République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur le théorème d'inversion locale p-adique

Présenté par :
BOULASSEL Halima.
CHEBIRA Aida.

Devant le jury :

Président	: **S. Medjrab**	**M.A.A.**	Université de Jijel
Encadreur	: **B. Saoudi**	**M.A.A.**	Université de Jijel
Examinateur	: **M. Benguessoum**	**M.A.A.**	Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions **ALLAH**, le notre Créateur, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité d'étudier, la volonté, la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous remercions en particulier notre encadreur **M. Bilal Saoudi** pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses encouragements, sa grande disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

*Un grand merci également aux membres du jury, la présidente **S.Medjrab** et l'examinatrice **M.Benguessoum** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer notre travail.*

Nos vifs remerciements vont à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de jijel qui nous ont suivis durant nos cinq années d'études à l'université, à tous les collègues de notre promotion 2020.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui auraient contribué d'une manière où d'une autre à la réalisation de ce travail.

Halima & Aida

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie, que je dédie ce mémoire.
A ma chère maman, a mon cher grand-père et a ma très chère grand-mère : aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours en pour vous, et rien du monde ne vaut les efforts fournis pour mon éducation et ma formation. Je te dédie ce travail. Puisse Dieux le tout puissant te préserver et t'santé, langue vie et bonheur.
À mes chères tantes : **Hanane** et son époux **Saif** et leur fils **Nourcine**, **Sabrina** et son époux **Maher**, ***Lynda***, ***Ahlem*** je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur et de santé.
À mon chers oncle :**Youcef** et sa femme **Zineb** et leur fils **Zein**.
À ma collègue Aida : Que Dieux réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit témoignage de ma profonde reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle.
À mes chères amies : Un dédicace particulier est sincère pour mes amies et camarades du chemin parcouru :**Nour El-houda**, **Nada**, **Yassmine**, **Zineb**, **Ibtissem**. je vos souhaite une vie pleine de joie et de prospérité.

Halima ♡

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.
A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : **mon cher père.**
A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : **mon adorable mère.**
A ma chère sœur et son mari qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.
A la plus belle fillette du monde ma nièce **Ines.**
A mes adorable sœurs et frère qui savent toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.
A mes oncles et mes tantes. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.
A tous les cousins, et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant.
Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Aida ♡

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce mémoire est consacré à l'étude de théorème d'inversion locale pour les fonctions analytiques sur le corps $\mathbb{C}_p$, ce dernier est le complété de la clôture algébrique de corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$.
Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques peut être construit par complétion de $\mathbb{Q}$, d'un façon analogue à la construction des nombres réels par les suites de Cauchy, mais pour une norme nommée norme p-adique. Ce corps découvert par Kurt Hensel en 1897.
Un nombre p-adique peut aussi se concevoir comme une suite de chiffres en base p, éventuellement infinie à gauche de la virgule (mais toujours finie à droite de a virgule), avec une addition et une multiplication qui se calculent comme pour les nombres décimaux usuels.

Notre mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on commence par des notions générales sur l'analyse non-archimédinne (la norme non-archimédinne, la valuation, . . .). Puis, on construit le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ qui est le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la norme p-adique $|.|_p$. Ce corps se comporte de façon très différente du $\mathbb{R}$ (si une suite $(a_n)_n$ converge vers un élément non nul, alors $(|a_n|_p)_n$ est constante à partir d'un certain rang, et une série converge si et seulement si son terme général tende vers 0, . . .). Enfin, comme la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ n'est pas un corps complet, nous avons besoin de la complété pour former un corps plus grand noté $\mathbb{C}_p$ complet et algébriquement clôs.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au théorème d'inversion locale pour les fonctions analytiques complexes p-adiques. Pour cela, on présente les fonctions et les séries entières dans $\mathbb{C}_p$. Ensuite, on va étudier la distribution des zéros des fonctions analytiques (Polygone de valuation p-adique, la fonction de valuation et la formule de Jensen pour les fonctions analytique) qui jouent un rôle très important dans l'étude d'image d'un disque par une fonction analytique p-adique.

Dans le troisième chapitre, on a appliqué le théorème d'inversion locale p-adique sur la factorisation des fonctions entières p-adiques. On commence par rappeler quelques résultats de la factorisation et on remarque que c'est pas facile de construire des fonctions entières premières et pseudo premières. Pour cela, on applique le théorème d'inversion locale et on trouve que pour toute fonction entière f qui n'est pas première, on peut trouver des fonctions premières par l'ajout ou la multiplication de f par une fonction affine $(z \longmapsto az + b)$.

NOTATION

Nous utilisons les notations suivante :

p : Un nombre premier, p=2, 3, 5, 7, 11, ...

$\mathbb{F}[[X]]$: Le corps des séries formelles sur $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}[X]$: L'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{F}$.

$d(a,r)$: Le disque fermé de centre a et de rayon r.

$d(a,r^-)$: Le disque ouvert de centre a et de rayon r.

$D(a,r)$: L'un ou l'autre de ses deux disque .

$C(a,r)$: Le cercle de centre a et de rayon r.

$v_p(x)$: La valuation p-adique de x.

$|.|_p$: La valeur absolue p-adique.

$\mathbb{Z}_p$: Anneau des entiers p-adiques.

$\mathbb{Z}_p^*$: Le groupe des unités p-adiques.

$\mathbb{Q}_p$: Le corps des nombres p-adiques (corps des fractions de $\mathbb{Z}_p$).

$\overline{\mathbb{Q}}_p$: La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.

$\mathbb{C}_p$: Le corps des nombres complexes p-adiques.

$|\mathbb{C}_p^*|_p$: L'ensemble des puissances rationnelles de p.

$\mathcal{A}(d(a,r))$: L'ensemble des fonctions analytiques sur $d(a,r)$.

$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$: L'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$.

$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]$: L'ensemble des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$.

$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$: L'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}_p$.

$\|f\| = |f|(r)$: Le module de maximum.

v_f : La fonction de valuation p-adique.

$N(f,\rho)$: Le nombre des zéros de f dans le disque $d(0,\rho)$.

$n(f,\rho)$: Le nombre des zéros de f dans le disque $d(0,\rho^-)$.

$A(f,\rho)$: Le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0,\rho)$.

$\frac{d^+}{du}$: La dérivée à droite.

$\frac{d^-}{du}$: La dérivée à gauche.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES SUR L'ANALYSE NON-ARCHIMÉDINNE

Le but de ce chapitre est de construire le corps des nombres p-adiques, et de donner quelques définitions et les propriétés sur l'analyse non-archimédinne.

1.1 Normes sur un corps

Définition 1.1 *Une norme sur $\mathbb{F}$ est une application $\|.\| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois conditions suivantes*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|x.y\| = \|x\|.\|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{F}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{F}$. *(inégalité triangulaire)*

En appelle la distance induite sur $\mathbb{F}$ par $\|.\|$ la distance d définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{F},\ d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.2 *[13] On dit que la norme est non-archimédinne si on a*

$$\|x + y\| \leq \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}, \forall x, y \in \mathbb{F}\ \ (In\text{é}galit\text{é}\ triangulaire\ fort).$$

Remarque 1.1 *Lorsque $\mathbb{F}$ est muni d'une norme non-archimédinne on dit $\mathbb{F}$ est un corps non-archimédinne et dans le cas contraire on dit que $\mathbb{F}$ est un corps archimédinne.*

Exemple 1.1 *Il ya toujours sur un corps $\mathbb{F}$ au moins une norme, à savoir l'application $\|.\| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$||x|| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

cette norme est dit norme triviale. De plus, c'est une norme non-archimédinne car

$$\|x + y\| \leq \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}, \forall x, y \in \mathbb{F}.$$

En effet
Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$. On a $\|x + y\| = 1$, donc

$$\max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\} = \max\Big\{1, 1\Big\} = 1 \leq 1.$$

Théorème 1.1 *[13]* (***Caractéristique des normes non-archimédinne***).
Soit $(\mathbb{F}, ||.||)$ un corps valué. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\|n\| \leq 1$, pour tout entier $n \geq 0$.*
2. *$\|x + y\| \leq \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}$, $\forall x, y \in \mathbb{F}$.*

Preuve :

1$-$ On suppose que $||x + y|| \leq \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}$ est vérifie et on montre par récurrence que $||n|| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, on a $||n|| = ||0|| = 0 \leq 1$. Et pour $n = 1$, on a $||n|| = ||1|| = 1 \leq 1$.
On suppose que $||n|| \leq 1$ et vraie pour $n \geq 0$, et on montre que $||n + 1|| \leq 1$.
On a

$$||n + 1|| \leq \max\Big\{||n||, ||1||\Big\} \leq 1,$$

d'où

$$||n + 1|| \leq 1,$$

alors, $||n|| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2$-$ Pour la deuxième implication on suppose que $||n|| \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $||x + y|| \leq \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}$ pour tout $x, y \in \mathbb{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} ||x + y||^n = ||(x + y)^n|| &= \Big|\Big| \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \Big|\Big| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \Big|\Big| \binom{n}{k} \Big|\Big| . ||x^k||.||y^{n-k}|| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 1.||x||^k.||y||^{n-k}. \end{aligned}$$

Et comme on a

$$||x|| \leq \max\Big\{||x||, ||y||\Big\} \;\; et \;\; ||y|| \leq \max\Big\{||x||, ||y||\Big\},$$

alors

$$||x||^k \leq \Big(\max\Big\{||x||, ||y||\Big\}\Big)^k \;\; et \;\; ||y||^{n-k} \leq \Big(\max\Big\{||x||, ||y||\Big\}\Big)^{n-k},$$

d'où

$$\begin{aligned} ||x+y||^n &\leq \sum_{k=0}^{n} \Big(\max\Big\{||x||, ||y||\Big\}\Big)^n \\ &\leq (n+1)\Big(\max\Big\{||x||, ||y||\Big\}\Big)^n. \end{aligned}$$

Donc

$$||x+y|| \leq (n+1)^{\frac{1}{n}} \max\Big\{||x||, ||y||\Big\}.$$

Par passage à la limite de n on obtient

$$||x+y|| \leq \max\Big\{||x||, ||y||\Big\}.$$

■

Conséquence 1.1 $(\mathbb{F}, \|.\|)$ *archimédinne* $\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{Z},\ \|n_0\| > 1$.

Proposition 1.1 *[13] Soit a et x deux éléments d'un corps non-archimédinne $(\mathbb{F}, ||.||)$. On a*

$$||x-a|| < ||a|| \Rightarrow ||x|| = ||a||.$$

C'est la propriété des triangules isocèles.

Preuve : On suppose que $||x-y|| < ||y||$, on a

$$||x|| = ||x-y+y|| \leq \max\Big\{||x-y||, ||y||\Big\} = ||y||,$$

d'autre part on a

$$||y|| = ||y-x+x|| \leq \max\Big\{||y-x||, ||x||\Big\}.$$

Si $\max\Big\{||y-x||, ||x||\Big\} = ||y-x||$, alors

$$||y|| \;\leq\; ||y-x|| = ||x-y||.$$

C'est une contradiction avec

$$||x-y|| \;<\; ||y||,$$

donc

$$\max\Big\{||y-x||, ||x||\Big\} = ||x||.$$

D'où $||y|| \leq ||x||$, alors $||x|| = ||y||$. ■

Remarque 1.2 *Dans un corps non-archimédinne* $\mathbb{F}$*, on a*

$$\|x\| \neq \|y\| \Rightarrow \|x+y\| = \max\Big\{\|x\|, \|y\|\Big\}.$$

Lemme 1.1 (***Normes équivalentes dans un corps***).
Soient $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur le corps* $\mathbb{F}$*. Les normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes* ($\|.\|_1 \sim \|.\|_2$) *si et seulement si*

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F} \text{ et } a \in \mathbb{F} : a_n \underset{\|.\|_1}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow a_n \underset{\|.\|_2}{\longrightarrow} a,$$

i.e. $||a_n - a||_1 \longrightarrow 0 \Leftrightarrow ||a_n - a||_2 \longrightarrow 0.$

Proposition 1.2 *[13] Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes équivalentes sur le corps* $\mathbb{F}$ *on a*

1. $\|x\|_1 < 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 < 1, \ \forall x \in \mathbb{F}.$
2. $\|x\|_1 = 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 = 1, \ \forall x \in \mathbb{F}.$
3. $\|x\|_1 > 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 > 1, \ \forall x \in \mathbb{F}.$

Théorème 1.2 *Soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes définies sur* $\mathbb{F}$*, on a l'équivalence*

$$\|.\|_1 \sim \|.\|_2 \Leftrightarrow \exists\ \alpha > 0\ :\ \|x\|_2 = \|x\|_1^{\alpha},\ \forall x \in \mathbb{F}.$$

Preuve : L'implication réciproque est évidente grâce au Lemme 1.1. Pour l'implication directe, si $\|.\|_2$ est triviale et $\|.\|_2 \sim \|.\|_1$, alors d'après 3) de la Proposition 1.2 on a $\|.\|_1$ est triviale car si

$$\|x\|_2 = \begin{cases} 0, & si \quad x = 0, \\ 1, & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

alors

$$\|x\|_1 = \begin{cases} 0, & si \quad x = 0, \\ 1, & si \quad x \neq 0, \end{cases}$$

D'ou $\|.\|_1 = \|.\|_2, \alpha = 1.$
On suppose que $\|.\|_2$ n'est pas triviale, alors il existe $a \in \mathbb{F}$ tel que $\|a\| \neq 1$. On prend $\|a\|_1 < 1$ (si $|a\|_1 > 1$ on prend $a^{'} = a^{-1}$) et on pose

$$\alpha = \frac{\log \|a\|_2}{\log \|a\|_1},$$

donc $\alpha > 0$, car $\|a\|_1 < 1 \Rightarrow \|a\|_1 < 1$ (d'après 1 de la Proposition 1.2).

a) Soit $\|x\|_1 < 1$ et $S = \{r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, \|x\|_1^r \leq \|x\|_1\}$, alors on a

$$\|x\|_1^m \leq \|a\|_1^n, \forall r \in S,$$

d'où

$$\left\|\frac{x^m}{a^n}\right\|_1 < 1 \Rightarrow \left\|\frac{x^m}{a^n}\right\|_2 < 1.$$

Donc il ya un équivalente entre $\|x\|_1^r \leq \|a\|_1$ et $\|x\|_2^r \leq \|a\|_2$, par conséquent S s'écrire sous la forme

$$S = \left\{r = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}, \|x\|_2^r \leq \|a\|_2\right\},$$

et par introduction de log on a

$$S = \left\{r \in \mathbb{Q} : r \geq \frac{\log\|a\|_2}{\log\|x\|_2}\right\} = \left\{r \in \mathbb{Q} : r \geq \frac{\log\|a\|_2}{\log\|x\|_2}\right\}.$$

Alors on a

$$\frac{\log\|a\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\log\|a\|_1}{\|x\|_1} = \inf S.$$

d'où

$$\frac{\log\|a\|_2}{\log\|a\|_1} = \frac{\log\|x\|_2}{\log\|x\|_1} = \alpha,$$

donc $\log\|x\|_2 = \log\|x\|_1^\alpha$, alors $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha$.

b) Si $\|x\|_1 > 1$ on a

$$S = \left\{r \in \mathbb{Q} : r \leq \frac{\log\|\alpha\|_2}{\|x\|_2}\right\} = \left\{r \in \mathbb{Q} : r \leq \frac{\log\|\alpha\|_1}{\|x\|_1}\right\}.$$

Alors on a

$$\frac{\log\|a\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\log\|a\|_1}{\|x\|_1} = \sup S,$$

d'où

$$\frac{\log\|a\|_2}{\log\|a\|_1} = \frac{\log\|x\|_2}{\log\|x\|_1} = \alpha,$$

donc $\log\|x\|_2 = \log\|x\|_1^\alpha$, alors $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha$.

c) Si $\|x\|_1 = 1$, on a $\|x\|_2 = 1$. D'où $\alpha = 1$.

■

Définition 1.3 (***La valuation***).
Une valuation v sur $\mathbb{F}$ est une application de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les trois condition suivantes :

1) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$.

2) $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in \mathbb{F}$.

3) $v(x + y) \geq \min\left\{v(x), v(y)\right\}, \forall x, y \in \mathbb{F}$.

Exemple 1.2 *Pour tout $f \in \mathbb{F}[[X]]$, on a*

$$f(X) = \sum_{0 \leq n_0 \leq n} a_n X^n, a_{n_0} \neq 0.$$

Si on pose $v(f) = n_0$ et $v(0) = +\infty$, donc on a

1. $v(f) = +\infty \Leftrightarrow f \equiv 0.$
2. $v(f.g) = v(f) + v(g).$
3. $v(f+g) \geq \min\Big\{v(f), v(g)\Big\}.$

De plus, si l'on pose $\|f\| = a^{-v(f)}$, $a > 1$ on définit une valeur absolue ultramétrique sur le corps $\mathbb{F}[[X]]$.

En effet

1. *Soit $f \in \mathbb{F}[[X]]$, on a*

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Leftrightarrow a^{-v(f)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^{v(f)}} = 0 \\ &\Leftrightarrow v(f) = +\infty \\ &\Leftrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

2. *Soit $f, g \in \mathbb{F}[[X]]$, on a*

$$\begin{aligned} \|f.g\| &= a^{-v(f.g)} = a^{-(v(f)+v(g))} = a^{-v(f)-v(g)} \\ &= a^{-v(f)} a^{-v(g)} \\ &= \|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

3. *Soit $f, g \in \mathbb{F}[[X]]$, on a $\|f+g\| = a^{-v(f+g)}$. Et comme on a*

$$v(f+g) \geq \min\Big\{v(f), v(g)\Big\}.$$

Donc

$$-v(f+g) \leq -\min\Big\{v(f), v(g)\Big\} = \max\Big\{-v(f), -v(g)\Big\},$$

alors

$$a^{-v(f+g)} \leq \max\Big\{a^{-v(f)}, a^{-v(g)}\Big\}.$$

D'où, $|f+g| \leq \max\Big\{\|f\|, \|g\|\Big\}$.

Proposition 1.3 *[13] Soit $(\mathbb{F}, ||.||)$ un corps valué. Le complété $\hat{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$, pour $\mathbb{F}$ muni de la distance $d(a,b) = ||a-b||$ est un corps.*
La norme de $\mathbb{F}$ se prolonge de façon unique sur $\hat{\mathbb{F}}$ en une norme encore notée $||.||$.

1.2 Corps des nombres p-adiques

Définition 1.4 (***Valuation*** p***-adique***).
On appelle valuation p-adique l'application $v_p\ : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ *définit comme suite :*

- $v_p(0) = +\infty$ *;*
- *si n est un entier non nul,* $v_p(n) = k$ *si* p^k *divise n et* p^{k+1} *ne divise pas n (* p^k *est la " plus grande puissance de p dans n ") ;*
- *si* $n = \dfrac{a}{b}$ *avec a et b des entiers non nuls, alors* $v_p(n) = v_p(a) - v_p(b)$.

Exemple 1.3

1. *Soit* $n = 315 = 3^2.5.7$. *On a* $v_3(n) = 2$, $v_5(n) = 1$, $v_7(n) = 1$, *et* $v_p(n) = 0$ *pour tout nombre premier p différent de* $3, 5$ *et* 7.
2. *On a* $v_2(\frac{12}{25}) = 1$, $v_3(\frac{12}{25}) = 1$, *et* $v_5(\frac{12}{25}) = -2$. *Pour p différent de* $2, 3$ *et* 5, *on a* $v_p(\frac{12}{25}) = 0$.
3. *Soit* $n = 2 + p^3 + 2.p^4$. *On a* $v_p(n) = 0$ *pour* $p > 2$ *et* $v_2(n) = 1$.

Proposition 1.4 *Pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}$, *on a*

1. $v_p(1) = 0$.
2. $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)$.
3. $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Preuve :

(i) Pour tout p-premier on a $1 = p^0$, d'où $v_p(1) = 0$ $\Big($*car* : $1 = p^0 + 0.p^1 + 0.p^2 + ... = p^0\Big)$.

(ii) On a ii) est trivial si $x = 0$ ou $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.n, \ n \in \mathbb{Z}^* \ et \ (n,p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.m, \ m \in \mathbb{Z}^* \ et \ (m,p) = 1, \end{cases}$$

on a

$$x.y = p^{v_p(x)+v_p(y)}.nm, \ (nm, p) = 1.$$

D'où $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

(iii) On a iii) est trivial si $x = 0$ ou bien $y = 0$, et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\begin{cases} x = p^{v_p(x)}.n, \ n \in \mathbb{Z}^* \ et \ (n,p) = 1, \\ y = p^{v_p(y)}.m, \ m \in \mathbb{Z}^* \ et \ (m,p) = 1, \end{cases}$$

on a

$$x + y = p^{v_p(x)}.n + p^{v_p(y)}.m.$$

(a) Si $v_p(x) \leq v_p(y)$, on a

$$x + y = p^{v_p(x)}(\underbrace{n + p^{v_p(y)-v_p(x)}.m}_{k}), (k, p) = 1,$$

d'où

$$v_p(x + y) = v_p(x) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

(b) Si $v_p(x) \geq v_p(y)$, on a

$$x + y = p^{v_p(y)}(\underbrace{m + p^{v_p(x)-v_p(y)}.n}_{k}), (k, p) = 1,$$

d'où

$$v_p(x + y) = v_p(y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

■

Remarque 1.3 *Pour tout* $x, y \in \mathbb{Z}^*$

$$v_p(x) \neq v_p(y) \Longrightarrow v_p(x + y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

En effet
On prend $v_p(x) < v_p(y)$*, on a*

$$v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{Z}^*,$$

c'est -a-dire $v_p(x + y) \geq v_p(x)$*.*
Il reste a monter que $v_p(x) \geq v_p(x, y)$*, on a*

$$v_p(x) = v_p(x - y + y) \geq \min\{v_p(x + y), v_p(y)\}.$$

Si $\min\{v_p(x + y), v_p(y)\} = v_p(y)$*, alors* $v_p(x) \geq v_p(y)$*, c'est une contraction avec les données, donc* $v_p(x) \geq v_p(x + y)$*.*

Proposition 1.5 *[13] La valuation p-adique de* $(n!)_{n\geq 0}$ *est*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}, \forall n \geq 0,$$

où $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p i,e*

$$S_p(n) = a_0 + a_1 + ... + a_q \text{ où } n = a_0 + a_1.p + ... + a_q.p^q.$$

Remarque 1.4 *Les suites* $\left(\frac{S_p(n)}{n}\right)_n$ *et* $\left(\frac{v_p(n)}{n}\right)_n$ *ont la même limite* 0*.*

Définition 1.5 (***La norme*** p***-adique***).
La norme p-adique est une application $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$*, définie par*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, \ si \quad x \neq 0, \\ 0, \ sinon, \end{cases}$$

tel que $v_p(x)$ *représente la valuation p-adique de* x.

Proposition 1.6 *L'application* $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *définit une norme non-archimédinne.*

Preuve :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |x|_p = 0 &\Longleftrightarrow p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow v_{p(x)} = \infty \\ &\Longleftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} |x.y|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-v_p(x)-v_p(y)} \\ &= p^{-v_p(x)}.p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p.|y|_p. \end{aligned}$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tel que : $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d} \quad et \quad a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}^*$
on a

$$\begin{aligned} |x+y|_p = p^{v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x)-v_p(y)\}} \\ &= \max\left\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\right\} \\ &= \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}. \end{aligned}$$

D'où l'application $x \longmapsto |x|_p$ est une norme ultramétrique.

N.B : $(\mathbb{Q}, \|.\|_p)$ c'est un corps non-archimédinne. ■

Exemple 1.4 *D'après l'exemple* 1.3*, on a*

1. *Soit* $n = 315 = 3^2.5.7$*. On a* $|n|_3 = 3^{-v_3(n)} = 3^{-2}$*,* $|n|_5 = 5^{-v_5(n)} = 5^{-1}$*,* $|n|_7 = 7^{-v_7(n)} = 7^{-2}$*, et* $|n|_p = 1$ *pour tout nombre premier* p *différent de* $3, 5$ *et* 7.
2. *On a* $|\frac{12}{25}|_2 = 2^{-v_2(\frac{12}{25})} = 2^{-1}$*,* $|\frac{12}{25}|_3 = 3^{-v_3(\frac{12}{25})} = 3^{-1}$*,* $|\frac{12}{25}|_5 = 5^{-v_5(\frac{12}{25})} = 5^2$*. Pour* p *différent de* $2, 3$ *et* 5*, on a* $|\frac{12}{25}|_p = 1$.
3. *Soit* $n = 2 + p^3 + 2.p^4$*. On a* $v_p(n) = 0$*, donc* $|n|_p = 1$ *pour* $p > 2$*, et* $|n|_2 = 2^{-1}$.

1.3 Construction de $\mathbb{Q}_p$

Il est claire que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, on sait que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valeur absolue usuelle, et dans ce cas les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$. La même méthode s'applique pour une norme p-adique ultramétrique $|.|_p$. La complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport a cette valeur absolue $|.|_p$ nous donne un corps ultramétrique qui s'appelle corps des nombres p-adique et se note $\mathbb{Q}_p$.
Ainsi les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, muni de la relation suivante

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |a_n - b_n|_p = 0.$$

Théorème 1.3 (***Ostrowski***). *[3] Tout norme $||.||$ non trivial sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à une norme p-adique $|.|_p$, ou bien à la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$.*

Proposition 1.7 *[7] $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

Proposition 1.8 (***Développement de Hensel***).
Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n,$$

ou $0 \leq a_n \leq p-1$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$, si $a_{n_0} \neq 0$ alors $n_0 = v_p(x)$.

Exemple 1.5 *Le développement de Hensel de $x = -1$ est donné par*

$$\begin{aligned} -1 = p - 1 - p = (p-1) + (-1)p & \\ &= (p-1) + (p-1-p)p = (p-1) + (p-1)p - p^2 \\ &= (p-1) + (p-1)p + (-1)p^2 = (p-1) + (p-1)p + (p-1-p)p^2 \\ &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 - p^3 \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (p-1)p^k \\ &= \dots(p-1)(p-1)(p-1)\cdot, \end{aligned}$$

alors on obtient a

$$\frac{-1}{p-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k,$$

donc pour $p = 2$ on a

$$-1 = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = \dots 111\cdot$$

.

Définition 1.6 *Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ définit aussi par*

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{b};\ a \in \mathbb{Z}_p, b \in \mathbb{Z}_p^*\},$$

et l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p &= \{x \in \mathbb{Q}_p\ |x|_p \leq 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p;\ v_p(x) \geq 0\},\end{aligned}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{Q}_p$ et de plus $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$.
Le groupe des unités est

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p; |x|_p = 1\}.$$

1.3.1 Propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$

Proposition 1.9 *Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in]0, +\infty[$, on a les propriétés suivantes*

P1 *Le cercle $C(a, r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.*

P2 *Un disque $d(a, r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé.*

P3 *Tout point d'un disque est un centre de ce disque.*

P4 *Deux disque de $\mathbb{Q}_p$ sont disjoints ou l'un est contenue dans l'autre.*

Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$, et r, r_0 des réels positifs.

P1 Pour montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert on montre que

$$\forall x \in C(a, r), \exists\, d(x, r_0^-) \subset C(a, r).$$

Soit $x \in \mathbb{Q}_p$, on choisit r_0 tel que $r_0 < r$, on a

$$\begin{aligned}y \in d(x, r_0^-) &\Rightarrow |y - x|_p < r_0 < r\\ &\Rightarrow |y - x|_p < |x - a|_p\\ &\Rightarrow |y - a + a - x|_p < |x - a|_p\\ &\Rightarrow |(y - a) - (x - a)|_p < |x - a|_p.\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.1 on obtient $|y - a|_p = |x - a|_p = r$ alors $y \in C(a, r)$ ce qui montre que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert .

P2 i) Tout disque ouvert $d(a, r^-)$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique quelconque. D'autre part montre que $d(a, r^-)$ est un ensemble fermé. on montre que $C_{\mathbb{Q}_p}^{d(a,r^-)}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{Q}_p$.
On a

$$\begin{aligned}C_{\mathbb{Q}_p}^{d(a,r^-)} &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \geq r\}\\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p > r\} \cup C(a, r)\\ &= C_{\mathbb{Q}_p}^{d(a,r)} \cup C(a, r).\end{aligned}$$

D'après **P1** on a $C(a,r)$ est un ensemble ouvert et comme on a $d(a,r)$ est un ensemble fermé dans un espace métrique, donc $C_{\mathbb{Q}_p}^{d(a,r)}$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique (en particulier ultramétrique). d'où $C_{\mathbb{Q}_p}^{d(a,r^-)}$ est un ensemble ouvert.
Donc $d(a,r^-)$ est un ensemble fermé.

ii) On sait que $d(a,r)$ est fermé dans un espace métrique (en particulier pour l'espace ultramétrique) pour montrer que $d(a,r)$ est un ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.
on a
$$d(a,r) = C(a,r) \cup d(a,r^-),$$
d'après **P1** $C(a,r)$ *est un ouvert et* $d(a,r^-)$ est un ouvert donc l'union de deux ouvert est ouvert.

P3 Pour montrer cette propriété, il suffit de montrer que
$$\forall x \in d(a,r^-), d(a,r^-) = d(x,r^-).$$

i) Soit $y \in d(a,r^-)$, donc $|y-a|_p < r$, D'autre part on a
$$|y-x|_p = |y-a+a-x|_p \leq \max\{|y-a|_p, |x-a|_p\} < r,$$
d'où $y \in d(x,r^-)$, *alors* $d(a,r^-) \subset d(x,r)$.

ii) Soit $y \in d(x,r^-)$, donc $|y-x|_p < r$. D'autre part on a
$$|y-a|_p = |y-x+x-a|_p \leq \max\{|y-x|_p, |x-a|_p\} < r,$$
d'où $y \in d(a,r^-)$, alors $d(x,r^-) \subset d(a,r^-)$, donc $d(a,r^-) = d(x,r^-)$.
On fait les même étapes pour montrer que si $x \in d(a,r), on\ a\ d(a,r) = d(x,r)$.

P4 Soient $d(a,r)$ et $d(b,r_0)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que $d(a,r) \cap d(b,r_0) \neq 0$, pour tout $r\ \ et\ \ r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et on montre que
$$d(a,r) \subset d(b,r_0)\ \ ou\ \ d(b,r_0) \subset d(a,r).$$
On suppose que $r < r_0, soit\ \ x \in d(a,r) \cap d(b,r_0)\ \ on\ \ a\ \ x \in d(a,r)\ \ et\ \ x \in d(b,r_0)$.
D'après **P3**, on a
$$d(a,r) = d(x,r)\ et\ d(b,r_0) = d(x,r_0).$$
Mais $d(x,r) \subset d(x,r_0)$, donc $d(a,r) \subset d(b,r_0)$.

■

1.3.2 Propriétés analytiques de $\mathbb{Q}_p$

Théorème 1.4 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ et par conséquent convergente si et seulement si*
$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve :

1− Supposons que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0; |a_m - a_n|_p < \varepsilon,$$

donc pour $m = n+1$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0; |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

2− Inversement, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq 0$ on a $|a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$. Pour tout $m > n > n_0$ on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - ... + a_{n+1} a_n|_p \\ &\leq \max\{|a_m - a_{m-1}|_p, ..., |a_{n+1} - a_n|_p\}, \end{aligned}$$

et comme on a

$$\forall k \geq n \geq n_0,\ |a_{k+1} - a_k|_p < \varepsilon.$$

Alors

$$|a_m - a_n|_p < \varepsilon,\ \forall > n > n_0,$$

par suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$.

■

Proposition 1.10 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{Q}_p^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n|_p = |a|_p.$$

Preuve : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}_p$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. De plus, on a

$$\forall m, n \geq n_0,\ ||a_m|_p - |a_n|_p|_{\mathbb{R}} \leq |a_m - a_n|_p.$$

Donc $(|a_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Et comme $(\mathbb{R}, |.|_{\mathbb{R}})$ complet, alors $(|a_n|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
D'après l'hypothèse on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \neq 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = l > 0$. Alors pour $\varepsilon = \frac{l}{2}$ fixé, et puisque $||a_n|_p - l|_{\mathbb{R}} < \frac{l}{2}$, alors

$$\frac{-l}{2} < |a_n|_p - l < \frac{l}{2},$$

donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 :\ |a_n|_p > \frac{l}{2}.$$

De plus, d'après la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ on obtient que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall (n,m) \geq N_2, |a_n - a_m|_p < \frac{l}{2}.$$

Quand $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$\begin{cases} |a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max |a_m - a_n|_p, |a_n|_p = |a_n|_p \ , \\ |a_n|_p = |a_n - a_m + a_m|_p \leq \max |a_n - a_m|_p, |a_m|_p = |a_m|_p. \end{cases}$$

D'où

$$|a_n|_p = |a_m|_p, \forall n, m \geq n_0,$$

alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n|_p = |a_{n_0}|_p = |a|_p.$$

■

Proposition 1.11 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *une série dans* $\mathbb{Q}_p$*, on a*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge dans } \mathbb{Q}_p \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|_p = 0.$$

De plus, on a $|\sum\limits_{n\geq 0} a_n|_p \leq \max\limits_{n\geq 0} |a_n|_p$.

Preuve :

1. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente, alors la suite des sommes partielle $(S_n)_{n\geq 0}$ converge, donc elle est de Cauchy, d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0.$$

   Dans la réciproque, si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |a_n|_p = 0$, *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |S_n - S_{n-1}|_p = 0$, donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$ et comme $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est complet, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente. D'où $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

2. On montre maintenant l'inégalité

$$|\sum_{n\geq 0} a_n|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p.$$

   L'inégalité est évidant si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = 0$.

   Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \neq 0$, d'après la Proposition 1.9, on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, |\sum_{n\geq 0} a_n|_p = |\sum_{0\leq n\leq N} a_n|_p,$$

   donc

$$|\sum_{n\geq 0} a_n|_p = |\sum_{0\leq n\leq N} a_n|_p \leq \max_{0\leq n\leq N} |a_n|_p \leq \max_{n\geq 0} |a_n|_p,$$

   d'où le résultat.

$\blacksquare$

Proposition 1.12 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *une série dans* $\mathbb{Q}_p$*, alors*

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|_p \text{ converge dans } \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ converge dans } \mathbb{Q}_p.$$

Preuve : Puisque $\sum_{n\geq 0} |a_n|_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la suite des somme partielles $S_n = \sum_{i=0}^{n} |a_i|_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq N; |S_m - S_n| \leq \varepsilon.$$

Si on prend $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, alors on a

$$\begin{aligned} |s_m - s_n|_p &= |\sum_{i=n+1}^{m} a_i|_p \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p \\ &= |\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p| \\ &= |S_m - S_n| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. $\blacksquare$

Exemple 1.6

1− *La série* $\sum_{n\geq 0} p^n$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-n} = 0.$$

Mais cette série est diverge dans $\mathbb{R}$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n|_p = p^n = +\infty.$$

2− *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *est diverge dans* $\mathbb{Q}_p$*. En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{v_p(x)} \neq 0,$$

car $p^{v_p(n)} \geq 1$*. Mais cette série est converge dans* $\mathbb{R}$ *d'après la règle de Leibnitz.*

1.4 $\mathbb{C}_p$-corps des nombres complexes p-adiques

Pour construire le corps $\mathbb{C}_p$, on a besoin de rappeler les définitions algébriques suivantes :

Définition 1.7 (***Corps algébriquement clôs***).
On dit qu'un corps $\mathbb{F}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{F}[X]$ de degré n admet n racine dans $\mathbb{F}$.

Exemple 1.7 *$\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clôs car le polynôme*

$$P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X],$$

n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$
Où contraire, *$\mathbb{C}$ est algébriquement clôs , pour reprendre l'exemple ci-dessus, on a $i \in \mathbb{C}$ et $-i \in \mathbb{C}$ qui sont racines du polynôme*

$$P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X].$$

Définition 1.8 (***Extension algébrique L sur un corps $\mathbb{F}$***).
Une ***extension algébrique*** *L sur un corps $\mathbb{F}$ est une extension de corps dans le quelle tous les éléments sont algébriques sur $\mathbb{F}$ c'est-à-dire sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{F}$. Dans le cas contraire, l'extension est dite* ***transcendante***.

Définition 1.9 (***Clôture algébrique d'un corps***)
Une ***clôture algébrique*** *d'un corps commutatif $\mathbb{F}$ est une extension algébrique L de $\mathbb{F}$ qui est algébriquement clôse.*

Proposition 1.13 *[5] Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs pour tout p-premier.*

Preuve : Pour montrer que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs, on considère le polynôme

$$P(x) = x^2 - p^7 \in \mathbb{Q}_p[x].$$

Supposons que les racines de $P(x)$ sont dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\begin{aligned} x^3 = p^7 \Leftrightarrow x^3 &= p^7 \\ \Leftrightarrow |x|_p^3 &= p^{-7} \\ \Leftrightarrow |x|_p &= p^{\frac{-7}{3}} \\ \Leftrightarrow v_p(x) &= \frac{7}{3}, \end{aligned}$$

donc $v_p(x) = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$, c'est une contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$. D'où les racines de $P(x)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ■

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considère une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complète. Donc nous allons besoin de la complétée pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs que l'on note $\mathbb{C}_p$ et muni d'une norme p-adique (on note toujours $|.|_p$), qui prolonge celle définit sur $\mathbb{Q}_p$ comme suite

$$\forall x \in \mathbb{C}_p; |x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p,$$

où $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Proposition 1.14 *[2] Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes*

1. *$\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs.*
2. *Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.*
3. *$|\mathbb{C}_p^*|_p = \{p^q, q \in \mathbb{Q}\}$.*
4. *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \overline{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.*
5. *Le corps $\mathbb{C}_p$ est séparable.*

CHAPITRE 2

THÉORÈME DE L'INVERSE LOCALE SUR $\mathbb{C}_P$

2.1 Fonctions et séries entières dans $\mathbb{C}_p$

Dans cette section nous étudions les séries entières complexes p-adiques est les fonctions analytiques dans $\mathbb{C}_p$.

Définition 2.1 *Une série entière dans $\mathbb{C}_p$ est une série de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite des nombres complexes p-adiques appelée suite de coefficient.*

Définition 2.2 (***Rayon de convergence***)
Le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, qu'on le note R, est définit par

$$R := \sup\{|z|_p; z \in \mathbb{C}_p \ et \ \sum_{n\geq 0} a_n z^n converge\} \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty.$$

De plus, Le rayon de convergence est calculé par l'une des trois formules suivantes :

1. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ (***formule d'Hadamard***).
2. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}}$ (***formule de Cauchy***).
3. *Si* $a_n \in \mathbb{C}_p^*, R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_n|_p}{|a_{n+1}|_p}$ (***formule d'Alembert***).

Proposition 2.1 *[13] Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, où $a_n \in \mathbb{C}_p$ et $0 \leq R \leq +\infty$ on a*

1. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p < R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge.*
2. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p > R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.*
3. *Si $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p = R$, alors on peut avoir*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|R^n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est converge sur la totalité du cercle $C(0, R)$.*
   - *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|R^n \neq 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est diverge sur la totalité du cercle $C(0, R)$.*

Remarque 2.1

1) *Le domaine de convergence d'une série entière p-adique est toujours un disque.*

2) *La série $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et sa série dérivée :*

$$Df(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1},$$

ont le même rayon de convergence.

En effet

on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{Df}} &= \limsup_{n\to+\infty} \left|na_n\right|_p^{\frac{1}{n-1}} \\
&= \limsup_{n\to+\infty} (|na_n|_p)^{\frac{1}{n}} \\
&= \limsup_{n\to+\infty} (\left|n\right|_p^{\frac{1}{n}} . \left|a_n\right|_p^{\frac{1}{n}}) \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \left(p^{(-\frac{v_p(n)}{n})} . \left|a_n\right|_p^{\frac{1}{n}}\right), \text{où } \lim_{n\to+\infty} \frac{v_p(n)}{n} = 0 \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \left|a_n\right|_p^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{R_f}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.1

1. *Soit la série $\sum_{n\geq 0} z^{p^n}$, d'après d'Hadamard on a*

$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[p^n]{|1|_p} = \limsup_{n\to+\infty} \left|1\right|_p^{\frac{1}{p^n}} = \limsup_{n\to+\infty} (1)^{\frac{1}{p^n}} = 1,$$

donc $R = 1$. Alors

- *Si* $|z|_p < 1$, *la série est converge sur* $d(0,1^-)$.
- *Si* $|z|_p = R = 1$, *on a*

$$|z^{p^n}|_p = |z|_p^{p^n} = |1|_p^{p^n} = 1 \nrightarrow 0.$$

D'où la série $\sum\limits_{n\geq 0} z^{p^n}$ *diverge sur le cercle* $C(0,1)$.

2. *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, *d'après d'Hadamard on a*

$$\begin{aligned}
R^{-1} &= \limsup_{n\to+\infty}\Big|\frac{1}{(2n)!}\Big|_p^{\frac{1}{2n}}\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\left(p^{-v_p(\frac{1}{(2n)!})}\right)^{\frac{1}{2n}}\\
&= \limsup_{n\to+\infty}\left(p^{v_p((2n)!)}\right)^{\frac{1}{2n}}\\
&= \limsup_{n\to+\infty} p^{\frac{2n-S_p(2n)}{2n(p-1)}}\\
&= \limsup_{n\to+\infty} p^{\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{S_p(2n)}{2n}\right)},\ \text{où} \lim_{n\to+\infty}\frac{S_p(2n)}{2n} = 0\\
&= \limsup_{n\to+\infty} p^{\frac{1}{p-1}}\\
&= p^{\frac{1}{p-1}},
\end{aligned}$$

donc $R = p^{-\frac{1}{p-1}}$. *Alors*

- *Si* $|z|_p < R$, *la série est converge sur* $d(0,R^-)$.
- *Si* $|z|_p = p^{\frac{-1}{p-1}}$, *on a*

$$|a_n|_p r^{2n} = \Big|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big|_p r^{2n} = \frac{1}{|(2n)!|_p} r^{2n} = p^{v_p((2n)!)}.p^{\frac{2n}{p-1}} = p^{\frac{2n-S_p(2n)}{p-1}}.p^{\frac{-2n}{p-1}} = p^{\frac{-S_p(2n)}{(p-1)}}.$$

Par passage à la limite, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|_p r^n \neq 0$. *D'où la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ *est diverge sur le cercle* $C(0,p^{\frac{-1}{p-1}})$.

Définition 2.3 (***Fonction développable en série entière***).
Une fonction f de variable complexe p-adique, définit au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}_p$, est dit ***développable en série entière*** *ou voisinage de a, s'il existe une série entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ *de rayon de convergence R strictement positive, telle que*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n, \forall z \in d(a,R^-).$$

Remarque 2.2 *Un simple changement de variable permet de se ramener a des développement en série entière au voisinage de zéro .*

Définition 2.4 *Une fonction $f : d(0,r) \to \mathbb{C}_p$ avec $r > 0$ est dite analytique sur le disque $d(0,r)$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{C}_p$, telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0 \text{ et } f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

pour tout $z \in d(0,r)$.

Définition 2.5 *Une fonction $f : d(0,r^-) \to \mathbb{C}_p$ avec $r > 0$ est dite analytique sur le disque $d(0,r^-)$ si pour tout ρ, tel que $0 < \rho < r$ la restriction de f à $d(0,\rho)$ est une fonction analytique sur le disque $d(0,\rho)$ et $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ pour tout $z \in d(0,r^-)$.*

Remarque 2.3 *Si $r = +\infty$ dans la Définition 2.5, alors f est analytique sur $\mathbb{C}_p$ et on dit que f est entière.*

Exemple 2.2 *Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} p^{n^2} z^n$, $a_n = (p^{n^2})_n \geq 0$, $z \in \mathbb{C}_p$.*
On a

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{(-n)}} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

alors $\sum\limits_{n\geq 0} p^{n^2} z^n$ est convergente sur $\mathbb{C}_p$, donc la fonction f est analytique sur $\mathbb{C}_p$, d'où f est entière.

2.2 La distribution des zéros d'une fonction analytique dans $\mathbb{C}_p$

2.2.1 Polygone de valuation p-adique

Définition 2.6 *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ où $r > 0$. On définit le module maximum de f par la formule*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n.$$

Proposition 2.2 *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ où $r > 0$. L'application*

$$r \to |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \text{ (\textbf{\textit{module maximum}}),}$$

est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathcal{A}(d(0,r))$.

Preuve :

1. Le module maximum existe car f est analytique sur $d(0.r)$, alors la suite $(|a_n|_p r^n)_{n\geq 0}$ a une limite 0, lorsque n tend vers l'infini et $|a_n|_p r^n$ est bornée.
   Montrons que $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique.
   (a) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ où $r > 0$. Pour tout $z \in d(0,r)$, on a

$$\begin{aligned} |f|(r) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n = 0 \\ &\Longleftrightarrow |a_n|_p r^n = 0, \forall n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow |a_n|_p = 0, \forall n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow a_n = 0, \forall n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

   (b) Soient $f, g \in \mathcal{A}(d(0,r))$ avec $r > 0$. On pose $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, alors pour tout $z \in d(0,r)$, on a

$$f(z)g(z) = \sum_{k\geq 0} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) z^k,$$

   d'où

$$|fg|(r) = \max_{k\geq 0} |\sum_{i+j=k} a_i b_j|_p r^k.$$

   Montrons que $|fg|(r) \leqslant |f|(r)|g|(r)$, on a

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ |\sum_{i+j=k} a_i b_j|_p r^k &\leq (\max_{i+j=k} |a_i|_p |b_j|_p) r^k \\ &= \max_{i+j=k} \{(|a_i|_p r^i)(|b_j|_p r^j)\} \\ &\leq (\max_i |a_i|_p r^i)(\max_j |a_j|_p r^j) \\ &= |f|(r)|g|(r). \end{aligned}$$

   Alors

$$|fg|(r) \leq |f|(r)|g|(r). \tag{2.1}$$

   Pour montrer l'autre inégalité, choisissons I, J tel que

$$\begin{aligned} |a_I|_p r^I = |f|(r) \text{ et } |a_i|_p r^i < |f|(r), \text{ pour } i < I, \\ |b_J|_p r^J = |g|(r) \text{ et } |b_j|_p r^j < |g|(r), \text{ pour } j < J, \end{aligned}$$

   on va estimer les termes $\sum_{i+j=I+J} a_i b_j$

   (1) Si $i < I$ ou bien $j < J$, alors

$$|a_i|_p r^i < |f|(r) \quad \text{ou bien} \quad |b_i|_p r^j < |g|(r).$$

Donc

$$\begin{aligned}|a_i b_j|_p &< r^{-i-j}|f|(r)|g|(r)\\ &= r^{-I-J}|f|(r)|g|(r).\end{aligned}$$

(2) Si $i = I$ et $j = J$, alors

$$|a_I|_p r^I = |f|(r) \text{ et } |b_J|_p r^J = |g|(r).$$

Donc

$$|a_I b_J|_p = r^{-I-J}|f|(r)|g|(r),$$

d'où il y a un terme maximum dans la somme $\sum\limits_{i+j=I+J} a_i b_j$ avec $i = I$ et $j = J$, et comme le corps $\mathbb{C}_p$ un corps ultramétrique, la valeur absolue de la somme sera égale à la valeur absolue de plus grand coefficient de la somme. Donc

$$|\sum_{i+j=I+J} a_i b_j|_p = r^{-I-J}|f|(r)|g|(r),$$

alors

$$|\sum_{i+j=I+J} a_i b_j|_p r^{I+J} = |f|(r)|g|(r).$$

Pour calculer $|fg|(r)$, on doit prendre le maximum de tous les coefficients du produit, la dernière égalité nous dit que la coefficient $|f|(r)|g|(r) = |\sum\limits_{i+j=I+J} a_i b_j|_p r^{I+J}$.
Donc le maximum ne peut être que plus grand, ainsi on montre que

$$|fg|(r) \geq |f|(r)|g|(r). \tag{2.2}$$

D'après (2.1) et (2.2), on a

$$|fg|(r) = |f|(r)|g|(r).$$

(c) Soient $f, g \in \mathcal{A}(d(0,r))$ telles que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad et \quad g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n.$$

On a

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n,$$

donc

$$|f+g|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n + b_n|_p r^n.$$

Et comme on a

$$\forall n \geq 0, |a_n + b_n|_p \leq \max\{|a_n|_p, |b_n|_p\},$$

alors

$$\forall n \geq 0, |a_n + b_n|_p r^n \leq \max\{|a_n|_p, |b_n|_p\} r^n$$
$$\leq \max\{|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n\}.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}\max_{n\geq 0} |a_n + b_n|_p r^n &\leq \max_{n\geq 0}(\max\{|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n\}) \\ &\leq \max(\max_{n\geq 0}\{|a_n|_p r^n, |b_n|_p r^n\}) \\ &\leq \max\{\max_{n\geq 0} |a_n|_p r^n, \max_{n\geq 0} |b_n|_p r^n\} \\ &\leq \max\{|f|(r), |g|(r)\},\end{aligned}$$

d'où

$$|f + g|(r) \leq \max\{|f|(r), |g|(r)\},$$

donc $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique.

■

Remarque 2.4 *D'après la Proposition* 2.2 *si f est une fonction analytique sur $d(0, r)$, on a*

$$||f|| = \max_{z\in d(0,r)} |f(z)|_p = |f|(r),$$

cette relation est appelée ***égalité de Cauchy****.*

Proposition 2.3 *Soit $f \in \mathcal{A}(d(0, r))$ avec $r > 0$, une fonction non nulle. Alors*

P1 *La fonction $|f|(r)$ est croissante.*

P2 *Si f a un zéro b dans le disque $d(0, r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante pour $r > |b|_p$.*

P3 *La fonction $|f|(r)$ est continue.*

2.2.2 La fonction de valuation p-adique

Définition 2.7 (***La fonction de valuation*** p***-adique***).
Soit $f \in \mathcal{A}(d(0, r))$ avec $r > 0$, une fonction non nulle. On définit une fonction v_f sur $]-\infty, \log R[$ par :

$$v_f : I =]-\infty, \log R[\to \mathbb{R}$$
$$\log r \to v_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log |a_n|_p + n \log r\}$$

Cette fonction est la ***fonction de valuation p-adique*** *de f et son graphe est dit* ***polyngône de valuation p-adique*** *de f .*

Remarque 2.5 *Pour chaque n nous construisons le graphe $\gamma_n(\log r)$ qui d'écrit les droite $\log|a_n|_p + n\log r$ de la pente n comme fonction de $\log r$.*

Proposition 2.4 *[5] La fonction v_f vérifie les propriétés suivantes :*

P1 *C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceaux .*

P2 *Si f a un zéro b dans $d(0,r^-)$, v_f est strictement croissante pour $\log r > \log|b|_p$.*

P3 *v_f admet une dérivée à gauche $\frac{d^-v_f}{d(\log r)}$ et une dérivée à droite $\frac{d^+v_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$ et on a*

- $\frac{d^+v_f}{d(\log r)} = N(f,r)$ *le plus grand entier tel que $v_f(\log r) = \log|a_i|_p + N(f,r)\log r$ où $N(f,r)$ est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $d(0,r)$.*
- $\frac{d^-v_f}{d(\log r)} = n(f,r)$ *le plus petit entier tel que $v_f(\log r) = \log|a_i|_p + n(f,r)\log r$ où $n(f,r)$ est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $d(0,r^-)$.*
  Donc $N(f,r) - n(f,r)$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0,r)$.

Théorème 2.1 *[1] Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telle que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p^*$. Si la suite $(|\frac{a_{n-1}}{a_n}|)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, alors la suite de zéros de f dans $\mathbb{C}_p$ est une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\gamma_n| = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$.*

Preuve :

a) Montrons que les zéros de f peuvent être rangés en une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\gamma_n| = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$. Posons $r_n = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$ et on montre que $|f|(r_n) = |a_k|r_n^k$, pour les seules valeurs $k = n-1$ et $k = n$. On a

$$\frac{|a_n|r_n^n}{|a_{n-1}|r_n^{n-1}} = |\frac{a_n}{a_{n-1}}|r_n = |\frac{a_n}{a_{n-1}}||\frac{a_{n-1}}{a_n}| = 1.$$

Alors $|a_n|r_n^n = |a_{n-1}|r_n^{n-1}$. De plus,

- Si $0 \leq k < n-1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|a_k|r_n^k}{|a_n|r_n^n} &= \frac{|a_k|}{|a_n|}\frac{1}{r_n^{n-k}}\\ &= |\frac{a_k}{a_{k+1}} \times \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \times \cdots \times \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_n}|.\frac{1}{r_n^{n-k}}\\ &= |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \times |\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}| \times \cdots \times |\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}| \times |\frac{a_{n-1}}{a_n}|.\frac{1}{r_n^{n-k}}\\ &< \underbrace{r_n \times r_n \times \cdots \times r_n \times r_n}_{(n-k)\text{ fois}}\cdot\frac{1}{r_n^{n-k}}\\ &= r_n^{n-k}\cdot\frac{1}{r_n^{n-k}}\\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où $\frac{|a_k|r_n^k}{|a_n|r_n^n} < 1$, alors $|a_k|r_n^k < |a_n|r_n^n$.

⋆ Si $k > n$, on a

$$\frac{|a_k|r_n^k}{|a_{n-1}|r_n^{n-1}} = \frac{|a_k|}{|a_{n-1}|}r_n^{k+1-n},$$

et

$$\begin{aligned}|\frac{a_{n-1}}{a_n}| \times |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \times \cdots \times |\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}| \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}| &> \underbrace{r_n \times r_n \times \cdots \times r_n \times r_n}_{(k+1-n) \text{ fois}} \\ &= r_n^{k+1-n}.\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{|a_k|}{|a_{n-1}|}r_n^{k+1-n} < |\frac{a_k}{a_{n-1}}||\frac{a_{n-1}}{a_n}| \times |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \times \cdots \times |\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}| \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}| = 1.$$

D'où $\quad \dfrac{|a_k|r_n^k}{|a_{n-1}|r_n^{n-1}} < 1$, alors $\quad |a_k|r_n^k < |a_{n-1}|r_n^{n-1}$.
Alors dans le cercle $C(0, r_n)$ contient un seul zéro γ_n de f avec

$$|\gamma_n| = r_n = \Big|\frac{a_{n-1}}{a_n}\Big|.$$

b) Pour montrer que f n'a pas d'autre zéro que les γ_n, on va montré que si $r_n < r < r_{n+1}$, alors $|f|(r) = |a_k|r^k$, pour la seule valeur $k = n$.
En effet

⋆ Si $0 \leq k \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned}|a_k|r^k &= |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \times |\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}| \times \cdots \times |\frac{a_{n-1}}{a_n}| \times |a_n|r^k \\ &< \underbrace{r_n \times r_n \times \cdots \times r_n}_{(n-k)\text{fois}}|a_n|r^k \\ &= r_n^{n-k} \cdot |a_n|r^k \\ &< r^{n-k}|a_n|r^k = |a_n|r^n.\end{aligned}$$

Donc $|a_k|r^k < |a_n|r^n$.

⋆ Si $k > n$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|a_k|r^k}{|a_n|r^n} = \frac{|a_k|}{|a_n|}r^{k-n} &< \frac{|a_k|}{|a_n|}r_{n+1}^{k-n} \\ &< |\frac{a_k}{a_n}| \times |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \times \cdots \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}| = 1.\end{aligned}$$

Donc $|a_k|r^k < |a_n|r^n$, d'où $\max\limits_{k \geq 0}|a_k|r^k = |a_n|r^n$.

■

Théorème 2.2 *[1] Soit $f \in \mathcal{A}(C(0,r))$ ayant q zéros in $C(0,r)$, en prenant en compte les multiplicités et soit $t = n(f,r)$. Alors $r = \sqrt[q]{|\frac{a_t}{a_{q+t}}|}$.*

Remarque 2.6 *Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

En effet
Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(z) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + ...,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|z-b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(z)| = |a_m||z-b|^m \neq 0.$$

2.2.3 Formule de Jensen

Dans cette section on va donner la version ultramétrique de la formule de Jensen pour une fonction analytique.

Théorème 2.3 *Soient $f \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$, $\rho \in]0,r[$ et $f(0) \neq 0$. Soient $\alpha_i, i \geq 1$ les zéros de f (pas nécessairement distincts) sur le disque fermé $d(0,\rho)$. Alors*

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p \leq \rho} w_\alpha(f) \log \frac{\rho}{|\alpha|_p}, \tag{2.3}$$

où $w_\alpha(f)$ est un entier positive égale à q si f a un zéro α d'ordre q, et si $f(\alpha) \neq 0, w_\alpha(f) =$ 0.

Preuve : La démonstration de cette formule est basé sur la fonction de valuation p-adique de f.
Soit $f \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$, *tel que* $f(0) \neq 0$. Pour montre (2.3), supposons que les zéros de f sont dans le cercle $C(0,\rho_i)$ tel que $i \in \overline{1,k}$ avec $0 < \rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_k \leq \rho$ pour tout $\rho \in]0,r[$, et le nombre de zéros dans les disques $d(0,\rho_i)$ sont $n_i, i \in \{0,k\}$ avec $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < ... < n_k$. Et comme on a pour tout $t \in]0,\rho]$

$$\log|f|(t) = \max_{n \geq 0}\{\log|a_n|_p + n\log t\}.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
0 < t \leq \rho_1 \quad & \log|f|(t) = \log|a_0|_p = \log|f(0)|_p \\
\rho_1 \leq t \leq \rho_2 \quad & \log|f|(t) = \log|a_{n_1}|_p + n_1 \log t \\
& \vdots \\
\rho_{k-1} \leq t \leq \rho_k \quad & \log|f|(t) = \log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1} \log t \\
\rho_k \leq t \leq \rho \quad & \log|f|(t) = \log|a_{n_k}|_p + n_k \log t,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\log|f|(\rho) &= [\log|f|(\rho) - \log|f|(\rho_k)] + [\log|f|(\rho_k) - \log|f|(\rho_{k-1})] + ... + [\log|f|(\rho_2) - \log|f|(\rho_1)] \\
&\quad + \log|f|(\rho_1) \\
&= [\log|a_{n_k}|_p + n_k \log\rho - \log|a_{n_k}|_p - n_k\log\rho_k] + [\log|a_{n_{k-1}}|_p + n_{k-1}\log\rho_k - \log|a_{n_{k-1}}|_p \\
&\quad - n_{k-1}\log\rho_{k-1}] + ... + [\log|a_{n_1}|_p + n_1\log\rho_2 - \log|a_{n_1}|_p - n_1\log\rho_1] + \log|f(0)|_p \\
&= n_k\log\frac{\rho}{\rho_k} + n_{k-1}\log\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} + ... + n_1\log\frac{\rho_2}{\rho_1} + \log|f(0)|_p \\
&= n_k\log\frac{\rho}{\rho_k} + n_{k-1}(\log\frac{\rho}{\rho_{k-1}} - \log\frac{\rho}{\rho_k}) + ... + n_1(\log\frac{\rho}{\rho_1} - \log\frac{\rho}{\rho_2}) + \log|f(0)|_p \\
&= (n_k - n_{k-1})\log\frac{\rho}{\rho_k} + (n_{k-1} - n_{k-2})\log\frac{\rho}{\rho_{k-1}} + ... + (n_2 - n_1)\log\frac{\rho}{\rho_2} \\
&\quad + (n_1 - n_0)\log\frac{\rho}{\rho_1} + \log|f(0)|_p,
\end{aligned}$$

où

n_k le nombre de zéros de f dans le disque fermé $d(0,\rho_k)$,

n_{k-1} le nombre de zéros de f dans le disque ouvert $d(0,\rho_k^-)$,

$n_k - n_{k-1}$ le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0,\rho_k)$.

Donc on a

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{\rho}{\rho_i},$$

alors

$$\log|f|(\rho) = \log|f(0)|_p + \sum_{|\alpha|_p<\rho} w_a(f)\log\frac{\rho}{|\alpha|_p}.$$

■

Exemple 2.3 *Soit $P(z) \in \mathbb{C}_3[z]$ tel que*

$$\begin{aligned}
P(z) &= 108 + 63z + 66z^2 + 21z^3 \\
&= (1.3^3 + 1.3^4) + (1.3^2 + 2.3^3)z + (1.3 + 1.3^2 + 2.3^3)z^2 + (1.3 + 2.3^2)z^3 \\
&= a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3.
\end{aligned}$$

Alors

$$|a_0|_3 = 3^{-3},\ |a_1|_3 = 3^{-2},\ |a_2|_3 = 3^{-1}\ et\ |a_3|_3 = 3^{-1}.$$

On va calculé $|P|(r)$:

- ⋆ *Pour $r = \frac{1}{9}$, on a*

$$|a_3|_3 r^3 = 3^{-7} < |a_2|_3 r^2 = 3^{-5} < |a_1|_3 r^1 = 3^{-4} < |a_0|_3 r^0 = 3^{-3}.$$

Donc $|P|(\frac{1}{3^2}) = 3^{-3}$ d'où $N(P,\frac{1}{3^2}) = n(P,\frac{1}{3^2}) = 0$, alors P n'a aucun zéro sur le disque fermé $d(0,p^{-2})$.

⋆ *Pour* $r = \frac{1}{3}$, *on a*

$$|a_3|_3 r^3 = 3^{-4} < |a_0|_3 r^0 = |a_1|_3 r^1 = |a_2|_3 r^2 = 3^{-3}.$$

Donc $|P|(\frac{1}{3}) = 3^{-3}$ *d'où* $N(P, \frac{1}{3}) = 2$, *alors* P *a deux zéros dans le disque fermé* $d(0, \frac{1}{3})$.
$n(P, \frac{1}{3}) = 0$, *alors* P *n'a aucun zéros dans le disque ouvert* $d(0, (\frac{1}{3})^-)$.
$N(P, \frac{1}{3}) - n(P, \frac{1}{3}) = 2$, *alors* P *a deux zéros sur le cercle* $C(0, \frac{1}{3})$.

⋆ *Pour* $r = 1$, *on a*

$$|a_0|_3 r^0 = 3^{-3} < |a_1|_3 r^1 = 3^{-2} < |a_2|_3 r^2 = |a_3|_3 r^3 = 3^{-1}.$$

Donc $|P|(1) = 3^{-1}$ *d'où* $N(P, 1) = 3$, *alors* P *a trois zéros dans le disque fermé* $d(0, 1)$.
$n(p, 1) = 2$, *alors* P *a deux zéros dans le disque ouvert* $d(0, 1^-)$.
$N(P, 1) - n(P, 1) = 1$, *alors* P *a un zéros sur le cercle* $C(0, 1)$.

⋆ *Pour* $r = 3$, *on a*

$$|a_0|_3 r^0 = 3^{-3} < |a_1|_3 r^1 = 3^{-1} < |a_2|_3 r^2 = 3 < |a_3|_3 r^3 = 3^2.$$

Donc $|P|(3) = 3^2$,
d'où $N(P, 3) = n(P, 3) = 3$, *alors* P *n'a aucun zéros sur le cercle* $C(0, 3)$.

Et comme $\mathbb{C}_p$ *algébriquement clôs, on a*

$$|P|(r) = \begin{cases} |a_0|r^0 \ , & 0 < r \leq \frac{1}{3} \\ |a_2|r^2 \ , & \frac{1}{3} \leq r \leq 1 \\ |a_3|r^3 \ , & r \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3^{-3}r^0 \ , & 0 < r \leq \frac{1}{3} \\ 3^{-1}r^2 \ , & \frac{1}{3} \leq 1 \\ 3^{-1}r^3 \ , & r \geq 1 \end{cases}$$

d'où

$$\log|P|(r) = \begin{cases} -3\log 3 \quad , & -\infty < \log r \leq -\log 3 \\ -\log 3 + 2\log r \ , & -\log 3 \leq \log r \leq 0 \\ -\log 3 + 3\log r \ , & \log r \geq 0 \end{cases}$$

2.3 Image d'un disque

L'image d'un disque fermé $d(0, r)$ par une fonction analytique est un disque de même nature et l'image d'un disque ouvert $d(0, r^-)$ par une fonction analytique est aussi un disque de même nature .

Théorème 2.4 *[1] Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0, r))$ *et soit* $t = \max_{n \geq 1} |a_n| r^n$. *Alors*

$$f(d(0, r)) = d(a_0, t) \text{ et } |f - a_0|(r) = t.$$

Preuve : D'après la Définition de module maximum on a

$$|f - a_0|(r) = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n = t.$$

De plus, d'une parte, il est clair que $f(d(0,r))$ est inclus dans $d(a_0,t)$ car si $y \in f(d(0,r))$, alors il existe $z_0 \in d(0,r)$ tel que $y = f(z_0)$, d'où

$$\begin{aligned}|y - a_0|_p = |f(z_0) - a_0|_p &\leq \max_{z\in d(0,r)} |f(z) - a_0|_p \\ &= |f - a_0|(r) = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n = t,\end{aligned}$$

donc $y \in d(a_0,t)$.
D'autre parte, on prend $b \in d(a_0,t)$ et on considère la fonction

$$g(z) = f(z) - b = a_0 - b + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

D'ailleurs, le Théorème 2.4 est trivial quand $t = 0$, donc on peut supposer $t > 0$. D'où

$$|a_0 - b| \leq t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n,$$

alors d'après l'hypothèse on a $N(g,r) \geq 1$. Ensuite, g admet au moins un zéro dans $d(0,r)$ et donc b appartient à $f(d(0,r))$. ■

Corallaire 2.1 *[9] Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$ *tel que* $0 < r < R$, *et soit* $t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n$. *Si* $t > 0$, *alors*

$$f(d(0,r^-)) = d(a_0,t^-).$$

Preuve : D'une parte, il est claire que $f(d(0,r^-))$ est inclus dans $d(a_0,t^-)$. D'autre parte, soit $b \in d(a_0,t^-)$ et soit $\rho \in]0,r[$ satisfaire $\max_{n\geq 1} |a_n| \rho^n \geq |b - a_0|$. Alors, d'après le Théorème (2.1), b appartient à $f(d(0,\rho))$ car $f \in \mathcal{A}(d(0,\rho))$. ■

Corallaire 2.2 *Soit* $f \in \mathcal{A}(d(0,r))$ *tel que* $N(f,r) \geq 1$, *et soit* $b \in f(d(0,r))$. *Si* $g(z) = f(z) - b$, *alors* $N(g,r) = N(f,r)$.

Preuve : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et on pose $s = N(f,r)$. Alors on a

$$|a_s| r^s \geq |a_n| r^n, \ \forall n < s,$$

et

$$|a_s| r^s > |a_n| r^n, \ \forall n > s.$$

D'où, si $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, on a $b_0 = a_0 - b$ et $b_n = a_n, \forall n \geq 1$. D'après l'hypothèse et le Théorème 2.4 on a $b \in f(d(0,r)) = d(a_0,t)$, alors

$$|b_0| = |a_0 - b| \leq t = \max_{n\geq 1} |a_n| r^n.$$

Par conséquent $|b_0| \leq |b_s| r^s$, d'où $N(g,r) = s$. ■

Corallaire 2.3 *Soit $f \in \mathcal{A}(d(0,r))$ admet s zéros dans le disque $d(0,r)$ où $s \geq 1$ (en prenant en compte les multiplicités), et soit $b \in f(d(0,r))$. Alors $f-b$ admet aussi s zéros dans le disque $d(0,r)$ (en prenant en compte les multiplicités).*

Preuve : D'après l'hypothèse on sait que $|f|(r) = |a_s|r^s$, et $N(f,r) = s \geq 1$. Et comme on a $b \in f(d(0,r))$, alors d'après le Corollaire (2.2), on a

$$N(f,r) = N(f-b,r) = s.$$

Alors $f-b$ a "s zéros" dans $d(0,r)$. ■

Lemme 2.1 *Soient $f \in \mathcal{A}(d(0,r))$, et $s = N(f,r)$ où $s \geq 1$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_q$ les zéros de f' dans le disque $d(0,r)$. Pour tout $b \in f(d(0,r)) \setminus f(\{\alpha_1, ..., \alpha_q\})$, $f-b$ admet exactement s zéros simples dans le disque $d(0,r)$.*

Preuve : Soit $b \in f(d(0,r)) \setminus f(\{\alpha_1, ..., \alpha_q\})$. Alors d'après le Corollaire 2.3 on $f-b$ admet s zéros dans le disque $d(0,r)$(en prenant en compte des multiplicités). Mais, pour tout zéro α de $f-b$, on a $f^{'}(\alpha) \neq 0$ car $\alpha \neq \alpha_j$ pour tout $j = 1, ..., q$. D'où tous les zéros de $f-b$ sont simples. ■

Théorème 2.5 *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante et $b \in \mathbb{C}_p$. Alors $f-b$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}_p$. De plus, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$, alors $f-b$ a une infinité de zéros dans $\mathbb{C}_p$.*

Corallaire 2.4 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constante. Alors on a $f(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p$.*

2.4 Théorème de l' inverse locale p-adique

Définition 2.8 *Soit $f(z) \in \mathcal{A}(d(0,r))$ (resp. $f(z) \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$), on dit que f est strictement injective sur $d(0,r)$ (resp. sur $d(0,r^-)$) si f est injective et $f^{'}(z) \neq 0$ pour tout $z \in d(0,r)$ (resp. $z \in d(0,r^-)$).*

Proposition 2.5 *Si $f \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$ injective sur $d(0,r^-)$, alors f est strictement injective sur $d(0,r^-)$.*

Preuve : On suppose que f n'est pas strictement injective sur $d(0,r^-)$, alors il existe $\alpha \in d(0,r^-)$ tel que $f^{'}(\alpha) = 0$.

Soit $d(\alpha, \rho)$ un disque inclus dans $d(0, r^-)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha = 0$. Donc pour tout $z \in d(0, \rho)$, on a

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=q}^{\infty} a_n z^n, \text{ où } q \geq 2 \text{ et } a_q \neq 0,$$

car $f'(0) = a_1 = 0$. Alors d'après le Corollaire 2.2 on a

$$N(f, \rho) = N(f - a_0, \rho) \geq q \geq 2.$$

On prend $s = N(f, \rho)$, et comme on a f' n'est pas identiquement nulle. Alors f' admet un nombre fini des zéros $\alpha_1 = 0, \alpha_2, ..., \alpha_j \in d(0, \rho)$. Donc pour $b \in f(d(0, \rho)) \backslash f(\alpha_1, ..., \alpha_j)$. D'après le Lemme 2.1, la fonction $f - b$ admet s zéros simples en $d(0, \rho)$ et cela contredit l'hypothèse "f est injective dans $d(0, \rho)$". ■

Théorème 2.6 *Soient* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0, r))$, *et* $t = \max\limits_{n \geq 1} |a_n| r^n > 0$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(α) $|a_1| > |a_n| r^{n-1}$, $\forall\, n > 1$.

(β) $|f(z) - f(y)| = |z - y||a_1|$, $\forall\, z, y \in d(0, r)$.

(γ) f *est strictement injectif dans* $d(0, r)$.

De plus, si les conditions $\alpha), \beta), \gamma)$ *sont satisfaits. Alors on a* $t = |a_1| r$ *et* $|f'(z)| = |a_1|$ *pour tout* $z \in d(0, r)$.

Preuve :

1) On suppose que $\alpha)$ est satisfait. Donc pour tout $z, y \in d(0, r)$, on a

$$\begin{aligned} f(z) - f(y) &= a_1(z - y) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z^n - y^n) \\ &= (z - y) \left(a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j y^{n-1-j} \right) \right). \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 2$, on voit que

$$|z^j y^{n-1-j}| = |z|^j |y|^{n-1-j} \leq r^j r^{n-1-j} = r^{n-1},$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j y^{n-1-j} \right) \right| &\leq \max_{n>1} |a_n| r^{n-1} \\ &< |a_1|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| &= |z - y| \left| a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j y^{n-1-j} \right) \right| \\ &= |z - y||a_1|. \end{aligned}$$

De plus, on remarque que α) implique $|f^{'}(z)| = |a_1|$, pour tout $z \in d(0,r)$ et d'après le Théorème (2.1) on a $t = |a_1|r$.

2) On suppose que β) satisfait. Comme on a $t > 0$, d'après le Théorème 2.1 f n'est pas un constante, donc $a_1 \neq 0$. Puis, d'après β) on a $f(z) \neq f(y)$ pour tout $z \neq y$.

3) On suppose que γ) est satisfait. Alors pour tout $b \in f(d(0,r))$ on a $s = N(f,r) = N(f-b,r)$.
Si $s \geq 2$, alors $f-b$ admet plusieurs zéros différents, ou bien $f-b$ admet un zéro α d'ordre s. Donc dans les deux cas $f-b$ n'est pas strictement injective, alors f n'est pas strictement injective. D'où $s = 1$, puis α) est satisfait.

■

Corallaire 2.5 *Si* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r))$ *une fonction injective dans* $d(0,r)$*et* $d(a_0,t) = f(d(0,r))$ *où* $t = \max\limits_{n\geq 1} |a_n|r^n$, *alors* f^{-1} *appartient à* $\mathcal{A}(d(a_0,t))$.

Corallaire 2.6 *Soit* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$, *et supposons que* $t = \max\limits_{n\geq 1} |a_n|r^n$ *est strictement positif. Alors les conditions* $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ *sont équivalents.*

(α) $|a_1| > |a_n|r^{n-1}, \forall\, n > 1$.

(β) $|f(z) - f(y)| = |z-y||a_1|. \forall\, z, y \in d(0,r^-)$.

(γ) *f est strictement injectif dans* $d(0,r^-)$.

(δ) $s = |a_1|r$.

De plus, lorsque les conditions $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$ *sont satisfait, on a* $|f^{'}(z)| = |a_1|$ *pour tout* $z \in d(0,r^-)$.

Preuve : Pour tout $\rho \in]0,r[$, on applique le Théorème (2.6) à $f \in \mathcal{A}(d(a,\rho))$ ■

Corallaire 2.7 *Si* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}(d(0,r^-))$ *une fonction injective dans* $d(0,r^-)$ *et soit* $t = r|f^{'}(0)|$. *Alors* f^{-1} *appartient à* $\mathcal{A}(d(a_0,t^-))$.

Conséquence 2.1 (***Inversion locale entière p-adique***).
Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, *et* $\alpha \in \mathbb{C}_p$. *On suppose que* $f'(\alpha) \neq 0$. *Alors il existe* $r_\alpha > 0$ *tel que* $f_{|d_\alpha} : d_\alpha \to d_{f(\alpha)}$ *où* $d_\alpha = d(\alpha, r^-)$ *et* $d_{f(\alpha)} = f(d_\alpha)$ *est bijective, de plus*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \text{ pour tout } z \in d_\alpha.$$

En effet,
On suppose par l'absurde que pour tout $r > 0$, il existe au moins un élément $z \in d(\alpha, r)$,

tels que $z \neq \alpha$ et $f(z) = f(\alpha)$. Soit $(r_n)_n$ une suite tend vers 0, alors il existe $z_n \in d(\alpha, r_n)$ où $z_n \neq \alpha$ et $f(z_n) = f(\alpha)$. Donc on a

$$\lim_{z_n \to \alpha} \frac{f(z_n) - f(\alpha)}{z_n - \alpha} = f'(\alpha) = 0,$$

c'est une contradiction. Alors f est injective dans $d(\alpha, r)$, d'où d'après le Corollaire 2.7 f^{-1} appartient à $\mathcal{A}(f(d_\alpha))$.

CHAPITRE 3

APPLICATION DU THÉORÈME DE L' INVERSE LOCALE P-ADIQUE SUR LA FACTORISATION DES FONCTIONS ENTIÈRES

3.1 Factorisation des fonctions entières p-adiques

Dans cette section on va donner quelques résultats sur la factorisation des fonctions entières p-adiques.

Définition 3.1 *Soit F une fonction entière. Si $F(z)$ peut être exprimé sous la forme*

$$F(z) = f(g(z)) = (f \circ g(z)), \tag{3.1}$$

où f et g sont des fonctions entières, alors on appelle l'expression (3.1) une factorisation de F et f, g sont appelés le facteur à gauche et le facteur à droite de F, respectivement.

Définition 3.2 *Si chaque factorisation de F de la forme ci-dessus implique que f ou g est linéaire (**resp.** f ou g est un polynôme), alors F est appelée **première** (**resp. pseudo -première**).*

Définition 3.3 *Si chaque factorisation de la forme* (3.1) *implique que f doit être linéaire* *lorsque g est transcendante (resp. g doit être linéaire lorsque f est transcendante), alors F est appelée* ***première à gauche*** *(**resp. première à droit**).*

Remarque 3.1 *Les étapes pour prouver qu'une fonction entière transcendantale donnée F est première sont :*

i) F est pseudo-première ?

ii) F ne peut pas être exprimé par $F(x) = P(g(z))$ où F est entière et P est un polynôme de $\deg P \geq 2$?

iii) F ne peut pas être exprimé par $F(z) = h(g(z))$ où $g(z)$ est un polynôme de $\deg \geq 2$ *et h une fonction entière ?*

Proposition 3.1 *[6] Soient F, f, $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non constantes. Soit ρ_0 un réel positif tel que la fonction $|g|(r)$ soit strictement croissante pour $r > \rho_0$.*
Posons $F = f \circ g$, alors on a pour tout $\rho > \rho_0$

i) $n(F, \rho) = n(f, |g|(\rho))n(g, \rho)$.

ii) $N(F, \rho) = N(f, |g|(\rho))N(g, \rho)$.

iii) $A(F, \rho) = A(f, |g|(\rho))N(g, \rho) + n(f, |g|(\rho))A(g, \rho)$.

où $A(F, \rho)$ est le nombre des zéros de F sur le cercle $C(0, \rho)$.

Preuve : Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telle que $F = f \circ g$ où $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$
d' où $|F|(r) = |f|(|g|(r))$, pour tout $r > 0$.
Comme la fonction $|g|(r)$ est strictement croissante pour $r > \rho_0$
on déduit que

$$\frac{d^-(v_F)}{d(u)} = \frac{d^-(v_f)}{d(v_g(u))}\frac{d^-(v_g)}{d(u)},$$

et

$$\frac{d^+(v_F)}{d(u)} = \frac{d^+(v_f)}{d(v_g(u))}\frac{d^+(v_g)}{d(u)},$$

pour $u = \log r > \log \rho_0$.
D'après la Proposition 3.1, on obtient

$$n(F, r) = n(f, |g|(r))n(g, r), \tag{3.2}$$

et

$$N(F, r) = N(f, |g|(r))N(g, r), \tag{3.3}$$

en faisant la différence entre (3.3) et (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} N(f, |g|(r))N(g, r) - n(f, |g|(r))n(g, r) &= N(f, |g|(r))N(g, r) - n(f, |g|(r))n(g, r) \\ &\quad + n(f, |g|(r))N(g, r) - n(f, |g|(r))N(g, r) \\ &= A(f, |g|(r))N(g, r) + n(f, |g|(r))A(g, r). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1 *[6] Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[z]$, λ un entier positif fixé. On suppose que sur une infinité de cercles de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F a un nombre de zéros compris entre 1 et λ. Alors toute factorisation de F sous la forme $F = f \circ g$ avec $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que f où g est un polynôme de degré compris entre 1 et λ.*

Preuve : On suppose que les deux fonctions f et g sont de degré supérieur ou égale à $\lambda + 1$
on aurait pour ρ assez grand

$$N(g, \rho) \geq \lambda + 1 \quad et \quad n(f, |g|(\rho)) \geq \lambda + 1.$$

D'autre part l'hypothèse du théorème et la formule *iii*) de la Proposition 3.1 montre que pour une infinité de ρ arbitrairement grand, on a $A(f, |g|(\rho)) \neq 0$ où $A(g, \rho) \neq 0$.
Pour un tel ρ on aurait alors $A(F, \rho) \geq \lambda + 1$. C'est une contradiction avec l'hypothèse.
Donc f où g est nécessairement un polynôme de degré compris entre 1 et λ ■

Corallaire 3.1 *Une fonction F remplissant les conditions du théorème* 3.1 *est*

1. *Première dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ si $\lambda = 1$*
2. *Pseudo-première dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ si $\lambda \geq 1$*

Exemple 3.1 1. *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} p^{n^2} z^n$, on a*

$$\bullet \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{p^{n^2}}{p^{(n+1)^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^{-(2n+1)}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} p^{(2n+1)}$$
$$= +\infty.$$

• $\forall n \in \mathbb{N} : |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = p^{2n+1}$, $(a_n)_n$*est une suite strictement croissante, donc*

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\frac{a_n}{a_{n+1}}| < |\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}|.$$

D'après le Théorème 2.1, *les zéros de f peuvent être rangés en une suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ tels que $|\gamma_n| = |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$. De plus, tous les zéros de f sont simple. Alors d'après le Corollaire* 3.1, *la fonction f est première.*

2. *Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} p^{[\frac{n^2}{4}]} z^n$, tel que $[.]$ est la fonction de parti entier, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \left|\frac{p^{[\frac{n^2}{4}]}}{p^{[\frac{(n+1)^2}{4}]}}\right| = p^{[\frac{(n+1)^2}{4}]-[\frac{n^2}{4}]}$$
$$\geq p^{[\frac{2n+1}{4}]},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} p^{[\frac{2n+1}{4}]} = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = +\infty,$$

d'où g est entière.
D'autre part on a $|\frac{a_0}{a_1}| < |\frac{a_1}{a_2}|$, et

$$\forall k \in \mathbb{N} : \begin{cases} |\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k+2}}| = |\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+3}}| = p^{k+1} \\ et \\ |\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k+3}}| < |\dfrac{a_{2k+3}}{a_{2k+4}}|. \end{cases}$$

D'après les Théorème 2.1 et Théorème 2.2, les zéros de f peuvent être rangés en une suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ tels que $|\gamma_n| = |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}|$. De plus, tous les zéros sont dans les cercles $C(0, \gamma_n)$. Alors d'après le Corollaire 3.1, $\lambda = 2$, donc g est une fonction pseudo-première.

Théorème 3.2 *[8] Soit F une fonction entière transcendent sur $\mathbb{C}_p$. Si pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$ la fonction $F - \beta$ n'a qu'un nombre fini des zéros multiples, alors F est* ***pseudo-première.***

3.2 Application de théorème d'inversion locale

Dans cette section on va appliquer le théorème d'inversion locale pour obtenir des fonctions entières transcendant première.

Théorème 3.3 *Soit f une fonction entière transcendantale sur $\mathbb{C}_p$. Alors $\{a \in \mathbb{C}_p \mid f(z) - az \text{ n'est pas première}\}$ est au plus un ensemble dénombrable.*

Pour démontrer le Théorème 3.3, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.1 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$. Alors il existe un ensemble dénombrable $E \subset \mathbb{C}_p$ tels que pour tout $a \in \mathbb{C}_p \backslash E$ et pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $f(z) - (az + b)$ a ou plus un zéro multiple.*

Preuve : Soit $Z(f^{''})$ l'ensemble des zéros de $f^{''}$. Et comme on a $\mathbb{C}_p$ est un espace séparable (voir [2]), alors il existe une famille dénombrable de disque ouverte $(d_i)_{i\geq 1}$ tel que

$$\mathbb{C}_p \setminus Z(f^{''}) = \cup_{i\geq 1} d_i,$$

et pour tout $i \geq 1$, la restriction f_i' de f' sur d_i est une fonction bi-analytique sur d_i (d'après le Théorème d'inversion locale). D'où on a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p = f'(\mathbb{C}_p) &= f'(\cup_{i\geq 1} d_i \cup Z(f^{''})) \\ &= (\cup_{i\geq 1} D_i) \cup f^{'}(Z(f^{''})), \text{ où } D_i = f^{'}(d_i). \end{aligned}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{C}_p$ par $g(z) = f(z) - zf'(z)$. Il convient de noter que même si la famille $(d_i)_{i\geq 1}$ est choisis pour que les disques d_i sont deux à deux disjoints, il n'y a aucune garantie que la famille $(D_i)_{i\geq 1}$ conserve cette propriété. En d'autres termes certains des disques D_i peut être emboité, et pour tenir compte de ce fait, on définit

$$\Gamma = \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ \mid \ D_i \subsetneqq D_j \text{ et } g \circ (f_i')^{-1} \neq g \circ (f_j')^{-1} \text{ dans } D_i\};$$

$$\Delta_{ij} = \{z \in D_i \ \mid \ g \circ (f_i')^{-1}(z) = g \circ (f_j')^{-1}(z)\}, \forall (i,j) \in \Gamma$$

et

$$\Delta = \cup_{(i,j)\in\Gamma} \Delta_{ij}.$$

Alors, $E = (f'(Z(f''))) \cup \Delta$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}_p$.

Soit $a \in \mathbb{C}_p \backslash E$, et soit $I_a = \{i \in \mathbb{N}^* \ \mid \ a \in D_i\}$, donc les disques D_i, pour $i \in I_a$, sont emboités et $(f(z) - (az + b))' = f'(z) - a$. Alors l'ensemble des zéros multiples de la fonction $f(z) - (az + b)$ est égal à A où

$$A = \{(f_i')^{-1}(a) \ \mid i \in I_a \text{ et } f \circ (f_i')^{-1}(a) = a(f_i')^{-1}(a) + b\}.$$

Donc si on suppose que $(f_i')^{-1}(a)$ et $(f_j')^{-1}(a)$ sont deux éléments distincts de A (on peut prendre $D_i \subsetneqq D_j$). Alors, le fait que chacun de ces éléments soit une solution de l'équation $f(z) - az = b$ implique que

$$f((f_i')^{-1}(a)) - (f_i')^{-1}(a)f'((f_i')^{-1}(a)) = f((f_j')^{-1}(a)) - (f_j')^{-1}(a)f'((f_j')^{-1}(a)),$$

où

$$g \circ (f_i')^{-1}(a) = g \circ (f_j')^{-1}(a).$$

Et comme on a $a \notin \Delta$, alors on déduit que

$$g \circ (f_i')^{-1}(z) = g \circ (f_j')^{-1}(z), \forall z \in D_i.$$

D'où, par la dérivation de cette dernière équation, on trouve que

$$(f_i')^{-1}(z) = (f_j')^{-1}(z), \forall z \in D_i,$$

et en particulier $(f_i')^{-1}(a) = (f_j')^{-1}(a)$. Donc c'est une contradiction, alors l'ensemble A admet au plus un élément. ■

Lemme 3.2 *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[Z]$ tel que pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, la fonction $F - \beta$ a au plus un zéro multiple. Alors F est* ***première.***

Preuve : D'après le Théorème 3.2, F est pseudo-première. Donc, il reste à montrer que F est première à gauche et à droit.

Pour cela, on suppose que $F(x) = f \circ g$, où $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[X]$ et $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. Et comme on a F est pseudo-première, alors f est un polynôme. Si on suppose que $\deg f \geq 2$, alors $f'(w)$ admet au moins un zéro α.
Puisque on a $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[X]$, alors d'après le Théorème de Picard p-adique a une infinité des zéros, et l'ensemble $\{g^{-1}(\alpha)\}$ est infini, et pour $\beta = f(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ on a pour tout $w \in \{g^{-1}(\alpha)\}$

$$\begin{cases} (F-\beta)(w) = F(w) - \beta = f \circ g(w) - \beta = f(\alpha) - \beta = 0, \\ et \\ (F-\beta)'(w) = F'(w) = f'(g(w)) \times g'(w) = f'(\alpha) \times g'(w) = 0. \end{cases}$$

D'où tous éléments de $\{g^{-1}(\alpha)\}$ sont des zéros multiples de $F - \beta$. Ce qui contredit l'hypothèse.
D'autre part, si on suppose que $F(x) = f \circ g$, où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[X]$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. D'après le Théorème 3.2, F est pseudo première, donc g est un polynôme. Supposons que $\deg g = d \geq 2$. On a

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

et lorsque $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[X]$, alors la fonction $f' \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[X]$. De plus, f' admet une infinie de zéros. On choisir un élément w tel que $f'(w) = 0$ et $g - w$ a que des zéros simples $\gamma_1, ..., \gamma_d$, Alors, pour $i = 1, ..., d$, on a

$$\begin{cases} F(\gamma_i) = f(w) = \beta, \\ (F-\beta)'(\gamma_i) = 0, \end{cases}$$

cela signifie que tous les γ_i sont des zéros multiples de $F - \beta$, donc c'est une contradiction. Par conséquent, $F(x)$ première à droit. ■

La preuve du Théorème 3.3 **:** Soit E l'ensemble dénombrable du lemme 3.1, et soit $a \in \mathbb{C}_p \backslash E$. Puisque f est une fonction entière transcendantale, on voit que la fonction $h(z) = f(z) - az$ est aussi une fonction entière transcendantale. Alors le Lemme 3.1 ci-dessus garantit que, pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $h(z) - b = f(z) - az - b$ admet au plus un multiple zéro. Donc le Lemme 3.2 permet de conclure que la fonction $f(z) - az = h(z)$ est première. ■

Théorème 3.4 *Soit f une fonction entière transcendantale sur $\mathbb{C}_p$. Alors $\{a \in \mathbb{C}_p \mid f(z)(z-a)$ n'est pas premiére$\}$ est au plus un ensemble dénombrable.*

Pour démontrer le Théorème 3.4, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \backslash \mathbb{C}_p[z]$. Alors il existe un ensemble dénombrable $E' \subset \mathbb{C}_p$ tels que pour tout $a \in \mathbb{C}_p \backslash E'$ et pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $(z-a)f(z) - b$ a au plus un multiple zéro.*

Preuve : La procédure est très similaire à celle utilisée dans la preuve du Lemme 3.1. On peut vérifie facilement que un élément ζ de $\mathbb{C}_p$ est un multiple zéro de la fonction $(z-a)f(z)-b$ si et seulement si

$$\begin{cases} (\zeta-a)f(\zeta)-b=0, \\ f(\zeta)+(\zeta-a)f'(\zeta)=0, \end{cases}$$

cela signifie que

$$\begin{cases} a=\zeta+f(\zeta)/f'(\zeta)=g(\zeta), \\ b=(\zeta-a)f(\zeta)=(\zeta-g(\zeta))f(\zeta)=h(\zeta), \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions méromorphes, définies dans $\mathbb{C}_p$ par

$$\begin{cases} g(z)=z+f(z)/f'(z), \\ h(z)=(z-g(z))f(z). \end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $S(g')$ l'ensemble des zéros et des pôles de g' et soit $(d_i)_{i\geq 1}$ une famille dénombrable des disques tel que

$$\mathbb{C}_p \setminus S(g') = \cup_{i\geq 1} d_i,$$

et pour tout $i \geq 1$, la restriction g_i de g sur d_i est une fonction bi-analytique sur d_i(d'après le Théorème d'inversion locale p-adique). D'où on a

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p = g(\mathbb{C}_p) &= g(\cup_{i\geq 1} d_i \cup S(g')) \\ &= (\cup_{i\geq 1} D_i) \cup g(S(g')), \text{ où } D_i = g(d_i). \end{aligned}$$

Comme on a indiqué précédemment, les disques D_i ne sont nécessairement deux à deux disjoints. En d'autres termes, certains d'entre eux pourraient être emboité. Pour tenir compte de ce fait, on définit

$$\Gamma = \{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid D_i \subsetneqq D_j \text{ et } h\circ g_i^{-1} \neq h \circ g_j^{-1} \text{ dans } D_i\}$$

$$\Delta_{ij} = \{z \in D_i \mid h\circ g_i^{-1}(z) = h\circ g_j^{-1}(z)\}, \forall (i,j)\in\Gamma,$$

et

$$\Delta = \cup_{(i,j)\in\Gamma} \Delta_{ij}.$$

Alors, $E' = g(S(g')) \cup \Delta \cup (\cup_{i\geq 1} Z(f\circ g_i^{-1}))$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{C}_p$.

Soient $a \in \mathbb{C}_p \backslash E'$, et $I_a = \{i \in \mathbb{N}^* \mid a \in D_i\}$. Et comme on a les disques D_i, Pour $i \in I_a$, sont emboités et $((z-a)f(z)-b)' = f(z)+(z-a)f'(z)$, d'après la Relation (3.4), l'ensemble des zéros multiples de la fonction $(z-a)f(z)-b$ est égal à A où

$$A = \{g_i^{-1}(a) \mid b = h\circ g_i^{-1}(a) \text{ pour } i \in I_a\}.$$

On suppose que $g_i^{-1}(a)$ et $g_j^{-1}(a)$ sont deux éléments distincts A. Alors, on a $h(g_i^{-1}(a)) = h(g_j^{-1}(a)) = b$ (on peut prendre $D_i \subsetneqq D_j$). Donc si en utilisant le fait que $a \notin \Delta$, on trouve que

$$h \circ g_i^{-1}(z) = h \circ g_j^{-1}(z), \forall z \in D_i. \tag{3.5}$$

D'après la Relation (3.4), on a

$$\begin{aligned} h'(z) &= (1 - g'(z))f(z) + (z + g(z))f'(z) \\ &= (1 - g'(z))f(z) + (z - (z + f(z)/f'(z)))f'(z), \end{aligned}$$

d'où

$$h'(z) = -f(z)g'(z). \tag{3.6}$$

Par la dérivation du Relation (3.5) et l'utilisation du Relation (3.6), on obtient

$$f \circ g_i^{-1}(z) = f \circ g_j^{-1}(z), \forall z \in D_i.$$

En particulier, on a $f \circ g_i^{-1}(a) = f \circ g_j^{-1}(a)$. Mais comme on a $a \notin E'$, alors $f \circ g_i^{-1}(a) = f \circ g_j^{-1}(a) \neq 0$. D'où d'après la Relation (3.4), on obtient

$$(g_i^{-1}(a) - a)f(g_i^{-1}(a)) = (g_j^{-1}(a) - a)f(g_j^{-1}(a)) = b.$$

Puis, $g_i^{-1}(a) = g_j^{-1}(a)$, alors c'est une contradiction. Par conséquent, l'ensemble A Admet au plus un élément. ∎

La preuve du Théorème 3.4 : Soient E est un ensemble dénombrable de lemme 3.3, et $a \in \mathbb{C}_p \backslash E'$. Comme on a f est une fonction entière transcendantale, on voit que la fonction $h(z) = f(z)(z-a)$ est aussi une fonction entière transcendantale. Alors le Lemme 3.3 ci-dessus garantit que, pour tout $b \in \mathbb{C}_p$, la fonction $h(z) - b = f(z)(z-a) - b$ admet au plus un multiple zéro. Donc le Lemme 3.2 permet enfin de conclure que la fonction $f(z)(z-a) = h(z)$ est première. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A. Escassut**, *Analytic Elements in p-adique Anaysis,* World scientific publushing (1995).

[2] **A.M. Robert**, *A course in p-adic Analysis*, in : Graduate Texts in Mathematics, vol. 198, Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] **B. DIARRA**, *Analyse p-adique.* Cours de DEA - Algèbre commutative FAST - Unversité du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[4] **C.T. Chuang & C.C. Yang**, *Fix-Points and factorization of Meromorphic Functions*, World Scientific, Singapore, 1990.

[5] **J.P. Bézevin**, *Dynamique des fractions rationnels p-adique, DEA de mathématique*, Université de Caen , ,(23 mai 2005).

[6] **J.P. Bézivin & A. Boutabaa**, *Decomposition of p-adic meromorphic functions,* Ann. Math. Blaise pascal 2 (1) (1995) 51-60.

[7] **H. Vanneuville & L. Vera**, *Propriété C_i des cors et conjecture de Kato-Kuzumaki.* Sous la direction d'Olivier Wittenberg 13 novembre 2013.

[8] **M. Ozawa**, *On certain criteria for the left-primeness of entire functions.* Kadai Math. Sem. Rep. 26(1975) $304 - 317$.

[9] **M. Ozawa**, *On certain for the left-primenes of entire functions II.* Kadai Math. Sem. Rep. 27(1976)$1 - 10$.

[10] **N. Koblitez**, *p-adic analysis and Zeta function.* Springer-verlag(1984).

[11] **P.C. Hu & C.C. Yang**, *Meromorphic Functions over Non Archimedean Fields.* Kluwer Academy Publishers, 2000.

[12] **P. Colmez**, *Les nombres p-adiques.* Notes du cours de m2.

[13] **S. Katok**, *Real and p-adic analysis.* Course notes for MATH 497C MASS Program, FALL 2000 Revised, Novembre 2001.

[14] **Y. Noda**, *On the factorization of entire functions.* Kadai Math. J. 4(1981) 480 − 494.