République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ *d'ordre* : .....

№ *séries* : .....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : *Mathématiques.*

Option : *Analyse Fonctionnelle.*

Thème

Étude de la fonction gamma p-adique

Présenté par :

- Dernoun Abdelghafour.
- Merrouche Khalid.

Devant le jury :

Président	: D. Affane	MCA. *Université de jijel*
Encadreur	: R. Belhadef	MCB. *Université de jijel*
Examinateur	: S. Medjrab	MAA. *Université de jijel*

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre Créateur, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité d'étudier, la volonté, le courage et la patience afin d'accomplir et de mener à bien ce travail.

Nous remercions en particulier notre encadreur. **Dr. Belhadef Rafik** *pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses encouragements, sa grande disponibilité, ses précieux conseils et pour la patience qu'il nous a accordé pendant la réalisation de ce travail.*

Un grand merci également aux membres du jury, le président madame **D. Affane** *, l'examinatrice madame* **S. Medjrab**, *pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer notre travail.*

Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de jijel qui nous ont suivis durant nos cinq années d'études à l'université, à tous les collègues de notre promotion 2020.

Nous adressons mes remerciements les plus chaleureux à nos familles, nos amis pour leur patience et leur intérêt.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Abde lghafour & khaled

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie, que je dédie ce mémoire.

A mon cher père (Amar) et a ma très chère maman (Zohra) :

aucune dédica- ce ne saurait
exprimer l'amour, l'estime, le dévouement
et le respect que j'ai toujours en pour vous,
et rien du monde ne vaut les efforts fournis pour
mon éducation et ma formation. Je te dédie ce
travail. Puisse Dieux le tout puissant
te préserver et t'santé, langue
vie et bonheur.

♡

À ma chère sœur : **Hassiba**, *je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur et de santé.*

À mes chers frères :**Masaoud** *et sa femme* ***Linda*** *et leur fils* **Anis**, **Kamel** *et sa femme* **Somiya**, **Sefiane**, **Nasreddine**, **Abdeslam**, *veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.*

À mon collègue Khalid : *Je vous souhaite bonne chance, succès et bonheur.*

À mes chères amies : *Un dédicace particulier est sincère pour mes amies et camarades du chemin parcouru* : **Mouhamed**, **Abdennour**, **Haroun**. *je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.*

♡ ..... **Abde lghafour**♡

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie, que je dédie ce mémoire.

A mon cher père (Mohamed) et a ma très chère maman (Aljia) :

aucune dédica- ce ne saurait
exprimer l'amour, l'estime, le dévouement
et le respect que j'ai toujours en pour vous,
et rien du monde ne vaut les efforts fournis pour
mon éducation et ma formation. Je te dédie ce
travail. Puisse Dieux le tout puissant
te préserver et t'santé, langue
vie et bonheur.

♡

À mes chère sœur : **Nabila**,**Zohra**, **Mariam**, *je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur et de santé.*

À mes chers frères :**Aissa**, **Hamza**, **Bilal**, *veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de mon respect.*

À mon collègue Abdelghafour : *Je vous souhaite bonne chance, succès et bonheur.*

À mes chères amies : *Un dédicace particulier est sincère pour mes amies et camarades du chemin parcouru. je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.*

♡ ..... **Khaled**♡

Table des matières

Introduction **9**

1 Rappel sur la fonction gamma classique **12**

1.1 La fonction gamma sur $\mathbb{N}$ 12

1.2 La fonction gamma sur $\mathbb{R}$ 12

1.3 La fonction gamma sur $\mathbb{C}$ 13

2 Notions de base en analyse p-adique **16**

2.1 Corps normés 16

2.1.1 Définitions 16

2.1.2 Propriétés d'un corps non-archimédien 17

2.2 Nombres p-adiques 19

2.2.1 Valuations p-adiques 19

2.2.2 Normes p-adiques 22

2.2.3 Corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ 24

2.2.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ 26

2.3 Fonctions p-adiques 28

2.3.1 Suites et séries p-adiques 28

2.3.2 Séries entières p-adiques 30

2.3.3 Interpolation p-adique 35

2.3.4 Développement de Mahler 38

2.3.5 Intégrale de Volkenborn 41

2.3.6 Logarithme et exponentielle p-adique 43

2.4 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$ 47

2.4.1 Séries entières complexes p-adiques 47

2.4.2 Fonctions analytiques complexes p-adique 48

3 Fonction gamma p-adique **51**

3.1 Définitions et propriétés de Γ_p 51

3.2 Formule de Multiplication et Formule des Compléments 57

3.3 L'étude analytique de la fonction gamma p–adique 59

3.3.1 Analyticité de $\log_p \Gamma_p$ sur $p\mathbb{Z}_p$ 60

3.3.2 Analyticité de Γ_p sur $\mathbb{Z}_p$ 62

3.4 La fonction gamma dans $\mathbb{Z}_2$ 63

4 Applications de la fonction gamma p-adique **71**

4.1 L'analogue p-adique de la factorielle de Roman 71

4.1.1 Définition et propriétés 71

4.1.2 Relation avec Γ_p 72

4.2 Congruences de Kazandzidis 75

4.3 Fonction bêta p-adique 78

Notation

Nous utilisons les notations suivantes :

$\mathbb{K}$: un corps,

$\mathbb{K}[x]$: l'ensemble de polynôme,

p : un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \cdots$

$(a, b) = 1$: a et b sont premiers entre eux,

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels réels,

$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels réels non nuls,

$\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs réels,

$\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers relatifs réels non nuls,

$\mathbb{Z}_+$: l'ensemble des entiers relatifs réels positifs,

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels,

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs,

$\mathbb{Q}_p$: l'ensemble des nombres p-adiques,

$\mathbb{Q}_p^*$: l'ensemble des nombres p-adiques non nuls,

$\mathbb{Z}_p$: l'ensemble des entiers p-adiques,

${\mathbb{Z}^\times}_p$: l'ensemble des éléments inversible de $\mathbb{Z}_p$,

$\bar{\mathbb{Q}}_p$:La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$,

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,

$\mathbb{C}_p$: l'ensemble des nombres complexes p-adiques,

$v_p(x)$: la valuation p-adique de x,

$S_p(n)$: la somme des chiffres de l'écriture de n en base p,

$[x]$: la partie entière réel de x,

$|\,.\,|$: la valeur absolue usuelle,

$|\,.\,|_p$: la valeur absolue p-adique,

$D^+(a,r)$:le disque fermé de centre a et de rayon r,

$D^-(a,r)$:le disque ouvert de centre a et de rayon r,

$D(a,r)$: l'un ou l'autre de ces deux disque,

$C(a,r)$: le cercle de centre a et de rayon r,

$\mathcal{A}(D(a,r))$: l'ensemble des fonctions analytique sur $D(a,r)$,

$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$: l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$,

$C^1(\mathbb{Z}_p, K)$: l'ensemble de fonctions dérivables,

$C(\mathbb{Z}_p, K)$: l'ensemble de fonctions continues,

Introduction Générale

Les nombres p-adiques sont un système arithmétique contre-intuitif, qui a d'abord été introduit par Kummer en 1850. Ensuite, le mathématicien allemand Kurt Hensel ($1861-1941$) a développé les nombres p-adiques dans un article concernant le développement des nombres algébriques dans les séries de puissance vers 1897 ($cf.$[20]). Il existe toutes sortes de nombres, tels que naturel, rationnel, réel, complexe, p-adique. Les nombres p-adiques sont moins connus que les autres ; cependant, ces chiffres jouent un rôle principal dans la théorie des nombres et les sujets connexes en mathématiques.

Soit le nombre "factoriel s", défini par $s! = s(s-1)...1$. Existe-il une fonction qui prolonge la notion du factoriel aux complexes ?
Euler a introduit la fonction de gamma classique noté Γ en 1729, qui intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace.
Et environ 70 ans avant lui, Wallis a tenté de calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2}dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-z)^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}dz.$$

Et son objectif de cette intégrale était d'obtenir l'expression de Π. La seule intégrale qu'il pouvait évaluer était

$$\int_0^1 (1-z^{\frac{1}{p}})^q dz.$$

où q un entier positif. Le raisonnement de Wallis a été critiquée par ses contemporains. Il admettait que son raisonnement n'est pas entièrement rigoureux mais il réplique que sa méthode est valable. C'est pourquoi Newton, et ensuite Euler ont étudié attentivement les travaux de Wallis. Ce dernier a défini cette fonction par :

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log t)^{x-1}dt \quad (x > 0)$$

En 1965, la forme commune de la fonction gamma a été donnée par **Artin** avec un changement de variable

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x > 0).$$

Il est bien connu que la fonction Γ est une interpolation de la fonction factorielle $n!$, du façon que sur $\mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$. Par contre, on ne peut pas interpoler la fonction factorielle vers $\mathbb{Z}_p$, puisque elle n'est pas uniformément continue pour la topologie p–adique. En revanche, l'analogue p-adique de Γ dépend de la modification de la fonction factorielle $n!$. Pour ceci, La factorielle p-adique $(n!)_p$ dans $\mathbb{Q}_p$ est défini par

$$(n!)_p = \prod_{1\leq j\leq n,(p,j)=1} j.$$

La fonction gamma p-adique, noté Γ_p, est défini par **Morita** comme extension continue à $\mathbb{Z}_p$ de la fonction $n \longrightarrow (-1)^n(n!)_p$. Autrement dit, $\Gamma_p(x)$ est donné par la formule

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to x}(-1)^n \prod_{1\leq j<n,(p,j)=1} j.$$

Historiquement, la fonction gamma p-adique Γ_p est une fonction d'un entier p-adique analogue à la fonction gamma classique. **Morita** (1975) a donné la définition explicitement pour la première fois, bien que **Barsky** (1980) ait souligné que **Dwork** (1964) utilisait implicitement la même fonction. **Diamond** (1977) a défini un analogue p-adique G_p de $\log_p \Gamma_p$. **Overholtzer** (1952) avait précédemment donné une définition d'un autre analogue p-adique de la fonction gamma, mais sa fonction n'a pas de propriétés satisfaisantes et est peu utilisée.

Ce mémoire est réparti sur une introduction générale, quatre chapitres et les références.

Le premier chapitre est composé de trois parties. Nous commençons par la définition de la fonction gamma sur $\mathbb{N}$. Puis, nous rappelons les définitions et les propriétés de la fonction gamma dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Le deuxième chapitre est réparti sur quatre parties. On commence par donner quelques rappels des notions fondamentales du corps normés dans le cas générale, puis on définit la norme non-archimedienne et nous avons pensé à certains propriétés des corps non-archimedienne . Ensuite, on donne la définition de la valuation et la norme p-adique et on construit le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$.

La troisième partie est consacré à l'étude des suites et des séries dans $\mathbb{Q}_p$, des série entières et des fonction p-adique. Ainsi que d'autres formules, comme l'intégrale de Volkenborn et le développement de Mahler. De plus, on va voir les définitions et les propriétés de la fonction exponentielle et le logarithme p-adique. On termine ce chapitre par les fonction analytique sur $\mathbb{C}_p$.

Le troisième chapitre est réparti sur quatre parties. Nous donnons les définitions et les propriétés de la fonction gamma p-adique, puis nous présentons la formule de compléments et la formule de multiplication. En suite, nous traitons les propriétés analytiques de Γ_p. En plus, on termine par l'étude du cas particulier Γ_2.

Le quatrième chapitre contient des applications de la fonction gamma p-adique. Nous commençons par donner la définition et les propriétés de l'analogue p-adique de la factorielle de Roman, puis nous présentons la relation avec Γ_p. Dans la deuxième application, on va utiliser Γ_p pour étudier les congruences de Kazandzidis. On termine ce chapitre par la troisième application concernant la fonction bêta p-adique.

Chapitre 1

Rappel sur la fonction gamma classique

Dans ce chapitre, nous étudierons la définition et les propriétés spécifiques de la fonction gamma classique sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

1.1 La fonction gamma sur $\mathbb{N}$

Définition 1.1. *On définit la fonction gamma pour un entier naturel $n \geq 1$ par l'intégrale généralisée suivante :*

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \tag{1.1}$$

Nous faisons l'intégration par parties, on trouve :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = [-t^{n-1} e^{-t}]_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-2} dt$$

On aura la relation de récurrence $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = ... = n!\Gamma(1)$, or que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ alors

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.2}$$

1.2 La fonction gamma sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2. *Pour tout $y \in]0, +\infty[$, la fonction gamma est définie par :*

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-t} dt. \tag{1.3}$$

Proposition 1.3. *[6][10] Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, nous avons l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$$

et quand $n \in \mathbb{Z}^*$ nous avons

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Corollaire 1.4. *[10] (**Formule de Stirling**)*
Pour $y \to \infty$ nous avons

$$\Gamma(y) \sim y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y} (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.5. *(**Formule de Gauss**)*
Pour tout $y \in]0, +\infty[$ on a

$$\frac{1}{\Gamma(y)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{y(y+1)...(y+n)}{n! n^y}. \tag{1.4}$$

1.3 La fonction gamma sur $\mathbb{C}$

Définition 1.6. *La fonction gamma est définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$ par*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Lemme 1.7. *[19] Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 0$, on a l'équation fonctionnelle*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{1.5}$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\Gamma(s+n+1) = \Gamma(s) \prod_{0 \leq j \leq n} (s+j) \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$, on a par définition de la fonction Gamma :

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s dt \\ &= [-e^{-t} t^s]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty (-e^{-t}) s t^{s-1} dt \end{aligned}$$

et par conséquent : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

On va démontrer la formule (1.6) par récurrence :

Pour $n = 0$ c'est exactement la précédente. Supposant cette formule vraie pour $Re(s) > 0$ et un entier $n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(s+n+2) &= \Gamma(s+n+1)(s+n+1) \\ &= \Gamma(s)(s+n+1)\prod_{0\leq j\leq n}(s+j)\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat cherché par récurrence. Donc la formule est vraie pour $n+1$. ■

Théorème 1.8. *[10][2] (**Formule des compléments**)*
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{sin(\pi s)} \tag{1.7}$$

cette formule reste valable par prolongement analytique si $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

Théorème 1.9. *[2] Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$sin(\pi s) = \pi s\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{s^2}{n^2}).$$

Théorème 1.10. *[10]*
Pour tout $s \in \mathbb{C}$. La fonction gamma complexe peut être définit par la formule d'Euler-Gauss suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^s}{s(s+1)...(s+n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n^s}{(s)_n}.\end{aligned}$$

Théorème 1.11. *[10] (**Formule de multiplication de Legendre-Gauss**)*
Nous avons la formule de multiplication, Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}) = 2^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s) \tag{1.8}$$

et plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$, la formule de distribution

$$\prod_{0\leq j<k}\Gamma(s+\frac{j}{k}) = k^{\frac{1}{2}-ks}(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(ks)$$

en particulier on a

$$\prod_{1\leq j\leq K}\Gamma(\frac{j}{k}) = \frac{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

Théorème 1.12. *[2] Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$, on a*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 + \frac{s}{n})e^{\frac{-s}{n}}\}$$

avec γ s'appelle la constante d'Euler, et est défini par

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)). \tag{1.9}$$

Corollaire 1.13. *[10] Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 0$, on a*

$$\log \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \log(s) - s + \frac{1}{2} \log(2\Pi) + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{t} (\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}). \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Notions de base en analyse p-adique

Le but de ce chapitre est de donner quelques définitions et résultats fondamentaux sur un corps normé et sur les nombres p-adiques. Ainsi que des résultats de l'analyse p-adiques, qui serrons utiliser pour étudier la fonction gamma p-adique.

2.1 Corps normés

Dans cette section, on va rappeler les définitions et les propriétés élémentaires sur les corps normés.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, on appelle norme sur $\mathbb{K}$ toute application $\|.\|$ de $\mathbb{K}$ dans $[0, +\infty[$ telle que :*

1) $\|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$, $\forall a \in \mathbb{K}$.

2) $\|ab\| = \|a\|\|b\|$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$.

3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire).*

Associée à une norme, $\mathbb{K}$ est un espace normé, ou bien corps normé.

Remarque 2.1. *Il y a toujours sur un corps $\mathbb{K}$ au moins une norme, à savoir l'application qui à nombre non nul associe 1, et à zéro associe zéro (norme triviale).*

Remarque 2.2. *On peut définir sur un corps $\mathbb{K}$ la norme usuelle :*

$$|a|_\infty = \max(a, -a) = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Définition 2.2. *La norme $\|.\|$ est non archimédienne si*

$$\forall a, b \in \mathbb{K} : \|a + b\| \leq \max(\|a\|, \|b\|)$$

Alors on dit que $\mathbb{K}$ est un corps non-archémidien ou ultramétrique.

Remarques 2.1.

1) L'inégalité triangulaire forte $\Longrightarrow$ l'inégalité triangulaire ordinaire .

2) La norme triviale est une norme non-archimédienne.

2.1.2 Propriétés d'un corps non-archimédien

Dans la suite, on note par $(\mathbb{K}, \|.\|)$ un corps normé.

Théorème 2.3. *[18] Soit $\|.\|$ une norme sur le corps $\mathbb{K}$, alors*

$$\textit{La norme } \|.\| \textit{ est non archimdienne} \Longleftrightarrow \|n\| \leq 1 \ , \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$) On va démontrer par récurrence cette implication :

pour n=0 évident car $\|0\| = 0 \leq 1$

suppose que $\|n\| \leq 1$ est montrons que $\|n + 1\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|n + 1\| &\leq \max(\|n\|, \|1\|) \\ &\leq \|1\| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'où $\|n + 1\| \leq 1 \quad , \forall n \in \mathbb{Z}$. Alors la propriété est vrais pour tous n.

$\Longleftarrow$) soient $a, b \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\|a+b\|^n &= \|(a+b)^n\| \\
&= \|\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k a^{n-k} b^k\| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k\| \|a^{n-k}\| \|b^k\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \|a^{n-k}\| \|b^k\| \qquad (car\ \|C_n^k\| \leq 1, C_n^k \in \mathbb{N}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} (\max\{\|a\|, \|b\|\})^n \\
&= (n+1)(\max\{\|a\|, \|b\|\})^n
\end{aligned}$$

Donc $\|a+b\| \leq (n+1)^{1/n} \max\{\|a\|, \|b\|\}$

pour n assez grand on a $\|a+b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ $(car\ \ (n+1)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1)$. ■

Proposition 2.4. *[18] Soient a, x deux élément d'un corps non-archimédien* $(\mathbb{K}, \|.\|)$. *On a*

$$\|x-a\| < \|a\| \Rightarrow \|x\| = \|a\|$$

Démonstration.

Soit $a, x \in \mathbb{K}$, par l'inégalité triangulaire forte on a pour $\|x-a\| < \|a\|$

$$\|x\| = \|x-a+a\| \leq \max\{\|x-a\|, \|a\|\} = \|a\|$$

$$\|a\| = \|a-x+x\| \leq \max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|x\|$$

Si $\max\{\|a-x\|, \|x\|\} = \|x\|$, on a le résultat.L'autre variante est contradiction avec l'hypothèse. ■

Conséquence 2.1. *Dans un espace non-archimédien tous les triangles sont isocèles.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}, \quad \|a-b\| \neq \|b-c\| \Longrightarrow \|a-c\| = \max\{\|a-b\|, \|b-c\|\}.$$

2.2 Nombres p-adiques

2.2.1 Valuations p-adiques

Définition 2.5. *Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{Z}^*$. La valuation p-adique de n est le plus grand entier naturel α tel que p^α divise n et on note $v_p(n)$.*

$$\begin{aligned} v_p : &\mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{N} \\ &x \longrightarrow v_p(x) = \max\{\alpha \in \mathbb{N}, x = p^\alpha c, c \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

si $x = \dfrac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$, on a $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$
par convention on a $v_p(0) = \infty$ (car p^α divise 0, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$).

Exemples 2.1.

1. $10 = 1.3^0 + 3^2 \Longrightarrow v_3(10) = 0$, $p=3$.
2. $a = p + p^6 + 3p^7 \Longrightarrow v_p(a) = 1$, $p \geq 2$.
3. $b = \dfrac{p^2 + 2p^3 + p^4}{p^4 + 6p^5} \Longrightarrow v_p(b) = 2 - 4 = -2$, $p \geq 2$.

Proposition 2.6. *[11] Soient $a, b \in \mathbb{Q}$, on a*

1) $v_p(a) = +\infty \Leftrightarrow a = 0$.

2) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

3) $v_p(a + b) \geqslant min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Démonstration.

1) Par définition, on a

$$v_p(a) = +\infty \Leftrightarrow v_p(a) = v_p(0) \Leftrightarrow a = 0.$$

2) Soit

$$a \in \mathbb{Z}^* \quad a = p^{v_p(a)}.n_1 \quad , \quad (p, n_1) = 1$$

et

$$b \in \mathbb{Z}^* \quad b = p^{v_p(b)}.n_2 \quad , \quad (p, n_2) = 1.$$

D'où

$$ab = p^{v_p(a)} p^{v_p(b)}.n_1 n_2 = p^{v_p(a)+v_p(b)}.n_1 n_2 \quad , \quad (p, n_1 n_2) = 1.$$

Donc

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

3) Soit

$$a \in \mathbb{Z}^* \quad a = p^{v_p(a)}.n_1 \quad , \quad (p, n_1) = 1$$

et

$$b \in \mathbb{Z}^* \quad b = p^{v_p(b)}.n_2 \quad , \quad (p, n_2) = 1.$$

i) Supposons que $v_p(a) \leq v_p(b)$

$$a + b = p^{v_p(a)}.n_1 + p^{v_p(b)}.n_2 = p^{v_p(a)} \underbrace{(n_1 + p^{v_p(b)-v_p(a)} n_2)}_{n_3} = p^{v_P(a)}.n_3$$

Si $\quad (p, n_3) = 1$ on a

$$v_p(a + b) = v_p(a) = min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Sinon

$$v_p(a + b) = v_p(a) + v_p(n_3) \geqslant v_p(a) = min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

ii) Supposons que $\quad v_p(b) \leqslant v_p(a)$

$$a + b = p^{v_p(a)}.n_1 + p^{v_p(b)}.n_2 = p^{v_p(b)} \underbrace{(p^{v_p(a)-v_p(b)}.n_1 + n_2)}_{n_4} = p^{v_p(b)}.n_4$$

Si $\quad (p, n_4) = 1 \quad$ on a

$$v_p(a + b) = v_p(b) = min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Sinon

$$v_p(a + b) = v_p(b) + v_P(n_4) \geqslant v_p(b) = min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Donc

$$v_p(a + b) \geqslant min\{v_p(a), v_p(b)\} \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^*.$$

■

Lemme 2.7. *[20] Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soit $S_p(n)$ la somme des chiffres de n dans la base p. Alors la valuation p-adique de $n!$ est donnée par :*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$$

Démonstration. On sait que :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \Longrightarrow v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k).$$

On suppose que

$$k = a_i p^i + ... + a_l p^l, \ (i \leq l, a_i \neq 0)$$

Donc

$$v_p(k) = i$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} k &= a_i p^i + ... + a_l p^l \\ &= p^i + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{l} a_s p^s. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} k - 1 &= p^i - 1 + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{l} a_s p^S \\ &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} p^s + (a_i - 1)p^i + \sum_{s=i+1}^{l} a_s p^S \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que

$$\begin{aligned} S_p(k-1) &= (p-1)\sum_{s=0}^{i-1} 1 + (a_i - 1) + \sum_{s=i+1}^{l} a_s \\ &= i(p-1) + a_i + \sum_{s=i+1}^{l} a_s - 1 \\ &= i(p-1) + S_p(k) - 1 \\ &= v_p(k)(p-1) + S_p(k) - 1. \end{aligned}$$

Donc

$$v_p(k) = \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=1}^{n} v_p(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_p(k-1) - S_p(k) + 1}{p-1} \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{n} S_p(k-1) - S_p(k) + 1 \\ &= \frac{1}{p-1}(n - S_p(n)) \\ &= \frac{n - S_p(n)}{p-1}. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Normes p-adiques

Soit x un nombre rationnel, on définit l'application $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $[0, +\infty[$ comme suit :

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & , \quad si \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

Proposition 2.8. *[13] L'application $x \longmapsto |x|_p$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration.

On montre que l'application $|.|_p$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$, en effet on a

1) $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$?

   Soit $x \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |x|_p = 0 &\Longleftrightarrow p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow v_p(x) = +\infty \\ &\Longleftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p, \forall x, y \in \mathbb{Q}$?

Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-(v_p(x)+v_p(y))} \\ &= p^{-v_p(x)}p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p|y|_p. \end{aligned}$$

3) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$?

On a

$$|x+y|_p = p^{v_p(x+y)}, \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

On sait que

$$v_p(x+y) \geqslant min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

Donc

$$-v_p(x+y) \leq -min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

Alors

$$\begin{aligned} p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{|x|_p, |y|_p\}. \end{aligned}$$

Donc l'application $x \longrightarrow |x|_p = p^{-v_p(x)}$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$. ■

Proposition 2.9. *[17][13] Soit $x, y \in \mathbb{Q}$. Si $|x|_p \neq |y|_p$, alors $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$.*

Démonstration. On a deux cas

1) Si $|x|_p < |y|_p$, alors

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} = |y|_p \tag{2.1}$$

D'autre part

$$|y|_p = |y+x-x|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} = |x+y|_p$$

D'où

$$\max\{|x|_p, |y|_p\} \leq |x+y|_p \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), on a

$$\max\{|x|_p, |y|_p\} = |x+y|_p.$$

2) Si $|x|_p > |y|_p$ (De la même manière).

■

2.2.3 Corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Puisque Q n'est pas complet pour $|.|_p$, on le complète et on obtient un espace complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adiques. Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques peut alors être défini comme la complétion de l'espace normé. Ses éléments sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy,où deux suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ sont dites équivalentes ($u\mathcal{R}v$) si $|u_n - v_n|_p \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$.

Remarque 2.3. *Pour la norme p-adique et pour $x \in \mathbb{Q}_p$, On a $|.|_p$ peut être prolonger de $\mathbb{Q}$ sur tout $\mathbb{Q}_p$ de la façon suivante*

$$|x|_p = \lim_{n\longrightarrow\infty} |x_n|_p,\ (x_n)_n \ \textit{est une suite de Cauchy dans } \mathbb{Q}.$$

Proposition 2.10. *[15][26] $\mathbb{Q}_p$ est un corps complet non-archimédien.*

Démonstration. On a :

1) Montrons que $\mathbb{Q}_p$ est un corps :

   Il est clair ($\mathbb{Q}_p$,+, .) est un anneau commutatif.

   Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul admet un inverse dans $\mathbb{Q}_p$.

   Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}_p$ une suite de Cauchy de limite x alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |x_n|_p = |x|_p \neq 0$$

   Donc $|x_n|_p$ est aussi non nul pour n assez grand, et donc la suite $v_p(x_n)$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$, comme il s'agit d'une suite d'élément de $\mathbb{Z}$, elle est constante à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on définit une suite y_n d'élément de $\mathbb{Q}$ par :

$$y_n = \begin{cases} 0 & si \quad n < N \\ \dfrac{1}{x_n} & si \quad n \geq N \end{cases}$$

   Pour tout $n, m \geq N$ on a

$$|y_n - y_m|_p = \frac{|\ x_n - x_m\ |_p}{|\ x_n\ |_p |\ x_m\ |_p}$$

   De sort que y_n soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc elle converge vers $y \in \mathbb{Q}_p$, et comme $x_n y_n = 1$, alors :

$$xy = 1.$$

2) Comme $|\ .\ |_p$ est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ est un corps complet non-archimedien.

■

Définition 2.11. *L'ensemble des entiers p-adiques est le disque unitaire suivant :*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \setminus |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ v_p(x) \geq 0\}$$

Il s'appelle anneau des entiers p-adiques.

Remarque 2.4. *On peut démontrer aussi que $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ i.e. $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_p$.*

Définition 2.12. *On peut définir $\mathbb{Q}_p$ comme l'ensemble des fractions des éléments de $\mathbb{Z}_p$:*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^*\}.$$

Remarque 2.5. *L'inverse de p n'est pas un entier p-adique.*

Définition 2.13. *L'ensemble $\mathbb{Z}_p^*$ des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}_p$ est donnée par :*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p,\ |x|_p = 1\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Z}_p^*$ s'appelant les unités, et $\mathbb{Z}_p^*$ est le groupe des unités.

Théorème 2.14. *[8] L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ muni de la topologie associée à la norme p-adique est un ensemble compacte.*

Proposition 2.15. *[8][18] Si $x \in \mathbb{Q}$ avec $\mid x \mid_p \leq 1$, alors :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mid \alpha - x \mid_p \leq p^{-i}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$ et $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*(a,b) = 1$ on a :

$$\mid x \mid_p = \frac{\mid a \mid_p}{\mid b \mid_p} = \frac{p^{-v_p(a)}}{p^{-v_p(b)}} \leq 1$$

D'où p ne divise pas b, alors $v_p(b) = 0$ c'est à dire $(b,d) = 1$.
Donc d'après la théorème de Bézout il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $mb + np^i = 1, \forall i \in \mathbb{N}$.
On choisit $\alpha = am$ on a

$$\begin{aligned} \mid \alpha - x \mid_p = \left|am - \frac{a}{b}\right|_p &= \left|\frac{a}{b}\right|_p |mb - 1|_p \\ &\leq \mid np^i \mid_p = \mid n \mid_p \mid p^i \mid_p \\ &\leq \mid p^i \mid_p = p^{-i} \end{aligned}$$

D'où

$$\mid \alpha - x \mid_p \leq p^{-i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

■

Proposition 2.16. *[23] Tous $y \in \mathbb{Q}_p^*$ admet une unique représentation $y = p^n u$ où $n \in \mathbb{Z}$ et u est une unité dans $\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. On a deux cas :

1) **Existence de la représentation :**
   Soit $y \in \mathbb{Q}_p^*$ alors $y = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p^*$.
   On sait que $a = a_0 p^k$ et $b = b_0 p^m$ avec a_0,b_0 des unités et $k = v_p(a)$, $m = v_p(b)$
   D'où
   $$y = \frac{a_0}{b_0} p^{k-m}.$$
2) **Unicité de la représentation :**
   Supposons que $y \in \mathbb{Q}_p^*$ admet deux représentation $y = up^k = vp^m$ avec u, v des unités dans $\mathbb{Z}_p$ et $m, k \in \mathbb{Z}$, alors
   $$uv^{-1} = p^{m-k} \Rightarrow v_p(uv^{-1}) = v_p(p^{m-k}) = m - k$$
   Et on a uv^{-1} est une unité, alors $v_p(uv^{-1}) = 0 \Rightarrow m = k$
   D'où l'unicité de la représentation.

■

2.2.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Définition 2.17. (***Corps algébriquement clôs***)
Un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme P(x) dans $\mathbb{K}[x]$ de degré n admet n racine dans $\mathbb{K}$

Proposition 2.18. *[8] Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs pour tout p premier.*

Démonstration.
On considère le polynôme $P(x) = x^2 - p \in \mathbb{Q}_p[x]$. Supposons que $P(x)$ admet des racines dans $\mathbb{Q}_p$, donc

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = p$$

alors

$$|x^2|_p = |x|_p^2 = |p|_p = p^{-1}$$

donc

$$\begin{aligned} |x|_p^2 = p^{-1} &\Longrightarrow |x|_p = p^{\frac{-1}{2}} \\ &\Longrightarrow v_p(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}_p$ donc $P(x)$ n'admet pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$ ce qui preuve que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ■

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note en général $\bar{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complet. Nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet et algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$. On montrer que l'on peut prolonger la norme à ce corps qui possède aussi une norme p-adique, qui l'on note toujours $|.|_p$.

Définition 2.19. *Soit $\bar{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. D'après la théorie générale, v_p se prolonge de maniéré unique en une valuation sur $\mathbb{Q}_p$. Malheureusement, cette clôture algébrique n'est pas complet. On note $\mathbb{C}_p$ le complété de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ pour v_p, qui cette fois-ci est à la fois complet et algébriquement clos.*

Définition 2.20. (***norme p-adique de*** $\mathbb{C}_p$)
On prolonge la norme p-adique de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ à $\mathbb{C}_p$, en posant pour tout $x \in \mathbb{C}_p$

$$|x|_p = \lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n|_p$$

avec $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ qui est dans la classe d'équivalence de x.

Remarque 2.6. *L'ensemble de ses éléments inversibles est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ normé, noté par $\mathcal{B}$ et on a*

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{C}_p; |x|_p = 1\}.$$

2.3 Fonctions p-adiques

2.3.1 Suites et séries p-adiques

Théorème 2.21. *[17] Une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{Q}_p$ est une suite de Cauchy, et donc convergente, si et seulement si elle vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0. \tag{2.3}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy ;i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n|_p < \varepsilon$$

En particulier pour $m = n + 1$, on obtient (2.3).

$\Leftarrow$) Supposons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$ et montrons que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
De (2.3) on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$$

Pour tout $m > n \geq N$ on évaluons $|a_m - a_n|_p$, en utilisant l'inégalité triangulaire forte, on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + ... + a_n|_p \\ &\leq \max|(a_m - a_{m-1}|_p, |a_{m-1} - a_{m-2}|_p, ..., |a_{n+1} - a_n|_p) < \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.22. *[26] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$.*
si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}_p$ et $a \neq 0$ alors $|a_n|_p = |a|_p$, pour n assez grand.

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$
Pour $\varepsilon = |a|_p$ on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |a_n - a|_p < |a|_p$$

D'après l'inégalité ultramétrique

$$|a_n|_p = \max(|a_n|_p, |a|_p) = |a|_p$$

■

Définition 2.23. *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série dans* $\mathbb{Q}_p$

1) La somme partielle de cette séries est donnée par :

$$S_N = a_0 + a_1 + ... + a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

2) La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_n$ *est de Cauchy.*

Proposition 2.24. *[17] Si la série* $\sum |a_i|_p$ *converge dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\sum a_i$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$.

Démonstration. Si $\sum |a_i|_p$ converge, alors d'après le Critère de Cauchy on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Longrightarrow \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon$$

On aura

$$|S_m - S_n|_p = \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right|_p \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon$$

Ce qui implique que $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et ainsi la série $\sum a_i$ converge en $\mathbb{Q}_p$. ■

Corollaire 2.25. *[15] Une série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *avec* $a_n \in \mathbb{Q}_p$ *est convergente si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, nous avons aussi*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $a_n = S_n - S_{n-1}$ d'après le théorème 2.21 on a la série $\sum_{n=1}^{n} a_n$ converge si et seulement si a_n tend vers 0.

D'autre part, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge alors pour démontrer l'inégalité (2.4) on a

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ c'est trivial.
2) Sinon, on a $a_n \longrightarrow 0$, c-à-d il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n > N$, d'après la proposition 2.22. on a

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \right|_p$$

et donc

$$\max\{|a_n|_p \backslash 0 \leq n \leq N\} = \max_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|_p$$

D'où

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n \right|_p \leq \max\{|a_n|_p \backslash 0 \leq n \leq N\} = \max_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|_p$$

■

2.3.2 Séries entières p-adiques

Une série entière dans $\mathbb{Q}_p$ définit sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}_p$ et $x \in \mathbb{Q}_p$

L'ensemble des séries entières sur $\mathbb{Q}_p$ est notée par :$\mathbb{Q}_p[[x]]$.

Définition 2.26. *Le rayon de convergence d'une séries entière* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[x]]$ *est le nombre réel* $0 \leq r_f \leq \infty$ *définit par :*

$$r_f = sup\{r \geq 0 : |a_n|_p r^n \longrightarrow 0\}$$

Proposition 2.27. *[16]* (***Calcul de rayon de convergence***)
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *ou* $a_n \in \mathbb{Q}_p$, *on a la formule d'Hadamard*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}.$$

Proposition 2.28. *[15] Soit* $x \in \mathbb{Q}_p$ *et* $r \geq 0$ *tel que* $|a_n|_p r^n \longrightarrow 0$ *donc :*
La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge si* $|x|_p \leq r$ *.*

Démonstration.
Pour montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, il suffit de montrer que $|a_n x^n|_p \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$
On a

$$|a_n x^n|_p = |a_n|_p |x|_p^n \leq |a_n|_p r^n \longrightarrow 0$$

D'où

$$|a_n x^n|_p \longrightarrow 0, quand \quad n \longrightarrow +\infty.$$

■

Proposition 2.29. *[15] Soit* $x \in \mathbb{Q}_p$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge si* $|x|_p < r_f$ *et diverge si* $|x|_p > r_f$.

Démonstration. Si $|x|_p > r_f$ (cela ne peut arriver que si $r_f < \infty$), on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |x|_p |a_k|_p^{\frac{1}{k}} &= |x|_p \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|_p^{\frac{1}{k}} \\ &= |x|_p \frac{1}{r_f} > 1\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$, on a $|a_k|_p|x|_p^k > 1$. À savoir, le terme général $a_k x^k$ de la série ne tend pas vers 0, Alors la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$ diverge.
Inversement, si $|x|_p < r_f$(cela ne peut arriver que si $r_f > 0$).
On peut choisir : $|x|_p < r < r_f$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} r|a_k|_p^{\frac{1}{k}} = r \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|_p^{\frac{1}{k}} < 1$$

Nous en déduisons que pour certain grand N

$$\sup_{k\geq N} r|a_k|_p^{\frac{1}{k}} < 1$$

Par conséquent, $|a_k|_p r^k < 1$ pour tous $k \geq N$, et

$$|a_k x^k|_p = |a_k|_p r^k \left(\frac{|x|_p}{r}\right)^k < \frac{|x|_p^k}{r^k} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)$$

cela montre que le terme générale la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k$ tend vers zéro, et la série converge. ■

Définition 2.30. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{Q}_p$, et $x_0 \in D$. La fonction f est dite continue en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - x_0|_p < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|_p < \varepsilon.$$

Définition 2.31. *Soit $(a_n) \subset \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{C}_p$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On dit que f une série entière restreinte si $a_n \longrightarrow 0$.*
la norme Gauss donnée par

$$\|f(x)\| := \sup_{n\geq 0} |a_n|_p = \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

Proposition 2.32. *[23] Soit $f \in \mathbb{Z}\{x\}$, alors*

$$|f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0)|_p < \|f\| \cdot |xy|_p \quad (|x|_p < 1, |y|_p < 1).$$

si de plus f est impair, alors

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)|_p < \|f\| \cdot |xy(x+y)|_p \quad (|x|_p < 1, |y|_p < 1).$$

Démonstration. On a

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) = \sum_{n\geq 2} a_n((x+y)^n - x^n - y^n))$$

puisque chaque terme $(x+y)^n - x^n - y^n$ est divisible par xy, d'où le résultat. Quand f est impair

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = \sum_{n \quad impair \geq 0} a_n((x+y)^n - x^n - y^n)).$$

le seul terme avec n impair ≥ 3 reste dans la somme, puis

$$(x+y)^n - x^n - y^n = xy(x+y)p_n(x)$$

pour certains polynômes entier $p_n \in \mathbb{Z}[x]$. Par conséquent $\|p_n\| < 1$. ■

Lemme 2.33. *[26][17] Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{Q}_p$, une série p-adique dont le domaine de convergence est une boule ouverte et fermée $D \subset \mathbb{Q}_p$, alors $f : D \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ est une fonction continue sur D.*

Démonstration. On a f continue sur $D \Leftrightarrow f$ continue en x_0, $\forall x_0 \in D$

1) Si $x_0 = 0$

   f continue en 0 c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x-0|_p < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(0)|_p < \varepsilon$$

   On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)|_p &= |\sum_0^\infty a_n x^n - a_0|_p \\ &= |\sum_1^\infty a_n x^n|_p \\ &= |x|_p |\sum_1^\infty a_n x^{n-1}|_p \\ &\leq |x|_p \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p |x^{n-1}|_p \end{aligned}$$

   et comme on a $\max |a_n|_p |x^{n-1}|_p, n \geq 1$ existe car

$$|a_n|_p |x^{n-1}|_p \longrightarrow 0$$

   On pose $M = \max |a_n|_p |x^{n-1}|_p, n \geq 1$, donc

$$|f(x) - f(0)|_p \leq |x|_p M < \delta M < \varepsilon$$

   On prend

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

2) Si $x_0 \neq 0$

f continue en x_0 c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0|_p < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(0)|_p < \varepsilon$$

Soit $\delta < |x_0|_p$, on a

$$|x - x_0|_p < \delta < |x_0|_p \Rightarrow |x|_p = |x_0|_p (triangle - isocle)$$

On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)|_p &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n - a_n x_0^n) \right|_p \\ &\leq \max_{n \in \mathbb{N}} (|a_n x^n - a_n x_0^n|_p) \\ &= \max_{n \in \mathbb{N}} (|a_n|_p |x - x_0|_p |x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + ... + x^{n-i} x_0^{i-1} + ... + x_0^{i-1}|_p) \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} |x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + ... + x^{n-i} x_0^{i-1} + ... + x_0^{i-1}|_p &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x^{n-i} x_0^{i-1}|_p) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x|_p^{n-i} |x_0|_p^{i-1}) = |x_p|_p^{n-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)|_p &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|a_n|_p |x_0|_p^{n-1}) \delta \\ &= \frac{\delta}{|x_0|_p} \max_{1 \leq i \leq n} (|a_n|_p |x_0|_p^n) \end{aligned}$$

Comme la série converge en x_0, on a $a_n x_0^n \longrightarrow 0$ dans $\mathbb{Q}_p$.

Alors $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, donc

$$\exists M \geq 0, \quad telque \quad |a_n|_p |x_0^n|_p \leq M$$

D'où

$$|f(x) - f(x_0)|_p \leq \frac{\delta}{|x_0|_p} M < \varepsilon$$

Donc il suffit de prendre

$$\delta = \min(|x_0|_p, \frac{|x_0|_p \varepsilon}{M}).$$

■

Définition 2.34. (***Différentiabilité des fonction dans*** $\mathbb{Q}_p$)

1) *Soit* $D \subset \mathbb{Q}_p$ *et* $a \in D$. *Une fonction* $f : D \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ *est différentiable au point* a *si la dérivée* $f'(a)$ *de* f *en* a *existe et fini, tel que*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2) *Pour* $x, y \in D \subset \mathbb{Q}_p$, *on définit :*

$$\phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

On dit que f *est différentielle*$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a,a)} \phi_1 f(x, y) = l \in \mathbb{Q}_p$

dans ce cas on définit la norme $\|\|_1$ *par*

$$\|f\|_1 = \max(\|f\|, \|\phi f\|).$$

Remarque 2.7.

1) f *est différentiable sur* $D \Longleftrightarrow f$ *différentiable en* $x, \forall x \in D$.
2) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ *de même pour* fg *et* $\frac{f}{g}$.
3) *La dérivée d'un polynôme* $p(x) = \sum\limits_{0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}_p[x]$ *est* $p'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$.
4) $C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ *l'ensemble de fonctions dérivables.*

Définition 2.35. *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[x]]$, *la dérivée de* f *est défini sous la forme suivante :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Définition 2.36. *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[X]]$. *On note* D^k *l'opérateur de dérivation d'ordre* k *de* f , *i.e.,*

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x), k \geq 1.$$

Définition 2.37. *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[X]]$. *On définit la formule de Taylor sous la forme suivant :*

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{k \geq 1} h^k \frac{D^k f(x)}{k!}.$$

Proposition 2.38. *[17] La série* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}_p[[x]]$ *et sa dérivée*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ont le même rayon de convergence, i.e. $r_f = r_{f'}$.

Démonstration. On a : $\frac{1}{r_f} = \limsup_{n\to\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n}}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{f'}} &= \limsup_{n\to\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} (|na_n|_p^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |n|_p^{\frac{1}{n}} |a_n|_p^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} p^{\frac{-\vartheta(x)}{n}} |a_n|_p^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{r_f}.
\end{aligned}$$

■

2.3.3 Interpolation p-adique

Définition 2.39. *Une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{K}$ est dite une suite d'interpolation dans $\mathbb{K}$, s'il existe une fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(n) = a_n$.*

Proposition 2.40. *[13] Soit $m \in \mathbb{N}$, la suite des coefficients binomiaux $\binom{n}{m}$ s'interpole en la fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$ définie par*

$$B_m(s) = \binom{n}{m} = \frac{s(s-1)...(s-m+1)}{m!}.$$

Cette suite de fonctions est la base de Mahler $(B_m)_{m\geq 0}$ de $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$.

Remarque 2.8. *$C(\mathbb{Z}_p, K)$ l'ensemble de fonctions continues.*

Lemme 2.41. *[13] La suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ est une suite d'interpolation si et seulement si pour tout $\varepsilon \geq 0$, $\exists m_\varepsilon$ entier > 0 tel que si $k \in \mathbb{N}$ et $n = k + p^{m_\varepsilon}$, on a $|a_n - a_k|_p < \varepsilon$.*

Démonstration.

L'implication dans un sens est claire.

Réciproquement, si $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ et $|n-k|_p < p^{-m_\varepsilon}$, on a $n = k + lp^{m_\varepsilon}$; ainsi

$$|a_n - a_k|_p = \left| \sum_{j=1}^{l} (a_{k+jp^{m_\varepsilon}} - a_{k+(j-1)p^{m_\varepsilon}}) \right|_p \leq \max_{1\leq i\leq l} |a_{k+jp^{m_\varepsilon}} - a_{k+(j-1)p^{m_\varepsilon}}|_p < \varepsilon.$$

■

Remarque 2.9. *Si* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ *est une suite d'interpolation, on écrit parfois pour* $s \in \mathbb{Z}_p$ *on a*

$$f(s) = \lim_{n\to s} a_n.$$

Remarque 2.10. *Soit* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ *est une suite d'interpolation et soit* $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ *tel que* $f(n) = a_n$.

Rappelons que l'on a le développement de f *dans la base de Mahler* $f(s) = \sum_{j\geq 0} \alpha_j B_j(s)$, *où*

$$B_j(s) = \frac{s(s-1)...(s-j+1)}{j!}, \quad \alpha_j = \Delta^j f(0)$$

Δ *étant l'opérateur aux différence, définit par* $\Delta f(s) = f(s+1) - f(s) = \tau_1 f(s) - f(s)$, *alors* $\Delta = \tau_1 - id$. *Ainsi*

$$a_n = f(n) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \binom{n}{j} \Leftrightarrow \alpha_n = \Delta^n f(0) = \sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{n}{i} a_j$$

car $\Delta^n = \sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{n}{i} \tau_j$.

Proposition 2.42. *[13] (**Somme indéfinie**)*

Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction continue. L'équation aux différences*

$$\Delta F(s) = F(s+1) - F(s) = f(s), \quad s \in \mathbb{Z}_p$$

admet une solution continue unique $F : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ *telle que* $F(0) = 0$, *de plus* $n \in \mathbb{N}$, $F(s) = \lim_{n\to s} \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$ *que l'on écrit aussi*

$$Sf(s) = \sum_{j=0}^{s-1} f(j), \quad s \in \mathbb{Z}_p.$$

La fonction Sf *est appelée la somme indéfinie de* f.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

1) Si F existe, on a

$$F(n) - F(n-1) = f(n-1), n \geq 1$$

Ainsi

$$F(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j) + F(0) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$$

D'où, par passage à la limite, l'unicité de F.

2) Soit donc $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $F(0) = 0$ et $F(n) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$, $n \geq 1$. On a

$$F(n+1) - F(n) = f(n), n \geq 0$$

Il suffit de montrer que $(F(n))_{n\geq 0}$ est une suite d'interpolation.

Soit $m \geq 1$; on a

$$F(n+p^m) - F(n) = \sum_{j=n}^{n+p^m-1} f(j).$$

Posons $I_m = [n, n+p^m-1]$, on a $card(I_m) = p^m$, ainsi l'application canonique $\varphi_m : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = A_m$ induit une bijection de I_m sur A_m.

Soit $1 \leq k \leq m$, on déduit de la partition

$$A_m = \bigcup_{0\leq v\leq p^k-1} (v + p^k A_m)$$

la partition

$$I_m = \bigcup_{0\leq v\leq p^k-1} J_v$$

Où

$$J_v = \varphi^{-1}(v + p^k A_m) = (v + p^k\mathbb{Z}) \cap I_m$$

avec $card(J_v) = card(v + p^k A_m) = p^{m-k}$.

Alors

$$F(n+p^m) - F(n) = \sum_{v=0}^{p^k-1} \sum_{j\in J_v} f(j) = \sum_{v=0}^{p^k-1} \sum_{j\in J_v} (f(j) - f(v)) + \sum_{v=0}^{p^k-1} p^{m-k} f(v).$$

Il vient que

$$|F(n+p^m) - F(n)|_p \leq \max(\max_{v} \max_{v\in J_v} |f(j) - f(v)|_p |p|^{m-k} \|f\|)$$

Où

$$\|f\| = \sup_{s\in\mathbb{Z}_p} |f(s)|_p.$$

Posons $k = [\frac{m}{2}]$, on a d'une part

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} |p|_p^{m-[\frac{m}{2}]} = 0.$$

D'autre part, pour tout $0 \leq v \leq p^{[\frac{m}{2}]} - 1$ et tout $j \in J_v$, on a $|j - v|_p \leq |p|^{[\frac{m}{2}]}$.

Comme $\mathbb{Z}_p$ est compact, f est uniformément continue :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\eta_\varepsilon > 0 \quad \backslash \quad |s - t|_p < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(s) - f(t)|_p < \varepsilon$$

Mais , il existe m_ε tel que $\forall m \geq m_\varepsilon$, on a

$$|j - v|_p \leq |p|_p^{[\frac{m}{2}]} < \eta_\varepsilon$$

ainsi

$$|f(j) - f(v)|_p < \varepsilon$$

et

$$\max_{0 \leq v \leq |p|^{[\frac{m}{2}]-1}} \max_{v \in J_v} |f(j) - f(v)|_p < \varepsilon$$

On obtient

$$\lim_{m \to +\infty} |F(n + p^m) - F(n)|_p = 0$$

et $(F(n))_{n \geq 0}$ est une suite d'interpolation.

■

2.3.4 Développement de Mahler

Théorème 2.43. *(**K.Mahler**)[13][23]*
Soit $\mathbb{K}$ un extension complet de $\mathbb{Q}_P$.
Soient $B_0(y) = 1, B_n(y) = \frac{y(y-1)...(y-n+1)}{n!}$ les polynômes binomiaux.
Alors $\forall y \in \mathbb{Z}_p$, $B_n(y) \in \mathbb{Z}_p$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$.

Démonstration. Considérons pour $n \geq 0$, le polynôme binomial

$$B_n(Y) = \frac{Y(Y-1)...(Y-n+1)}{n!}.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, on a $B_n(m) = 0$, lorsque $m < n$ et aussi

$$B_n(m) = \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} \in \mathbb{N} \quad lorsque \quad m > n.$$

Soit $y \in \mathbb{Z}_p$; puisque $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ alors

$$\exists (m_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{N} \quad tel \quad que \quad \lim_{j \to +\infty} m_j = y$$

Mais B_n est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ et $B_n(m_j) \in \mathbb{N}$; ainsi

$$B_n(s) = \lim_{j \to +\infty} B_n(m_j) \in \mathbb{Z}_p$$

Il est associé à la suite $(y_n = n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Z}_p$ les polynômes $P_n(y) = (y - y_0)...(y - y_{n-1}) = y(y-1)...(1-n+1)$ tel que $P_n(y_n) = n(n-1)...(n-n+1) = n!$. Ainsi

$$Q_n(y) = \frac{P_n(y)}{P_n(y_n)} = B_n(y)$$

On déduit que $(B_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$. ■

Lemme 2.44. *[9] Pour tout suite $a_k \in \mathbb{Z}_p$ tel que $a_k \longrightarrow 0$ quand $k \to \infty$ la fonction*

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \binom{x}{k}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration.
Nous avons $\binom{x}{k} \in \mathbb{Z}_p$, le terme $a_k\binom{x}{k}$ tend vers 0 comme $k \to \infty$ que $f(x)$ est bien défini. De plus, pour la même raison ($i.e.|\binom{x}{k}|_p \leq 1$) il est uniformément convergent sur $\mathbb{Z}_p$, donc définit une fonction continue. ■

Proposition 2.45. *[9] Soit*

$$b_n = \sum_{0\leq k\leq n} a_k \binom{n}{k}$$

Alors

$$a_k = \sum_{0\leq m\leq n} (-1)^{k-m} b_m \binom{k}{m}.$$

Théorème 2.46. *[9] (**Mahler**)*
Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ une fonction continue, et on définit :

$$a_k = \sum_{0\leq m\leq k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(m)$$

1) *Si $f(x)$ est continue sur $\mathbb{Z}_p$ alors $v_p(a_k)$ tend vers l'infini quand k tends vers l'infini.*
2) *La fonction $f(x)$ est continue si seulement si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \binom{x}{k}$$

telle que la suite $a_k \in \mathbb{Z}_p$ tends vers 0, quand $k \to \infty$ pour la norme p-adique. Si $f(x)$ est continue, les coefficients a_k sont uniquement déterminés, on les appelés coefficients Mahler de f.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ une fonction continue :

1) On définit l'opérateur de différence directe Δ sur n'importe quelle fonction g de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$, par la formule

$$(\Delta g)(x) = g(x+1) - g(x)$$

Il est facile de prouver par induction que pour tout $k \geq 0$, on a

$$(\Delta^k g)(x) = \sum_{0 \leq m \leq k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} g(m+x)$$

Ainsi, $a_k = (\Delta^k f)(0)$.

Nous prouvons (1) par induction. Soit $r \geq 0$, et supposons que il existe $N_r \geq 0$, tel que $v_p((\Delta^k f)(x)) \geq r$ pour tout $k \geq N_r$ et $x \in \mathbb{Z}_p$. Ceci est vrai pour $r = 0$, puisque $N_0 = 0$, donc $f(x) \in \mathbb{Z}_p$ pour tout x. Soit $g(x) = (\Delta^{N_r} f)(x)/p^r$. Cette fonction est continue de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_p$. Puisque $\mathbb{Z}_p$ est compact, il est uniformément continue, donc il existe $M \geq 1$ tel que

$$x \equiv y(\mod p^M \mathbb{Z}_p) \Rightarrow g(x) \equiv g(y)(\mod p\mathbb{Z}_p), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p$$

Puisque p devise $\binom{p^M}{k}$ pour tout k sauf $k = 0$ et $k = p^M$ et cela implique que pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ On a :

$$\begin{aligned}(\Delta^{p^M} g)(x) &= \sum_{0 \leq m \leq p^M} (-1)^{p^M - m} \binom{p^M}{m} g(m+x) \\ &\equiv g(x+p^M) - g(x) \\ &\equiv 0(\mod p\mathbb{Z}_p)\end{aligned}$$

il vient que $v_p((\Delta^{k+p^M} f)(x)) \geq r+1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, donc par induction $v_p((\Delta^k f)(x)) \geq r+1$, pour tout $k \geq N_r + p^M$, ce qui démontre notre hypothèse d'induction, d'où $a_k = (\Delta^k f)(0)$.

(2) Supposons que f est continue sur $\mathbb{Z}_p$. En appliquant (1) les a_k tendent vers 0, car k tend vers infini. La fonction $g(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{x}{k}$ est bien définie et continue, nous avons $f(n) = g(n)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_+$, puisque f et g sont continue et comme $\mathbb{Z}_+$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ il s'ensuite que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$.

■

2.3.5 Intégrale de Volkenborn

Définition 2.47. *Soit $\mathbb{K}$ un extension complet de $\mathbb{Q}_p$.*
On dit que la fonction $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{K}$ est Volkenborn-intégrable si la suite $\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} g(j)$ a une limite dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} g(j).$$

les sommes $\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} g(j)$ sont analogues aux sommes de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(\frac{j}{n})$ d'une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Soit χ_m la fonction caractéristique de $p^m\mathbb{Z}_p$.

Proposition 2.48. *[13] L'application $\int_{\mathbb{Z}_p} : C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue pour la norme $\|\|_1$: en fait*

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx\right|_p \leq p\|g\|_1.$$

Alors, si $(g_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente dans $C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ vers la fonction g, tel que $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{Z}_p} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx$.

Démonstration. Il est clair que $\int_{\mathbb{Z}_p}$ est une forme linéaire.
Puisque $\|(Sg)'\| \leq \|(Sg)\|_1 \leq p\|g\|_1$, on a

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx\right|_p = |(Sg)'(0)|_p \leq \|(Sg)'\| \leq p\|g\|_1$$

En particulier $\left|\int_{\mathbb{Z}_p} g_n(x)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx\right|_p = \left|\int_{\mathbb{Z}_p} g_n(x) - g(x)\right|_p \leq p\|g_n - g\|_1$. ■

Corollaire 2.49. *[13]*
Soit $g = \sum_{n\geq 0} a_n B_n \in C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$, on a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} a_n.$$

Démonstration. On a $SB_n = B_{n+1}$ et $\int_{\mathbb{Z}_p} B_n(x)dx = B'_{n+1}(0)$.
Comme $B_{n+1}(x) = \frac{x(x-1)...(x-n)}{(n+1)!}$ et $B'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j\neq i}(x-j)$ alors

$$B'_{n+1}(0) = \frac{(-1)...(-n)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{Z}_p} B_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

et par continuité

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \sum_{n\geq 0} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} B_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} a_n.$$

■

Proposition 2.50. *[13]*

Soit $g \in C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$.

1) Soit m un entier ≥ 0. Pour $0 \leq j \leq p^m - 1$, on a

$$\int_{j+p^m\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \int_{p^m\mathbb{Z}_p} g(j+x)dx = p^{-m} \int_{\mathbb{Z}_p} g(j+p^m x)dx.$$

2) Soit $U_p = \mathbb{Z}_p \backslash p\mathbb{Z}_p$ le groupe des unités de $\mathbb{Z}_p$. On a

$$\int_{U_p} g(x)dx = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} (pg(x) - g(px))dx.$$

Démonstration. Soit $g \in C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$

1) Pour tout entier $n \geq m$, on a

$$\frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} g(l)\chi_{j+p^m\mathbb{Z}_p}(l) = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} g(j+p^m k) = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} g(j+l)\chi_{j+p^m\mathbb{Z}_p}(l).$$

Comme

$$\frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} g(j+p^m k) = p^{-m} \frac{1}{p^{n-m}} \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} g(j+p^m k)$$

On obtient par passage à la limite

$$\int_{j+p^m\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \int_{p^m\mathbb{Z}_p} g(j+x)dx = p^{-m} \int_{\mathbb{Z}_p} g(j+p^m x)dx.$$

2) On déduit de la partition $\mathbb{Z}_p = U_p \cup p\mathbb{Z}_p$ que pour tout fonction $g \in C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$, on a $g = g\chi_{U_p} + g\chi_{p\mathbb{Z}_p}$. Il vient que

$$\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \int_{U_p} g(x)dx + \int_{p\mathbb{Z}_p} g(x)dx = \int_{U_p} g(x)dx + p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} g(px)dx$$

et

$$\int_{U_p} g(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} (g(x) - p^{-1}g(px))dx.$$

■

Remarque 2.11. *Puisque* $U_p = \bigcup_{1\leq j\leq p-1}(j+p\mathbb{Z}_p)$ *est une partition, on a*

$$\int_{U_p} g(x)dx = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p-1}\int_{\mathbb{Z}_p} g(j+px)dx.$$

Remarque 2.12. *Soit* $g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{K}$ *une fonction continue et soit* Sg *la fonction somme indéfinie associée. On a* $\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1} g(j) = \frac{1}{p^n}(Sg(p^n) - Sg(0))$. *alors* g *est Volkenborn-intégrable si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^n}(Sg(p^n)$ *existe dans* $\mathbb{K}$. *En particulier, si* Sg *est dérivable en Zéro, on a* $\int_{\mathbb{Z}_p} g(x)dx = (Sg)'(0)$. *On déduit que toute fonction strictement différentiable est Volkenborn-intégrable.*

2.3.6 Logarithme et exponentielle p-adique

Dans cette sous section, on donne les définitions et les propriétés de logarithme et exponentielle p-adique.

1) Logarithme p-adique

Définition 2.51. *Soit* $a \in L = \{a \in \mathbb{Z}_p : |a-1|_p < 1\} = 1 + p\mathbb{Z}_p$. *La fonction logarithme notée "*$\ln_p$*" est définie de* L *dans* $\mathbb{Q}_p$ *par :*

$$\ln_p(a) = \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(a-1)^n}{n}$$

avec r_p *est le rayon de convergence.*

Remarque 2.13. *On peut écrire aussi :*

$$\ln_p(a+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}.$$

Théorème 2.52. *[17] Soit* $a, b \in 1 + p\mathbb{Z}_p$, *Alors* $ab \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ *et* $\ln_p(ab) = \ln_p(a) + \ln_p(b)$.

Démonstration. On sait que $\log(1+A) = \sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A^n}{n} \in \mathbb{Q}[[x]] \subset \mathbb{Q}_p[[x]]$
avec $m^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$
Si $|a-1|_p < 1$ et $|b-1|_p < 1$ on a

$$\log(1+A) + \log(1+B) = \log(1+A+B+AB)$$

Alors
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A^n}{n}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{B^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(A+B+AB)^n}{n}=0$$
il suffit de développer les racines pour avoir :

$$(A-\frac{A^2}{2}-\frac{A^3}{3}-...)+(B-\frac{B^2}{2}-\frac{B^3}{3}-...)$$
$$-(A+B+AB-\frac{A^2+2AB+B^2+A^2B^2+2AB^2+2A^2B}{2}+...)=0$$

On pose A-1=a, on obtient : $\ln_p(ab)=\ln_p(a)+\ln_p(b)$. ■

Proposition 2.53. *[17][24] Si $|a|_p<r_p$ on a*

$$|\ln_p(a+1)|_p=|a|_p.$$

Démonstration. On a
$$\ln_p(a+1)=a+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}$$
Donc
$$|\ln_p(a+1)|_p=|a+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}|_p=|a|_p.$$

■

Proposition 2.54. *[17] La fonction $\ln_p$ est différentiable sur $1+p\mathbb{Z}_p$ et $\ln_p'(a)=\frac{1}{a}$.*

Démonstration. Pour tout $a\in 1+p\mathbb{Z}_p$, on a

$$\begin{aligned}\ln_p'(a)&=(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(a-1)^n}{n})'\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}\frac{(a-1)^{n-1}}{n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(a-1)^n\\&=\frac{1}{1+(a-1)}\\&=\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

■

2) Exponentielle p-adique

Définition 2.55. *Soit $r_p > 0$. La fonction exponentielle p-adique notée "$\exp_p$" est définie de $D_p = \{a \in \mathbb{Z}_p : |a|_p < r_p\}$ dans $\mathbb{Q}_p$ par :*

$$\exp_p(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Théorème 2.56. *[17] exponentiel p-adique converge dans le disque*

$$D_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}\}$$

et diverge si $|a|_p > p^{\frac{-1}{p-1}}$.

Démonstration. On a

$$r_p^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |\frac{1}{n!}|_p^{\frac{1}{n}}$$

Alors on a :

$$r_p^{-1} = \limsup_{n\to\infty}(p^{\frac{n-S_{p(n)}}{p-1}})^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}(p^{\frac{1}{p-1}(1-\frac{S_{p(n)}}{n})}) = p^{\frac{1}{p-1}}$$

D'où

$$r_p = p^{\frac{1}{p-1}}.$$

■

Proposition 2.57. *[17] Si $a, b \in D_p$, alors $a + b \in D_p$ et on a*

$$\exp_p(a + b) = \exp_p(a) \exp_p(b).$$

Démonstration. Il suffit de remplacer par les série formelles :

On a

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{Q}[[x]] \subset \mathbb{Q}_p[[x]].$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{A+B}{n!})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{A^n}{n!}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{A^n}{n!}) = 0 \\ &= (1 + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}) \\ &- (1 + A + B + \frac{A^2}{2}...)(1 + A + B + \frac{B^2}{2} + ...) \quad = 0\end{aligned}$$

Donc si on pose $A = a \in D_p$ et $b \in D_p$, Alors :

$$\exp_p(a+b) = \exp_p(a)\exp_p(b).$$

■

Proposition 2.58. *[17] La fonction* $\exp_p$ *est différentiable sur* D_p *et* $\exp_p'(a) = \exp_p(a)$.

Démonstration. Pour tout $a \in D_p$, on a

$$\exp_p'(a) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = \exp_p(a).$$

■

Proposition 2.59. *Pour tout* $a \in D_p$, *on a*

$$|\exp_p(a) - 1|_p = |a|_p.$$

Démonstration. On sait que

$$\exp_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Alors

$$\exp_p(a) - 1 = a + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

De plus on a

$$|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n!}|_p \geq \sup_{n\geq 2} \frac{|a^n|_p}{|n!|_p} = \max_{n\geq 2} \frac{|a^n|_p}{|n!|_p} < |a|_p$$

Donc

$$|\exp_p(a) - 1|_p = |a + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n!}|_p = |a|_p.$$

■

2.4 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette section nous étudions les séries entières complexes p-adiques est les fonctions analytiques dans $\mathbb{C}_p$.

2.4.1 Séries entières complexes p-adiques

Définition 2.60. *Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série dont le terme général est $b_n(x-b)^n$ où n est un entier naturel $x, b \in \mathbb{C}_p$ et $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$.*

Définition 2.61. (***Rayon de convergence***)
le rayon de convergence d'une série complexe p-adique $\sum_{n\geq 0} b_n(x-b)^n$ qu'on note R, où $0 \leq R \leq +\infty$, est défini par

$$R = \sup\{|x-b|_p; x \in \mathbb{C}_p \; et \sum_{n\geq 0} b_n(x-b)^n \; converge\} \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty.$$

Remarque 2.14. *La règle de Hadamard reste valable pour les séries entières dans $\mathbb{C}_p$.*

Exemple 2.62.
Soit la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}(x-b)^n}{n}$, on a

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|_p} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|_p^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|n|_p^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^{-\frac{v_p(n)}{n}}} \\ &= 1 \quad (car \frac{v_p(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0) \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}(x-b)^n}{n}$ converge sur le disque $D^-(b,1) \subset \mathbb{C}_p$
Pour $R = 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} |b_n|_p.1 \neq 0$$

D'ou la série diverge sur le cercle $C(b,1)$. C'est-à-dire que la série converge sur le disque $D^+(b,1)$.

2.4.2 Fonctions analytiques complexes p-adique

Définition 2.63. *La fonction f :$D^+(b,r) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est analytique sur $D^+(b,r)$ pour tout $r > 0$, s'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ telle que $|b_n|r^n \longrightarrow 0$, et on a*

$$\forall x \in D^+(b,r), \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x-b)^n.$$

Définition 2.64. *Une fonction f :$D^-(b,R) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est analytique sur $D^-(b,R)$ s'il existe une suite unique $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}_p$ satisfaisant $|b_n|r^n \longrightarrow 0$ pour r, 0<r<R, et telle que*

$$\forall x \in D^-(b,r), \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x-b)^n.$$

Remarques 2.2.

1) Une fonction de variable complexe p-adique définie sur un disque $D(b,R)$ ou $b \in \mathbb{C}_p$ est dite analytique sur ce disque lorsqu'elle admet un développement en série entière en tout point de $D(b,R)$.

2) Si $R = +\infty$ alors f est analytique sur tout $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.

Exemple 2.65.

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^{2n^2}x^n$, $x \in \mathbb{C}_p$ on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|_p}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-2n}} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Alors $\sum_{n\geq 0} p^{2n^2}x^n$ est convergente sur $\mathbb{C}_p$ donc f est une fonction entière.

Notation 2.1. *On note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ et $\mathcal{A}(D(b,R))$ l'ensemble des fonctions analytiques sur le disque $D(b,R)$.*

Remarque 2.15. *L'ensemble $\mathcal{A}(D^+(b,R))$, (resp $\mathcal{A}(D^-(b,R))$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$.*

Théorème 2.66. *[1]* (***Dérivée des fonctions analytiques***)

1) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x-b)^n$ *un élément de* $\mathcal{A}(D^+(b,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(b,R))$*)*
Alors f *est continue et dérivable sur* $D(b,R)$ *et sa dérive* $f^{'} \in \mathcal{A}(D^+(b,R))$*(resp* $\mathcal{A}(D^-(b,R))$*) tel que* $f^{'}(x) = \sum_{n\geq 1} nb_n(x-b)^{n-1}$
plus généralement si $R > 0$*, alors la série* f *est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de* f*, de plus on a*

$$f^{(k)}(x) = k\,!\sum_{n\geq k} C_n^k b_n(x-b)^{n-k},\ \forall k \geq 0.$$

2) Le rayon de convergence de $f^{'}$ *est égal au rayon de convergence de* f*.*

Démonstration.

1) i) Soit x un élément fixé de $D^+(b,R)$, et soit $h \in \mathbb{C}_p$ tel que $x+h \in D^+(b,R)$.
Alors

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n\geq 0} b_n[(x+h-b)^n - (x-b)^n] \\ &= h\sum_{n\geq 0} b_n[(x+h-b)^{n-1} + (x+h-b)^{n-2}(x-b) + ... \\ &... + (x+h-b)(x-b)^{n-2} + (x-b)^{n-1}] \end{aligned}$$

la somme de droite est majorée en valeur absolu par $\max_{n\geq 1}|b_n|R^{n-1}$ qui est fini car $\lim_{n\to+\infty}|b_n|R^{n-1} = 0$
on a

$$|f(x+h) - f(x)|_p \leq |h|\max_{n\geq 0}|b_n|_p R^{n-1}$$

d'où

$$\lim_{h\to+\infty}|f(x+h) - f(x)|_p = 0$$

d'ou f est continue sur $D^+(b,R)$.
Maintenant posons $g(x) = \sum_{n\geq 1} nb_n(x-b)^{n-1}$, $g \in \mathcal{A}(D^+(b,R))$ car $\forall n \geq 1$
On a

$$0 \leq |nb_n|_p r^{n-1} < |b_n|_p R^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

mais

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) = h\sum_{n\geq 0} b_n[&(x+h-b)^{n-1}\\ &+(x+h-b)^{n-2}(x-b)+...\\ &...+(x+h-b)(x-b)^{n-2}+(x-b)^{n-1}\\ &-n(x-b)^{n-1}] = h\end{aligned}$$

(*somme majore en valeur absolue par* $\max_{n\geq 2}|b_n|R^{n-2}$)

Donc

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n\geq 1} nb_n(x-b)^{n-1} \text{ et } f' \in \mathcal{A}(D^+(b,R)).$$

ii) Soit $x \in D^-(b,R)$ et , $0 < r < R$ tel que $x \in D^+(b,r)$ alors f est analytique sur $D^+(b,r)$, elle est d'après i) continue et dérivable en x et on a

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} nb_n(x-b)^{n-1}$$

donc f est continue et dérivable sur $D^-(b,R)$, sa dérivée est un élément de $\mathcal{A}(D^-(b,R))$ car $f' \in \mathcal{A}(D^+(b,r))$ pour $0 < r < R$

par récurrence on montre l'égalité

$$f^{(k)}(x) = k\,!\sum_{n\geq k} C_n^K b_n(x-b)^{n-k}.$$

2) Il est facile de vérifier que le rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

■

Chapitre 3

Fonction gamma p-adique

Dans ce chapitre, on commence par la définition et les propriétés de la fonction gamma p-adique, ensuite nous étudions la formule des compléments et la formule de multiplication. En plus, nous traitons les propriétés analytiques de Γ_p. Nous terminons par la fonction gamma dans $\mathbb{Z}_2$.

3.1 Définitions et propriétés de Γ_p

Dans cette sous section, on donne les définitions et les propriétés de Γ_p .

Définition 3.1. *Soit n un entier naturel non nul. La factorielle p-adique de n, noté $((n)!)_p$ est défini par*

$$((n)!)_p = \prod_{1\leq j\leq n,(p,j)=1} j$$

et par convention $(0!)_p = 1$.

Définition 3.2. *Soit n un entier naturel non nul, on définit la fonction gamma p-adique, on la note Γ_p, par :*

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{j=1,(p,j)=1}^{n-1} j.$$

Le théorème suivant est appelé la généralisation de la congruence de Wilson, c'est la clé de certains résultats dans cette section.

Proposition 3.3. *[23] Soit $a, s \geq 1$ deux entier, pour $p \neq 2$ alors :*

$$\prod_{a \leq j \leq a+p^s, (p,j)=1} j \equiv -1(\mod p^s).$$

Démonstration. La famille de nombres $a, a+1...a+p^s-1$ forme un système complet de représentants des classes $\mod p^s$, et la famille de nombres qui sont premier avec p (ie : $a \leq j \leq a+p^s$ tel que $(j,p)=1$) forme un système complet de représentants des éléments inversibles $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$. On note le groupe multiplication des élément inversibles de $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ par F, ce groupe est défini par

$$F = (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^* = \{j \in \mathbb{Z} : a \leq j \leq a+p^s \quad \textit{tel que} \quad (j,p)=1\}$$

Nous avons donc,

$$\prod_{j=a,(j,p)=1}^{a+p^s-1} j = \prod_{g \in F} g \tag{3.1}$$

Or $g \in F \Longrightarrow \exists h \in F$, tel que : $gh = 1$, et donc dans le produit (3.1) il ne reste que les éléments d'ordre 2 (les éléments qui ont leurs inverses lui-même) car les autres éléments sont éliminés dans le produit même par leurs inverses.(ie si g est un élément de F alors son inverse g^{-1} est aussi dans F et la multiplication de g avec g^{-1} donne 1) Donc :

$$\prod_{j=a,(j,p)=1}^{a+p^s-1} j = \prod_{g \in F} g = \prod_{g^2=1} g$$

On va déterminé les éléments d'ordre 2 dans F. Soit g un élément de F, on a

$$\begin{aligned} g^2 = 1 &\Longrightarrow g^2 - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (g-1)(g+1) = 0 \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que $g \neq 1$ et $g \neq -1$, donc $(g-1)$ et $(g+1)$ sont des diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$. D'autre part, p est le plus petit diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$, alors p divise $(g-1)$ et p divise $(g+1)$. Ce qui veut dire que $g \equiv 1(\mod p)$ et $g \equiv -1(\mod p)$, on aura l'équivalence suivante $2 \equiv 0(\mod p)$, qui est une contradiction avec $p \neq 2$. Alors $g = 1$ ou $g = -1$, d'où le résultat.

conclusion :

$$\prod_{g^2=1} = 1 \times -1 = -1 \Leftrightarrow \prod_{a \leq j \leq a+p^s, (p,j)=1} j \equiv -1(\mod p^s).$$

■

Proposition 3.4. *[7] Pour $p \neq 2$, la factorielle p-adique satisfait la congruence suivante :*

$$((n+p^s)!)_p \equiv -((n)!)_p \mod p^s.$$

Lemme 3.5. *[23] La fonction gamma p-adique $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ est continue, on a $\Gamma_p(n+1) = h_p(n)\Gamma_p(n)$, tel que : $h_p(n) = \begin{cases} -n, & si \quad n \in \mathbb{Z}_p^\times \\ -1, & si \quad n \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$*

Démonstration. La continuité de Γ_p découle du corollaire 3.5. Alors, on va montrer que $\Gamma_p(n+1) = h_p(n)\Gamma_p(n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \Gamma_p(n+1) &= (-1)^{n+1} \prod_{j=1,(j,p)=1}^{n} j \\ &= (-1)^n \prod_{j=1,(j,p)=1}^{n-1} j h_p(n) \\ &= \Gamma_p(n) h_p(n) \end{aligned}$$

■

Donc on peut montrer la propriété suivante de la fonction Γ_p :

Corollaire 3.6. *[13]*
Soient $n, s \in \mathbb{N}, s \geq 1$. Si $p \neq 2$, on a

$$\Gamma_p(n+p^s) \equiv \Gamma_p(n)(\mod p^s)$$

Démonstration. Posons $I_s = [n, n+p^s-1]$, on a déjà remarqué que l'application canonique $\varphi_s : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p^s\mathbb{Z}_p$ induit une bijection de I_s sur $\mathbb{Z}_p/p^s\mathbb{Z}_p$. Si l'on pose I'_s égal à l'ensemble des $j \in I_s$ tel que $p|j$ et I''_s égal à l'ensemble des $j \in I_s$ tel que $(p,j) = 1$ on a $I_s = I'_s \cup I''_s$ avec

$$\varphi_s(I'_s) = p\mathbb{Z}_p/p^s\mathbb{Z}_p \quad et \quad \varphi_s(I''_s) = (\mathbb{Z}_p/p^s\mathbb{Z}_p)^* = F_s$$

le groupe des élément inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_p/p^s\mathbb{Z}_p$. De plus $card(I'_s) = p^{s-1}$ et $card(I''_s) = p^s - p^{s-1}$.
Puisque $\Gamma_p(n+1) = h_p(n)\Gamma_p(n)$, on voit aussitôt que

$$\Gamma_p(n+m) = \prod_{j=0}^{m-1} \tau_p(n+j)\Gamma_p(n) = \prod_{n \leq j \leq n+m-1} h_p(j)\Gamma_p(n).$$

En particulier $\Gamma_p(n+p^s) = \prod_{j\in I_s} h_p(j)\Gamma_p(n)$. Comme $I_s = I'_s \cup I''_s$ et $h_p(j) = -1$
Lorsque $j \in I'_s$ et $h_p(j) = -j$, lorsque $j \in I''_s$, on a

$$\prod_{j\in I_s} \tau_p(j) = (-1)^{p^s} \prod_{j\in I''_s} j.$$

Ainsi

$$\varphi_s(\Gamma_p(n+p^s)) = (-1)^{p^s} \prod_{j\in I''_s} \varphi_s(j) \cdot \varphi_s(\Gamma_p(n)).$$

Puisque $\prod_{j\in I''_s} \varphi_s(j) = \prod_{\sigma\in F_s} \sigma$, et puisque pour tout groupe commutatif fini, on a

$$\prod_{\sigma\in F_s} \sigma = \prod_{\sigma^2=1} \sigma$$

on obtient

$$\prod_{j\in I''_s} \varphi_s(j) = \prod_{\sigma^2=1} \sigma$$

Supposons $p \neq 2$ on voit facilement que $\sigma^2 = 1$ si seulement si $\sigma = +1$ ou $\sigma = -1$
D'où

$$\prod_{j\in I''_s} \varphi_s(j) = -1$$

et

$$\varphi_s(\Gamma_p(n+p^s)) = (-1)^{p^s} \cdot (-1) \cdot \varphi_s(\Gamma_p(n)) = \varphi_s(\Gamma_p(n))$$

C'est -à-dire

$$\Gamma_p(n+p^s) = \Gamma_p(n)(\mod p^s).$$

■

Le corollaire 3.5. confirme que la suite $(\Gamma_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ remplir les condition d'interpolation. Ce qui nous donne la définition de la fonction gamma p-adique dans $\mathbb{Z}_p$.

Définition 3.7. *Pour $x \in \mathbb{Z}_p$, on définit la fonction Γ_p par la formule :*

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to x} (-1)^n \prod_{1\leq j\leq n-1,(p,j)=1} j.$$

Théorème 3.8. *[23] La fonction gamma p-adique $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ est continue. On a les propriétés suivants :*

1) $\Gamma_p(0) = 1, \Gamma_p(1) = -1, \Gamma_p(2) = 1, \Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1} n!, (1 \leq n < p)$.

2) $|\Gamma_p(x)|_p = 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}_p$.

3) $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p$ *et* $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$.

4) $\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x)$, *tel que :* $h_p(x) = \begin{cases} -x, & si \quad x \in \mathbb{Z}_p^\times \\ -1, & si \quad x \in p\mathbb{Z}_p \end{cases}$

Démonstration. La continuité de Γ_p découle du corollaire 3.5. Pour démontrer les autres propriétés, nous avons :

1) Nous calculons certaines valeurs de Γ_p :

   On a $(0!)_p = 1 \Rightarrow \Gamma_p(0) = 1$ et

$$\begin{aligned} \Gamma_p(1) &= h_p(0)\Gamma_p(0) = -1 \\ &= (-1)^1(1!)_p \\ &= -1. \end{aligned}$$

   Pour $x = 2$, $\Gamma_p(2) = (-1)^2 \cdot (1!)_p = 1$

   On a $1 \leq n < p \Rightarrow 1 \leq j < p \Rightarrow (p,j) = 1$ $(n!)_p = \prod_{j=1,(p,j)=1} j = \prod_{j=1} j = n!$ alors

$$\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1}(n!)_p = (-1)^{n+1}n!$$

2) La propriété $|\Gamma_p(x)|_p = 1$, vient du fait que

$$|\Gamma_p(x)|_p = |\lim_{n \to x}(-1)^n \prod_{j=1}^{n} j|_p = p^0 = 1.$$

3) Pour démontrer les inégalités $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p$ et $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p$, soit $m, n \in \mathbb{N}$, si $|m-n|_p = 1$ alors

$$|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)|_p \leq \max(|\Gamma_p(m)|_p, |\Gamma_p(n)|_p) \leq 1 = |m-n|_p$$

   Si $|m-n|_p = \frac{1}{p^s} < 1$, alors $\exists k \in \mathbb{N}, m = n + kp^s$ et $(k,p) = 1$, donc

$$\begin{aligned} \Gamma_p(m) = \Gamma_p(n+kp^s) &= (-1)^{n+kp^s} \prod_{j=1,(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j \\ &= (-1)^{n+kp^s} \prod_{j=1,(j,p)=1}^{n-1} j \prod_{j=n,(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j \\ &= (-1)^n \prod_{j=1,(j,p)=1}^{n-1} j(-1)^{kp^s} \prod_{j=n(j,p)=1}^{n-1+kp^s} j \\ &= \Gamma_p(n)(-1)^k \prod_{j=n(j,p)=1}^{n-1+kp^s} j \end{aligned}$$

D'ou

$$\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n) = \Gamma_p(n)(-1)^k \prod_{j=n(j,p)=1}^{n+k\cdot p^s-1} j-1$$

Par suite

$$|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)|_p = \left|(-1)^k \prod_{j=n(j,p)=1}^{n+k\cdot p^s} j-1\right|_p$$

car $|\Gamma_p(n)|_p = 1$, par définition de Γ_p nous écrivons

$$\prod_{j=n,(j,p)=1}^{n+k\cdot p^s-1} j = \prod_{j=n,(j,p)=1}^{n+p^s-1} j \times \prod_{j=p^s+n,(j,p)=1}^{n+2p^s-1} j \times ... \times \prod_{j=n+(k-1)p^s,(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j$$

On a

$$\prod_{j=n+(k-1)p^s,(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j = \prod_{i=0,(i,p)=1}^{p^s-1} (n+(k-1)p^s+i) \equiv -1 \mod p^s, \forall k \geq 1$$

Donc

$$\prod_{j=n,(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j \equiv (-1)(-1)...(-1) \mod p^s \equiv (-1)^k \mod p^s$$

$$\left[(-1)^k \prod_{j=n(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j-1\right] \equiv [(-1)^k(-1)^k...(-1)^k] \mod p^s$$

Ce qui implique :

$$|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(n)|_p = \left|(-1)^k \prod_{j=n(j,p)=1}^{n+kp^s-1} j-1\right|_p \leq \frac{1}{p^s} = |m-n|_p$$

par continuité cette propriété reste vraie pour les éléments de $\mathbb{Z}_p$.

4) Par passage a limite quand n tend vers x dans 3.7.

■

Proposition 3.9. *[23]* (***Développement de Mahler de*** Γ_p)
Posons $\Gamma_p(x+1) = \sum_{k\geq 0} a_k \binom{x}{k}$ *alors les coefficients* a_k *vérifient la relation :*

$$\exp_p(x + \frac{x^p}{p}) \cdot \frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{k\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{a_k}{n!} x^n.$$

Démonstration. Calculons $e^{-x} f(x))$, où $f(x) = \sum_{k\geq 0} \Gamma_p(k+1)\frac{x^k}{k!}$ pour cela, nous faisons une sommation partielle sur le corsets $\mod p$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma_p(mp+j+1)}{(mp+j)!} \cdot x^{mp+j}$$

on peut utilisé

$$\Gamma_p(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{[\frac{n}{p}]!p^{[\frac{n}{p}]}}$$

pour $n = mp + j[\frac{n}{p}] = m$, on a

$$\Gamma_p(mp+j+1) = (-1)^{mp+j+1}\frac{(mp+j)!}{m!p^m}.$$

on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Gamma_p(mp+j+1)}{(mp+j)!}\cdot x^{mp+j} = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{mp+j+1}(mp+j)!}{(mp+j)!\cdot p^m m!}\cdot x^{mp+j}\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^{mp+j+1}(\frac{x^p}{p})^m\cdot\frac{x^j}{m!} = -\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{(-x)^p}{p}\right)^m\cdot\frac{(-x)^j}{m!}\\
&= -\exp_p\left(\frac{(-x)^p}{p}\right)\cdot\sum_{j=0}^{p-1}(-x)^j\\
&= -\exp_p\left(\frac{x^p}{p}\right)\cdot\frac{1-x^p}{1-x}
\end{aligned}$$

finalement

$$e^{-x}f(x) = \exp_p(x+\frac{x^p}{p})\cdot\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}a_k\frac{x^k}{k!}.$$

■

3.2 Formule de Multiplication et Formule des Compléments

Dans cette section, on va donner l'analogue p-adique de la formule de multiplication de Legendre-Gauss, et la formule des compléments.

Théorème 3.10. *[13][23] (**Formule de Multiplication**)*
Supposons $p \neq 2$. Posons pour $x \in \mathbb{Z}_p$, $l(x)$ le représentant de x modulo $p\mathbb{Z}_p$ tel que $1 \leq l(x) \leq p$ et $l_1(x) = \frac{x-l(x)}{p} \in \mathbb{Z}_p$.
Soit $m \in \mathbb{Z}_+$ tel que $(m,p) = 1$ On a :

$$\prod_{j=0}^{m-1}\Gamma_p\left(\frac{x+j}{m}\right) = \prod_{j=0}^{m-1}\Gamma_p\left(\frac{j}{m}\right)\cdot m^{1-l(x)}\cdot(m^{p-1})^{-l_1(x)}\cdot\Gamma_p(x)$$

Démonstration. Considérons pour tout nombre premier p, la fonction suivante

$$f_m(x) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{x+j}{m}\right)^{-1} \cdot \Gamma_p(x).$$

On a : $f_m(0) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{j}{m}\right)^{-1}$, de plus

$$f_m(x+1) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{x+j+1}{m}\right)^{-1} \cdot \Gamma_p(x+1) = \frac{h_p(x)}{h_p(\frac{x}{m})} \cdot f_m(x) = \psi_m(x) \cdot f_m(x)$$

Où $\psi_m(x) = \frac{h_p(x)}{h_p(\frac{x}{m})}$ est égale à m si $|x|_p = 1$ et égale à 1, lorsque $|x|_p < 1$. En particulier, pour $j \geq 1$, on a

$$f_m(j) = f_m(j-1)\psi_m(j-1)$$

et multipliant pour j parcourant $[1, n]$, on obtient

$$f_m(n) = \prod_{j=1}^{n} \psi_m(j-1) \cdot f_m(0) = \prod_{j=1,(p,j)=1} m \cdot f_m(0) = m^{n-1-[\frac{n-1}{P}]} \cdot f_m(0)$$

D'où :

Pour $p \neq 2$, on vérifie que $n - 1 - [\frac{n-1}{p}] = l(n) - 1 + (p-1)l_1(n)$.

Il vient que

$$f_m(n) = m^{l(n)-1(p-1)l_1(n)f_m(0)}$$

donc :

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p(\frac{n+j}{m}) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p(\frac{j}{m}) \cdot m^{1-l(n)} \cdot (m^{p-1})^{-l_1(n)} \cdot \Gamma_p(n).$$

Ces formules sont celles du théorème aux valeurs entières ensuite on passe à la limite. ■

Remarque 3.1. *$l(x)$ le représentant de x modulo $p\mathbb{Z}_p$ tel que $1 \leq l(x) \leq p$. et $l(x) \equiv x($ mod $p)$.*

Théorème 3.11. *[13] (**Formule des compléments**)*

Pour $p \neq 2$, posons pour $x \in \mathbb{Z}_p$, $l(x)$ le représentant de x modulo $p\mathbb{Z}_p$ tel que $1 \leq l(x) \leq p$. On a

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{l(x)}.$$

Démonstration. Rappelons que

$$\Gamma_p(n)\Gamma_p(1-n) = (-1)^{n-[\frac{n-1}{p}]}, \quad \forall n \geq 0.$$

Par définition on a pour $n \geq 0$, $n = mp + l(n)$, $1 \leq l(n) \leq p$. Alors, pour $p \neq 2$, on a $n - 1 = mp + l(n) - 1$ et $[\frac{n-1}{p}] = m$.
D'où

$$l(n) = n - p[\frac{n-1}{p}]$$

et

$$\begin{aligned}(-1)^{l(n)} &= (-1)^{n-p[\frac{n-1}{p}]} = (-1)^n \cdot (-1)^{-p[\frac{n-1}{p}]} \\ &= (-1)^{n-[\frac{n-1}{p}]} = \Gamma_p(n)\Gamma_p(1-n).\end{aligned}$$

On achève la démonstration du théorème en remarquant que la fonction l (resp.σ) est continue. En fait l (resp σ) est une fonction localement constante. En effet, par définition, pour $p \neq 2$ et pour n, entier ≥ 0, on a $l(n) = k$, si $n \equiv k(\mod p)$, $1 \leq k \leq p$.
Ainsi $l(x) = k$, lorsque $x \in k + p\mathbb{Z}_p$, $1 \leq k \leq p-1$ et $l(x) = p$, lorsque $x \in p\mathbb{Z}_p$. ■

Corollaire 3.12. *[13]*
Si $p \neq 2$, on a $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ et $\Gamma_p(\frac{1}{2})^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$.

Démonstration.
On a

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_p\left(1-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{l(\frac{1}{2})}$$

comme $p + 1 \equiv 1(\mod p)$, alors

$$\frac{p+1}{2} \equiv \frac{1}{2} \quad (\mod p) \quad et \quad l\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{p+1}{2}$$

Ainsi

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$$

Si $p = 4m + 1$, on a

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{2m+1} = -1$$

c'est-à-dire que $\Gamma_p(\frac{1}{2})$ est une racine carrée de -1 dans $\mathbb{Q}_p$. ■

3.3 L'étude analytique de la fonction gamma p–adique

Dans cette section nous étudions l'analyticité de la fonction gamma p–adique. On commence par la fonction $\log_p \Gamma_p$.

3.3.1 Analyticité de $\log_p \Gamma_p$ sur $p\mathbb{Z}_p$

Théorème 3.13. *[13] La fonction $\log_p \circ \Gamma_p(x)$ est analytique sur $p\mathbb{Z}_p$, et on a*

$$\log_p \Gamma_p(x) = \lambda_0 x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{2m(2m+1)} \cdot x^{2m+1}$$

Où $\lambda_0 = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \log_p t dt$ et $\lambda_m = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} t^{-2m} dt$.

Démonstration.

Considérons pour $x \in \mathbb{Z}_p$ et pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $g_{n,x} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ définie par $g_{n,x}(u) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} u^{-n}$, pour $|u|_p = 1$ et $g_{n,x}(u) = 0$, lorsque $|u|_p < 1$. On vérifie facilement que la fonction $g_{n,x}$ est de classe C^1 telle que $\|g_{n,x}\|_1 = \frac{|x|_p^{n+1}}{|n(n+1)|_p}$. C'est une conséquence de la convergence de la suite $(g_{n,x})_{n\geq 0}$ dans $C^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$.

En fait, la convergence de la série ci-dessus donnant $\log_p \circ \Gamma_p(x)$ est uniforme. Pour cela, considérons la suite de fonction $\varphi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p, n \geq 1$, définies par $\varphi_n(u) = u^{-2n}$ si $|u|_p = 1$ et $\varphi_n(u) = 0$, pour $|u|_p < 1$. Les fonction φ_n sont de classe C^1 tel que $\|\varphi_n\|_1 \leq 1$. Ainsi, on a

$$|\lambda_n|_p = \left| \int\limits_{U_p} u^{-2n} du \right|_p = \left| \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \varphi_n(u) du \right|_p \leq p$$

Alors pour $x \in p\mathbb{Z}_p$, on a

$$\left| \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} \right|_p |x^{2n+1}|_p \leq p(2n+1)p^{-2n-1}$$

D'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in p\mathbb{Z}_p} \left| \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1} \right|_p = 0$$

et la série $\lambda_0 x - \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1}$ est uniformément convergente sur $p\mathbb{Z}_p$. ■

Remarque 3.2.

On a $|\lambda_m|_p \leq p$ et $|\lambda_0|_p \leq 1$, en effet ;

$$|\lambda_0|_p = \left| \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} \log_p t dt \right|_p = |(\log_p \circ \Gamma_p)'(0)|_p$$
$$= \left| \frac{\Gamma_p'(0)}{\Gamma_p(0)} \right|_p = |\Gamma_p'(0)|_p \leq 1 \quad car \quad \Gamma_p \in \mathbb{Z}_p$$

et si on définit la norme de f par

$$\|f\| = \sup\{f(x), x \in \mathbb{Z}_p\}$$

Alors

$$|\lambda_m|_p = \left| \int_{\mathbb{Z}_p^*} t^{-2m} dt \right|_p \leq p\|t^{-2m}\| = p.$$

Lemme 3.14. *[13]*

1) *La série formelle* $\varphi(z) = \lambda_0 z - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} z^{2n+1}$ *converge dans la boule unité ouverte* $D^-(0,1)$ *de* $\mathbb{C}_p$ *vers la fonction analytique* $\psi(x) = \lambda_0 x - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1}$.

2) *Posons* $q = p$ *si* $p \neq 2$ *et* $q = 4$ *lorsque* $p = 2$.
On a $\psi(D^+(0,q^{-1})) \subset D^+(0,q^{-1})$*,ou'* $D^+(0,q^{-1})$ *et la fermé de* $\mathbb{C}_p$ *de centre* 0 *et la rayon* q^{-1}.

Démonstration.

Pour $n \geq 1$, on a

$$\left| \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} \right|_p \leq p \frac{1}{|2n(2n+1)|_p} \leq p \cdot \max(2n, (2n+1)) = (2n+1)p.$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\geq 1} \left| \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} \right|_p^{\frac{1}{2n+1}} \leq 1$$

Donc le rayon de convergence de la série est ≥ 1. Ce qui démontre 1).

lorsque $p \neq 2$, pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x|_p \leq p^{-1}$, on a comme dans la démonstration du théorème ci-dessus

$$\left| \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} \right|_p |x^{2n+1}|_p \leq (2n+1)p^{-2n} \leq p^{-1}, \forall n \geq 1.$$

Pour $n = 0$, on déduit que

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \left| \int_{U_p} \log_p(u) du \right|_p &= \int_{\mathbb{Z}_p} \Delta(\log_p \circ \Gamma_p)(u) du \\ &= (\log_p \circ \Gamma_p)'(0) = \frac{\Gamma_p'(0)}{\Gamma_p(0)} = \Gamma_p'(0) \end{aligned}$$

Mais $|\Gamma_p(m) - \Gamma_p(0)|_p \leq |p|_p^m$.

Ainsi $\frac{\Gamma_p(m)-\Gamma_p(0)}{p^m} \in \mathbb{Z}_p$ et $\lambda_0 = \Gamma_p'(0) = \lim_{m\to+\infty} \frac{\Gamma_p(p^m)-\Gamma_p(0)}{p^m} \in \mathbb{Z}_p$. Il vient que

$$|\lambda_0 x|_p \leq |x|_p \leq p^{-1}.$$

■

Corollaire 3.15. *[13][23] Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a*

$$\frac{\Gamma_p'(x)}{\Gamma_p(x)} = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \log_p(x+t)dt$$

$$(\log_p \circ \Gamma_p)''(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \frac{1}{x+1}dt$$

Démonstration. On a $\frac{1}{x+t} = \frac{1}{t}\frac{1}{(1+\frac{x}{t})} = \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{t^n}$, peut être intégrer terme à terme

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} \frac{1}{x+t}dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \int_{\mathbb{Z}_p^*} t^{-n-1}dt$$

puisque les intégrales de la fonction impair, il ne reste que la puissance paire de t

$$\int_{\mathbb{Z}_p^*} \frac{1}{x+t}dt = -\sum_{m\geq 1}\lambda_m x^{2m-1}$$

avec $\lambda_m = \int_{\mathbb{Z}_p^*} t^{-2m}dt$ cela confirmé notre précédente expression pour les coefficients de $\log_p \circ \Gamma_p$. ■

3.3.2 Analyticité de Γ_p sur $\mathbb{Z}_p$

Théorème 3.16. *[13] Si $p \neq 2$, Γ_p est analytique sur $p\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration.

Supposons $p \neq 2$. la fonction $\psi(x) = \lambda_0 x - \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n}{2n(2n+1)}x^{2n+1}$ étant analytique sur $D^+(0,p^{-1})$, avec $\psi(D^+(0,q^{-1})) \subset D^+(0,q^{-1}) \subset E_p$, la fonction $\exp \circ \psi$ définie sur $D^+(0,p^{-1})$ est analytique.

D'autre part, si $x \in p\mathbb{Z}_p \subset D^+(0,p^{-1})$ on a $\log_p \circ \Gamma_p(x) \in D^+(0,p^{-1})$.

Ainsi $\exp_p \circ \log_p \circ \Gamma_p = \exp \circ \psi$ est analytique sue $p\mathbb{Z}_p$.

Mais pour $x \in p\mathbb{Z}_p$, on a $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p < 1$. D'où

$$\Gamma_p(x) \in 1 + p\mathbb{Z}_p \subset 1 + E_p.$$

il vient que

$$\exp_p(\log_p \circ \Gamma_p(x)) = \Gamma_p(x) = \exp_p \circ \psi(x), \quad \forall x \in p\mathbb{Z}_p$$

et donc Γ_p composée de fonctions analytiques est analytique sur $p\mathbb{Z}_p$. ■

Théorème 3.17. *[13] Si $p \neq 2$, Γ_p est localement analytique d'ordre 1 sur $\mathbb{Z}_p$ et non analytique sur $\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration.

Puisque $\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x)$, avec $h_p(x) = -x$, si $|x|_p = 1$ et $h_p(x) = -1$, lorsque $|x|_p < 1$, on a

$$\forall j \geq 1, \quad \Gamma_p(x+j) = \prod_{j=0}^{j-1} h_p(x+i) \cdot \Gamma_p(x).$$

Faisons la démonstration pour $p \neq 2$.

Si $1 \leq i \leq p-1$ et $x \in p\mathbb{Z}_p$, on a $|x+i|_p = 1$; d'où

$$\Gamma_p(x+j) = (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} h_p(x+i) \cdot \Gamma_p(x).$$

Il vient que pour $1 \leq j \leq p-1$, la fonction $x \to \Gamma_p(x+j)$ est analytique sur $p\mathbb{Z}_p$ et donc Γ_p est analytique sur $p\mathbb{Z}_p, 1+p\mathbb{Z}_p, ..., (p-1)+p\mathbb{Z}_p$. En d'autre termes Γ_p est analytique d'ordre 1 sur $\mathbb{Z}_p$.

Comme pour $x \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{l(x)}$$

Où $1 \leq l(x) \leq p$ est tel que $|l(x) - x|_p < 1$, si Γ_p était analytique sur $\mathbb{Z}_p$, la fonction $x \to (-1)^{l(x)}$ serait analytique .

Ce qui est absurde,car cette dernière fonction est localement constante. ■

3.4 La fonction gamma dans $\mathbb{Z}_2$

Dans cette section on va étudier le cas particulier $p = 2$, on va donner la définition de Γ_2 et quelques propriétés.

Définition 3.18. *Soit n un entier naturel non nul. La factorielle 2-adique de n, noté $((n)!)_2$ est défini par*

$$((n)!)_2 = \prod_{1 \leq j \leq n, (2,j)=1} j.$$

Définition 3.19. *Soit n un entier naturel non nul, on définit la fonction gamma 2-adique, on la note Γ_2, par :*

$$\Gamma_2(n) = (-1)^n \prod_{j=1,(2,j)=1}^{n-1} j.$$

C'est-à-dire que $\Gamma_2(n) = (-1)^n((n-1)!)_2$.

Définition 3.20. *Pour* $x \in \mathbb{Z}_2$, *on définit la fonction* Γ_2 *par la formule :*

$$\Gamma_2(x) = \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{1 \leq j \leq n-1, (2,j)=1} j$$

Proposition 3.21. *[23] Pour* $p = 2$, $s \geq 3$ *on a*

$$\prod_{j=0,(j,2)=1}^{2^{s-1}} (n+j) \equiv -1 \pmod{2^s}.$$

Démonstration.

Nous montrons par récurrence que les représentants des élément inversible de F d'ordre 2 sont : $1, 2^s - 1, 2^{s-1} - 1, 2^{s-1} + 1$. En effet ;

Pour $s = 3$, les élément inversibles de $\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont :

$$1, 3 = 2^{3-1} - 1, 5 = 2^{3-1} + 1, 7 = 2^3 - 1$$

Supposons que l'hypothèse de récurrence est varie jusqu'à l'ordre $s-1$, et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre s. Soit g un élément de F tel que

$$g^2 = 1 \Longrightarrow g^2 \equiv 1 \mod 2^s \Longrightarrow g^2 \equiv 1 \mod 2^{s-1}$$

Donc par hypothèse $g \in \{1, 2^{s-2} - 1, 2^{s-2} + 1, 2^{s-1} - 1\} \mod 2^{s-1}$. On va traiter les 4 cas :

1) Si $g \equiv 1 \mod 2^{s-1}$, alors :

$$\begin{aligned} g \equiv 1 \mod 2^{s-1} &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, g = k \cdot 2^{s-1} + 1 \\ &\Longrightarrow g^2 = k^2 2^{2(s-1)} + k2^s + 1 = 2^s(k^2 2^{s-2} + k) + 1 \end{aligned}$$

or $0 \leq g \leq 2^{s-1}$ ce qui nous donne

$0 \leq k2^{s-1} + 1 \leq 2^s - 1 \Longrightarrow -1 \leq k \leq 2$ et $k \in \mathbb{Z}$

d'où $k = 0 \Longrightarrow g = 1$ et $k = 1 \Longrightarrow g = 2^{s-1}$.

2) Si $g \equiv 1 \mod 2^{s-1}$, alors :

$$\begin{aligned} g \equiv -1 \mod 2^{s-1} &\Longrightarrow g = k \cdot 2^{s-1} - 1, k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow g^2 = k^2 2^{2(s-1)} - k2^s + 1 = 2^s(k^2 2^{s-2} - k) + 1 \end{aligned}$$

or $0 \leq g \leq 2^{s-1}$ ce qui nous donne

$$0 \leq k2^{s-1} - 1 \leq 2^{s-1} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2^{s-1}} \leq k \leq 2$$

d'où $k = 1 \Longrightarrow g = 2^{s-1} - 1$ et $k = 2 \Longrightarrow g = 2^s - 1$.

3) Si $g \equiv (2^{s-2}+1) \mod 2^{s-1}$, alors :

$$g = k2^{s-1} + 2^{s-2} + 1$$

mais ceci ne donne pas $g^2 = 1 \mod 2^s$ donc ce cas est exclu.

4) Si $g \equiv (2^{s-2}-1) \mod 2^s$, on aurait pas $g^2 = 1 \mod 2^s$ et ce cas aussi exclu. Donc les élément de F d'ordre 2 sont : $\{1, 2^s-1, 2^{s-1}-1, 2^{s-1}+1\}$ et l'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre s, et on a :

$$\begin{aligned}\prod_{g\in F, g^2=1} g &= 1(2^s-1)(2^{s-1}-1)(2^{s-1}+1)\\ &= (2^s-1)(2^s2^{s-2}-1) \equiv 1 \mod 2^s.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.22. *la factorielle 2-adique satisfait les congruence suivante*

$$((n+2)!)_p \equiv ((n)!)_p \mod 2^s, sip = 2.$$

Théorème 3.23. *[13] Si $p = 2$, Γ_2 est localement analytique d'ordre 3 sur $\mathbb{Z}_2$ et non analytique d'ordre 2 sur $\mathbb{Z}_2$.*

Démonstration.
On montre que Γ_2 est analytique sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 < \frac{1}{2^2}\}$ donc sur $2^3\mathbb{Z}_2$.
et comme pour tout $1 \leq j \leq 2^3 - 1 = 7$, on a :

$$\Gamma_2(x+j) = h_2(x)h_2(1+x)...h_2(j-1+x) \cdot \Gamma_2(x)$$

Donc

$$\Gamma_2(x+j) \quad est \quad analytique \quad sur \quad 2^3\mathbb{Z}_2.$$

Par suite, Γ_2 est analytique sur chaque sous ensemble de $\mathbb{Z}_2$ de la forme $1 + 2^3\mathbb{Z}_2$, $2 + 2^3\mathbb{Z}_2, ..., 7 + 2^3\mathbb{Z}_2$ qui sont des disque de rayon 2^{-3}, et donc Γ_2 est localement analytique d'ordre 3. ■

Corollaire 3.24. *[13]*
Soient $n, s \in \mathbb{N}, s \geq 1$. Pour $p = 2$ et $s \neq 2$, on a

$$\Gamma_2(n+2^s) \equiv \Gamma_2(n) \mod 2^s).$$

Démonstration. D'après la démonstration du corollaire 3.5, on a

$$\prod_{j\in I''_s} \varphi_s(j) = \prod_{\sigma^2=1} \sigma$$

Si $p = 2$ alors :

Ou bien $s = 1$, dans ce cas $F_1 = \{1\}$. D'où

$$\Gamma_2(n+2) \equiv \Gamma_2(n)(\mod 2).$$

Ou bien $s = 2$, on a $f_2 = \{1, -1\}$ et

$$\prod_{j=1,(2,j)=1}^{4} \varphi_2(j) = -1.$$

D'où

$$\Gamma_2(n+4) \equiv -\Gamma_2(n)(\mod 4).$$

Ou bien $s \geq 3$, dans ce cas on voit que

$$\{\sigma \in G_s/\sigma^2 = 1\} = \{1, -1, 1 + \varphi_s(2^{s-1}), -1 + \varphi_s(2^{s-1}\}.$$

D'où

$$\prod_{\sigma^2} \sigma = -1 \cdot (1 + \varphi_s(2^{s-1})) \cdot (-1 + \varphi_s(2^{s-1})) = -1 \cdot (-1 + \varphi_s(2^{s-1})) = -1 \cdot -1 = 1$$

Et $\Gamma_2(n + 2^s) = \Gamma_2(n)(\mod 2^s)$. ■

Théorème 3.25. *[13][23] La fonction gamma 2-adique $\Gamma_2 : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Q}_2$ est continue. Soient $x, y \in \mathbb{Z}_2$, on a :*

$$|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)|_2 \leq |x - y|_2, \quad \textit{lorsque} \quad |x - y|_2 \neq \frac{1}{4}$$

et

$$|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)|_2 \leq 2|x - y|_2, \quad \textit{lorsque} \quad |x - y|_2 = \frac{1}{4}$$

Démonstration. Montrons d'abord ces relations pour les entiers naturels, en effet : soient $a, b \in \mathbb{N}$ on suppose $a < b$

Cas 1 : si $|b - a|_2 = 1$, on a

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 \leq \max(|\Gamma_2(b)|_2, |\Gamma_2(a)|_2) \leq 1 = |b - a|_2 \tag{3.2}$$

Cas 2 : soit $s \in \mathbb{N}$, si $|b-a|_2 = \frac{1}{2^s} < 1$, alors $\exists k \in \mathbb{N}, b = a + k2^s$ et $(k,2) = 1$, et donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_2(b) = \Gamma_2(a+k2^s) &= (-1)^{a+k2^s} \prod_{j=1,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \\ &= (-1)^a \prod_{j=1,(j,2)=1}^{a-1} j \cdot p(-1)^{a+k2^s} \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \\ &= \Gamma_2(a) \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \end{aligned} \tag{3.3}$$

Alors

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 = |\Gamma_2(a)|_2 \left| \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \right|_2 = \left| \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \right|_2 \tag{3.4}$$

On a

$$\prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j = \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+2^s-1} j \times \prod_{j=a+2^s,(j,2)=1}^{a+22^s-1} j \times ... \times \prod_{j=a+(k-1)2^s,(j,2)=1}^{a+ki2^s-1} j$$

Le théorème de Wilson généralisé implique que pour $s \geq 3$ chaque facteur de produit précédent satisfait :

$$\prod_{j=a+(k-1)2^s,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j = \prod_{i=0,(i,2)=1}^{2^s-1} (a + (k-1)2^s + i) \equiv 1 \mod 2^s, \forall k \geq 1$$

Alors

$$\prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j - 1 \equiv 1 - 1 \mod 2^s \equiv 0 \mod 2^s$$

Ce qui implique

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 = \left| \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j - 1 \right|_2 \leq \frac{1}{2^s} = |b-a|_2$$

Nous étudions les cas possible de s :

1) Pour $s = 0$, on a :

$$|b-a|_2 = \frac{1}{2^0} = 1 \quad (le \quad cas \quad prcdent)$$

2) Pour $s = 1$, on a :

$$|b-a|_2 = \frac{1}{2^0} \quad et \quad |\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 \equiv 1 - 1 \mod 2 \equiv 0 \mod 2$$

Donc

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 \leq \frac{1}{2} = |b-a|_2$$

Donc pour $s \neq 2, a, b \in \mathbb{N}$, $|b-a|_2 = \frac{1}{2^s}$ on a :

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 \leq |b-a|_2$$

3) Pour $s = 2$, $|b-a|_2 = \frac{1}{4}$ on a :

$$\prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^2-1} j = \prod_{\alpha=0,(\alpha,2)=1}^{2^2-1} (a+\alpha) = \prod_{\alpha=0,(\alpha,2)=1}^{3} (a+\alpha) \equiv 1\times 3 \mod 2^s \equiv -1 \mod 2^s$$

car a et $(a+2)$ sont de mémé parité ainsi que $(a+1)$ et $(a+3)$

de mémé pour

$$\prod_{j=a+(k-1)2^s,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j \equiv 1\times 3 \mod 2^2 \equiv -1 \mod 2^2$$

D'où

$$\prod_{i=a,(i,2)=1}^{n+k2^s-1} j \equiv (-1)(-1)...(-1) \mod 2^2 \equiv (-1)^k \mod 2^2$$

$$\equiv -1 \mod 2^2 \tag{3.5}$$

et $(k,2) = 1$

Par suite :

$$\prod_{i=0,(i,2)=1}^{2^s-1} j-1 \equiv -1-1 \mod 2^2 \equiv 2 \mod 2^2$$

Ce qui implique

$$\left| \prod_{j=a,(j,2)=1}^{a+k2^s-1} j-1 \right|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2}$$

et donc

$$|\Gamma_2(b) - \Gamma_2(a)|_2 = \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2^2} = 2|b-a|_2$$

Par passage à la limite on trouve que la propriété reste vraie pour les entiers 2-adiques.

■

Théorème 3.26. *[13] (**Formule des compléments**)*
Pour $p = 2$ et $x = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in \mathbb{Z}_2$, $a_i \in \{0,1\}$, posons $\sigma(x) = a_1$. Alors

$$\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x) = (-1)^{\sigma(x)+1}.$$

Démonstration. Rappelons que

$$\Gamma_p(n)\Gamma_p(1-n) = (-1)^{n-[\frac{n-1}{p}]}, \quad \forall n \geq 0.$$

Par définition on a pour $n \geq 0$, $n = mp + l(n)$, $1 \leq l(n) \leq p$. Dans le cas $p = 2$, considérons le développement 2-adique $n = a_0 + a_1 2 + ... + a_t 2^t$ de n.

Ou bien $a_0 = 1$, alors on a

$$n - 1 = a_1 2 + ... + a_t 2^t$$

et

$$[\frac{n-1}{2}] = a_1 2 + ... + a_t 2^{t-1}$$

D'où

$$\begin{aligned} n - [\frac{n-1}{2}] &= 1 + a_1 + (2-1)2a_2 + ... + (2-1)a_t 2^{t-1} \\ &= 1 + \sigma(n) + 2q. \end{aligned}$$

il vient que

$$(-1)^{n-[\frac{n-1}{p}]} = (-1)^{1+\sigma(n)}$$

Ou bien $a_0 = 0$, alors

$$n - 1 = -1 + a_1 2 + ... + a_t 2^t = 1 - 2 + a_1 2 + ... + a_t 2^t$$

et

$$[\frac{n-1}{2}] = -1 + a_1 2 + ... + a_t 2^{t-1}$$

Il vient que

$$n - [\frac{n-1}{2}] = 1 - a_1 - (a_1 - a_2)2 + ... + (a_t - a_{t-1})2^{t-1} + a_t 2^t$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (-1)^{n-[\frac{n-1}{p}]} &= (-1)^{1-\sigma(n)} \\ &= (-1)^{1+\sigma(n)}. \end{aligned}$$

On a donc démontre que $\Gamma_2(n)\Gamma_2(1-n) = (-1)^{1+\sigma(n)}$, $\forall n \geq 0$.

On achève la démonstration du théorème en remarquant que la fonction l (resp.σ) est continue. En fait l (resp σ) est une fonction localement constante. En effet, par définition, pour $p = 2$, on a $\sigma(x) = 0$, si $x \in 4\mathbb{Z}_2 \cup (1 + 4\mathbb{Z}_2)$ et $\sigma(x) = 1$, lorsque $x \in (2 + 4\mathbb{Z}_2) \cup (3 + 4\mathbb{Z}_2)$. ■

Théorème 3.27. *[13][23] (**Formule de Multiplication**)*

Soit $m \geq 1$ Alors

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2\left(\frac{x+j}{m}\right) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2\left(\frac{j}{m}\right) \cdot m^{-\sigma(x)} \cdot \Gamma_2(x)$$

Démonstration. Pour $p = 2$, $f_m(n) = m^{-\sigma(n)} \cdot f_m(0)$ C'est à-dire :

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2(\frac{n+j}{m}) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2(\frac{j}{m}) \cdot m^{-\sigma(n)} \cdot \Gamma_2(n).$$

Ces formules sont celles du théorème aux valeurs entières ensuite on passe à la limite. ■

Théorème 3.28. *[13] Si $p = 2$, Γ_p est analytique sur $2^3\mathbb{Z}_2$.*
la fonction G_2 définie en posant $G_2(x) = \Gamma_2(x)$, lorsque $|x|_2 < 4^{-1}$ et $G_2(x) = -\Gamma_2(x)$, pour $|x|_2 = 4^{-1}$, est analytique sur $4\mathbb{Z}_2$.

Démonstration.
Pour $p = 2$ on a

$$\log_2 G_2(x) = \log_2 \Gamma_2(x) \quad pour \quad tout \quad |x|_2 = 4^{-1}$$

on a la fonction $\exp \circ t$ est analytique sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 \leq 4^{-1}\}$, on a

$$x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 \leq 4^{-1} \Rightarrow |\Gamma_2(x) - \Gamma_2(0)|_2 < 4^{-1} \quad \Rightarrow |\Gamma_2(x) - 1|_2 < 4^{-1} \Rightarrow \Gamma_2 \in 1 + E$$

Pour $x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 \leq 4^{-1}$, on a $| - \Gamma_2(x) - 1|_2 < 4^{-1}$
Et donc pour tout $x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 \leq 4^{-1}$, $G_2(x) \in 1 + E$
Par suite la fonction G_2 égal à $\exp \cdot \log_2 \cdot G_2$ est analytique sur $\{x \in \mathbb{Q}_2, |x|_2 \leq 4^{-1}\}$. ■

Lemme 3.29. *[13]*

1) *La série formelle $\varphi(z) = \lambda_0 z - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} z^{2n+1}$ converge dans la boule unité ouverte $D^-(0,1)$ de $\mathbb{C}_p$ vers la fonction analytique $\psi(x) = \lambda_0 x - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} x^{2n+1}$.*
2) *Posons $q = p$ si $p \neq 2$ et $q = 4$ lorsque $p = 2$.*
   On a $\psi(D^+(0, q^{-1})) \subset D^+(0, q^{-1})$,ou' $D^+(0, q^{-1})$ et la fermé de $\mathbb{C}_p$ de centre 0 et la rayon q^{-1}.

Démonstration.
1) vérifier (Lemme 3.14) pour $p = 2$ et pou tout $x \in \mathbb{C}_2$ tel que $|x|_p \leq 4^{-1}$, on a

$$\left|\frac{\lambda_n}{2n(2n+1)}\right|_p |x^{2n+1}|_p = \frac{|\lambda_n|_p}{|2n|_p} |x^{2n+1}|_p \leq \frac{2 \cdot 2^{-2n-2}}{2^{-1}|n|_p} = \frac{2^{-2n}}{|n|_p} \leq n2^{-2n} \leq 2^{-2}, \forall n \geq 1.$$

Pour $n = 0$, on voit comme ci-dessus que $|\lambda_0 x|_p \leq q^{-2}$.
Alors, puisque l'on a pour $|x|_p \leq q^{-1}$, $\lambda_n x^{2n+1} \in D^+(0, q^{-1})$, $\forall n \geq 0$, on a obtient $\psi(D^+(0, q^{-1})) \subset D^+(0, q^{-1})$. ■

Chapitre 4

Applications de la fonction gamma p-adique

4.1 L'analogue p-adique de la factorielle de Roman

4.1.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.

Soit $m \in \mathbb{Z}$, le Roman de m noté $\lfloor m \rceil$ est défini par :

$$\lfloor m \rceil = \begin{cases} m, & si \quad m \neq 0 \\ 1, & si \quad m = 0 \end{cases}$$

On a la définition suivante :

Définition 4.2.

Soit un entier réel m, on définit la factorielle de Roman notée $\lfloor m \rceil!$ par :

$$\lfloor m \rceil! = \begin{cases} m!, & si \quad m \geq 0 \\ \frac{(-1)^{m+1}}{(-1-m)!}, & si \quad m < 0 \end{cases}$$

Proposition 4.3. *[24] Soit un entier réel m, alors :*

1) $\lfloor m \rceil! = \lfloor n \rceil \lfloor m-1 \rceil!$.

2) $\frac{\lfloor m \rceil!}{\lfloor m-k \rceil!} = \lfloor m-k+1 \rceil \quad si \quad k > 0$.

Proposition 4.4. *[24]**(Théorème de Knuth)** Pour tout entier m, on a la relation suivante :*

$$\lfloor m \rceil! \lfloor -m-1 \rceil! = \begin{cases} (-1)^m, & si \quad m < 0 \\ (-1)^{m+1}, & si \quad m \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration. On a

1) Si $m \geq 0$. Alors $(-1-m) < 0$, donc $\lfloor m \rceil! = n!$ et

$$\lfloor -m-1 \rceil! = \frac{(-1)^m}{(-(-m-1)-1)!} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \lfloor m \rceil! \lfloor -m-1 \rceil! &= m! \frac{(-1)^m}{m!} \\ &= (-1)^m. \end{aligned}$$

2) Si $m < 0$. Donc $(-m-1) \geq 0$, alors

$$\lfloor m \rceil! = \frac{(-1)^{m+1}}{(-m-1)!} \quad et \quad \lfloor -m-1 \rceil! = (-m-1)!$$

D'où

$$\begin{aligned} \lfloor m \rceil! \lfloor -m-1 \rceil! &= m! \frac{(-1)^{m+1}}{(-m-1)!} (-m-1)! \\ &= (-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

■

Définition 4.5. *Soit un entier m, on définit l'analogue p-adique de la factorielle de Roman notée $\lfloor m \rceil!_p$ par la relation suivante :*

$$\lfloor m \rceil!_p = \begin{cases} (m!)_p, & si \quad m \geq 0 \\ \frac{(-1)^{m+1}}{((-m-1)!)_p}, & si \quad m < 0 \end{cases}$$

4.1.2 Relation avec Γ_p

Proposition 4.6. *[7] Pour Soit $m \in \mathbb{Z}$, on a la relation suivante :*

$$\lfloor m \rceil!_p = \begin{cases} (-1)^{m+1} \Gamma_p(m+1), & si \quad m \geq 0 \\ (-1)^{m+1-[-\frac{m+1}{p}]} \Gamma_p(m+1), & si \quad m < 0 \end{cases}$$

Démonstration. D'après le théorème (3.11) de la fonction gamma p-adique, on a

$$\Gamma_p(m+1)\Gamma_p(-m) = (-1)^{m+1+[\frac{m}{p}]}$$

Pour $k = -m \in \mathbb{Z}_-^*$, alors

$$\Gamma_p(k)\Gamma_p(1-k) = (-1)^{1-k+[-\frac{k}{p}]}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Gamma_p(k) &= \frac{(-1)^{1-k+[-\frac{k}{p}]}}{\Gamma_p(1-k)} = \frac{(-1)^{1-k+[-\frac{k}{p}]}}{(-1)^{1-k}((1-k-1)!)_p} \\ &= \frac{(-1)^{[-\frac{k}{p}]}}{((-k)!)_p}.\end{aligned}$$

alors pour tout entier m on a

$$\Gamma_p(m+1) = \begin{cases} (-1)^{m+1}(m!)_p, & si \quad m \geq 0 \\ \frac{(-1)^{[-\frac{m+1}{p}]}}{((-m-1)!)_p}, & si \quad m < 0 \end{cases}$$

■

Proposition 4.7. *[7] La fonction $\lfloor . \rceil !_p$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :*

$$\lfloor m+1 \rceil !_p = \lfloor m+1 \rceil_p \lfloor m \rceil !_p$$

Avec le nombre de Roman p-adique donné par :

$$\lfloor m \rceil_p = \begin{cases} m, & si \quad |m|_p = 1 \\ 1, & si \quad |m|_p < 1 \end{cases}$$

Démonstration. On a les cas suivants :

1) Si $m > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\lfloor m+1 \rceil !_p = ((m+1)!)_p &= \prod_{j=0,(j,p)=1}^{m+1} j \\ &= \prod_{j=0,(j;)=1}^{m} j \lfloor m+1 \rceil_p \\ &= \lfloor m \rceil !_p \lfloor m+1 \rceil_p\end{aligned}$$

2) Si $m < 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lfloor m+1 \rceil !_p &= \frac{(-1)^{m+1+1}}{((-(m+1)-1)!)_p} = \frac{(-1)^m}{((-m-2)!)_p} \\
&= \frac{(-1)^m}{\prod\limits_{j=1,(j,p)=1}^{-m-2} j} = \frac{(-1)^m}{\prod\limits_{j=0,(j,p)=1}^{-m-1} j} \lfloor -(m+1) \rceil_p \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{\prod\limits_{j=1,(j,p)=1}^{-m-1} j} \lfloor m+1 \rceil_p \\
&= \lfloor m \rceil !_p \lfloor m+1 \rceil_p
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.8. *[7] La fonction $\lfloor m \rceil !_p$ vérifie la relation suivante :*

$$\lfloor m \rceil !_p \lfloor -m-1 \rceil !_p = \begin{cases} (-1)^m, & si \quad m \geq 0 \\ (-1)^{m+1}, & si \quad m < 0 \end{cases}$$

Démonstration. On va étudier deux cas :

1) Si $m \geq 0$, on a

$$\lfloor -m-1 \rceil !_p = \frac{(-1)^m}{((-(m+1)-1)!)_p} \quad et \quad \lfloor m \rceil !_p = ((m)!)_p$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lfloor m \rceil !_p \lfloor -m-1 \rceil !_p &= ((m)!)_p \cdot \frac{(-1)^m}{((-(m+1)-1)!)_p} \\
&= \frac{(-1)^m \cdot ((m)!)_p}{((m)!)_p} \\
&= (-1)^m.
\end{aligned}$$

2) Si $m < 0$, on a

$$\lfloor m \rceil !_p = \frac{(-1)^{m+1}}{(-(m+1)!)_p} \quad et \quad \lfloor -m-1 \rceil !_p = ((-m-1)!)_p$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lfloor m \rceil !_p \lfloor -m-1 \rceil !_p &= \frac{(-1)^{m+1}}{(-(m+1)!)_p} \cdot ((-m-1)!)_p \\
&= \frac{(-1)^m \cdot ((-m-1)!)_p}{((-m-1)!)_p} \\
&= (-1)^{m+1}.
\end{aligned}$$

■

4.2 Congruences de Kazandzidis

Comme deuxième application, on va utiliser la fonction gamma p-adique pour démontrer des congruences pour les coefficients binomiaux, qui généralisent la congruence classique suivante :

$$\binom{pn}{pk} \equiv \binom{n}{k} \quad (mod \quad pn\mathbb{Z}_p).$$

Théorème 4.9. *[23] Pour $p \geq 5$, nous avons*

$$\binom{pn}{pk} \equiv \binom{n}{k} \quad (mod \quad p^3nk(n-k)\binom{n}{k}\mathbb{Z}_p). \tag{4.1}$$

Pour $p = 3$, on a

$$\binom{3n}{3k} \equiv \binom{n}{k} \quad (mod \quad 3^2nk(n-k)\binom{n}{k}\mathbb{Z}_3). \tag{4.2}$$

Démonstration. La forme de ces congruences suggère que nous devrions prouver (lorsque $p \geq 5$)

$$\binom{pn}{pk}/\binom{n}{k} = 1 \quad (mod \quad p^3nk(n-k)\binom{n}{k}\mathbb{Z}_p).$$

Il est clair que le côté gauche est une unité p-adique, on peut l'exprimer en termes de Γ_p comme suit :

$$\binom{pn}{pk}/\binom{n}{k} = \frac{\Gamma_p(pn)}{\Gamma_p(pk)\Gamma_p(pl)} \quad (k+l=n).$$

La congruence de Kazandzidis indique que cette unité appartient à un sous-groupe $1+p^r\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^*$ avec un entier $r > 0$ bien déterminé. L'unité précédente peut être étudié au moyen du logarithme : Nous avons en effet prouvé que $|\log_p \xi|_p = |\xi - 1|_p$ si $|\xi - 1|_p < r_p$, avec $r_p = \frac{1}{p^{\frac{1}{1-p}}}$. D'autre part, nous avons également $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p$. Donc, on peut démontrer que

$$\Gamma_p(px) \in 1 + p\mathbb{Z}_p \quad (x \in \mathbb{Z}_p).$$

Puisque nous supposons $p \geq 3$, nous avons $|p|_p < r_p$, et la propriété isométrique du logarithme est valable pour $\xi = \Gamma_p(px)$, $\xi = \Gamma_p(py)$ et $\xi = \Gamma_p(px+py)$, $\quad (x, y \in \mathbb{Z}_p)$. Par conséquence

$$\left|\frac{\Gamma_p(px+py)}{\Gamma_p(px)\Gamma_p(py)} - 1\right|_p = \left|\log_p \frac{\Gamma_p(px+py)}{\Gamma_p(px)\Gamma_p(py)}\right|_p \quad (x, y \in \mathbb{Z}_p). \tag{4.3}$$

Introduisons la série de puissance (tous ses coefficients sont en $p\mathbb{Z}_p$, comme on va le voir dans le théorème suivant)

$$f(x) = \log_p \Gamma_p(px) = \lambda_0 px - \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n}{2n(2n+1)} p^{2n+1}x^{2n+1}.$$

Ceci est une fonction impaire (c'est aussi une conséquence de la relation de Legendre, qui implique $\Gamma_p(px)\cdot\Gamma_p(-px)=1$. Nous avons, donc

$$\left|\log_p \frac{\Gamma_p(px+py)}{\Gamma_p(px)\Gamma_p(py)}\right|_p = |f(x+y)-f(x)-f(y)|_p. \tag{4.4}$$

Comme le terme linéaire de $f(x+y)-f(x)-f(y)$ disparaître, et de plus on a

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|_p < C\cdot|xy(x+y)|_p$$

où la constante C est le sup de la valeur absolue des coefficients de f (d'indice $n\geq 3$). Ici, nous avons besoin d'examiner attentivement ces coefficients. Les congruences de Kazandzidis découleront du prochain théorème. ■

Théorème 4.10. *[23] Soit $f(x)=\log_p\Gamma_p(px)\quad(x\in\mathbb{Z}_p)$. Alors :*

1) f est donner par une série restreinte ayant tous ses coefficients dans $p\mathbb{Z}_p$.

2) $|f(x+y)-f(x)-f(y)|_p\leq|p^3xy(x+y)|_p$.

Démonstration. On commence par

$$f(x)=\lambda_0 px-\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n}{2n(2n+1)}p^{2n+1}x^{2n+1}.$$

1) Le rayon de convergence de f est $p>1$. Donc la série de $f(x)$ est une série de puissance restreinte

$$f(x)=\lambda_0 px-p\sum_{n\geq 1}p\lambda_n\cdot\frac{p^{2n-1}}{2n(2n+1)}x^{2n+1}.$$

nous avons que $\lambda_0\in\mathbb{Z}_p$ et $p\lambda_n\in\mathbb{Z}_p$, $(n\geq 1)$ il suffit de constater que

$$\frac{p^{2n-1}}{2n(2n+1)}\in\mathbb{Z}_p\quad(n\geq 1).$$

C'est évident pour $n=1$ et $n=2$, et pour $p\geq 3$ découle du lemme ci-dessous.

2) On va répéter l'expression de $f(x+y)-f(x)-f(y)$, dans ce qui suit :

$$-\frac{\lambda_1}{2\cdot 3}p^3((x+y)^3-x^3-y^3)-\frac{\lambda^2}{4\cdot 5}p^5((x+y)^5-x^5-y^5)-\ldots$$

le premier terme dans cette expression est

$$\frac{\lambda_1}{2\cdot 3}p^3\cdot 3(x^2y+xy^2)\equiv\frac{b_2}{2}p^3xy(x+y)=\frac{1}{2^2\cdot 3}p^3xy(x+y)\mod\mathbb{Z}_p.$$

Quand p est plus grand que 3, alors ce terme est égale à $p^3xy(x+y) \mod \mathbb{Z}_p$. Or que, pour $p=3$ est égale à $3^2xy(x+y) \mod \mathbb{Z}_3$. Le terme suivant est traiter de la même façon :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda_2}{4\cdot 5}p^5xy(x+y)\right|_p &\leq \left|\frac{b_4}{4\cdot 5}p^5xy(x+y)\right|_p \\ &= \left|\frac{1}{4\cdot 5^2\cdot 6}p^5xy(x+y)\right|_p.\end{aligned}$$

Quand $p=3$, il y a un facteur 3^4 qui rend ce terme plus petit que le premier. Quand $p=5$, il y a à toujours un facteur 5^3 de la même taille que dans le primer terme. Quand $p>5$, le facteur p^5 rend ce terme strictement plus petit que le premier. Les terme suivant sont traités dans le lemme suivant :

■

Lemme 4.11. *[23] Pour $n \geq 3$, on a* $\left|\frac{p^{2n-3}}{2n(2n+1)}\right|_p \leq 1$.

Démonstration. On va estimer la valuation p-adique de la fraction :

$$\begin{aligned}2n-3-\upsilon_p(2n(2n+1)) &\geq 2n-3-\upsilon_p(2n+1)! \\ &\geq 2n-3-\frac{2n+1-S_p(2n+1)}{p-1} \\ &\geq 2n-3-\frac{2n+1-1}{p-1} \\ &\geq 2n-3-\frac{2n}{2} \\ &\geq n-3 \geq 0.\end{aligned}$$

donc $2n-3 \geq \upsilon_p(2n(2n+1))$
$\Rightarrow p^{-2n-3} \leq \upsilon_p(2n(2n+1))$
$\Rightarrow |p^{-2n-3}|_p \leq |2n(2n+1)|_p$. ■

4.3 Fonction bêta p-adique

Définition 4.12.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}_p$. La fonction bêta p-adique $\beta_p : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ est défini par la formule suivante :

$$\beta_p(a,b) = \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)}.$$

Théorème 4.13. *[21] Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_p$. La fonction bêta p-adique β_p est symétrique, i.e :*

$$\beta_p(a,b) = \beta_p(b,a). \tag{4.5}$$

Théorème 4.14. *[21] Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_p$, on a*

$$\beta_p(a,b)\beta_p(a+b,1-b) = \begin{cases} \frac{(-1)^{l(b)}}{h_p(a)}, & si \quad p \neq 2 \\ \frac{(-1)^{\sigma_1(b)+1}}{h_p(a)}, & si \quad p = 2 \end{cases}$$

avec

$$h_p(a) = \begin{cases} -a, & si \quad |a|_p = 1 \\ -1, & si \quad |a|_p < 1 \end{cases}$$

et $l : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \{1, 2, ..., p\}$ attribue à $a \in \mathbb{Z}_p$ son résidu $\in \{1, 2, ..., p\}$ modulo $p\mathbb{Z}_p$ et σ_1 est défini par la formule

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j 2^j\right) = c_1.$$

Démonstration. Soit $p \neq 2$, par la définition 4.12. et le théorème 4.13. on a

$$\begin{aligned} \beta_p(a,b)\beta_p(a+b,1-b) &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(a+b)\Gamma_p(1-b)}{\Gamma_p(a+b)\Gamma_p(a+1)} \\ &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(1-b)}{\Gamma_p(a+1)} \\ &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(1-b)}{\Gamma_p(a)h_p(a)} \\ &= \frac{\Gamma_p(b)\Gamma_p(1-b)}{h_p(a)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\beta_p(a,b)\beta_p(a+b,1-b) = \frac{(-1)^{l(b)}}{h_p(a)}.$$

de la même manière on peut prouver par de théorème pour $p = 2$. ■

Théorème 4.15. *[21] Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_p$, on a l'égalité suivante :*

$$\beta_p(a, b+1) = \frac{h_p(b)}{h_p(a+b)}\beta_p(a, b). \tag{4.6}$$

Démonstration. Par la définition 4.12. et le théorème 4.13. on a

$$\begin{aligned}
\beta_p(a, b+1) &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b+1)}{\Gamma_p(a+b+1)} \\
&= \frac{\Gamma_p(a)h_p(b)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p((a+b)+1)} \\
&= \frac{\Gamma_p(a)h_p(b)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)h_p(a+b)} \\
&= \frac{h_p(b)}{h_p(a+b)}\frac{\Gamma_p(b)\Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)} \\
&= \frac{h_p(a)}{h_p(a+b)}\beta_p(a, b).
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.16. *[21] Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_p$, on a l'égalité suivante :*

$$\beta_p(a+1, b) = \frac{h_p(a)}{h_p(a+b)}\beta_p(a, b). \tag{4.7}$$

Démonstration. Nous faisons les mêmes étapes en théorème 4.15. ■

Corollaire 4.17. *[21] Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$, on a*

$$\beta_p(a, b)\beta_p(a+b, c)B_p(a+b+c, w) = \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(c)\Gamma_p(w)}{\Gamma_p(a+b+c+w)}. \tag{4.8}$$

Démonstration. D'après la définition 4.12. on a

$$\begin{aligned}
\beta_p(a, b)\beta_p(a+b, c)\beta_p(a+b+c, w) &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(a+b)\Gamma_p(c)\beta_p(a+b+c)\Gamma_p(w)}{\Gamma_p(a+b)\beta_p(a+b+c)\beta_p(a+b+c+w)} \\
&= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(b)\Gamma_p(c)\Gamma_p(w)}{\beta_p(a+b+c+w)}
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.18. *[21] Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}_p$, on a L'égalité suivante*

$$\beta_p(a, 1-a) = \begin{cases} (-1)^{l(a)+1}, & si\ p \neq 2 \\ (-1)^{\sigma_1(b)+2}, & si\ p = 2 \end{cases}$$

Démonstration. On sait que $\Gamma_p(1) = -1$, d'après la définition 4.12. on a :

$$\begin{aligned}\beta_p(a, 1-a) &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(1-a)}{\Gamma_p(a+1-a)} \\ &= \frac{\Gamma_p(a)\Gamma_p(1-a)}{\Gamma_p(1)}\end{aligned}$$

si $p \neq 2$, alors

$$\beta_p(a, 1-a) = -(-1)^{l(a)} = (-1)^{l(a)+1}$$

et si $p = 2$, alors

$$\beta_p(a, 1-a) = -(-1)^{\sigma_1(b)+1} = (-1)^{\sigma_1(b)+2}.$$

■

Bibliographie

[1] **Y.Amice :** Les nombres p-adique, presses Universitaire de france (1975).

[2] **G.E. Andrews,R. Askey and R.Roy :** Special Function. Press Syndicate Of The University Of Cambridge, 1999.

[3] **E. Artin :** The Gamma Function ; Holt, Rinehart and Winston : New York, NY, USA, 1964.

[4] **A.J. Baker :** An Introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis [4/11/2002]

[5] **D. BARSKY :** On Morita's $p-$ adic gamma function, Math. Proc. Comm. Phil. Soc. (1981) p. 23 – 27.

[6] **W.W. Bell :** Special Functions for Scientists and Engineers.Dover Publications,Inc 2004

[7] **A. Benyettou :** Fonction gamma p-adique, Mémoire de magister, Université Houari Boumediene, 2004.

[8] **J.P. Bézevin :** Dynamique des fractions rationnels p-adique.23 mai 2005.

[9] **H. Cohen :** Number Theory Volume I : Tools and Diophantine Equations.Université Bordeaux I.

[10] **H. Cohen :** Number Theory Volume II : Tools and Diophantine Equations. Université Bordeaux I.

[11] **P. Colmez :** Les nombres p-adiques, notes du cours de M2

[12] **J. Diamond :** The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant. Trans. Am. Math. Soc. 1977, 233, 321˘337.

[13] **B. Diarra :** Analyse p-adique Cours de DEA - Algèbre Commutative FAST - Université du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[14] **B. DWORK :** A note on the $p-$ adic gamma function (1981).

[15] **F.Q. Gouvea :** p-adic Numbers. An Introduction, Second Edition 1997.

[16] **W.K. Hayman :** Meromorphic functions , Calaredon press, oxford (1964).

[17] **S. Katok :** Real and p-adic analysis, cours notes for math 497 C, Massprogram, fall 2000 (2002).

[18] **N. Koblitz :** p-adic analysis and Zeta function,springer-verlag(1984).

[19] **N. Lerner :** Foncctions spéciales. Cours de master 1, 4M004. Université Pierre et Marie Curie, 2015

[20] **L. LONG and R. Ramakrishna :** Some supercongruences occurring in truncated hypergeometric series, Adv. Math. $290(2016), 773 - 808$.

[21] **H. Menken, Ç. Özge :** Some Properties of the p-adic Beta function.Eur. J. Pure Appl. Math. (2015). 8, p $214 - 231$.

[22] **Y. Morita :** A p-adic analogue of the G-function. J. Fac. Sci. 1975, 22, 255˘266.

[23] **A.M. Robert :** A course in p-adic Analysis, Springer- Verlag, Grad, Text in Math,198(2000).

[24] **S.Roman , G- C. Rota :** The umbral calculus. Advances in mathematics . 27(1978). $95 - 188$.

[25] **S. Roman :** The harmonic logarithms and the binomial formula, ournal of combinatorial theory . series $A63$. $143 - 163(1993)$.

[26] **W.H. Schikhof :** Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis. Cambridge University Press (1984).