{div} \mathbf{w}, p) - \delta \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{w})\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\geq -|\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} + C_1 \|p\|_{0,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} - C_2 \|p\|_h |\mathbf{w}|_{1,\Omega} - C_3 \|p\|_h |\mathbf{w}|_{1,\Omega} \\ &= -|\mathbf{u}|_{1,\Omega}\|p\|_{0,\Omega} + C_1 \|p\|_{0,\Omega}^2 - (C_2 + C_3)\|p\|_h \|p\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

où on a appliqué l'inégalité (3.7) dans l'avant dernière ligne.
Maintenant, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, l'inégalité de la moyenne géométrique-arithmétique :

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{\gamma} + \gamma\, b^2\right) \quad \forall a, b, \gamma > 0$$

implique que

$$\begin{aligned} L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \text{-}\mathbf{w}, 0) &\geq \frac{-1}{2\gamma_1}|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \left(C_1 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2 C_3}{2}\right)\|p\|_{0,\Omega}^2 - \frac{C_3}{2\gamma_2}\|p\|_h^2 \\ &:= -C_4|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + C_5\|p\|_{0,\Omega}^2 - C_6\|p\|_h^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Il suffit de prendre γ_1, γ_2 suffisamment petits pour que $C_5 := C_1 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2 C_3}{2} > 0$.

On pose ensuite $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u} - \epsilon\mathbf{w}, -p)$, avec $\epsilon > 0$. On a

$$L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{u} - \epsilon\mathbf{w}, -p) = L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) + \epsilon L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; -\mathbf{w}, 0).$$

Pour conclure, les inégalités (3.15) et (3.16) assurent que

$$\begin{aligned} L_h^{gls}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &\geq (1 - \delta C_I^{-1} - \epsilon C_4)|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + C_5\|p\|_{0,\Omega}^2 + (\delta - \epsilon C_6)\|p\|_h^2 \\ &\geq C_7(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2), \end{aligned}$$

où on a pris $0 < \epsilon < \min\{\delta C_6^{-1}, (1 - \delta C_I^{-1} C_4^{-1})\}$.
Il ne reste donc qu'à montrer l'inégalité (3.14). Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 &\leq |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \epsilon^2|\mathbf{w}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2 \\ &= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + (1 + \epsilon^2)\|p\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq (1 + \epsilon^2)(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2) \end{aligned}$$

□

On donne maintenant le résultat de convergence pour la méthode GLS.

Théorème 3.9. ***(Convergence)*** *Supposons que :*
1. $\mathcal{T}_h$ *est régulière,*
2. la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$*,*
3. $0 < \delta < C_I$ *,*
4. l'une des deux hypothèses (i) ou (ii) est vérifiée.
Alors, le problème discret (3.10) *admet une unique solution* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ *et on a l'erreur de convergence suivante :*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1(h^k|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^l\|p\|_{l,\Omega}) \quad , l \leq k. \tag{3.17}$$

Dans le cas bidimensionnel, si de plus Ω *est convexe, alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2(h^{k+1}|\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^{l+1}\|p\|_{l,\Omega}). \tag{3.18}$$

Les constantes C_1, C_2 *sont indépendante de* h*.*

Preuve. Comme toutes les hypothèses du Théorème 3.3 sont vérifiées, le problème discret associé à la méthode GLS admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ satisfaisant l'estimation suivante :

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,\Omega} + \inf_{\mathbf{q}_h \in Q_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega}).$$

L'estimation d'erreur (3.17) découle des résultats d'approximation de la section 2.1. Afin de montrer (3.18) on utilise l'argument d'Aubin-Nitsche (voir [12]). □

Remarque 3.10. *Tenant compte du théorème ci dessus, on voit qu'**il est favorable de prendre** $k = l$ pour que l'ordre de convergence soit équilibré (égal à k). En d'autres termes, les méthodes avec un ordre d'interpolation identique pour la vitesse et la pression fournissent des solutions discrètes convergentes contrairement aux chapitre 2, où ces éléments ont été complètement interdits.*
On peut par exemple choisir l'élément P_1/P_1, P_2/P_2, Q_1/Q_1, $Q_2 - Q_2$... Noter que cette propriété reste valable aussi pour les deux autres méthodes de stabilisation SUPG et DWG que nous considèreront par la suite.

Intéressons-nous maintenant à la formulation algébrique du problème (3.10). Soit $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ et $\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq M}$ les fonctions de base des espaces V_h et Q_h respectivement. On peut facilement montrer que le problème (3.10) équivaut au système linéaire suivant

$$S_{GLS} := \begin{bmatrix} A - D & (B + C)^T \\ (B + C) & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

où A et B sont définies comme dans la section 2.5. et les matrices $D \in \mathbb{R}^{N \times N}, C \in \mathbb{R}^{N \times M}$et $E \in \mathbb{R}^{M \times M}$ sont données par

$$C = [c_{ij}] = \left[\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla \phi_i, \Delta \varphi_j)_{0,K} \right] \quad , \quad D = [d_{ij}] = \left[\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \varphi_i, -\Delta \varphi_j)_{0,K} \right]$$

et

$$E = [e_{ij}] = \left[\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j)_{0,K} \right].$$

Les vecteurs $\mathbf{U} = [u_i]_{1\leq i\leq N}, \mathbf{P} = [p_j]_{1\leq j\leq M}$ sont les inconnus à chercher. La composante $\mathbf{F}$ du second membre reste la même que dans le chapitre précédent et

$$\mathbf{F}_1 = [f_j^1]_{1\leq j\leq M} = \left[\delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f}, -\Delta\varphi_i)_{0,K}\right]$$
$$\mathbf{F}_2 = [f_j^2]_{1\leq j\leq M} = \left[-\delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f}, \nabla\phi_j)_{0,K}\right].$$

Remarque 3.11. *En comparant le système* (3.19) *avec celui du chapitre 2,on voit que la matrice associée est bien "remplie" . De même pour le second membre qui a des composantes supplémentaires. On peut vérifier que la matrice S_{GLS} est symétrique définie positive.*

3.2.2 La méthode SUPG

Pour la méthode SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Glerkin method) on prend $\alpha = 0$. Le problème discret (3.9) s'écrira :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h^{supg}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h^{supg}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h, \end{cases}$$

où

$$L_h^{supg}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(-\Delta\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nabla q_h)_{0,K}$$

et

$$G_h^{supg}(\mathbf{v}_h, q_h) =: (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2(\mathbf{f}, \nabla q_h)_{0,K}.$$

Le Lemme 3.8 pour la méthode SUPG se démontre en suivant point par point la démonstration du cas GLS. Montrons maintenant l'inégalité suivante

$$\sup_{(\mathbf{u},p)\in V_h\times Q_h} \frac{L_h^{supg}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q)}{(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}} > 0 \quad \forall(\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h.$$

Soit $(\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h$, avec $(\mathbf{v}, q) \neq (0, 0)$. Remarquons que pour tout $q \in Q_h$, il existe

$p \in Q_h$ tel que $q = -p$ et que

$$L_h^{supg}(\mathbf{v}, -q; \mathbf{v}, q) = L_h^{supg}(\mathbf{v}, p; \mathbf{v}, -p) = |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \delta \|p\|_h^2 - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\Delta \mathbf{v}, \nabla q)_{0,K}$$
$$\geq \left(1 - \frac{\delta C_I^{-1}}{2}\right) |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 + \frac{\delta}{2} \|p\|_h^2 > 0,$$

où on a pris $0 < \delta < 2C_I$.
Le Théorème 3.9 reste valable pour la méthode SUPG.

Avec les mêmes notations que pour le cas GLS, le système linéaire correspondant à la méthode SUPG a la forme

$$S_{SUPG} := \begin{bmatrix} A & B^T \\ (B+C) & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Cette fois-ci, la matrice S_{SUPG} est non symétrique, mais elle est semi-définie positive.

3.2.3 La méthode DWG

La méthode DWG (Douglas-Wang Galerkin method) consiste à prendre $\alpha = -1$.
Le problème discret correspondant est

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ L_h^{dwg}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = G_h^{dwg}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times q_h, \end{cases} \tag{3.21}$$

où

$$L_h^{dwg}(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K}$$

et

$$G_h^{dwg}(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_{0,K}$$

Contrairement aux deux cas précédents, nous allons voir que **la méthode DWG est inconditionnellement stable**, i.e. on peut prendre $\delta > 0$ quelconque. Pour cela, il suffit de montrer que l'inégalité (3.15) est vérifiée pour tout $\delta > 0$ si on remplace L_h^{gls} par L_h^{dwg}.

Soit $\gamma > 1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de la moyenne géométrique-arithmétique et l'inégalité (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}
L_h^{dwg}(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) &= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \| -\Delta\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,K}^2 \\
&= |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta\mathbf{u}\|_{0,K}^2 + 2\delta \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta\mathbf{u}, \nabla p)_{0,K} + \delta \|p\|_h^2 \\
&\geq |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta(1-\gamma) \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta\mathbf{u}\|_{0,K}^2 + \delta\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \|p\|_h^2 \\
&\geq \left(1 + \frac{\delta(1-\gamma)}{C_I}\right) |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \delta\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \|p\|_h^2 \\
&\geq C(|\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 + \|p\|_h^2),
\end{aligned}$$

où C est une constante positive si on choisit $1 \leq \gamma \leq (1 + \delta C_I)$. La suite de la preuve de la coercivité faible reste identique à celle du cas GLS.

Théorème 3.12. ***(Convergence)*** *Supposons que :*

1. $\mathcal{T}_h$ est régulière,

2. la solution du problème de Stokes satisfait $(\mathbf{u}, p) \in H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$, $k \geq 1$,

3. l'une des deux hypothèses (i) ou (ii) soit vérifiée.

Alors, pour tout $\delta > 0$ le problème discret (3.21) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ et on a l'erreur de convergence

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C_1(h^k |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^l \|p\|_{l,\Omega}).$$

Dans le cas bidimensionnel, si de plus Ω est convexe, alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2(h^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega} + h^{l+1} \|p\|_{l,\Omega}).$$

Les constantes C_1, C_2 sont indépendantes de h.

Le système linéaire associé à la méthode DWG est sous la forme

$$S_{DWG} := \begin{bmatrix} (A+D) & (B-C)^T \\ (B+C) & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

Clairement, la matrice S_{DWG} est non symétrique, mais elle est semi-définie positive **pour tout** $\delta > 0$.

Bibliographie

[1] **T. Barth, P. Bochev, M. Gunzburger, J. Shadid,** *A taxonomy of consistently stabilized finite element methods for the Stokes problem*, SIAM J. 2004.

[2] **C. Bernardi**, *Optimal Finite-Element Interpolation on Curved Domains*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 26, No. 5 (1989), pp. 1212-1240.

[3] **D. Boffi**, *Stability of higher order triangular Hood-Taylor elements for the stationary Stokes equations*, mathematical models and methods in applied science Vol. 4, No.2 (1994), pp. 223-235.

[4] **D. Boffi**, *Three-Dimensional Finite Element Methods for the Stokes Problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 34, No. 2 (Apr., 1997), pp. 664-670.

[5] **D. Boffi, F. Brezzi et M. Fortin**, *Mixed finite element methods and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2013.

[6] **F. Brezzi, M .Fortin**, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.

[7] **A. Chorin, J.E. Marsden**, A mathematical introduduction to fluid mechanics, 1994.

[8] **P.G. Ciarlet**, *Basic error estimates for elliptic problems*, North-Holland, 1991.

[9] **P. Clément**, *Approximation by finite element functions using local regularization*, R.A.I.R.O. 9e année, août 1975, R-2, pp. 77-84.

[10] **M. Crouzeix, P.A. Raviart**, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations.* R.A.I.R.O. 1973.

[11] **M. Dauge**, *Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I, linearized equations*, SIAM J. MATH. ANAL, Vol. 20, No. 1 (1989).

[12] **L. Franca, R. Stenberg**, *Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28(1991) pp.1680-1697.

[13] **G.P. Galdi** *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag , New York, 2011.

[14] **V. Girault, P.A. Raviart** *Finite element method for the Navier-Stokes equation, theory and algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[15] **J. Guzman, L.R. Scott**, The Scott-Vogelius finite elements revisited, mathematics of computation, volume 88, Num. 316, 2019, pp. 515–529.

[16] **V. John, A. Linke, C. Merdon, M. Neilan, L. G. Rebholz**, *On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows*, SIAM Rev. 59 (2017), pp. 492-544.

[17] **R.B.Kellog, J.E.Osborn**, *A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon*, Journal of functional analysis 21 (1976), 397-431.

[18] **A. Quarteroni, A. Valli**, *Numerical approximation of partial differential equations*, Springer, Berlin, 1994,

[19] **A. Quarteroni**, *Numerical models for differential problems*, Springer,Milan, 2008.

[20] **R. Verfürth**, *Error estimates for a mixed finite element, approximation of the Stokes equations*, RAIRO. Analyse numérique, tome 18, No. 2 (1984), pp. 175-182.

[21] **S. Zhang**, *Divergence-free finite elements on tetrahedral grids for* $k \geq 6$, Mathematics of computation volume 80, Num.274 (2011), pp.669–695.