République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre ....

№ de séries ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Solutions anti-périodiques pour une classe d'équations différentielles dans un Hilbert

Présenté par

Hayat Goutas *Kawthar Ghaoui*

Devant le jury composé de

Président	Dalila Azzam-Laouir	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	Soumia Saïdi	M.C.A.	Université de Jijel
Examinateur	Messaouda Benguessoum	M.A.A.	Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur Mme. Soumia Saïdi, Maître de Conférences A à l'université de Jijel, pour ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux membres du jury Prof Dalila Azzam-Laouir et Mme Messaouda Benguessoum MAA à l'université de Jijel, qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Bien évidemment, ce mémoire n'aurait pu voir le jour sans l'enseignement de qualité reçu tout au long de notre formation. Nous remercions donc très sincèrement tous les enseignants du département de mathématiques.

Enfin, nous souhaitons remercier nos familles. Elles ont toujours cru en nous. Elles nous ont toujours soutenues au fil des années. Ce soutien sans faille est l'élément le plus précieux à nos yeux.

Hayat GOUTAS & Kawthar GHAOUI

Table des matières

Introduction

La motivation originale des inclusions différentielles régies par le sous-différentiel est de modéliser l'évolution de l'élasto-plasticité, de la dynamique de frottement, dynamique de contact. De nombreuses applications peuvent se trouver dans la mécanique, l'optimisation convexe, modélisation du mouvement de foule, économie mathématique, réseaux dynamiques, circuits électriques, ect. L'existence et l'unicité de solutions de tels systèmes et de leurs variantes classiques sont des sujets majeurs qui ont été discutés dans beaucoup de papiers et livres dans la littérature.

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude d'existence de solutions anti-périodiques pour une classe d'inclusions différentielles régies par l'opérateur sous-différentiel dans le cadre d'un espace de Hilbert. Dans ce contexte, il y a une large littérature constituée de plusieurs papiers sur ce thème, à titre d'exemple on cite [1], [3], [4], [9], [10], [11], [12], [13], [14].

On essaye de détailler le papier [2] pour mieux comprendre ce sujet difficile et riche en matières premières de la théorie des opérateurs maximaux monotones, de l'analyse convexe et faisant appel à bien d'autres bagages mathématiques.

Un bref schéma du contenu présenté dans ce mémoire peut se décrire comme suit :
Le premier chapitre est intitulé "Préliminaires". Il comporte des notations et quelques espaces usuels. Aussi il réunit un ensemble de définitions, propositions et théorèmes sur l'analyse convexe et fonctionnelle ainsi que les propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones qui vont nous servir de clé dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre intitulé "Résultat d'existence pour $(\mathcal{P}_{a,b})$", on démontre l'existence de solutions liée au problème suivant

$$(\mathcal{P}_{a,b}) \begin{cases} -au''(t) + bu'(t) + Au(t) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $A = \partial\varphi$ (ou A est un opérateur maximal monotone impair).

Dans le troisième chapitre intitulé “Résultat d'existence pour $(\mathcal{P})$”, on étudie l'existence de solutions T-anti-périodiques de l'inclusion différentielle de la forme

$$(\mathcal{P})\begin{cases}(i) - au''(t) + bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi(u(t)) \ni f(t), & t \in \mathbb{R}\\ (ii) \qquad u(t+T) = -u(t), & t \in \mathbb{R},\end{cases}$$

où $a \geq 0$, $b \neq 0$ et $f \in L^2(I, H)$ est une fonction T-anti-périodique.
L'étude de ce problème est réalisée au moyen de plusieurs lemmes.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons des notions de base, quelques résultats fondamentaux utiles, notamment les définitions et les propriétés des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert. Nous rappelons aussi des généralités sur l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle indispensables à l'étude de nos problèmes.

1.1 Notations générales et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire nous adoptons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $|\cdot|$ est la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets ordonnées $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.
- I_H est l'identité de H.
- $\mathbf{1}_A$ est la fonction caractéristique de $A \subset H$, définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
- $D(A)$ est le domaine de définition d'un opérateur A, et A^0x quand il existe est l'élément de norme minimale de Ax, i.e., $\|A^0x\| = \inf\limits_{u \in Ax} \|u\|$.

- dom (φ) est le domaine effectif d'une fonction φ.
- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.
- $\rightarrow$ désigne la convergence forte.
- $\mathcal{P}(X)$ ou 2^X est l'ensemble des parties d'un ensemble X.
- p.p. presque partout.
- $I := [0,T]$, $T > 0$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} u_k$, où (u_n) est une suite réelle.
- $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} u_k$, où (u_n) est une suite réelle.
- u' (resp. u'') est la dérivée première (resp. seconde) de $u : I \to H$ quand elles existent.
- $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$ est le gradient d'une fonction à plusieurs variables u.
- $C(I,H)$ est l'espace des fonctions continues de I dans H muni de la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} \|x(t)\|$.
- $L^p(I,H)$, $p \in [1,+\infty[$, est l'espace des fonctions mesurables $x : I \to H$ telles que $\displaystyle\int_I \|x(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme $\|x\|_{L^p(I,H)} = (\displaystyle\int_I \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$. On note $L^p(I)$ si $H = \mathbb{R}$. Si $p = 2$ alors $L^2(I,H)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_2$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(I,H)}$ (pour simplicité) tels que pour tous $f,g \in L^2(I,H)$

$$\langle f,g \rangle = \int_0^T (f(t),g(t))dt = \int_0^T f(t)g(t)dt$$
$$\|f\|_2 = \left(\int_0^T (f(t),f(t))dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

- fg peut être confondu avec le produit scalaire de deux fonctions f, g dans $L^2(I,H)$.
- $L^2_w(I,H)$ est l'espace $L^2(I,H)$ muni de la topologie faible.
- $L^2_{loc}(\mathbb{R},H)$ est l'espace des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans H telle que la restriction de chacune d'elles à tout segment $[a,b]$ est $L^2([a,b],H)$ pour tout couple de réels (a,b).
- $L^\infty(I,H)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(I,H)} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|f(t)\| \leq c \ \ p.p.\}.$$

On note $L^\infty(I)$ si $H = \mathbb{R}$.

- $W^{1,2}(I,H)$ est l'espace des fonctions u absolument continues à dérivée dans $L^2(I,H)$.
- $W^{2,2}(I,H)$ est l'espace des fonctions u absolument continues à dérivée w absolument continue avec w' dans $L^2(I,H)$.
- $W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R},H)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R},H)$) est l'espace des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans H telle que la restriction de chacune d'elles à tout segment $[a,b]$ est $W^{2,2}([a,b],H)$ (resp. $W^{1,2}([a,b],H)$) pour tout couple de réels (a,b).

Le contenu du chapitre a été pris des références [5], [6], [15], [16], [17], [18].

1.2 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui s'en suit X est un ensemble non vide.

Définition 1.1. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X. Alors, Γ est dite topologie si*

1. $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.
2. *Toute intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*
3. *Toute réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X,Γ) est dit espace topologique.
Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.
Les sous-ensembles fermés de X *sont les complémentaires des ouverts.*

Caractérisations 1.2.
Soit (X,Γ) un espace topologique. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.
On appelle adhérence de A notée $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.
On appelle intérieur de C noté $Int(C)$ le plus grand ouvert de X inclus dans C.
En topologie, une fonction fermée est une fonction pour laquelle l'image de tout fermé est fermée.

Définition 1.3. *On dit que X est un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.4. *On appelle tribu sur X toute famille Σ de parties de X telle que :*

1. $\emptyset \in \Sigma$.

2. *Σ est stable par passage aux complémentaires.*

3. *Σ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable.

Définition 1.5. *(Application mesurable)*
Soient (X_1, Σ_1) et (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$, pour tout $A \in \Sigma_2$.

Définition 1.6. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Une mesure sur* (X, Σ) *est une application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Pour toute famille $\{A_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ est un espace mesuré.
Lorsque $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, on dit que la mesure μ est finie.
Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.7. *(Mesure de Lebesgue) Il existe une plus petite mesure définie sur une tribu de $\mathbb{R}^n$ qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume (c'est-à-dire le produit des longueurs de leurs côtés). Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue et sa tribu de définition la tribu de Lebesgue.*

Définition 1.8. (*Propriété vraie μ-presque partout*)
On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout sur l'espace mesuré $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ si la propriété est fausse sur une partie μ-négligeable de X, on note μ p.p.
Si μ est la mesure de Lebesgue, on écrit p.p. pour simplicité.

Définition 1.9.
L'application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty[$ est une distance sur X si pour tous $x, y, z \in \mathrm{X}$, on a

1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,

2. $d(x, y) = d(y, x)$,

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*
Dans ce cas, on dit que (X, d) est un espace métrique.

Caractérisations 1.10. *Soit X un espace métrique.*

(i) Un sous-ensemble K de X est dit relativement compact, si de toute suite dans K on peut extraire une sous-suite convergente dans X.

(ii) Un sous-ensemble D de X est dit compact, si de toute suite dans D on peut extraire une sous-suite convergente dans D.

Définition 1.11. *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application* $x \mapsto ||x||$ *de* X *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{X} : \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||,$

iii) $\forall x, y \in \mathrm{X} : \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x, y) = ||x - y||$.

Définition 1.12. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $||\cdot||$ *est une norme sur* X.

Définition 1.13. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 : \ ||x_p - x_q|| < \varepsilon.$$

Définition 1.14. *Soit* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $||\cdot||$*, composée d'éléments de* X*, admet une limite dans* X*. On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.15. *(Continuité séquentielle)*

Soient (X_1, Γ_1)*,* (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$*. La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors, on a* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$*.*

La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1*.*

Remarque 1.16. *Dans les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité.*

Définition 1.17. (1) *Un recouvrement de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de partie de X telle que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$*.*

Si de plus, I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.

(2) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Soit $J \subset I$ tel que* $X \subset \bigcup\limits_{j\in J} A_j$*, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$.*

(3) *Un recouvrement ouvert de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ tel que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$*.*

Définition 1.18. *On dit que* (X, Γ) *espace topologique est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.19. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

(i) $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

(ii) $A \subset \mathrm{X}$ *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

(iii) $D \subset \mathrm{X}$ *est compact si et seulement si* D *est fermé et relativement compact.*

Définition 1.20. *Soient* X, Y *deux espaces vectoriels métriques. Une application continue* A *de* X *dans* Y *est dite compacte si et seulement si l'image de toute partie bornée de* X *est relativement compacte de* Y.

Soient E, X deux espaces normés, $(f_n : X \to E)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

Définition 1.21. (*Convergence ponctuelle*)
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f *(sur* X*) si et seulement si, pour tout* x *de* X*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *dans* E.

Définition 1.22. *(Convergence uniforme)*

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*(sur* X*) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon).$$

2) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* f *sont bornées, alors pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*, il faut et il suffit de montrer que :*

$$||f_n - f||_\infty \to 0.$$

Définition 1.23.
Soit X *un espace topologique et* $X' = \{f : X \to \mathbb{R}/f \text{ linéaire continue}\}$ *son dual topologique. Soit* $f \in X'$ *et soit*

$$\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{X',X},$$

où l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ *les crochets de dualité.*
Lorsque f parcourt X'*, on obtient une famille d'applications* $(\varphi_f)_{f\in X'}$*. On appelle topologie*

faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ *continues sur* X *et on la note* $\sigma(X,X')$.

Définition 1.24. *(Convergence faible)*
Soit (x_n) *une suite de points de* X, *alors*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X} \ \forall f \in X'.$$

On note que la convergence forte entraine la convergence faible.

Définition 1.25. *(Produit scalaire) Soit* H *un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur* H *est une application de* $H\times H$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui associe à tout couple* (x,y) *le produit scalaire noté encore* (x,y) *telle que*
(i) *L'application* $x \longmapsto (x,y)$ *est linéaire, i.e., pour tous* $x, y_1, y_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *on a*

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2),$$

(ii) *Pour tous* $x, y \in H$, *on a :* $(x,y) = (y,x)$.
(iii) *Pour tout* $x \in H$, *on a :* $(x,x) \geq 0$ *et* $((x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Définition 1.26. *Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(H,(\cdot,\cdot))$. *Sur cet espace, on définit une norme par* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $x \in H$, *dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.27. *Un espace de Hilbert réel est un espace préhilbertien (réel) complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Théorème 1.28. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* H *un espace préhilbertien, alors, on a pour tous* $x, y \in H$

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H *dans* $\mathbb{R}$ *:* $x \longmapsto (x,y)$ *et* $y \longmapsto (x,y)$.

Corollaire 1.29. *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors*
Toute suite convergente de H *est bornée.*
Toute suite bornée dans H *admet une sous-suite faiblement convergente.*
Soit $(x_n) \subset H$, *si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $(\|x_n\|)$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

1.3 Généralités sur l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle

Commençons par quelques préliminaires sur les fonctions convexes.

Définition 1.30. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$. Le domaine effectif de φ est l'ensemble noté* $\mathrm{dom}\,(\varphi)$ *défini par*

$$\mathrm{dom}\,(\varphi) = \{x \in H : \ \varphi(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.31. *Soit $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que φ est propre si et seulement si pour tout $x \in H$ $\varphi(x) \neq -\infty$, et il existe $x_0 \in H$ tel que $\varphi(x_0) \neq +\infty$.*
Alors une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}\,(\varphi) \neq \emptyset$.

Définition 1.32. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$, on dit que φ est convexe sur H si et seulement si,*

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}\,(\varphi), \forall \lambda \in [0, 1], \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Remarque 1.33. *1. La somme de deux fonctions convexes est convexe.*
2. Le produit d'une fonction convexe par un réel positif est convexe.
3. La boule de centre $x \in H$, et de rayon r est convexe.

Définition 1.34. *Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (sci) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\lambda = \{x \in H, \ \ \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé.*

Remarque 1.35. *Si φ et ψ sont deux fonctions sci en x_0 alors, $\varphi + \psi$ l'est aussi.*

Définition 1.36. *(Différentiabilité au sens de Fréchet)*
Soient E un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel topologique séparé, f une application de E dans F et a un point de E.
On dit que f est différentiable (au sens de Fréchet) au point a s'il existe une application linéaire continue $u_a : E \to F$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - u_a(h)}{||h||} = 0,$$

où $||\cdot||$ est la norme sur E. Dans ce cas l'application u_a est appelée différentielle de Fréchet de f au point a.
Si f est différentiable en tout point de E, on dit que f est différentiable sur E.

Théorème 1.37. *Soit un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Une fonction $\varphi : [a, b] \to H$ est dite absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, i.e.,*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)dt.$$

La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to H$ *est dite localement absolument continue si sa restriction à tout segment* $[a, b]$ *est absolument continue pour tout couple de réels* (a, b).

Remarque 1.38.

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

Définition 1.39. *(Fonction Lipschitz)*
Soit $\varphi : I \to H$. *On dit que* φ *est Lipschitz de rapport* $L > 0$ *si et seulement si*

$$\forall\ x, y\ \in\ H:\ ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq L|x - y|.$$

On dit que φ *est une contraction si, elle est Lipschitz de rapport* $0 < L < 1$.

Remarque 1.40.
Toute fonction Lipschitz est absolument continue.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Pour commencer, nous définissons les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-fonctions.

Définition 1.41. *Soient* T, Y *deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur* T *à valeurs dans* Y *toute application de* T *ayant ses valeurs dans* 2^Y. *On note*

$$F : T \rightrightarrows Y \quad ou \quad F : T \to 2^Y,$$

c'est à dire pour tout t *dans* T : $F(t)$ *est un sous-ensemble de* Y.

Définition 1.42. *Soit* $F : T \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*
On appelle domaine de F *que l'on note* $D(F)$ *l'ensemble suivant*

$$D(F) = \{t \in T:\ F(t) \neq \emptyset\}.$$

On appelle image de F *que l'on note* $R(F)$ *l'ensemble*

$$R(F) = \{x \in Y:\ \exists t \in T, x \in F(t)\} = \bigcup_{t \in D(F)} F(t).$$

Définition 1.43. *Un opérateur* $A : H \rightrightarrows H$ *est dit monotone si pour tous* $x_1, x_2 \in D(A)$ *et tous* $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, *on a*

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.44. *Si* $A : H \rightrightarrows H$ *est monotone et si* $0 \in A0$ *alors pour tous* $x \in D(A)$, $y \in Ax$ *on a* $(y, x) \geq 0$.
Soit $A : H \to H$ *un opérateur linéaire, alors* A *est dit monotone si pour tout* $x \in D(A)$, *on a* $(Ax, x) \geq 0$.

Définition 1.45. *Un opérateur* $A : H \rightrightarrows H$ *est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de* A *coïncide avec* A.
Propriété : *Soit* $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ *un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout* $x \in D(A)$, Ax *est non vide convexe fermé, et* A^0x *existe et est unique.*

Définition 1.46. *Un opérateur* $A : H \rightrightarrows H$ *est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite : Si* $x_n \in D(A), y_n \in Ax_n$ *tels que* $x_n \to x$ *et* $y_n \rightharpoonup y$ *dans* H *alors* $x \in D(A)$ *et* $y \in Ax$.

Proposition 1.47. *Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.*

Définition 1.48. *Soit* $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$. *On appelle l'opérateur* $J_\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1}$ *la résolvante de* A, *et l'opérateur* $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda)$ *l'approximation de Yosida de* A, *pour tout* $\lambda > 0$. *Les opérateurs* A_λ, J_λ *sont univoques et définis sur l'espace* H *tout entier.*
Si l'opérateur maximal monotone A *satisfait*

$$A \text{ est impair} \quad (i.e., A(-x) = -Ax, \ \forall x \in D(A)), \tag{1.2}$$

alors $0 \in A0$ *et* A_λ *est impair pour tout* $\lambda > 0$.

Proposition 1.49. *Soit* $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, *on a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. *A est maximal monotone.*
2. A *est monotone et* $R(I_H + A) = H$.
3. *Pour tout* $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ *est une contraction définie sur* H *tout entier.*

Théorème 1.50. *Soient* M, N *deux opérateurs maximaux monotones tels que* M *est univoque,* $0 \in N0$ *et*

$$(Mu, N_\lambda u) \geq 0 \quad \forall u \in D(M), \lambda > 0.$$

Alors $M + N$ *est maximal monotone. Si de plus il existe* $c > 0$ *tel que*

$$\|u\| \leq c\|(M+N)^0 u\| \qquad \forall u \in D(M) \cap D(N),$$

alors $R(M + N) = H$.

Proposition 1.51. *Soit A une application monotone univoque de $D(A) = H$ dans H. On suppose que A est hémi-continu, c'est à dire pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, $A((1-t)x + ty)) \to Ax$ quand $t \to 0$, alors A est maximale monotone.*

Proposition 1.52. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, on a*

(i) (a) $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, $\forall x \in H$ et $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ $\forall x \in D(A)$.

(b) L'opérateur A_λ est maximal monotone et Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

(ii) Si $x_\lambda \to x$ et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$, alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Démonstration.
(i) (a) Soit $x \in H$. On pose $v = J_\lambda x = (I_H + \lambda A)^{-1} x$. Alors $x = v + \lambda y$ où $y \in Av$. Or $A_\lambda x = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x)$ donc

$$A_\lambda x = \frac{1}{\lambda}(x - v) = y \in Av = AJ_\lambda x.$$

Montrons maintenant que $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ pour tout $x \in D(A)$.
Montrons d'abord l'inégalité $\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$.
Soit $x \in D(A)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 &= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x) \\
&= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x + A_\lambda x - A_\lambda x) \\
&= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A_\lambda x) - 2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \\
&= \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x)
\end{aligned}$$

Rappelons que $A^0 x$ est un élément de Ax, i.e., $A^0 x \in Ax$ et $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$. Comme A est monotone, il résulte pour tout $\lambda > 0$

$$(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \geq 0,$$

et alors $-2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \leq 0$.
Il s'en suit que

$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2,$$

et

$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2.$$

On conclut que $\|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2$. D'où $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ pour tout $x \in D(A)$.
(b) **Montrons que A_λ est maximal monotone et Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.**
Soient $x_1, x_2 \in H$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\| \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|. \tag{1.3}$$

Or

$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) = (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2)$
$= \lambda(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2)$

$$= \lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2), \tag{1.4}$$

en remplaçant x_i par $\lambda A_\lambda x_i + J_\lambda x_i$ $i = 1, 2$.

De (i) (a), on a $A_\lambda x_i \in AJ_\lambda x_i$, $i = 1, 2$, l'opérateur A étant monotone entraine que

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq 0.$$

De retour à (1.4), on trouve pour tout $\lambda > 0$

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq \lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2. \tag{1.5}$$

On conclut que $(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq 0$ pour tous $x_1, x_2 \in H$, et A_λ est monotone.

En combinant (1.3) et (1.5), on trouve

$$\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \leq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|,$$

et alors

$$\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|,$$

ce qui donne

$$\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\|, \ \forall x_1, x_2 \in H.$$

D'où A_λ est Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Maintenant il suffit de montrer que A_λ est hémi-continu pour déduire que A_λ est maximal monotone.

Soient $x, y \in H$. On a du fait que A_λ est Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned}\|A_\lambda((1-t)x + ty) - A_\lambda(x)\| &\leq \frac{1}{\lambda}\|(1-t)x + ty - x\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|t(x-y)\|.\end{aligned}$$

Quand $t \to 0$, il résulte que $A_\lambda((1-t)x + ty)) \to A_\lambda x$ et A_λ est hémi-continu. De Proposition 1.51, on déduit que A_λ est maximal monotone.

(ii) **Montrons que si $x_\lambda \to x$ et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$, alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.**

Soit $(x_\lambda) \subset H$ convergeant vers $x \in H$ telle que $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$.

Montrons que $J_\lambda x_\lambda \to x$ quand $\lambda \to 0^+$.
Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|J_\lambda x_\lambda - x\| &= \|J_\lambda x_\lambda - x_\lambda + x_\lambda - x\| \\ &= \| - \lambda A_\lambda x_\lambda + x_\lambda - x\| \\ &\leq \lambda \|A_\lambda x_\lambda\| + \|x_\lambda - x\|. \end{aligned}$$

Or $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$ quand $\lambda \to 0^+$, alors d'après Corollaire 1.29, la suite $(\|A_\lambda x_\lambda\|)$ est bornée. Il s'en suit que $\lambda\|A_\lambda x_\lambda\| \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$. De plus, on a $x_\lambda \to x$ (par hypothèse). Par conséquent $J_\lambda x_\lambda \to x$ quand $\lambda \to 0^+$.
On sait d'après (i) (a) que $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, $\forall x \in H$. On a $J_\lambda x_\lambda \to x$, $A_\lambda x_\lambda \in AJ_\lambda x_\lambda$, et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$. L'opérateur A étant maximal monotone donc demi-fermé (Proposition 1.47), il résulte que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.
La démonstration de la proposition est alors terminée. ■

1.5 Opérateurs sous-différentiels

Définition 1.53. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe et sci, le sous-différentiel de φ est l'opérateur multivoque noté $\partial\varphi$ défini par*

$$\partial\varphi(x) := \{y \in H : \ \varphi(z) - \varphi(x) \geq (y, z - x), \ \forall z \in H\}.$$

Les éléments du sous-différentiel sont appelés sous-gradients et l'on a $D(\partial\varphi) \subset \mathrm{dom}\,(\varphi)$.

Lemme 1.54. *Soit φ une fonction convexe, sci et différentiable sur son domaine, alors*

$$\forall x \in Int(\mathrm{dom}\,(\varphi)) : \ \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}.$$

Lemme 1.55. *Soient $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe fermée, et $\psi :]-\infty, +\infty] \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et croissante. On pose $\Phi = \psi \circ \varphi$ alors*

$$\forall x \in Int(\mathrm{dom}\,(\varphi)) : \partial\Phi(x) = \big\{x_1 x_2 : \ x_1 \in \partial\psi(\varphi(x)), x_2 \in \partial\varphi(x)\big\}.$$

Exemple 1.56. *Soit $\varphi(x) = ||x||$, $x \in H$, $\psi(t) = \frac{1}{3}t^3$, $t \in \mathbb{R}$ et $\Phi(x) = \psi(\varphi(x)) = \frac{1}{3}||x||^3$. On sait que*

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{||x||}\} & \text{si } x \neq 0, \\ \{x, \ ||x|| \leq 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, d'après le Lemme 1.55

$$\partial\Phi(x) = \psi'(||x||)\partial\varphi(x) = x||x||.$$

Corollaire 1.57. *Soient φ et ψ deux fonctions convexes, sci, propres sur H.*
Si $\operatorname{dom}(\varphi) \cap Int(\operatorname{dom}(\psi)) \neq \emptyset$ *alors* $\partial(\varphi + \psi) = \partial\varphi + \partial\psi$.

Proposition 1.58. *Soit $A = \partial\varphi$ où $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre, convexe et sci. Alors A est maximal monotone. De plus, les fonctions φ_λ définies par :*

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left(\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\right) \quad x \in H,\ \lambda > 0.$$

sont convexes et Fréchet différentiables sur H avec $\partial\varphi_\lambda = A_\lambda$.
Si $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre, convexe et sci telle que

$$\varphi \textit{ est paire } \ (\text{i.e.}, \varphi(-x) = \varphi(x),\ \forall x \in H), \tag{1.6}$$

alors, $\partial\varphi$ est impair et φ_λ $(\lambda > 0)$ est pair.

Proposition 1.59. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe et sci. Soient $u \in W^{1,2}(I, H)$ et $g \in L^2(I, H)$ satisfaisant $u(t) \in D(\partial\varphi)$, $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ p.p. sur I. Alors $u(t) \in \operatorname{dom}(\varphi)$, pour tout $t \in I$, la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I, et $(d/dt)\varphi(u(t)) = (u'(t), g(t))$ p.p. $t \in I$.*

1.6 Quelques résultats et définitions utiles

Nous rappelons dans cette section quelques résultats et définitions utiles dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Définition 1.60. *Soient f, g deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur I à valeurs dans H. La formule d'intégration par parties est donnée par*

$$\int_0^T f(t)g'(t)dt = f(T)g(T) - f(0)g(0) - \int_0^T f'(t)g(t)dt.$$

Définition 1.61. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(I, H), g \in L^q(I, H)$, $p, q \in]1, +\infty[$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a

$$\|fg\|_{L^1(I,H)} \leq \|f\|_{L^p(I,H)}\|g\|_{L^q(I,H)}.$$

Si $p = 2$ alors, cette inégalité est dite inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.62. *(Convergence faible dans $L^p(I, H)$)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(I, H)$, $1 \leq p < +\infty$. Soient $f \in L^p(I, H)$ et q le conjugué de p $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Alors, la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^p(I, H)$ si et seulement si

$$\forall g \in L^q(I, H) : \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)g(t)dt = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Théorème 1.63. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions dans* $L^p(I,H)$, $1 \leq p < +\infty$. *On suppose que*

1) $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ *p.p sur* I.

2) Il existe une fonction $g \in L^p(I,\mathbb{R}_+)$ *telle que pour tout* n : $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ *p.p sur* I.

Alors, on a $f \in L^p(I,H)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p(I,H)} \longrightarrow 0$.

Définition 1.64. *Soit* K *une partie de* $C(I,H)$. *On dit que* K *est équicontinue en* $t_1 \in I$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall t_2 \in I, \forall x \in K : |t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

Si la partie K *est équicontinue en tout point* $t_1 \in I$, *alors* K *est équicontinue sur* I.

Théorème 1.65. *(Théorème d'Arzelà-Ascoli)*
On dit qu'une partie K *de* $C(I,H)$ *est relativement compacte si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :*

1. *La partie* K *est équicontinue sur* I.
2. *L'ensemble* $\{x(t) :\ x \in K\}$ *est relativement compact pour tout* $t \in I$.

Théorème 1.66. *(Théorème du point fixe de Schauder)*
Soit K *un sous-ensemble non-vide convexe fermé borné d'un espace de Hilbert* H *et* $F : K \to K$ *une application continue. Si* $F(K)$ *est relativement compact, alors* F *admet un point fixe i.e.,* $\exists x \in K : F(x) = x$.

Définition 1.67. *Soit* $f : I \to H$. *On dit que* f *est* T*-anti-périodique d'anti-période* T, *si*

$$\forall t \in I : t + T \in I \ \text{ et } \ f(t+T) = -f(t).$$

On dit que f *est* T*-périodique de période* T, *si*

$$\forall t \in I : t + T \in I \ \text{ et } \ f(t+T) = f(t).$$

Proposition 1.68. *Soit* $u : I \to H$ *une fonction* T*-anti-périodique, alors*
(i) $\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds = 0$ *pour tout* $t \in I$.
(ii) Si de plus elle est dérivable, alors l'application $t \mapsto u'(t)$ *est* T*-anti-périodique et* $t \mapsto \|u'(t)\|^2$ *est* T*-périodique.*

Démonstration.
(i) Pour tout $t \in I$, on a

$$\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds = \int_{t-T}^{t} u(s)ds + \int_{t}^{t+T} u(s)ds. \tag{1.7}$$

Posons $v = s + T$ alors

$$\begin{aligned}\int_{t-T}^{t} u(s)ds &= \int_{t}^{t+T} u(v-T)dv \\ &= -\int_{t}^{t-T} u(v)dv \qquad (\text{ car } u \text{ est } T\text{-anti-périodique}).\end{aligned}$$

Revenons à (1.7), on trouve

$$\begin{aligned}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds &= -\int_{t}^{t+T} u(s)ds + \int_{t}^{t+T} u(s)ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) De la définition de la dérivée de u et le fait que u est T-anti-périodique, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}u'(t+T) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+T+h) - u(t+T)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-u(t+h) + u(t)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\ &= -u'(t).\end{aligned}$$

Alors, u' est T-anti-périodique.
On sait que $\|u'(t)\|^2 = (u'(t), u'(t))$ pour tout $t \in I$. Comme u est T-anti-périodique alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|u'(t+T)\|^2 = (u'(t+T), u'(t+T)) &= (-u'(t), -u'(t)) \\ &= \|u'(t)\|^2.\end{aligned}$$

Il résulte que $t \longmapsto \|u'(t)\|^2$ est T-périodique. ■

Chapitre 2

Résultat d'existence pour $(\mathcal{P}_{a,b})$

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions T-anti-périodiques du problème de la forme

$$(\mathcal{P}_{a,b}) \begin{cases} -au''(t) + bu'(t) + Au(t) \ni f(t), \quad p.p. \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \geq 0$, A est un opérateur maximal monotone impair dans H et f une fonction telle que

$$f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H), \quad f(t+T) = -f(t), \quad p.p.\ t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *Une solution du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ est une fonction $u \in W^{m,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ (où $m = 1$ si $a = 0$ et $m = 2$ si $a > 0$) satisfaisant :*

$$u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$u(t) \in D(A)$, et $f(t) + au''(t) - bu'(t) \in Au(t)$ p.p. sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe semi-continue inférieurement. Supposons que (2.1) soit vérifiée.*

(i) Si $b \neq 0$ et $A = \partial\varphi$, où φ est paire, alors $(\mathcal{P}_{a,b})$ admet une unique solution.

(ii) Si $b = 0$, $a > 0$ et A est un opérateur maximal monotone impair, alors il existe une unique solution pour $(\mathcal{P}_{a,b})$.

Démonstration.

On va présenter une seule démonstration pour (i) et (ii).

Soit N l'extension maximale monotone de A à $L^2(I,H)$ définie par

$$(Nu)(t) = Au(t), \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.2}$$

où

$$D(N) = \{u \in L^2(I,H) : \; u(t) \in D(A) \text{ p.p. sur } I \text{ et } Au \in L^2(I,H)\}.$$

On a

$$(N_\lambda u)(t) = A_\lambda u(t), \quad \forall \lambda > 0, \; u \in L^2(I,H). \tag{2.3}$$

Ensuite, on définit l'opérateur linéaire $M_{a,b}$ dans $L^2(I,H)$ par $M_{a,b}u = -au'' + bu'$ où

$$D(M_{a,b}) = \{u \in W^{2,2}(I,H) : u(T) = -u(0), \; u'(T) = -u'(0)\} \quad (a > 0),$$

$$D(M_{0,b}) = \{u \in W^{1,2}(I,H) : u(T) = -u(0)\} \quad (b \neq 0),$$

cette démonstration est répartie en deux étapes :

Étape 1 : Existence de solution du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$.

Le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ admet une solution si et seulement si $R(M_{a,b} + N) = L^2(I,H)$. Nous allons montrer que $M_{a,b} + N$ est surjectif, i.e.,

$$\forall g \in L^2(I,H), \exists u \in D(M_{a,b}) \cap D(N) : g \in (M_{a,b} + N)u,$$

en utilisant Théorème 1.50. Dans ce qui suit, on note M l'opérateur $M_{a,b}$ $(a \geq 0)$.

Montrons que $M + N$ est maximal monotone.

Commençons d'abord par montrer que M est maximal monotone. Remarquons que M est un opérateur linéaire univoque. D'après Remarque 1.44, pour que M soit monotone il suffit qu'il vérifie

$$\langle Mu, u\rangle \geq 0, \; \forall u \in D(M).$$

Soit $u \in D(M)$, alors on a

$$\begin{aligned}\langle Mu, u\rangle &= \langle -au'' + bu', u\rangle \\ &= -a\langle u'', u\rangle + b\langle u', u\rangle.\end{aligned}$$

On a par définition du produit scalaire dans $L^2(I,H)$

$$\begin{aligned}\langle u'', u\rangle &= \int_0^T (u''(t), u(t))dt \\ &= \int_0^T u''(t)u(t)dt.\end{aligned}$$

L'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\langle u'', u\rangle &= \Big[u'(t)u(t)\Big]_0^T - \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt\\ &= u'(T)u(T) - u'(0)u(0) - \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.\end{aligned}$$

Comme $u \in D(M)$, alors $u(T) = -u(0)$, $u'(T) = -u'(0)$. D'où,

$$\begin{aligned}\langle u'', u\rangle &= u(0)u'(0) - u'(0)u(0) - \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt\\ &= -\|u'\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle u', u\rangle &= \int_0^T (u'(t), u(t))dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\big(\|u(t)\|^2\big)dt\\ &= \frac{1}{2}\Big[\|u(t)\|^2\Big]_0^T\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u(T)\|^2 - \|u(0)\|^2\Big).\end{aligned}$$

Comme $u \in D(M)$, alors $u(T) = -u(0)$. D'où

$$\langle u', u\rangle = 0. \tag{2.5}$$

Combinant (2.4) et (2.5), on trouve

$$\langle Mu, u\rangle = a\|u'\|_2^2 \qquad \forall u \in D(M). \tag{2.6}$$

D'où,

$$\langle Mu, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(M),$$

et l'opérateur M est monotone.

Maintenant, on va montrer qu'il est maximal i.e., $R(I_{L^2(I,H)} + M) = L^2(I, H)$**.**

Remarquons que pour tout $g \in L^2(I, H)$ le problème

$$-au'' + bu' + u = g, \; u(0) = x, \; u'(0) = y \tag{2.7}$$

admet une unique solution $u = Pg$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, où P est l'opérateur qui associe à tout élément $g \in L^2(I, H)$, l'unique solution u de l'équation (2.7) (voir [19]). La condition initiale $(x, y) \in H \times H$ étant arbitraire, pour $x = -u(T)$, $y = -u'(T)$, cette solution appartient à $D(M_{a,b})$.

En particulier, pour $a = 0$, $b \neq 0$ la solution de $u + bu' = g$ appartient à $D(M_{0,b})$. D'où M est un opérateur maximal monotone.

Ensuite, montrons que tout $u \in D(M)$ satisfait l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u'\|_2.$$

Soit $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| u(t) - \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds \right\| &= \left\| \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(t)ds - \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} (u(t) - u(s))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} \|u(t) - u(s)\|ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $u(t) - u(s) = \displaystyle\int_s^t u'(\tau)d\tau$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| u(t) - \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds \right\| &\leq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} T^{1/2}\Big(\int_s^t \|u'(\tau)\|^2 d\tau\Big)^{1/2} ds \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} T^{1/2}\Big(\int_0^T \|u'(\tau)\|^2 d\tau\Big)^{1/2} ds.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left\| u(t) - \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds \right\| &\leq \frac{1}{2T}T^{1/2}\left(\int_0^T \|u'(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2}\int_{t-T}^{t+T} ds \\
&= \frac{1}{2T}T^{1/2}\|u'\|_2 2T \\
&= T^{1/2}\|u'\|_2.
\end{aligned}$$

On rappelle que $\displaystyle\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds = 0$ car u est T-anti-périodique (voir Proposition 1.68), alors

$$\|u(t)\| \leq T^{1/2}\|u'\|_2.$$

Il en résulte

$$\|u\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u'\|_2. \tag{2.8}$$

Montrons que $\langle Mu, N_\lambda u\rangle \geq 0, \quad \forall u \in D(M),\ \lambda > 0.$

Soit $u \in D(M)$, $\lambda > 0$.

Par définition du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\langle Mu, N_\lambda u\rangle &= \int_0^T (Mu(t), N_\lambda u(t))dt\\ &= \int_0^T (-au''(t)+bu'(t), A_\lambda u(t))dt\\ &= -a\int_0^T (u''(t), A_\lambda u(t))dt + b\int_0^T (u'(t), A_\lambda u(t))dt.\end{aligned}$$

D'après Proposition 1.52, A_λ est Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$ alors p.p. dérivable sur I. Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), A_\lambda u(t))dt &= \int_0^T u''(t)A_\lambda u(t)dt\\ &= \Big[u'(t)A_\lambda u(t)\Big]_0^T - \int_0^T (u'(t), (A_\lambda u)'(t))dt.\end{aligned}$$

Comme $u \in D(M)$ $(u(T) = -u(0))$ et A_λ est impair (voir Définition 1.48), alors

$$\begin{aligned}\Big[u'(t)A_\lambda u(t)\Big]_0^T &= u'(T)A_\lambda u(T) - u'(0)A_\lambda u(0)\\ &= -u'(0)(A_\lambda(-u(0))) - u'(0)A_\lambda u(0)\\ &= -u'(0)(-A_\lambda(u(0))) - u'(0)A_\lambda(u(0))\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_0^T (u''(t), A_\lambda u(t))dt = -\int_0^T (u'(t), (A_\lambda u)'(t))dt,$$

il résulte que

$$\langle Mu, N_\lambda u\rangle = a\int_0^T (u'(t), (A_\lambda u)'(t))dt + b\int_0^T (u'(t), A_\lambda u(t))dt.$$

Si $b = 0$, $a \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}\langle Mu, N_\lambda u\rangle &= a\int_0^T (u'(t), (A_\lambda u)'(t))dt\\ &= a\int_0^T \left(\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{A_\lambda u(t+h) - A_\lambda u(t)}{h}\right) dt\\ &= a\int_0^T \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Big(u(t+h)-u(t), A_\lambda u(t+h) - A_\lambda u(t)\Big)dt.\end{aligned}$$

Comme A est un opérateur maximal monotone alors, d'après Proposition 1.52, A_λ est maximal monotone, ce qui implique que

$$\Big(u(t+h)-u(t), A_\lambda u(t+h) - A_\lambda u(t)\Big) \geq 0.$$

D'où $\langle Mu, N_\lambda u\rangle \geq 0$.

Si $b \neq 0$ $(a = 0)$

$$\langle Mu, N_\lambda u\rangle = b\int_0^T (u'(t), A_\lambda u(t))dt$$

D'après Propositions 1.58-1.59, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'(t), A_\lambda u(t))dt &= \int_0^T (u'(t), \partial\varphi_\lambda(u(t)))dt \quad (A_\lambda = \partial\varphi_\lambda)\\ &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi_\lambda(u(t))\big)dt\\ &= \Big[\varphi_\lambda(u(t))\Big]_0^T\\ &= \varphi_\lambda(u(T)) - \varphi_\lambda(u(0))\\ &= \varphi_\lambda(-u(0)) - \varphi_\lambda(u(0)) \quad (u(T) = -u(0))\\ &= \varphi_\lambda(u(0)) - \varphi_\lambda(u(0)) \quad (\varphi_\lambda \text{ paire})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Alors, on déduit que $\langle Mu, N_\lambda u\rangle \geq 0$ pour tout $u \in D(M)$, $\lambda > 0$.

Combinant cela avec $0 \in N0$, et le fait que N, M sont des opérateurs maximaux monotones, on conclut du Théorème 1.50 que $M + N$ est maximal monotone dans $L^2(I, H)$.

Il reste à montrer que

$$\exists\ c > 0 : \|u\|_2 \leq c\ \|(M+N)^0 u\|_2,\ \forall u \in D(M) \cap D(N).$$

Si a $>$ 0. Soient $u \in D(M) \cap D(N)$, $v \in Nu$ alors on a

$$\langle Mu + v, u\rangle = \langle Mu, u\rangle + \langle v, u\rangle.$$

De (2.6) on a

$$\langle Mu, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in D(M).$$

Comme N est un opérateur multivoque monotone et $0 \in N0$ alors d'après Remarque 1.44, il résulte

$$\langle v, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in D(M) \cap D(N),\ v \in Nu.$$

Alors

$$\langle Mu, u\rangle \leq \langle Mu + v, u\rangle,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\langle Mu + v, u\rangle \leq \|Mu + v\|_2 \|u\|_2.$$

Par conséquent

$$\langle Mu, u\rangle \leq \langle Mu+v, u\rangle \leq \|Mu+v\|_2\|u\|_2.$$

De (2.6) on obtient

$$\langle Mu, u\rangle = a\|u'\|_2^2 \leq \|Mu+v\|_2\|u\|_2$$

et d'après (2.8), on obtient :

$$\frac{a}{T}\|u\|^2_{L^\infty(I,H)} \leq a\|u'\|_2^2 \leq \|Mu+v\|_2\|u\|_2. \tag{2.9}$$

Or

$$\|u\|_2^2 = \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq \|u\|^2_{L^\infty(I,H)} \int_0^T dt = T\|u\|^2_{L^\infty(I,H)}. \tag{2.10}$$

En remplaçant dans (2.9), il s'en suit que

$$\frac{a}{T^2}\|u\|_2^2 \leq \|Mu+v\|_2\|u\|_2$$

alors,

$$\|u\|_2 \leq \frac{T^2}{a}\|Mu+v\|_2,\ \forall u \in D(M)\cap D(N),\ \forall v \in Nu.$$

Comme

$$\|(M+N)^0u\|_2 = \inf\{\|y\|_2,\ y\in (M+N)u\},$$

l'inégalité précédente est satisfaite en particulier pour

$$\|u\|_2 \leq \frac{T^2}{a}\inf_{v\in Nu}\|Mu+v\|_2 = \frac{T^2}{a}\|(M+N)^0u\|_2.$$

Par conséquent

$$\exists\ c = \frac{T^2}{a} > 0 : \|u\|_2 \leq c\|(M+N)^0u\|_2,\ \forall u \in D(M)\cap D(N).$$

Si $a = 0$, commençons d'abord par montrer que

$$\langle M_{0,b}u, v\rangle = 0,\ \forall v \in Nu,\ \forall u \in D(M)\cap D(N).$$

Soient $u \in D(M)\cap D(N), v \in Nu$. Rappelons que : $M_{0,b}u = bu'(a=0)$, alors

$$\begin{aligned}\langle M_{0,b}u, v\rangle &= \langle bu', v\rangle \\ &= b\int_0^T (u'(t), v(t))dt.\end{aligned}$$

Comme $v(t) \in (Nu)(t)$ et $(Nu)(t) = Au(t) = \partial\varphi(u(t))$, alors il résulte de Proposition 1.59

$$\begin{aligned}\langle M_{0,b}u, v\rangle &= b\int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u(t))\big)dt \\ &= b\left[\varphi(u(t))\right]_0^T \\ &= b\Big(\varphi(u(T)) - \varphi(u(0))\Big).\end{aligned}$$

Comme $u \in D(M_{0,b})$ et φ est paire, on obtient

$$\begin{aligned}\langle M_{0,b}u, v\rangle &= b\Big(\varphi(-u(0)) - \varphi(u(0))\Big)\\ &= b\Big(\varphi(u(0)) - \varphi(u(0))\Big)\\ &= 0. \end{aligned}\tag{2.11}$$

On sait que $\langle M_{0,b}u, M_{0,b}u\rangle = \|M_{0,b}u\|_2^2$. De (2.11), on peut écrire

$$\langle M_{0,b}u + v, M_{0,b}u\rangle = \|M_{0,b}u\|_2^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|M_{0,b}u\|_2^2 \leq \|M_{0,b}u + v\|_2 \|M_{0,b}u\|_2.$$

De (2.8) et (2.10), on trouve

$$\frac{1}{T^2}\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{T}\|u\|^2_{L^\infty(I,H)} \leq \|u'\|_2^2.$$

Alors,

$$\frac{b^2}{T^2}\|u\|_2^2 \leq b^2\|u'\|_2^2 = \|M_{0,b}u\|_2^2.$$

Par conséquent,

$$\frac{|b|}{T}\|u\|_2 \leq \|M_{0,b}u + v\|_2.$$

D'où

$$\|u\|_2 \leq \frac{T}{|b|}\|M_{0,b}u + v\|_2,\ \forall u \in D(M_{0,b}) \cap D(N),\ \forall v \in Nu.$$

En particulier

$$\begin{aligned}\|u\|_2 &\leq \frac{T}{|b|}\inf_{v \in Nu}\|M_{0,b}u + v\|_2\\ &= \frac{T}{|b|}\ \|(M_{0,b} + N)^0 u\|_2.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\exists\ c = \frac{T}{|b|} > 0 : \|u\|_2 \leq c\ \|(M_{0,b} + N)^0 u\|_2,\ \forall u \in D(M_{0,b}) \cap D(N).$$

Par application directe du Théorème 1.50, il résulte que $R(M+N) = L^2(I, H)$, i.e., $M+N$ est surjectif,

$$\forall g \in L^2(I, H), \exists u \in D(M) \cap D(N) :\ g \in (M + N)u.$$

D'où l'existence de la solution au problème considéré.

Étape 2 : Unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$**.**

(j) **Si** $a > 0$. Soient u_1, u_2 deux solutions du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$, i.e.,

$$f(t) + au_1''(t) - bu_1'(t) \in A(u_1(t)) \quad \text{p.p.},$$

$$f(t) + au_2''(t) - bu_2'(t) \in A(u_2(t)) \quad \text{p.p.}$$

Comme A est monotone, on a :

$$\langle a(u_1'' - u_2'') - b(u_1' - u_2'), u_1 - u_2 \rangle \geq 0,$$

ce qui s'écrit

$$-\langle M(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

Comme $\langle Mu, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in D(M)$, on déduit que $\langle M(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0$, i.e., $u_1 \equiv u_2$ $(u_1(t) = u_2(t),\ \forall t \in I)$.

(jj) **Si** $a = 0$, $b > 0$. Dans ce cas, on a

$$f(t) - bu'(t) \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{p.p.}$$

Soient u_1, u_2 deux solutions T-anti-périodiques de l'inclusion considérée. Comme u_1 est T-anti-périodique alors pour tout $t \in [0, T]$: $u_1(t+2T) = -u_1(t+T) = u_1(t)$, cela dit que u_1 est $2T$-périodique. De même, on trouve que u_2 est $2T$-périodique. D'après Proposition B [13] : La différence de deux solutions $2T$-périodiques de $u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t)$ est constante, il résulte que $(u_1 - u_2)$ est constante sur $[0, T]$. Ce qui donne $(u_1 - u_2)(T) = (u_1 - u_2)(0)$. Or u_1, u_2 sont T-anti-périodiques alors $(u_1 - u_2)(T) = -(u_1 - u_2)(0)$. Les deux égalités précédentes entrainent que $(u_1 - u_2)(T) = 0$. La fonction $(u_1 - u_2)$ étant constante sur I, on conclut que $(u_1 - u_2)(t) = 0$, pour tout $t \in I$. D'où $u_1 \equiv u_2$ sur I.

(jjj) **Si** $a = 0$, $b < 0$, dans ce cas l'inclusion est de la forme

$$f(t) - bu'(t) \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.12}$$

On se ramène au cas (jj). Pour $0 \leq t \leq T$, on a $0 \leq T - t \leq T$. Définissons la fonction $\bar{u}$ sur I par $\bar{u}(t) = u(T - t)$, alors $\bar{u}'(t) = -u'(T - t)$. Posons $\bar{f}(t) = f(T - t)$, $t \in I$. Il est clair que $\bar{f}$ est T-anti-périodique.

On peut écrire l'inclusion (2.12) comme suit

$$f(T - t) - bu'(T - t) \in \partial\varphi(u(T - t)) \quad \text{p.p.}$$

Par substitution, on trouve

$$\bar{f}(t) + b\bar{u}'(t) \in \partial\varphi(\bar{u}(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.13}$$

qui admet une solution d'après la première partie de la démonstration. Comme le coefficient de u' est négatif, alors notre problème se réduit au cas (jj). De (jj) résulte l'unicité de la solution.
On conclut de ce qui précède l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$.
Ceci achève la démonstration du Théorème 2.2. ∎

Nous allons maintenant étudier la dépendance continue sur A et f des solutions du problème $(\mathcal{P}_{a,b})$, où $a > 0$ et f satisfaisant (2.1). Sans perte de généralité, on considère l'inclusion suivante

$$-u''(t) + bu'(t) + Au(t) \ni f(t),\ t \in I \tag{E}$$

avec

$$u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0) \tag{BC}$$

où $b \in \mathbb{R}$, A est un opérateur maximal monotone et $f \in L^2(I, H)$.
On considère aussi l'équation approximative ($\lambda > 0$) :

$$-u''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = f(t),\ t \in I \tag{E_λ}$$

avec

$$u_\lambda(T) = -u_\lambda(0), \quad u'_\lambda(T) = -u'_\lambda(0). \tag{BC_λ}$$

Quand $b \neq 0$ et A est le sous-différentiel d'une fonction propre convexe semi-continue inférieurement et paire sur H, ou $b = 0$ et A est impair, Théorème 2.2 assure que les problèmes $(E), (BC)$ et $(E_\lambda), (BC_\lambda)$ admettent des solutions uniques u et u_λ respectivement dans $W^{2,2}(I, H)$.

Lemme 2.3. *Supposons que $f \in L^2(I, H)$ et que $A = \partial\varphi$, où $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement et paire.*
Soient u, u_λ les solutions uniques de $(E), (BC)$ et $(E_\lambda), (BC_\lambda)$, respectivement. Alors

$$u_\lambda \to u \text{ dans } C(I, H), \tag{2.14}$$

$$u'_\lambda \to u' \text{ dans } C(I, H), \tag{2.15}$$

$$u''_\lambda \rightharpoonup u'' \text{ dans } L^2(I, H), \tag{2.16}$$

quand $\lambda \to 0^+$. *En plus*

$$\int_0^T (u''(t), Au(t))dt \leq 0, \tag{2.17}$$

où $Au(t)$ *signifie* $f(t) + u''(t) - bu'(t)$.

Si $b = 0$ *alors toutes les conclusions restent vraies pour tout opérateur maximal monotone* A *impair.*

Démonstration.

Soient $\lambda,\ \mu > 0$.

1. On commence par Montrer que

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt = 0.$$

Multiplions (E_λ)-(E_μ) par $(u_\lambda(t) - u_\mu(t))$ et intégrons sur I, il résulte

$$-\int_0^T (u''_\lambda(t) - u''_\mu(t))(u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt + b\int_0^T (u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt$$

$$+\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt = 0. \tag{2.18}$$

Notons que l'on a

$$(u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2),$$

alors

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) &= \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2)dt \\ &= \frac{1}{2}(\|u_\lambda(T) - u_\mu(T)\|^2 - \|u_\lambda(0) - u_\mu(0)\|^2).\end{aligned}$$

Des conditions aux limites (BC_λ) et (BC_μ) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)\big)dt &= \frac{1}{2}(\| - u_\lambda(0) + u_\mu(0)\|^2 - \|u_\lambda(0) - u_\mu(0)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u_\lambda(0) - u_\mu(0)\|^2 - \|u_\lambda(0) - u_\mu(0)\|^2) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Posons $J = \displaystyle\int_0^T \big(u''_\lambda(t) - u''_\mu(t))(u_\lambda(t) - u_\mu(t)\big)dt$. Par intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned}J &= \Big[(u_\lambda(t) - u_\mu(t))(u'_\lambda(t) - u'_\mu(t))\Big]_0^T - \int_0^T (u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u'_\lambda(t) - u'_\mu(t))dt \\ &= (u_\lambda(T) - u_\mu(T))(u'_\lambda(T) - u'_\mu(T)) - (u_\lambda(0) - u_\mu(0))(u'_\lambda(0) - u'_\mu(0)) \\ &\quad - \int_0^T (u'_\lambda(t) - u'_\mu(t), u'_\lambda(t) - u'_\mu(t))dt.\end{aligned}$$

En utilisant (BC_λ) et (BC_μ), on obtient

$$\begin{aligned}J &= (u_\lambda(T)-u_\mu(T))(u'_\lambda(T)-u'_\mu(T)) - (u_\lambda(T)-u_\mu(T))(u'_\lambda(T)-u'_\mu(T))\\ &- \int_0^T \|u'_\lambda(t)-u'_\mu(t)\|^2 dt\\ &= -\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Combinant (2.18), (2.19) et (2.20), il découle

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt = 0. \tag{2.21}$$

2. Montrons maintenant que

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda+\mu)\int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|\|A_\mu u_\mu(t)\|dt.$$

De (2.21) on a

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 = -\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t))dt. \tag{2.22}$$

Comme $u_\lambda(t) - u_\mu(t) = (u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)) + (J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)) + (J_\mu u_\mu(t) - u_\mu(t))$, alors

$$(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t))$$

$$+(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)) - (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\mu(t) - J_\mu u_\mu(t)).$$

Comme A est maximal monotone alors d'après Proposition 1.52 pour tous $A_\lambda u_\lambda(t) \in AJ_\lambda u_\lambda(t)$, $A_\mu u_\mu(t) \in AJ_\mu u_\mu(t)$, on a

$$(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t)) \geq 0, \tag{2.23}$$

et donc

$$-\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t))dt \leq 0 \tag{2.24}$$

Des définitions de J_λ, A_λ on écrit $\lambda A_\lambda u_\lambda(t) = u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)$, alors

$$(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)) = \lambda(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), A_\lambda u_\lambda(t)). \tag{2.25}$$

De la même manière

$$(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\mu(t) - J_\mu u_\mu(t)) = \mu(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), A_\mu u_\mu(t)).$$

La différence entre les deux dernières égalités donne

$$\begin{aligned}&(A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - J_\lambda u_\lambda(t)) - (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\mu(t) - J_\mu u_\mu(t)) =\\ &\quad \lambda(A_\lambda u_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t)) + \mu(A_\mu u_\mu(t), A_\mu u_\mu(t)) - (\lambda+\mu)(A_\lambda u_\lambda(t), A_\mu u_\mu(t)).\end{aligned}$$

De retour à l'égalité (2.22), il s'en suit

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 = -\int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), J_\lambda u_\lambda(t) - J_\mu u_\mu(t))dt - \lambda \int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 dt$$
$$- \mu \int_0^T \|A_\mu u_\mu(t)\|^2 dt + (\lambda + \mu) \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), A_\mu u_\mu(t))dt.$$

Comme $-\lambda \int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 dt \leq 0$ et $-\mu \int_0^T \|A_\mu u_\mu(t)\|^2 dt \leq 0$. avec l'inégalité (2.24), il résulte

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda + \mu) \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), A_\mu u_\mu(t))dt. \tag{2.26}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda + \mu) \int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \|A_\mu u_\mu(t)\| dt. \tag{2.27}$$

3. Montrons que

$$\|A_\lambda u_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Formons le produit scalaire de (E_λ) et $A_\lambda u_\lambda(t)$, intégrons de 0 à T on obtient

$$-\int_0^T (u''_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt + b \int_0^T (u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt$$
$$= \int_0^T (f(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt,$$

i.e.,

$$\int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 dt = \int_0^T (f(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt + \int_0^T (u''_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt$$
$$- b \int_0^T (u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt.$$

D'après Propositions 1.58-1.59, et (BC_λ), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt &= \int_0^T (u'_\lambda(t), \partial\varphi_\lambda u_\lambda(t))dt \quad (A_\lambda = \partial\varphi_\lambda) \\
&= \int_0^T \frac{d}{dt}(\varphi_\lambda u_\lambda(t))dt \\
&= \varphi_\lambda(u_\lambda(T)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(0)) \\
&= \varphi_\lambda(-u_\lambda(0)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(0)) \quad (BC_\lambda) \\
&= \varphi_\lambda(u_\lambda(0)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(0)) \quad (\varphi_\lambda \text{ paire}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_\lambda''(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt &= \Big[u_\lambda'(t)A_\lambda u_\lambda(t)\Big]_0^T - \int_0^T (u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t))dt \\ &= u_\lambda'(T)A_\lambda u_\lambda(T) - u_\lambda'(0)A_\lambda u_\lambda(0) - \int_0^T (u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t))dt \\ &= -u_\lambda'(0)A_\lambda(-u_\lambda(0)) - u_\lambda'(0)A_\lambda u_\lambda(0) \\ &- \int_0^T (u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t))dt.\end{aligned}$$

Comme A_λ est impair alors

$$\int_0^T (u_\lambda''(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt = -\int_0^T (u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t))dt.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t))dt &= \int_0^T \left(\lim_{h\to 0}\frac{u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{A_\lambda u_\lambda(t+h)-A_\lambda u_\lambda(t)}{h}\right)dt \\ &= \int_0^T \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Big(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t+h)-A_\lambda u_\lambda(t)\Big)dt.\end{aligned}$$

Comme A_λ est maximal monotone, alors

$$\big(u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t+h)-A_\lambda u(t)\big) \geq 0.$$

Il résulte que

$$\int_0^T \big(u_\lambda'(t), (A_\lambda u_\lambda)'(t)\big)dt \geq 0,$$

et

$$\int_0^T (u_\lambda''(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt \leq 0. \tag{2.28}$$

Il résulte que

$$\int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 dt \leq \int_0^T (f(t), A_\lambda u_\lambda(t))dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \|f(t)\|\|A_\lambda u_\lambda(t)\|dt.$$

Alors

$$\|A_\lambda u_\lambda\|_2^2 \leq \|f\|_2\|A_\lambda u_\lambda\|_2.$$

Par conséquent

$$\|A_\lambda u_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2. \tag{2.29}$$

4. Dans cette étape on va montrer la convergence forte de (u_λ) vers v dans $C(I,H)$, la convergence forte de (u_λ') vers v' dans $L^2(I,H)$ et la convergence

faible de $(A_\lambda u_\lambda)$ vers un élément w dans $L^2(I,H)$.

De (2.27) et (2.29) on a

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda+\mu)\|f\|_2^2 < +\infty,$$

car $f \in L^2(I,H)$. De (2.8), on a

$$0 \leq \|u_\lambda - u_\mu\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2 \leq T^{1/2}(\lambda+\mu)^{1/2}\|f\|_2$$

car $u_\lambda - u_\mu \in D(M)$, i.e., $u_\lambda - u_\mu \in W^{2,2}(I,H)$ et par (BC_λ) $(u_\lambda - u_\mu)(T) = -(u_\lambda - u_\mu)(0)$, $(u_\lambda - u_\mu)'(T) = (u'_\lambda - u'_\mu)(T) = -(u_\lambda - u_\mu)'(0)$.

Quand $\lambda, \mu \to 0^+$, de la dernière inégalité (u'_λ) est une suite de Cauchy dans $L^2(I,H)$ et (u_λ) est une suite de Cauchy dans $C(I,H)$. Alors $u'_\lambda \to z$ dans $L^2(I,H)$ et $u_\lambda \to v$ dans $C(I,H)$ (car $u_\lambda \in W^{2,2}(I,H)$). Comme

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(0) + \int_0^t u'_\lambda(s)ds \;\text{ et }\; \int_0^t u'_\lambda(s)ds \to \int_0^t z(s)ds \text{ dans } H,\; t \in I$$

alors,

$$v(t) = v(0) + \int_0^t z(s)ds.$$

On conclut que $v' \equiv z$ et donc $u'_\lambda \to v'$ dans $L^2(I,H)$.

De (2.29), la suite $(A_\lambda u_\lambda)$ est bornée dans $L^2(I,H)$ alors on peut supposer que $A_\lambda u_\lambda \rightharpoonup w$ dans $L^2(I,H)$.

Comme A est maximal monotone, $u_\lambda \to v$ dans $L^2(I,H)$ (car la convergence uniforme dans $C(I,H)$ implique la convergence dans $L^2(I,H)$), et $A_\lambda u_\lambda \rightharpoonup w$ dans $L^2(I,H)$ quand $\lambda \to 0^+$, alors d'après Proposition 1.52, il résulte que $w \in Nv$ dans $L^2(I,H)$. D'où $w(t) \in Av(t)$ p.p. $t \in I$ (voir (2.2)). Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} u_\lambda &\to v \text{ dans } C(I,H) \\ u'_\lambda &\to v' \text{ dans } L^2(I,H) \\ A_\lambda u_\lambda &\rightharpoonup w \text{ dans } L^2(I,H). \end{aligned} \tag{2.30}$$

5. Maintenant montrons que $u'_\lambda \to v'$ dans $C(I,H)$.

Multiplions (E_λ) par $u''_\lambda(t)$, puis intégrons sur I, il résulte

$$-\|u''_\lambda\|_2^2 + \langle bu'_\lambda, u''_\lambda\rangle + \langle A_\lambda u_\lambda, u''_\lambda\rangle = \langle f, u''_\lambda\rangle$$

ou

$$\|u''_\lambda\|_2^2 = \langle A_\lambda u_\lambda, u''_\lambda\rangle + \langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle.$$

On a déjà montré que $\langle A_\lambda u_\lambda, u''_\lambda\rangle \leq 0$ (voir (2.28)), alors

$$\|u''_\lambda\|_2^2 \leq \langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle. \tag{2.31}$$

Notons que

$$\langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle = b\langle u'_\lambda, u''_\lambda\rangle - \langle f, u''_\lambda\rangle.$$

Comme on a

$$\begin{aligned}
\langle u'_\lambda, u''_\lambda\rangle &= \int_0^T (u'_\lambda(t), u''_\lambda(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u'_\lambda(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u'_\lambda(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\lambda(T)\|^2 - \|u'_\lambda(0)\|^2\Big) \\
&= 0, \qquad\qquad (\text{ par } (BC_\lambda))
\end{aligned}$$

alors $\langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle = \langle -f, u''_\lambda\rangle$. De retour à (2.31), on obtient $\|u''_\lambda\|_2^2 \leq \langle -f, u''_\lambda\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\|u''_\lambda\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u''_\lambda\|_2$, en simplifiant

$$\|u''_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2 < +\infty, \text{ pour tout } \lambda > 0, \tag{2.32}$$

la suite (u''_λ) est bornée dans $L^2(I, H)$. Alors

$$u''_\lambda \rightharpoonup y \text{ dans } L^2(I, H). \tag{2.33}$$

On rappelle que l'espace $W^{1,2}(I, H)$ est l'espace des fonctions absolument continues $u : I \to H$ à dérivée dans $L^2(I, H)$, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \Big(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\Big)^{1/2}, \ \forall u \in W^{1,2}(I, H).$$

De la condition d'anti-périodicité on a

$$u_\lambda(0) + u_\lambda(T) = 0.$$

Or $u_\lambda \in W^{2,2}(I, H)$ alors $u'_\lambda \in W^{1,2}(I, H)$ et pour tout $t \in I$ on trouve

$$u'_\lambda(t) = u'_\lambda(0) + \int_0^t u''_\lambda(s)ds$$

$$u'_\lambda(t) = u'_\lambda(T) + \int_T^t u''_\lambda(s)ds.$$

La somme des deux égalités membre à membre donne

$$2u'_\lambda(t) = u'_\lambda(0) + u'_\lambda(T) + \int_0^t u''_\lambda(s)ds - \int_t^T u''_\lambda(s)ds.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en tenant compte de (2.32), il s'en suit que

$$\begin{aligned} 2\|u'_\lambda(t)\| &\leq \int_0^t \|u''_\lambda(s)\|ds + \int_t^T \|u''_\lambda(s)\|ds = \int_0^T \|u''_\lambda(s)\|ds \\ &\leq \sqrt{T}\|u''_\lambda\|_2 \leq \sqrt{T}\|f\|_2. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in I$, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\|u'_\lambda(t)\| \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|f\|_2 < \infty, \text{ pour tout } \lambda > 0. \tag{2.34}$$

et

$$\|u'_\lambda\|_2 \leq \frac{\sqrt{T}}{2}\|f\|_2 < +\infty, \text{ pour tout } \lambda > 0. \tag{2.35}$$

De (2.32) et (2.35), il résulte qu'il existe une constante $S > 0$ telle que

$$\|u'_\lambda\|_{W^{1,2}} \leq S < +\infty, \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

D'une part, l'injection de Sobolev $W^{1,2}(I,H) \hookrightarrow C(I,H)$ est compacte (voir [7]), i.e., toute suite bornée dans $W^{1,2}(I,H)$ est relativement compacte dans $C(I,H)$. Alors, on peut extraire de (u'_λ) une sous suite notée (u'_λ) telle que : il existe une fonction continue $g : I \to H$

$$u'_\lambda \to g \text{ dans } C(I,H) \text{ quand } \lambda \to 0^+. \tag{2.36}$$

De (2.34), il existe $h \in L^2(I,\mathbb{R}_+)$: $\|u'_\lambda(t)\| \leq h(t)$ pour tout $t \in I$ et tout $\lambda > 0$, où h est définie par $h(t) = \frac{\sqrt{T}}{2}\|f\|_2$ pour tout $t \in I$.

En combinant ceci avec (2.36) par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.63), il résulte que $u'_\lambda \to g$ dans $L^2(I,H)$ quand $\lambda \to 0^+$. Or on a déjà montré que $u'_\lambda \to v'$ dans $L^2(I,H)$ quand $\lambda \to 0^+$ (voir (2.30)). De l'unicité de la limite, on conclut que $g = v'$. D'où

$$u'_\lambda \to v' \text{ dans } C(I,H). \tag{2.37}$$

D'autre part, on a $u_\lambda \in W^{2,2}(I,H)$ alors $u'_\lambda \in W^{1,2}(I,H)$ et donc $u'_\lambda(t) = u'_\lambda(0) + \int_0^t u''_\lambda(s)ds$. De plus, pour tout λ, tout $e \in H$ et pour tous $s,t \in I$ tels que $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned} (e, \int_s^t u''_\lambda(\tau)d\tau) &= \int_0^T (e\mathbf{1}_{]s,t]}(\tau), u''_\lambda(\tau))d\tau \\ &= (e, u'_\lambda(t) - u'_\lambda(s)), \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_{]s,t]}$ est la fonction caractéristique de $]s,t]$. Un passage à la limite dans l'égalité quand $\lambda \to 0^+$ en tenant compte de (2.33) donne

$$(e, \int_s^t y(\tau)d\tau) = (e, v'(t) - v'(s)).$$

D'où, pour tout $t \in I$, on trouve

$$v'(t) = v'(0) + \int_0^t y(s)ds,\ t \in I,\ y \in L^2(I,H). \tag{2.38}$$

On en déduit que v' est absolument continue et $y \equiv v''$ p.p. Ceci montre que $u''_\lambda \rightharpoonup v''$ dans $L^2(I,H)$ et $v' \in W^{1,2}(I,H)$. Comme de plus $v \in W^{1,2}(I,H)$, on conclut que $v \in W^{2,2}(I,H)$.

6. Enfin quand $\lambda \to 0^+$ dans $(E_\lambda), (BC_\lambda)$ on déduit que v est solution de (E), (BC).

De l'unicité de la solution on conclut que $v \equiv u$, et les convergences (2.14)-(2.15)-(2.16) ont lieu.

De (2.31), on a

$$\|u''_\lambda\|_2^2 \leq \langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda \rangle.$$

Or

$$\begin{aligned} |\langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle - \langle bu' - f, u''\rangle| &= |\langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle - \langle bu' - f, u'' - u''_\lambda\rangle - \langle bu' - f, u''_\lambda\rangle| \\ &= |\langle b(u'_\lambda - u'), u''_\lambda\rangle - \langle bu' - f, u'' - u''_\lambda\rangle| \\ &\leq |b\langle u'_\lambda - u', u''_\lambda\rangle| + |\langle bu' - f, u'' - u''_\lambda\rangle|. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il résulte

$$\begin{aligned} |\langle u'_\lambda - u', u''_\lambda\rangle| &\leq \int_0^T \|u'_\lambda(t) - u'(t)\| \|u''_\lambda(t)\| dt \\ &\leq \|u'_\lambda - u'\|_\infty T^{1/2} \|u''_\lambda\|_2. \end{aligned}$$

De (2.32) on a $\|u''_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2 < \infty$, et de la convergence uniforme de (u'_λ) vers u', il s'en suit $\langle u'_\lambda - u', u''_\lambda\rangle \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$.

De plus, de la convergence faible dans $L^2(I,H)$ de (u''_λ) vers u'' et le fait que $bu' - f \in L^2(I,H)$, on conclut que $\langle bu' - f, u'' - u''_\lambda\rangle \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$.

On en déduit alors que

$$\langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle \to \langle bu' - f, u''\rangle \tag{2.39}$$

quand $\lambda \to 0^+$.

De la convergence faible dans $L^2(I,H)$ de (u''_λ) vers u'', du Corollaire 1.29 (en prenant les normes au carré) on obtient

$$\|u''\|_2 \leq \liminf_{\lambda \to 0} \|u''_\lambda\|_2. \tag{2.40}$$

De (2.39), (2.40) un passage à la limite dans

$$\|u''_\lambda\|_2^2 \leq \langle bu'_\lambda - f, u''_\lambda\rangle.$$

quand $\lambda \to 0^+$ entraine

$$\|u''\|_2^2 \leq \langle bu' - f, u''\rangle,$$

qui équivaut à (2.17). En effet, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}\langle u'', Au\rangle \leq 0 &\Leftrightarrow \langle u'', f + u'' - bu'\rangle \leq 0\\ &\Leftrightarrow \langle u'', f\rangle + \langle u'', u''\rangle - b\langle u'', u'\rangle \leq 0\\ &\Leftrightarrow \|u''\|_2^2 \leq \langle bu', u''\rangle - \langle f, u''\rangle = \langle bu' - f, u''\rangle.\end{aligned}$$

La démonstration du Lemme est alors complète. ■

Comme $A_\lambda \to A$ $(\lambda \to 0^+)$ au sens des résolvantes i.e., $(I + \mu A_\lambda)^{-1}x \to (I + \mu A)^{-1}x$ pour tous $\mu > 0$, $x \in H$, quand $\lambda \to 0^+$, du Lemme 2.3 découle le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Soient $f, f_n \in L^2(I, H)$ et $A = \partial\varphi$, $A^n = \partial\varphi_n$, où $\varphi, \varphi_n : H \to]-\infty, +\infty]$ sont des fonctions propres, convexes, sci et paires. Soient u, u_n les solutions respectivement à $(E), (BC)$ et à*

$$-u''_n(t) + bu'_n(t) + A^n u_n(t) \ni f_n(t),\ t \in I \tag{E_n}$$

$$u_n(T) = -u_n(0), \quad u'_n(T) = -u'_n(0). \tag{BC_n}$$

Si

$$f_n \to f \quad dans\ L^2(I, H), \tag{2.41}$$

et

$$(I + \mu A^n)^{-1}x \to (I + \mu A)^{-1}x, \quad \forall\mu > 0,\ \forall x \in H, \tag{2.42}$$

quand $n \to +\infty$, alors

$$\begin{aligned}&u_n \to u \ dans\ C(I, H)\\ &u'_n \to u' \ dans\ L^2(I, H)\\ &u''_n \rightharpoonup u'' \ dans\ L^2(I, H).\end{aligned}$$

Dans le cas où $b = 0$, A et A^n peuvent être des opérateurs maximaux monotones impairs satisfaisant (2.42).

Démonstration.

Tout d'abord, on considère le problème approximatif ($\lambda > 0$) de (E_n), (BC_n)

$$-u''_{n,\lambda}(t) + bu'_{n,\lambda}(t) + A^n_\lambda u_{n,\lambda}(t) = f_n(t), t \in I \qquad (E_{n,\lambda})$$

$$u_{n,\lambda}(T) = -u_{n,\lambda}(0), \quad u'_{n,\lambda}(T) = -u'_{n,\lambda}(0). \qquad (BC_{n,\lambda})$$

On a

$$\begin{aligned} \|u'_n - u'\|_2 &= \|u'_n - u'_{n,\lambda} + u'_{n,\lambda} - u'_\lambda + u'_\lambda - u'\|_2 \\ &\leq \|u'_n - u'_{n,\lambda}\|_2 + \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2 + \|u'_\lambda - u'\|_2, \end{aligned} \qquad (2.43)$$

où u_λ est la solution de $(E_\lambda), (BC_\lambda)$.

Dans toute la suite c désigne une constante positive dépendant seulement de T et $\|f\|_2$.

Nous allons montrer que $\|u'_\lambda - u'\|_2 \leq c\lambda^{1/2}$.

On a

$$\begin{aligned} \|u'_\lambda - u'\|_2 &= \|u'_\lambda - u'_\mu + u'_\mu - u'\|_2 \\ &\leq \|u'_\lambda - u'_\mu\|_2 + \|u'_\mu - u'\|_2 \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Par (2.27) on a

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda + \mu) \int_0^T \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \|A_\mu u_\mu(t)\| dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2^2 \leq (\lambda + \mu) \|A_\lambda u_\lambda\|_2 \|A_\mu u_\mu\|_2.$$

En utilisant (2.29), on obtient

$$\|u'_\lambda - u'_\mu\|_2 \leq (\lambda + \mu)^{1/2} \|f\|_2.$$

De retour à (2.44)

$$\|u'_\lambda - u'\|_2 \leq (\lambda + \mu)^{1/2} \|f\|_2 + \|u'_\mu - u'\|_2. \qquad (2.45)$$

On rappelle que de (2.15) on a

$$\lim_{\mu \to 0^+} \|u'_\mu - u'\|_2 = 0. \qquad (2.46)$$

En faisant tendre μ vers 0^+ dans (2.45), il vient

$$\|u'_\lambda - u'\|_2 \leq \lambda^{1/2} \|f\|_2. \qquad (2.47)$$

Il résulte que

$$\|u'_\lambda - u'\|_2 \leq c\lambda^{1/2}. \qquad (2.48)$$

Maintenant on va montrer que : $\|u'_n - u'_{n,\lambda}\|_2 \leq c\lambda^{1/2}$.

Il est clair que (2.14)-(2.16), (2.27), (2.29), sont satisfaites pour tout n fixe, avec $u_{n,\lambda}$, u_n, $A^n_\lambda u_{n,\lambda}$ et f_n à la place de u_λ, u, $A_\lambda u_\lambda$ et f respectivement.

D'après (2.47) on a

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_n\|_2 \leq \|f_n\|_2 \lambda^{1/2}.$$

Or pour n assez grand, on a d'après (2.41)

$$\|f_n - f\|_2 \to 0,$$

et comme

$$\|f_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2, \tag{2.49}$$

il s'en suit que

$$\|u'_n - u'_{n,\lambda}\|_2 \leq c\lambda^{1/2}. \tag{2.50}$$

On va montrer maintenant que $\|u''_n\|_2 \leq c$.

Multiplions $(E_{n,\lambda})$ par $u''_{n,\lambda}(t)$ et intégrons de 0 à T, on obtient

$$-\|u''_{n,\lambda}\|_2^2 + \langle bu'_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle + \langle A^n_\lambda u_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle = \langle f_n, u''_{n,\lambda}\rangle$$

ceci donne

$$\|u''_{n,\lambda}\|_2^2 = \langle A^n_\lambda u_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle + \langle bu'_{n,\lambda} - f_n, u''_{n,\lambda}\rangle.$$

On a d'après (2.28) que

$$\langle A_\lambda u_\lambda, u''_\lambda\rangle \leq 0.$$

De même, on a

$$\langle A^n_\lambda u_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle \leq 0.$$

Il résulte alors

$$\|u''_{n,\lambda}\|_2^2 \leq \langle bu'_{n,\lambda} - f_n, u''_{n,\lambda}\rangle. \tag{2.51}$$

Comme

$$\langle bu'_{n,\lambda} - f_n, u''_{n,\lambda}\rangle = b\langle u'_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle - \langle f_n, u''_{n,\lambda}\rangle$$

et

$$\langle u'_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle = 0$$

car on a

$$\begin{aligned}
\langle u'_{n,\lambda}, u''_{n,\lambda}\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u'_{n,\lambda}(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u'_{n,\lambda}(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u'_{n,\lambda}(T)\|^2 - \|u'_{n,\lambda}(0)\|^2\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il revient à (2.51)

$$\|u''_{n,\lambda}\|_2^2 \leq \|f_n\|_2\|u''_{n,\lambda}\|_2.$$

D'où

$$\|u''_{n,\lambda}\|_2 \leq \|f_n\|_2.$$

Pour n assez grand, tenons compte de (2.41), il résulte

$$\|u''_{n,\lambda}\|_2 \leq c.$$

En vertu du Lemme 2.3, quand $\lambda \to 0^+$ on a $u''_{n,\lambda} \rightharpoonup u''_n$ dans $L^2(I,H)$. Corollaire 1.29 entraine que

$$\|u''_n\|_2 \leq c. \tag{2.52}$$

Nous allons estimer dans cette étape $\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2$**.**

On forme le produit scalaire de $(E_{n,\lambda}) - (E_\lambda)$ avec $(u_{n,\lambda} - u_\lambda)(t)$ et on intègre de 0 à T on obtient

$$-\int_0^T (u''_{n,\lambda}(t) - u''_\lambda(t))(u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt + b\int_0^T (u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt$$

$$+\int_0^T (A^n_\lambda u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt = \int_0^T (f_n(t) - f(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt. \tag{2.53}$$

Posons

$$J_1 = \int_0^T (u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t)\|^2\big)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_{n,\lambda}(T) - u_\lambda(T)\|^2 - \|u_{n,\lambda}(0) - u_\lambda(0)\|^2\Big),
\end{aligned}$$

en utilisant $(BC_{n,\lambda})$ et (BC_λ) on déduit

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}\Big(\|u_{n,\lambda}(0) - u_\lambda(0)\|^2 - \|u_{n,\lambda}(0) - u_\lambda(0)\|^2 \Big) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

D'autre part, posons

$$J_2 = \int_0^T (u''_{n,\lambda}(t) - u''_\lambda(t))(u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt.$$

Par intégration par partie, en tenant compte de $(BC_{n,\lambda}), (BC_\lambda)$, on trouve

$$\begin{aligned} J_2 &= \Big[(u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))(u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t))\Big]_0^T - \int_0^T (u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t), u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t))dt \\ &= (u_{n,\lambda}(T) - u_\lambda(T))(u'_{n,\lambda}(T) - u'_\lambda(T)) - (u_{n,\lambda}(0) - u_\lambda(0))(u'_{n,\lambda}(0) - u'_\lambda(0)) \\ &- \int_0^T (u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t), u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t))dt \\ &= -\int_0^T (u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t), u'_{n,\lambda}(t) - u'_\lambda(t))dt \\ &= -\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.55}$$

En remplaçant (2.54), (2.55) dans (2.53) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned} \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 &+ \int_0^T (A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt \\ &\leq \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|\|u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t)\|dt. \end{aligned}$$

On remarque que

$$A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda u_\lambda(t) = (A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda^n u_\lambda(t)) + (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t)).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 &+ \int_0^T (A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda^n u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt \\ &+ \int_0^T (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt \\ &\leq \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|\|u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t)\|dt. \end{aligned}$$

On peut aussi simplifier

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 \leq \|f_n - f\|_2\|u_{n,\lambda} - u_\lambda\|_2$$

$$-\int_0^T (A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda^n u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt - \int_0^T (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt.$$

Comme A_λ^n est monotone, alors

$$(A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda^n u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t)) \geq 0$$

et

$$-\int_0^T (A_\lambda^n u_{n,\lambda}(t) - A_\lambda^n u_\lambda(t), u_{n,\lambda}(t) - u_\lambda(t))dt \leq 0.$$

De retour à l'estimation, on trouve

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 \leq \|f_n - f\|_2 \|u_{n,\lambda} - u_\lambda\|_2 + \int_0^T (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) - u_{n,\lambda}(t))dt.$$

Comme on a

$$\begin{aligned}\int_0^T (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t) - u_{n,\lambda}(t))dt &\leq \int_0^T \|A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t)\| \|u_\lambda(t) - u_{n,\lambda}(t)\| dt \\ &\leq \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2 \|u_\lambda - u_{n,\lambda}\|_2,\end{aligned}$$

il s'en suit que

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 \leq \big(\|f_n - f\|_2 + \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2\big) \|u_\lambda - u_{n,\lambda}\|_2.$$

Montrons que $\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2 \leq c\big(\|f_n - f\|_2 + \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2\big)$.
On a déjà vu dans Théorème 2.2 que

$$\|u\|_2^2 \leq T \|u\|_{L^\infty(I,H)}^2, \tag{2.56}$$

et d'après l'inégalité de Poincaré on a

$$\|u\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2} \|u'\|_2. \tag{2.57}$$

De $(2.57), (2.56)$, il résulte

$$\|u_{n,\lambda} - u_\lambda\|_2 \leq T \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2.$$

Par conséquent,

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2^2 \leq \big(\|f_n - f\|_2 + \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2\big) T \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2.$$

D'où,

$$\|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2 \leq c(\|f_n - f\|_2 + \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2). \tag{2.58}$$

Démontrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2 = 0,\ \forall\lambda > 0$**.**

De la définition de la résolvante on a, pour tout $x \in H$: $J_\lambda^n x = (I_H + \lambda A^n)^{-1}x$, $J_\lambda x = (I_H + \lambda A)^{-1}x$, en tenant compte de (2.42) on trouve

$$\forall\lambda > 0,\ \forall x \in H :\ \lim_{n\to+\infty} J_\lambda^n x = J_\lambda x. \tag{2.59}$$

De la définition de l'approximation de Yosida on a

$$\begin{aligned} A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t) &= \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^n)(u_\lambda(t)) - \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda)(u_\lambda(t)) \\ &= \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - J_\lambda^n)(u_\lambda(t)). \end{aligned}$$

Combinons ceci avec (2.59), il résulte

$$\forall\lambda > 0, \lim_{n\to+\infty} J_\lambda^n u_\lambda(t) = J_\lambda u_\lambda(t), \tag{2.60}$$

et alors

$$\lim_{n\to+\infty} (A_\lambda^n u_\lambda(t) - A_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{2.61}$$

Remarquons que pour tous $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \|A_\lambda^n u_\lambda(t)\| &= \|\frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^n)(u_\lambda(t))\| \\ &\le \frac{1}{\lambda}\|u_\lambda(t)\| + \frac{1}{\lambda}\|J_\lambda^n(u_\lambda(t))\|. \end{aligned}$$

Or de (2.60), la suite $(J_\lambda^n u_\lambda(t))$ est bornée dans H, i.e., il existe $d_1 > 0$ tel que

$$\|J_\lambda^n u_\lambda(t)\| \le d_1,\ \forall t \in I,\ \forall n,\ \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ fixe}. \tag{2.62}$$

De (2.14) on a $\lim\limits_{\lambda\to0^+} u_\lambda = u$ dans $C(I,H)$ alors (u_λ) est bornée dans $C(I,H)$ et

$$\exists d_2 > 0,\ \|u_\lambda\|_\infty = \sup_{t\in I}\|u_\lambda(t)\| \le d_2 \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

D'où

$$\exists d_3 > 0,\ \|A_\lambda^n u_\lambda(t)\| \le \frac{1}{\lambda}(d_1 + d_2) = d_3,\ \forall t \in I,\ \forall n,\ \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ fixe}.$$

Il est clair que

$$\|A_\lambda^n u_\lambda(t)\| \le g(t),\ \forall t \in I,\ \forall n,\ \text{pour tout } \lambda > 0 \text{ fixe},$$

où $g \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$ définie par $g(t) = d_3$ pour tout $t \in I$.

En combinant ceci avec (2.61), par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.63), il résulte

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_\lambda^n u_\lambda - A_\lambda u_\lambda\|_2 = 0 \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ fixe}. \tag{2.63}$$

De (2.41), (2.63), il revient à (2.58)

$$\lim_{n\to+\infty} \|u'_{n,\lambda} - u'_\lambda\|_2 = 0. \tag{2.64}$$

De retour à (2.43), en invoquant (2.48), (2.50) et (2.64), on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u'_n - u'\|_2 \leq c\lambda^{1/2}. \tag{2.65}$$

Comme λ peut être arbitrairement petit, on conclut de (2.65)

$$u'_n \to u' \text{ dans } L^2(I, H). \tag{2.66}$$

De (2.8), avec $(u_n - u)$ à la place de u on trouve

$$\frac{1}{T^{1/2}}\|u_n - u\|_{L^\infty(I,H)} \leq \|u'_n - u'\|_2,$$

et de (2.66),

$$u_n \to u \text{ dans } C(I, H). \tag{2.67}$$

Enfin, de (2.52) (en procédant de la même façon pour montrer (2.16))

$$u''_n \rightharpoonup u'' \text{ dans } L^2(I, H). \tag{2.68}$$

La conclusion du Théorème 2.4 résulte de (2.66), (2.67), (2.68). ■

Chapitre 3

Résultat d'existence pour $(\mathcal{P})$

On s'intéresse dans ce chapitre essentiellement à l'existence de solutions du problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}(i) - au''(t) + bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi(u(t)) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ (ii) \qquad\qquad\qquad u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R},\end{cases}$$

où $a \geq 0$, $b \neq 0$.

Tout au long de ce chapitre, on suppose que $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre, convexe, sci et paire sur H, telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $L > 0$ l'ensemble

$$\{x \in \operatorname{dom}(\varphi) : \varphi(x) \leq L, \ \|x\| \leq L\} \text{ est compact.} \tag{3.1}$$

$$\psi : H \to]-\infty, +\infty] \text{ est propre, convexe, sci et paire.} \tag{3.2}$$

$D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ et pour tout $r > 0$ il existe des constantes $k_r \in [0, 1[$, $l_r > 0$, et $\theta_r \in [0, 2[$, telles que

$$\|(\partial\psi)^0 u\|^2 \leq k_r \|(\partial\varphi)^0 u\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u) + 1), \ \forall\, u \in D(\partial\varphi), \ \|u\| \leq r. \tag{3.3}$$

On note qu'une fois que φ est considérée paire, il s'en suit que $0 \in \partial\varphi(0)$, de sorte que φ atteint son minimum sur H au point 0. Par conséquent, il n'y a pas de perte de généralité en supposant que $\varphi(0) = 0$.

Définition 3.1. *Si* (2.1) *et* (3.1)-(3.3) *ont lieu, alors on entend par une solution de* $(\mathcal{P})$ *toute fonction* u *dans* $W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *(si* $a > 0$*) ou dans* $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *(si* $a = 0$, $b \neq 0$*) satisfaisant* $u(t+T) = -u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $u(t) \in D(\partial\varphi)$, *p.p.* $t \in \mathbb{R}$, *telle que il existe* $v, w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *avec* $v(t) \in \partial\varphi(u(t))$, $w(t) \in \partial\psi(u(t))$ *p.p. sur* $\mathbb{R}$, *et* $-au''(t) + bu'(t) + v(t) - w(t) = f(t)$, *p.p.* $t \in \mathbb{R}$.

Le résultat d'existence principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.2. *Soient $a \geq 0$, $b \neq 0$ et (3.1)-(3.3) ont lieu. Alors pour toute f satisfaisant (2.1), le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution u, telle que la fonction $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est localement absolument continue sur $\mathbb{R}$.*

L'idée principale de la démonstration du Théorème 3.2 est de considérer le problème régularisé suivant

$$\begin{aligned} -au''(t) + bu'(t) + \varepsilon\|u(t)\|u(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_\lambda(u(t)) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\varepsilon,\ \lambda > 0$. Après avoir établi l'existence de solutions de (3.4), des estimations à priori sont obtenues, qui nous permettent de passer à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ (avec $\lambda > 0$ fixe), ensuite faire tendre λ vers 0^+. Cette démonstration est réalisée au moyen de plusieurs Lemmes.

Lemme 3.3. *Soit (3.1) satisfaite. Soit $\mathscr{F} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ définie par $\mathscr{F} f = u_f$, où u_f est l'unique solution de :*

$$\begin{aligned} &(i) - u_f''(t) + bu_f'(t) + \partial\varphi(u_f(t)) \ni f(t), \quad t \in I \quad (b \in \mathbb{R}), \\ &(ii) \qquad u_f(T) = -u_f(0), \quad u_f'(T) = -u_f'(0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Alors, pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{\mathscr{F} f : \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$. De plus $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Démonstration.
Soit $r > 0$, on note $B_{L^2(I,H)}(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans $L^2(I,H)$.
I) Montrons que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$.
• Montrons que pour tout $t \in I$, $\{u_f(t), f \in B_{L^2(I,H)}(0,r)\}$ est relativement compact.
Il est clair que d'après Théorème 2.2, $\mathscr{F}$ est définie sur tout $L^2(I,H)$ à valeurs dans $W^{2,2}(I,H)$.

a) Montrons que $\{\partial\varphi(u_f)\}$ est bornée dans $L^2(I,H)$.
Soit $\|f\|_2 \leq r$. On forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de (3.5)(i) avec $(-u_f'')$ on obtient

$$\langle -u_f'', -u_f''\rangle + b\langle u_f', -u_f''\rangle + \langle\partial\varphi(u_f), -u_f''\rangle = \langle f, -u_f''\rangle$$

ce qui équivaut à,

$$\|u_f''\|_2^2 - b\int_0^T (u_f'(t), u_f''(t))dt - \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt = \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f'(t), u_f''(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_f'(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u_f'(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f'(T)\|^2 - \|u_f'(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f'(0)\|^2 - \|u_f'(0)\|^2\Big) \qquad \text{(de (3.5)}(ii)\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De (2.17) (avec $A = \partial\varphi$), on a

$$\int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt \leq 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|u_f''\|_2^2 &= \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt \\
&\leq \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u_f''\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u_f''\|_2.$$

Comme par hypothèse $\|f\|_2 \leq r$, il en résulte que

$$\|u_f''\|_2 \leq \|f\|_2 \leq r.$$

Par conséquent,

$$\|u_f''\|_2 \leq r. \tag{3.6}$$

Comme (2.8) a lieu avec u_f' à la place u, alors on a

$$\|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u_f''\|_2.$$

De (3.6), on a

$$\|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}r.$$

On pose $c_1 = T^{1/2}$, alors on a

$$\|u'_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_1 r. \tag{3.7}$$

En utilisant (2.8) encore une fois, on trouve

$$\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u'_f\|_2.$$

On a

$$\|u'_f\|_2 \leq T^{1/2}\|u'_f\|_{L^\infty(I,H)}, \tag{3.8}$$

alors de (3.7) on trouve

$$\|u'_f\|_2 \leq Tr, \tag{3.9}$$

donc, pour $c_2 = T^{3/2}$ on obtient

$$\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_2 r. \tag{3.10}$$

Ici et dans la suite, on utilise $c_1, c_2, ...$ etc, pour désigner divers constantes positifs dépendants seulement de T.

En combinant (3.6), (3.9) dans (3.5)(i), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\partial\varphi(u_f)\|_2 &= \|f + u''_f - bu'_f\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 + \|u''_f\|_2 + b\|u'_f\|_2 \\ &\leq r + r + bTr < +\infty,\end{aligned}$$

où $\partial\varphi(u_f(t))$ signifie $f(t) + u''_f(t) - bu'_f(t)$.

Il résulte que

$$\{\partial\varphi(u_f)\} \text{ est bornée dans } L^2(I,H). \tag{3.11}$$

b) Montrons maintenant que $\left\{\dfrac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\}$ est bornée dans $L^1(I)$.

De la définition du sous-différentiel de φ, on a :

$$\forall v \in H : (\partial\varphi(u), v - u) + \varphi(u) \leq \varphi(v).$$

Pour $v = 0$, $u = u_f(t)$, on trouve :

$$(\partial\varphi(u_f(t)), -u_f(t)) + \varphi(u_f(t)) \leq \varphi(0),\ t \in I.$$

D'après (3.1) on a $\varphi(0) = 0$, alors

$$\varphi(u_f(t)) \leq (\partial\varphi(u_f(t)), u_f(t)),\ p.p.\ t \in I. \tag{3.12}$$

Comme φ est paire avec $\varphi(0) = 0$ et φ atteint son minimum sur H en 0, alors $\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in H$. En intégrant de 0 à T l'inégalité (3.12), on trouve

$$\int_0^T \varphi(u_f(t))dt \leq \int_0^T (f(t) + u_f''(t) - bu_f'(t), u_f(t))dt =$$
$$\int_0^T (f(t), u_f(t))dt + \int_0^T (u_f''(t), u_f(t))dt - b\int_0^T (u_f'(t), u_f(t))dt.$$

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f'(t), u_f(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_f(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u_f(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f(T)\|^2 - \|u_f(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f(0)\|^2 - \|u_f(0)\|^2\Big) \qquad \text{(de (3.5)}(ii)\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f''(t), u_f(t))dt &= \Big[u_f'(t)u_f(t)\Big]_0^T - \int_0^T \|u_f'(t)\|^2 dt \\
&= u_f'(T)u_f(T) - u_f'(0)u_f(0) - \|u_f'\|_2^2 \\
&= u_f'(0)u_f(0) - u_f'(0)u_f(0) - \|u_f'\|_2^2 \qquad \text{(de (3.5)}(ii)\text{)} \\
&= -\|u_f'\|_2^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u_f(t))dt &\leq \int_0^T (f(t), u_f(t))dt - \|u_f'\|_2^2 \\
&\leq \|f\|_2\|u_f\|_2 - \|u_f'\|_2^2 \\
&\leq \|f\|_2\|u_f\|_2.
\end{aligned}$$

Comme $\|u_f\|_2 \leq T^{1/2}\|u_f\|_{L^\infty(I,H)}$ et de (3.10) on a

$$\|u_f\|_2 \leq T^{1/2}c_2 r$$

alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u_f(t))dt &\leq T^{1/2}c_2 r^2 \\
&\leq T^{1/2}c_2(r^2+1).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|\varphi(u_f)\|_{L^1(I)} \leq c_3(r^2+1). \tag{3.13}$$

En tenant compte de la Proposition 1.59, nous pouvons également conclure que $t \longmapsto \varphi(u_f(t))$ est absolument continue sur I, pour tout f fixé,
et $\frac{d}{dt}\varphi(u_f(t)) = (u'_f(t), \partial\varphi(u_f(t)),\ p.p.\ t \in I$. Ceci en combinant avec (3.7), (3.11) conduit à

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\frac{d}{dt}(\varphi(u_f(t)))\right| dt &= \int_0^T \left|(u'_f(t), \partial\varphi(u_f(t)))\right| dt \\
&\leq \|u'_f\|_2 \|\partial\varphi(u_f)\|_2 \\
&\leq T^{1/2}\|u'_f\|_{L^\infty(I,H)}\|\partial\varphi(u_f)\|_2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Alors, $\exists l > 0$ tel que :

$$\left\|\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\|_{L^1(I)} < l$$

ce qui entraine

$$\left\{\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\} \text{ est bornée dans } \ L^1(I). \tag{3.14}$$

c) Ensuite montrons que $\{\varphi(u_f)\}$ est bornée dans $L^\infty(I)$.

On a,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(\varphi(u_f(s)))ds = \varphi(u_f(t)) - \varphi(u_f(0))$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \frac{d}{dt}(\varphi(u_f(s))ds\right| &\leq \int_0^t \left|\frac{d}{ds}(\varphi(u_f(s))\right|ds \\
&\leq \left\|\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\|_{L^1(I)} \\
&< l.
\end{aligned}$$

D'où,

$$|\varphi(u_f(t)) - \varphi(u_f(0))| < l$$

et

$$\varphi(u_f(t)) < l + \varphi(u_f(0)), \quad t \in I.$$

Par conséquent,

$$\left\{\varphi(u_f)\right\} \text{ est bornée dans } \ L^\infty(I). \tag{3.15}$$

d) De (3.10) et (3.15), $\exists L > 0$ tel que : $u_f(t) \in \mathrm{dom}\,(\varphi)$, $\|u_f(t)\| \leq L$ et $\varphi(u_f(t)) \leq L$. Ceci entraine par (3.1) l'existence d'un sous-ensemble compact K de H tel que $\{u_f(I)\} \subset K$ pour tout f, où $u_f(I) = \{u_f(t), t \in I\}$. Il résulte que, pour tout t dans I, $\{u_f(t), f \in B_{L^2(I,H)}(0,r)\}$ est relativement compact.

- **Montrons que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est équicontinue.**

Soient $t, s \in I$, d'après (3.7) on a

$$\begin{aligned}
\|u_f(t) - u_f(s)\| &= \left\| \int_s^t u_f'(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \int_s^t d\tau \\
&\leq c_1 r|t-s|,
\end{aligned}$$

tel que $c_1 r$ est constante. Donc, $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est équicontinue.
Par application du Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.65), il résulte que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$.

II) Montrons que $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Soit $\{f_n\} \subset B_{L^2(I,H)}(0,r)$, telle que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(I,H)$, quand $n \to \infty$. On a $\sup\limits_n \|f_n\|_2 < +\infty$, comme $\{u_{f_n}\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$, alors on peut extraire de $\{u_{f_n}\}$ une sous-suite que l'on note $\{u_{f_n}\}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction $u \in C(I,H)$.

De la démonstration du Théorème 2.2, on voit que (3.5) est équivalente à une inclusion de la forme $f \in Bu_f$ où B est un opérateur maximal monotone dans $L^2(I,H)$ ($B = M_{1,b} + N$ désigne le côté gauche de (3.5)(i) avec (3.5)(ii) inclus dans $D(B)$).

Nous avons donc $f_n \in Bu_{f_n}$ où $u_{f_n} \to u$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(I,H)$. La demi-fermeture de B (voir Proposition 1.47) implique que $f \in Bu$, i.e, u satisfait (3.5). Mais le problème (3.5) admet une unique solution, donc $u = u_f$. Enfin, on déduit que $u_{f_n} \to u_f$ dans $C(I,H)$ et $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque 3.4. *En particulier, il découle du Lemme* 3.3 *que l'application $\mathscr{F}$ est continue et compacte de $L^2(I,H)$ dans $L^2(I,H)$.*

*En effet, soit $f_n \to f$ dans $L^2(I,H)$ alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(I,H)$. D'après la partie **II)** de la démonstration du Lemme* 3.3 *résulte $u_{f_n} \to u_f$ dans $C(I,H)$. Or*

$$\|u_{f_n} - u_f\|_2^2 = \int_0^T \|u_{f_n}(t) - u_f(t)\|^2 dt \leq T\|u_{f_n} - u_f\|_\infty^2, \tag{3.16}$$

on en déduit alors que $u_{f_n} \to u_f$ dans $L^2(I,H)$ et $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2(I,H)$ dans $L^2(I,H)$. De Remarque 1.16 *résulte la continuité de $\mathscr{F}$.*

On pose maintenant $M = \{f \in L^2(I,H), \|f\|_2 \leq r\}$ *qui est une partie bornée dans* $L^2(I,H)$. *D'après la partie* ***II)*** *de la démonstration du Lemme* 3.3 *la partie* $\mathscr{F}(M) = \{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ *est relativement compact dans* $C(I,H)$, *et de toute suite* $(u_{f_n}) \subset \mathscr{F}(M)$, *on peut extraire une sous suite convergente vers* u_f. *De* (3.16), *il résulte que* $\mathscr{F}(M)$ *est relativement compact dans* $L^2(I,H)$. *D'où la compacité de l'application* $\mathscr{F}$ *(voir Définition* 1.20*).*

Un résultat similaire au Lemme 3.3 a lieu dans le cas des inclusions du premier ordre.

Lemme 3.5. *On suppose que la condition* (3.1) *soit satisfaite. Soit* $\mathscr{F} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ *définie par* $\mathscr{F}f = u_f$, *où* $u_f \in W^{1,2}(I,H)$ *est une solution de :*

$$\begin{cases} (i) \quad bu_f'(t) + \partial\varphi(u_f(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \ (b \neq 0) \\ \\ (ii) \qquad\qquad u_f(T) = -u_f(0). \end{cases} \tag{3.17}$$

Alors $\mathscr{F}$ *satisfait les conclusions du Lemme* 3.3.

Démonstration.

Soit $\|f\|_2 \leq r$. On multiplie (3.17)(i) par u_f' et on intègre de 0 à T, on obtient

$$\begin{aligned} b\int_0^T (u_f'(t), u_f'(t))dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \\ b\int_0^T \|u_f'(t)\|^2 dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \\ b\ \|u_f\|_2^2 + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt. \end{aligned}$$

D'après Proposition 1.59, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t), u_f'(t)))dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_f(t))\big)dt \\ &= \Big[\varphi(u_f(t))\Big]_0^T \\ &= \varphi(u_f(T)) - \varphi(u_f(0)) \\ &= \varphi(-u_f(0)) - \varphi(u_f(0)) \qquad \text{(de (3.17)}(ii)) \\ &= \varphi(u_f(0)) - \varphi(u_f(0)) = 0. \quad \text{(de (3.1) } \varphi \text{ est paire)} \end{aligned}$$

De ce qui précède on a

$$b\|u_f'\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \leq \|f\|_2\|u_f'\|_2,$$

ce qui donne alors

$$\|u'_f\|_2 \leq b^{-1}\|f\|_2.$$

Le reste de la démonstration est identique à celui du Lemme 3.3 en remarquant que $\partial\varphi(u_f(t))$ signifie $f(t) - bu'_f(t)$. ■

Lemme 3.6. *Soit* (3.1) *satisfaite. Soit* $F : H \to H$ *une application continue telle que*

$$\|Fx\| \leq k(\|x\| + 1), \qquad \forall x \in H \tag{3.18}$$

pour une certaine constante $k > 0$. *Alors, pour tout* $f \in L^2(I, H)$ *le problème*

$$\begin{aligned} &(i) - u''_\varepsilon(t) + bu'_\varepsilon(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t) + F(u_\varepsilon(t)) \ni f(t), \\ &\qquad\qquad p.p.\ t \in I (b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0), \\ &(ii) \qquad\qquad u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \quad u'_\varepsilon(T) = -u'_\varepsilon(0), \end{aligned} \tag{3.19}$$

admet une solution $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I, H)$. *De plus, l'application* $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ *est absolument continue sur* I.

Démonstration.

Soit $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\|u\|^3$, $u \in H$. On remarque que (3.1) est satisfaite pour $\tilde{\varphi}$ au lieu de φ. En effet, $\tilde{\varphi}$ est de la forme $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\varphi_1(u)$, où $\varphi_1(u) = \|u\|^3$. La fonction $\tilde{\varphi}$ est convexe sci (voir les Remarques 1.33 et 1.35). Comme φ est propre, alors $\exists u \in H : \varphi(u) < +\infty$ et $\varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\|u\|^3 < +\infty$. Il s'en suit que $\tilde{\varphi}$ est propre et $\operatorname{dom}(\tilde{\varphi}) = \operatorname{dom}(\varphi)$. De plus, $\tilde{\varphi}$ est une fonction paire (car elle est somme de deux fonctions paires) et $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

Montrons que pour tout $L > 0$**, l'ensemble** $E_1 = \{x \in H : \tilde{\varphi}(x) \leq L,\ \|x\| \leq L\}$ **est compact**.

Rappelons que par hypothèse (voir (3.1)), l'ensemble $E_2 = \{x \in H : \varphi(x) \leq L,\ \|x\| \leq L\}$ est compact.

• Montrons tout d'abord que $E_1 \subset E_2$.

Soit $x \in E_1$ alors $\tilde{\varphi}(x) \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Donc $\varphi(x) + \frac{\varepsilon}{3}\|x\|^3 \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Il résulte que $\varphi(x) \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Par conséquent $x \in E_2$, et l'inclusion a lieu.

• Montrons maintenant que E_1 est fermé.

Soit $(x_n)_n \subset E_1$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a $x_n \in E_1$. Par définition de l'ensemble E_1, on a $\tilde{\varphi}(x_n) \leq L$ et $\|x_n\| \leq L$. Comme $\tilde{\varphi}$ est semi-continue inférieurement alors $\tilde{\varphi}(x) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(x_n) \leq L$. D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Ainsi $\|x\| \leq L$. Il résulte que $x \in E_1$, et par conséquent E_1 est fermé.

L'ensemble E_1 étant fermé dans le compact E_2, il est alors compact.

D'après Exemple 1.56, on a $\partial\varphi_2(x) = x\|x\|$ où $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{3}\|x\|^3$. De plus, d'après Corollaire 1.57, il résulte que pour tout $u \in \operatorname{dom}(\varphi)$,

$$\begin{aligned}\partial\tilde{\varphi}(u) &= \partial\varphi(u) + \varepsilon\, \partial\varphi_2(u)\\ &= \partial\varphi(u) + \varepsilon\, u\|u\|.\end{aligned}$$

On définit $\mathscr{F} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ par $\mathscr{F}h = u_h$, où u_h est l'unique solution de

$$\begin{cases} (i) - u_h''(t) + bu_h'(t) + \partial\tilde{\varphi}(u_h(t)) \ni f(t) - F(h(t)), \qquad p.p.\ t \in I,\\ (ii) \qquad u_h(T) = -u_h(0), \quad u_h'(T) = -u_h'(0).\end{cases} \tag{3.20}$$

D'après (3.18), on a pour tout $h \in L^2(I,H)$

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I, \qquad \|F(h(t))\|^2 &\le k^2(1 + \|h(t)\|)^2\\ &\le 2k^2(1 + \|h(t)\|^2).\end{aligned}$$

En intégrant sur I on obtient

$$\int_0^T \|F(h(t))\|^2 dt \le 2k^2 T + 2k^2 \int_0^T \|h(t)\|^2 dt < +\infty$$

ce qui donne $\|Fh\|_2^2 < +\infty$ et alors $Fh \in L^2(I,H)$ pour tout $h \in L^2(I,H)$.
Le problème (3.20) est de la forme

$$\begin{aligned}&(i) - v''(t) + bv'(t) + \partial\tilde{\varphi}(v(t)) \ni g(t),\ \text{p.p. } t \in I\\ &(ii) \qquad v(T) = -v(0), \quad v'(T)) = -v'(0)\end{aligned}$$

avec $g \in L^2(I,H)$ et $\tilde{\varphi}$ satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.2. Alors on a l'existence et l'unicité de la solution, et l'application

$$\begin{aligned}\mathscr{F} : L^2(I,H) &\to W^{2,2}(I,H)\\ h &\longmapsto u_h\end{aligned}$$

où u_h est l'unique solution de (3.20), est bien définie à valeurs dans $W^{2,2}(I,H)$ (voir Théorème 2.2).
Nous allons appliquer le théorème du point fixe Schauder à $\mathscr{F}$ (voir Théorème 1.66).
En vertu du Lemme 3.3 et l'hypothèse sur F, l'application $\mathscr{F}$ est continue et compacte.
Nous montrons maintenant que pour un $r > 0$ suffisamment grand, $\mathscr{F} : B \to B$, où $B = \{h \in L^2(I,H) :\ \|h\|_2 \le r\}$ est la boule fermée.
Tout d'abord, on va montrer que

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \le \int_0^T \|f(t)\|\|u_h(t)\|dt + k\int_0^T (\|h(t)\| + 1)\|u_h(t)\|dt.$$

Nous multiplions $(3.20)(i)$ par $u_h(t)$, intégrons sur I et utilisons (3.18), $(3.20)(ii)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (u_h(t), u_h''(t))dt + b\int_0^T (u_h(t), u_h'(t))dt + \int_0^T (v(t), u_h(t))dt \\
= \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t)), u_h(t))dt,
\end{aligned}$$

où $v(t) \in \partial\tilde{\varphi}(u_h(t))$.

Par intégration par partie, utilisons $(3.20)(ii)$ nous aurons

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_h''(t), u_h(t))dt &= \Big[u_h'(t)u_h(t)\Big]_0^T - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt \\
&= \Big(u_h'(T)u_h(T) - u_h'(0)u_h(0)\Big) - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt \\
&= u_h(0)u_h'(0) - u_h'(0)u_h(0) - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt \\
&= -\|u_h'\|_2^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant $(3.20)(ii)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_h(t), u_h'(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_h(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u_h(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_h(T)\|^2 - \|u_h(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_h(0)\|^2 - \|u_h(0)\|^2\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tenons compte de

$$v(t) \in \partial\tilde{\varphi}(u_h(t)) = \partial\varphi(u_h(t)) + \varepsilon\|u_h(t)\|u_h(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_h'\|_2^2 + \int_0^T (w(t), u_h(t))dt + \varepsilon\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \\
= \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t)), u_h(t))dt,
\end{aligned}$$

où $w(t) \in \partial\varphi(u_h(t))$.

De (1.2) et (1.6), $0 \in \partial\varphi(0)$. Comme $\partial\varphi$ est un opérateur monotone alors,

$$(w(t) - 0, u_h(t) - 0) \geq 0, \quad w(t) \in \partial\varphi(u_h(t)), t \in I.$$

Le membre droit de l'égalité précédente est positif, alors

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t), u_h(t))dt.$$

D'où,

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T \|f(t)\| \|u_h(t)\| dt + \int_0^T \|F(h(t))\| \|u_h(t)\| dt$$

tenons en compte (3.18), il résulte

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T \|f(t)\| \|u_h(t)\| dt + k \int_0^T (\|h(t)\| + 1) \|u_h(t)\| dt \tag{3.21}$$

qui est l'estimation cherchée.

• Maintenant nous allons montrer que : $\|u_h\|_2^3 \leq T^{1/2} \|u_h\|_{L^3(I,H)}^3$.

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt &\leq \left(\int_0^T (\|u_h(t)\|^2)^{3/2} dt \right)^{2/3} \left(\int_0^T 1^3 dt \right)^{1/3} \\ &= \left(\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \right)^{2/3} T^{1/3}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\|u_h\|_2 \leq \left(\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \right)^{1/3} T^{1/6}.$$

Par conséquent,

$$\|u_h\|_2^3 \leq T^{1/2} \|u_h\|_{L^3(I,H)}^3. \tag{3.22}$$

• Ensuite montrons que $\|u_h\|_2^2 \leq \mu(1 + k(\|h\|_2 + 1))$.

De (3.22) on a

$$\varepsilon T^{-1/2} \|u_h\|_2^3 \leq \varepsilon \|u_h\|_{L^3(I,H)}^3.$$

En vertu de (3.21), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\varepsilon T^{-1/2} \|u_h\|_2^3 &\leq \|f\|_2 \|u_h\|_2 + k \int_0^T \|h(t)\| \|u_h(t)\| dt + k \int_0^T \|u_h(t)\| dt \\ &\leq \|f\|_2 \|u_h\|_2 + k \|h\|_2 \|u_h\|_2 + k T^{1/2} \|u_h\|_2\end{aligned}$$

donc,

$$\|u_h\|_2^2 \leq \frac{T^{1/2}}{\varepsilon} \|f\|_2 + \frac{kT^{1/2}}{\varepsilon} \|h\|_2 + \frac{kT}{\varepsilon}.$$

Soit $\mu = max\left(\frac{T^{1/2}}{\varepsilon}\|f\|_2, \frac{T^{1/2}}{\varepsilon}, \frac{T}{\varepsilon}\right)$, alors

$$\|u_h\|_2^2 \leq \mu + k\mu \|h\|_2 + k\mu = \mu(1 + k(\|h\|_2 + 1)). \tag{3.23}$$

Si $\|h\|_2 \leq r$, il suffit de choisir r assez grand tel que $\mu(1 + k(r + 1)) \leq r^2$, pour conclure à partir de (3.23) que $\|u_h\|_2 \leq r$.

Donc, $\mathscr{F} : B = \{h \in L^2(I,H) : \ \|h\|_2 \leq r\} \to B$. De plus, $\mathscr{F}$ est continue, par le théorème du point fixe du Schauder $\mathscr{F}$ admet un point fixe $u_\varepsilon \in L^2(I,H)$ i.e., $\mathscr{F}u_\varepsilon = u_\varepsilon$ et alors (3.19) est satisfaite.
Enfin, comme $f + u''_\varepsilon - bu'_\varepsilon - \varepsilon\|u_\varepsilon\|_2 u_\varepsilon - Fu_\varepsilon \in L^2(I,H)$ et $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I,H)$ alors, de Proposition 1.59 l'application $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ est absolument continue sur I.
La démonstration du Lemme est alors complète. ■

Une démonstration similaire basée sur Lemme 3.6 entraine le lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit* (3.1) *satisfaite. Soit $F : H \to H$ une application continue satisfaisant* (3.18). *Alors pour tout $f \in L^2(I,H)$, le problème*

$$\begin{aligned} &bu'_\varepsilon(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t) + F(u_\varepsilon(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ &u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $b \neq 0$, $\varepsilon > 0$ admet au moins une solution $u_\varepsilon \in W^{1,2}(I,H)$, telle que $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ est absolument continue sur I.

Dans la prochaine étape, on fait tendre ε vers 0^+.

Lemme 3.8. *Sous les hypothèses du Lemme* 3.6, *supposons que F est la différentielle au sens de Fréchet d'une fonction G Fréchet différentiable et paire sur H. Alors, pour tout $f \in L^2(I,H)$, le problème*

$$\begin{aligned} &-u''(t)+bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ &u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $b \neq 0$, admet une solution $u \in W^{2,2}(I,H)$ telle que

$$t \longmapsto \varphi(u(t)) \ \ \textit{est absolument continue sur } I. \tag{3.26}$$

Démonstration.
Montrons que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compacte dans $C(I,H)$.

Soit u_ε une solution de (3.19). Par hypothèse sur F, on a

$$\begin{aligned}\langle Fu_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle &= \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), u'_\varepsilon(t))dt \\ &= G(u_\varepsilon(T)) - G(u_\varepsilon(0)) \\ &= G(-u_\varepsilon(0)) - G(u_\varepsilon(0)) \qquad \text{(de (3.19)}(ii)\text{)} \\ &= G(u_\varepsilon(0)) - G(u_\varepsilon(0)) \qquad (G \text{ est paire}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

On forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de (3.19)(i) avec u'_ε

$$-\langle u''_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle + b\langle u'_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle + \langle v(t), u'_\varepsilon\rangle + \varepsilon\int_0^T (\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))dt + \langle Fu_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle = \langle f, u'_\varepsilon\rangle,$$

$$v(t) \in \partial\varphi(u_\varepsilon(t)).$$

On a

$$\begin{aligned}\langle u''_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle &= \int_0^T (u''_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u'_\varepsilon(t)\|^2)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|u'_\varepsilon(t)\|^2\Big]_0^T \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\varepsilon(T)\|^2 - \|u'_\varepsilon(0)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\varepsilon(T)\|^2 - \|u'_\varepsilon(T)\|^2\Big) \qquad \text{(de (3.19)}(ii)\text{)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On a d'après Proposition 1.59 et le fait que φ est paire, (3.1) et (3.19)(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^T (v(t), u'_\varepsilon(t)))dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_\varepsilon(t))\big)dt,\ v(t) \in \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \\ &= \Big[\varphi(u_\varepsilon(t))\Big]_0^T \\ &= \varphi(u_\varepsilon(T)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi(-u_\varepsilon(0)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi(u_\varepsilon(0)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après Exemple 1.56, on a $\partial\varphi_2(x) = x\|x\|$ où $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{3}\|x\|^3$. D'après

Proposition 1.59 et tenons compte de (3.19)(ii), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T (\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t), u_\varepsilon'(t))dt &= \int_0^T (\partial\varphi_2(u_\varepsilon(t)), u_\varepsilon'(t))dt\\ &= \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\varphi_2(u_\varepsilon(t))\Big)dt\\ &= \Big[\varphi_2(u_\varepsilon(t))\Big]_0^T\\ &= \varphi_2(u_\varepsilon(T)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0))\\ &= \varphi_2(-u_\varepsilon(0)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0))\\ &= \varphi_2(u_\varepsilon(0)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0)) \quad (\varphi_2 \text{ est paire})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par (3.27), on a $\langle F(u_\varepsilon), u_\varepsilon'\rangle = 0$. Alors,

$$b\|u_\varepsilon'\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u_\varepsilon'(t))dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}b\|u_\varepsilon'\|_2^2 &\le \|f\|_2\|u_\varepsilon'\|_2\\ \|u_\varepsilon'\|_2 &\le b^{-1}\|f\|_2.\end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.28) et (2.8) où u est remplacé par u_ε, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \le T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2. \tag{3.29}$$

On pose $f_\varepsilon(t) = f(t) - F(u_\varepsilon(t)) - \varepsilon\xi_\varepsilon(t)$, où $\xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in I$ et on réécrit (3.19) comme suit

$$\begin{cases} -u_\varepsilon''(t) + bu_\varepsilon'(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \ni f_\varepsilon(t), \quad t \in I,\\ u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \quad u_\varepsilon'(T) = -u_\varepsilon'(0).\end{cases} \tag{3.30}$$

De (3.29) et (3.18), on trouve

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_2 &= \|f + Fu_\varepsilon - \varepsilon\xi_\varepsilon\|_2\\ &\le \|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2 + \varepsilon\|\xi_\varepsilon\|_2\\ &\le \|f\|_2 + \|g\|_{L^2(I)} + \varepsilon T\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)}^2\\ &\le \|f\|_2 + \|g\|_{L^2(I)} + \varepsilon T^2 b^{-2}\|f\|_2^2\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

où g est définie par $g(t) = k(1 + T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2)$, $t \in I$ et $g \in L^2(I, \mathbb{R})$.
D'où, $\{f_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(I, H)$.
Par application du Lemme 3.3 à (3.30) entraine que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compacte dans $C(I, H)$. On peut alors supposer que

$$u_\varepsilon \to u \ \text{ dans } \ C(I, H) \ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.31}$$

Montrons que u est une solution de (3.25).
De la continuité de F et (3.31), alors $F(u_\varepsilon(t)) \to F(u(t))$ dans H, $\forall t \in I$. De plus $\|Fu_\varepsilon(t)\| \leq g(t)$ pour tout $t \in I$. Donc, par Théorème 1.63, on trouve que $Fu_\varepsilon \to Fu$ dans $L^2(I, H)$. Comme l'application $t \longmapsto \xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ donc est bornée dans $L^2(I, H)$, on en déduit que $\varepsilon\xi_\varepsilon \to 0^+$ dans $L^2(I, H)$ quand $\varepsilon \to 0$. Donc

$$f_\varepsilon \to f - Fu \ \text{ dans } \ L^2(I, H). \tag{3.32}$$

Le passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ dans (3.30) est possible, en vertu de (3.31)-(3.32). On remarque que (3.30) est équivalente à une inclusion de la forme $Bu_\varepsilon \ni f_\varepsilon$ dans $L^2(I, H)$ où $B = M_{1,b} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I, H)$ (Théorème 2.2). Alors, par la propriété de B, B est demi-fermé (voir Proposition 1.47) avec (3.31) qui entraine $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(I, H)$ et (3.32), il s'en suit que u est une solution de (3.25).
Comme $f + u'' - bu' - Fu \in L^2(I, H)$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, par Proposition 1.59 l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I. ■

Lemme 3.9. *Supposons que les hypothèses du Lemme 3.8 soient satisfaites. Alors pour tout $f \in L^2(I, H)$, il existe au moins une solution $u \in W^{1,2}(I, H)$ de*

$$bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I \quad (b \neq 0)$$
$$u(T) = -u(0),$$

telle que (3.26) soit vérifiée.

On prend $b = 0$ dans (3.25) et on montre le Lemme suivant.

Lemme 3.10. *On suppose que (3.1) soit vérifiée. Soit $F : H \to H$ une fonction continue telle que*

$$\|Fx\| \leq k(\|x\|^\alpha + 1), \quad x \in H, \tag{3.33}$$

pour certaines constantes $k > 0$ et $\alpha \in [0, 1[$. Alors pour tout $f \in L^2(I, H)$, le problème

$$\begin{gathered} -u''(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{gathered} \tag{3.34}$$

admet une solution $u \in W^{2,2}(I,H)$ *satisfaisant* (3.26).

Démonstration.

Montrons que $\{u_\varepsilon\}$ **et** $\{Fu_\varepsilon\}$ **sont bornées dans** $L^\infty(I,H)$**.**

Il est clair que (3.33) est plus forte que (3.18) car

$$\|Fx\| \leq k(\|x\|^\alpha + 1) \leq k(\|x\| + 1), \ x \in H.$$

Du Lemme 3.6, il existe $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I,H)$ satisfaisant (3.19) avec $b = 0$.

On multiplie (3.19)(i) (où $b = 0$) par $(-u''_\varepsilon(t))$ et on intègre sur I, en utilisant (3.19)(ii) on obtient

$$\int_0^T (-u''_\varepsilon(t), -u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (-u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt = \int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt,$$

alors

$$\|u''_\varepsilon\|_2^2 - \int_0^T (u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt = \int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt.$$

De (2.17) avec $A = \partial\tilde{\varphi}$, on a

$$\int_0^T (u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt \leq 0.$$

Alors, le côté droit de l'égalité précédente est positif

$$\int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt \geq 0.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u''_\varepsilon\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u''_\varepsilon\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2\|u''_\varepsilon\|_2,$$

qui donne

$$\|u''_\varepsilon\|_2 \leq \|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2. \tag{3.35}$$

En remplaçant dans (2.8) (u par u'_ε), on déduit de (3.35) que

$$\begin{aligned}\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} &\leq T^{1/2}\|u''_\varepsilon\|_2 \\ &\leq T^{1/2}(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \\ &\leq c_4(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2)\end{aligned}$$

où $c_4 = T^{1/2}$.

En remplaçant dans (2.8) (u par u_ε), on obtient

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} &\leq T^{1/2}\|u'_\varepsilon\|_2 \\ &\leq T\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \\ &\leq c_4T(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \\ &\leq c_5(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \qquad (3.36)\end{aligned}$$

où $c_5 = c_4 T = T^{3/2}$, c_4, c_5 sont indépendants de ε.
De (3.33), en combinant une inégalité de type

$$xy^\alpha \leq (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha y,\ \forall x, y > 0,\ \alpha \in [0,1[, \tag{3.37}$$

avec (3.36) on aura

$$\{u_\varepsilon\} \text{ et } \{Fu_\varepsilon\} \ \text{ sont bornées dans } L^\infty(I, H). \tag{3.38}$$

En effet, si on prend $x = 1$, $y = \|u_\varepsilon(t)\|$, en remplaçant dans l'inégalité (3.37), on trouve

$$\|u_\varepsilon(t)\|^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha\|u_\varepsilon(t)\|,\ t \in I,\ \alpha \in [0,1[.$$

Alors, de (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}\|F(u_\varepsilon(t))\| &\leq k(1-\alpha+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|+1)\\ &\leq k(2+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|F(u_\varepsilon(t))\|^2 &\leq k^2(2+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|)^2\\ &\leq 2(4k^2) + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon(t)\|^2.\end{aligned}$$

En intégrant sur I on obtient

$$\begin{aligned}\|Fu_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^T \|F(u_\varepsilon(t))\|^2 dt \leq \int_0^T 8k^2 dt + 2\alpha^2k^2 \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt\\ = 8k^2T + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon\|_2^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|Fu_\varepsilon\|_2 &\leq (8k^2T + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon\|_2^2)^{1/2}\\ &\leq 2\sqrt{2}kT^{1/2} + \sqrt{2}\alpha k\|u_\varepsilon\|_2\\ &\leq 2\sqrt{2}kT^{1/2} + \sqrt{2}\alpha kT^{1/2}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)}.\end{aligned}$$

Alors de (3.36) on trouve

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_5(\|f\|_2 + d_1k + d_1k\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)})$$

ce qui entraine

$$(1-d_2k)\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_5\|f\|_2 + d_2k < +\infty,$$

où $d_1 = 2\sqrt{2}T^{1/2}$, $d_2 = d_1 c_5$.
Pour un choix approprié de k, T, on conclut que

$$\{u_\varepsilon\} \text{ est bornée dans } L^\infty(I, H).$$

En combinant cela avec (3.33), on déduit que

$$\|F(u_\varepsilon(t))\| \leq k(2 + \alpha\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)}) < \infty.$$

D'où,

$$\{Fu_\varepsilon\} \text{ est bornée dans } L^\infty(I, H).$$

Montrons que u est une solution de (3.34).
On pose $f_\varepsilon(t) = f(t) - F(u_\varepsilon(t)) - \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$. De (3.38) et (3.33), on conclut que $\{f_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(I, H)$.
En appliquant Lemme 3.3 au problème

$$\begin{cases} -u_\varepsilon''(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \ni f_\varepsilon(t), \quad t \in I, \\ u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \end{cases} \tag{3.39}$$

implique que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compact dans $C(I, H)$. Alors, on peut supposer que

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } C(I, H) \ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.40}$$

De la continuité de F et (3.40), alors on a $F(u_\varepsilon(t)) \to F(u(t))$ dans H, $\forall t \in I$. De plus, $\{Fu_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ (donc bornée dans $L^2(I, H)$). Il s'en suit que $Fu_\varepsilon \to Fu$ dans $L^2(I, H)$ par Théorème 1.63.
Comme l'application $t \longmapsto \xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ donc est bornée dans $L^2(I, H)$, on en déduit que $\varepsilon\xi_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(I, H)$ quand $\varepsilon \to 0$. D'où

$$f_\varepsilon \to f - Fu \text{ dans } L^2(I, H) \ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.41}$$

Nous allons passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ dans le problème (3.39), en tenant compte de (3.40) et (3.41). On remarque que le problème (3.39) est équivalent à une inclusion de la forme $Bu_\varepsilon \ni f_\varepsilon$ dans $L^2(I, H)$ où $B = M_{1,0} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I, H)$ (voir Théorème 2.2). De la propriété de demi-fermeture de B (voir Proposition 1.47), de (3.40) qui donne $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(I, H)$ et de (3.41), il s'en suit que u est une solution de (3.39). Comme $f + u'' - Fu \in L^2(I, H)$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, de la Proposition 1.59, l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I. ■

Maintenant, on démontre le résultat du chapitre.

Démonstration. (Démonstration du Théorème 3.2**)**
On distingue deux cas.
Si $a > 0, b \neq 0$. Pour tout $\lambda > 0$, on considère le problème approximatif

$$\begin{aligned}
&(i) - au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad p.p.\ t \in I \\
&(ii) \qquad u_\lambda(T) = -u_\lambda(0), \quad u'_\lambda(T) = -u'_\lambda(0).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Des propriétés de $\partial\psi_\lambda$ (voir Proposition 1.52(i) et Proposition 1.58), on peut prendre $F = -\partial\psi_\lambda$ dans Lemme 3.8 pour déduire l'existence d'une fonction $u_\lambda \in W^{2,2}(I, H)$ satisfaisant (3.42) et telle que l'application $t \longmapsto \varphi(u_\lambda(t))$ soit absolument continue sur I. Soit $v_\lambda(t) = f(t) + au''_\lambda(t) - bu'_\lambda(t) + \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))$. On remarque que $v_\lambda \in L^2(I, H)$ et $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ $p.p.$ sur I. On réécrit (3.42)(i) comme suit

$$-au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + v_\lambda(t) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) = f(t), \quad t \in I. \tag{3.43}$$

Montrons maintenant que : $\|v_\lambda\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2)\|v_\lambda\|_2$.
Tout d'abord, on forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de (3.43) avec u'_λ on obtient,

$$\begin{aligned}
&-a\int_0^T (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt + b\int_0^T (u'_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt \\
&+\int_0^T (v_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt - \int_0^T (\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), u'_\lambda(t))dt = \int_0^T (f(t), u'_\lambda(t))dt.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

En utilisant (3.42)(ii) on aura

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\big(\|u'_\lambda(t)\|^2\big)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u'_\lambda(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\lambda(T)\|^2 - \|u'_\lambda(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\lambda(0)\|^2 - \|u'_\lambda(0)\|^2\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ alors d'après la Proposition 1.59 et (3.42)(ii), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T (v_\lambda(t), u'_\lambda(t)) &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_\lambda(t))\big)dt \\
&= \Big[\varphi(u_\lambda(t))\Big]_0^T \\
&= \varphi(u_\lambda(T)) - \varphi(u_\lambda(0)) \\
&= \varphi(-u_\lambda(0)) - \varphi(u_\lambda(0)) \\
&= \varphi(u_\lambda(0)) - \varphi(u_\lambda(0)) \quad (\varphi \text{ est paire}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\int_0^T (u'_\lambda(t), \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)))dt = 0.$$

De retour à (3.44)

$$b\|u'_\lambda\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u'_\lambda(t))dt,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$b\|u'_\lambda\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u'_\lambda\|_2.$$

Ceci montre que (3.28) et (3.29) sont vérifiées avec u_λ au lieu de u_ε, c-à-d

$$\|u'_\lambda\|_2 \leq b^{-1}\|f\|_2$$

et

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2.$$

Ensuite, on multiplie (3.43) par $v_\lambda(t)$ et on intègre sur I, on aura

$$\begin{aligned}
&- a\int_0^T (u''_\lambda(t), v_\lambda(t))dt + b\int_0^T (u'_\lambda(t), v_\lambda(t))dt \\
&+ \int_0^T (v_\lambda(t), v_\lambda(t))dt - \int_0^T (\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), v_\lambda(t))dt = \int_0^T (f(t), v_\lambda(t))dt,
\end{aligned}$$

De (2.17) et le fait que $\displaystyle\int_0^T (u'_\lambda(t), v_\lambda(t))dt = 0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda\|_2^2 &\leq \|f\|_2\|v_\lambda\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2\|v_\lambda\|_2 \\
&\leq (\|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2)\|v_\lambda\|_2. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Rappelons que $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ (voir (3.3)). D'une part, on a par définition

$$\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\| = \inf\{\|y\|, y \in \partial\varphi(u_\lambda(t))\}$$

et comme $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ alors,

$$\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\| \leq \|v_\lambda(t)\| \ p.p. \quad t \in I.$$

D'autre part, de Proposition 1.52, et le fait que $\partial\psi_\lambda = (\partial\psi)_\lambda$ on a

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))\| \leq \|(\partial\psi)^0(u_\lambda(t))\| \ p.p. \quad t \in I.$$

Ceci, la bornitude de l'ensemble $\{u_\lambda : \quad \lambda > 0\}$ dans $L^\infty(I,H)$ et la condition (3.3) impliquent qu'il existe $k \in [0,1[, \theta \in [0,2[$ et $c_6 > 0$ tels que

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq c_6\left(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}\right) + k\|v_\lambda\|_2, \quad \forall\lambda > 0. \tag{3.46}$$

En effet, de (3.3), comme $\|u_\lambda\|_{L^\infty(I,H)} \leq r$, où $r = T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2, \exists k_r \in [0,1[,\ l_r > 0$ et $\theta_r \in [0,2[$ tels que

$$\|(\partial\psi)^0(u_\lambda(t))\|^2 \leq k_r\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u_\lambda(t)) + 1) \quad \forall u_\lambda(t) \in D(\partial\varphi), \|u_\lambda(t)\| \leq r.$$

Alors,

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 \leq k_r\|v_\lambda(t)\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u_\lambda(t)) + 1),$$

et

$$\begin{aligned}
&\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2^2 \leq k_r\|v_\lambda\|_2^2 + l_r(\|\varphi^{\theta_r}(u_\lambda)\|_{L^1(I)} + T)\\
&\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq \sqrt{k_r}\|v_\lambda\|_2 + \sqrt{l_r}\left((\|\varphi^{\theta_r}(u_\lambda)\|_{L^1(I)})^{1/2} + \sqrt{T}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + k\|v_\lambda\|_2,$$

où

$$\begin{aligned}
c_6 &= \max(\sqrt{l_r}, \sqrt{l_r T}),\\
k &= \sqrt{k_r} \in [0,1[,\\
\theta &= \theta_r \in [0,2[.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\{\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\}$ est bornée dans $L^2(I,H)$.
De (3.45) et (3.46), il résulte

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda\|_2 &\leq \|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2,\\
&\leq \|f\|_2 + c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + k\|v_\lambda\|_2, \quad \forall\lambda > 0,
\end{aligned}$$

alors

$$(1-k)\|v_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}).$$

D'où,

$$\|v_\lambda\|_2 \leq c_7(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}), \tag{3.47}$$

où $c_7 = \dfrac{2}{1-k}\max(\|f\|_2, c_6)$ qui est indépendant de λ.
D'autre part, de la définition du sous-différentiel et le fait que $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(u_\lambda(t)) \leq (v_\lambda(t), u_\lambda(t)),\ p.p. \quad t \in I \tag{3.48}$$

avec $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$.
Comme $\beta = \sup\{u_\lambda(t), \lambda > 0,\ t \in I\} < \infty$, et $\varphi(x) \geq 0,\ \forall x \in H$ (car φ est paire et atteint son minimum en $\varphi(0) = 0$) alors, (3.48) implique

$$\begin{aligned}\varphi(u_\lambda(t)) &\leq \|v_\lambda(t)\|\|u_\lambda(t)\| \\ &\leq \beta\|v_\lambda(t)\|.\end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(u_\lambda)\|^2_{L^2(I)} \leq \beta^2\|v_\lambda\|_2^2$, il en résulte que

$$\|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)} \leq c_8\|v_\lambda\|_2, \tag{3.49}$$

où $c_8 = \beta > 0$.
Ainsi (3.47), (3.49) et $\theta < 2$ entrainent que

$$\begin{aligned}\|v_\lambda\|_2 &\leq c_7\big(1 + \big(\int_0^T |\varphi^\theta(u_\lambda(t))|dt\big)^{1/2}\big), \\ &\leq c_7\big(1 + \big(\int_0^T |\varphi(u_\lambda(t))|^2 dt\big)^{1/2}\big), \quad \theta < 2 \\ &\leq c_7(1 + \|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)}) \\ &\leq c_7(1 + c_8\|v_\lambda\|_2)\end{aligned}$$

et $(1 - c_7c_8)\|v_\lambda\|_2 \leq c_7$, (on peut choisir les constante c_7, c_8 assez petit de sorte que le coefficient de $\|v_\lambda\|_2$ soit positif). Alors, on a $\|v_\lambda\|_2 < +\infty$.
De (3.49), on obtient

$$\|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)} < +\infty.$$

D'où,

$$\{\varphi(u_\lambda)\} \text{ et } \{v_\lambda\} \text{ sont bornées dans } L^2(I) \text{ et } L^2(I, H) \text{ respectivement.} \tag{3.50}$$

En utilisant (3.50) dans (3.3) (rappelons que $\{u_\lambda\}$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$) et tenant compte de (3.46), on trouve

$$\{\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\} \text{ est bornée dans } L^2(I, H). \tag{3.51}$$

Il est clair que (3.42)(i) peut être exprimé comme suit

$$-au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) \ni f(t) + \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), \quad t \in I.$$

En combinant ceci avec (3.51) permet d'appliquer Lemme 3.3 (comme $f + \partial\psi_\lambda(u_\lambda) \in L^2(I,H)$) et de déduire que $\{u_\lambda\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$.
Donc, on peut supposer que

$$u_\lambda \to u \text{ dans } C(I,H), \quad \text{quand } \lambda \to 0^+. \tag{3.52}$$

Alors, de (3.51), (3.52) et Proposition 1.52(ii), on aura

$$\partial\psi_\lambda(u_\lambda) \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(I,H)\ (\lambda \to 0^+) \tag{3.53}$$

où $w \in \partial\psi(u)$, i.e., $w(t) \in \partial\psi(u(t))$, p.p. $t \in I$.
Comme dans (3.30) (avec $f_\varepsilon(t) = f(t) + \partial\psi_\varepsilon(u_\varepsilon(t))$ et λ au lieu de ε), un passage à la limite quand $\lambda \to 0^+$ dans (3.42) se découle facilement maintenant, en tenant compte de (3.52), (3.53). Il s'en suit que le problème (3.42)(i) est équivalent à une inclusion de la forme $f_\lambda \in Bu_\lambda$ dans $L^2(I,H)$, où $B = M_{a,b} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I,H)$ (voir Théorème 2.2). Alors, B est demi-fermé avec (3.52) qui donne $u_\lambda \to u$ dans $L^2(I,H)$ quand $\lambda \to 0^+$ et (3.53), il s'en suit que $u \in W^{2,2}(I,H)$ satisfaisant

$$\begin{gathered} -au''(t) + bu'(t) + v(t) - w(t) = f(t), \quad t \in I \\ u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{gathered} \tag{3.54}$$

pour certains $v \in L^2(I,H)$, $v(t) \in \partial\varphi(u(t))$, p.p. $t \in I$. De plus, de Proposition 1.59, comme $f + u'' - bu' - w \in L^2(I,H)$, $u \in W^{2,2}(I,H)$, l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I.
De (3.54), (2.1) et le fait que $\partial\varphi$ et $\partial\psi$ sont des opérateurs impairs impliquent que u peut être prolongé par T-anti-périodicité sur $\mathbb{R}$ assurant ainsi une solution de $(\mathcal{P})$.
En effet, supposons qu'il existe une solution T-anti-périodique sur $[0,T]$ et montrons qu'il existe une solution sur $[T,2T]$. Considérons le problème

$$\begin{gathered} -au''(t+T) + bu'(t+T) + \partial\varphi(u(t+T)) - \partial\psi(u(t+T)) \ni f(t+T)\, t \in [0,T], \\ u(t+T) = -u(t), \quad u'(t+T) = -u'(t), \quad f(t+T) = -f(t). \end{gathered}$$

Alors, nous obtenons

$$au''(t) - bu'(t) + \partial\varphi(-u(t)) - \partial\psi(-u(t)) \ni -f(t), \;\; t \in [0,T].$$

Comme $\partial\varphi$ et $\partial\psi$ sont impairs et u, u', u'' sont T-anti-périodiques alors l'inclusion est équivalente à

$$au''(t) - bu'(t) - \partial\varphi(u(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni -f(t),\ t \in [0, T],$$

qui peut être exprimée comme suit

$$-au''(t) + bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi(u(t)) \ni f(t),\ t \in [0, T].$$

On conclut que l'étude d'existence de solution sur $[T, 2T]$ se ramène à l'étude sur $[0, T]$ dont la solution T-anti-périodique existe déjà. En procédant de façon analogue sur les intervalles $[iT, (i+1)T]$, $i = -1, \cdots, 0, 1, \cdots$, nous obtenons une solution sur $\mathbb{R}$ (en tenant compte du fait que sur $[(i-1)T, iT]$ le problème admet une solution T-anti-périodique).
Si $a = 0, b \neq 0$, alors on remplace (3.42) par le problème ($\lambda > 0$)

$$\begin{gathered} bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ u_\lambda(T) = -u_\lambda(0), \end{gathered} \tag{3.55}$$

qui a une solution $u_\lambda \in W^{1,2}(I, H)$ en vertu du Lemme 3.9 (où $F = -\partial\psi_\lambda$). Le passage à la limite quand $\lambda \to 0^+$ dans (3.55) peut être fait exactement comme ci-dessus (en utilisant Lemme 3.5 au lieu du Lemme 3.3).
Ceci achève la démonstration. ■

Conclusion

Ce mémoire est consacré à une étude détaillée du problème considéré dans [2]. Il s'agit d'établir un résultat d'existence de solutions anti-périodiques pour une classe d'inclusions différentielles gouvernées par l'opérateur sous-différentiel d'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, dans un espace de Hilbert. L'idée de démonstration est de construire une suite de solutions à des problèmes approximatifs. Après avoir montrer que le problème approximatif possède une solution, des estimations à priori sont obtenues permettant, en s'appuyant sur les propriétés des opérateurs maximaux monotones, ainsi un passage à la limite de cette suite. Cette limite n'est autre que la solution de l'inclusion différentielle considérée.

Bibliographie

[1] A.R. Aftabizadeh, S. Aizicovici and N.H. Pavel, On a class of second-order anti-periodic boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 171, (1992), 301-320.

[2] S. Aizicovici and N.H. Pavel, Anti-periodic solutions to a class of nonlinear differential equations in Hilbert Space, J. Funct. Anal., 99, (1991), 387-408.

[3] S. Aizicovici and N.H. Pavel, I.I Vrabie, Anti-periodic solutions to strongly nonlinear evolution equations in Hilbert Space, An. S¸ tiint¸. Univ. Al. I. Cuza Ias¸i. Mat. (N.S.), 1998.

[4] S. Aizicovici, S. Reich, Anti-periodic solutions to a class of non-monotone evolution equations, Discrete Contin. Dynam. Systems, 5 (1999), 35-42.

[5] J.P. Aubin and H. Frankowska, Set valued analysis, Birkouiser, Boston, (1990).

[6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotone et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, Amesterdam, London, (1973).

[7] H. Brézis, Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, (1993).

[8] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[9] A. Haraux, Equations d'évolution non linéaires, Solutions bornées et périodiques, Ann. Inst. Fourier, 28 (1978), 201-220.

[10] A. Haraux, Anti-periodic solutions of some nonlinear evolution equations, Manuscripta Math, 63 (1989), 479-505.

[11] X. Liu, Y. Liu, Existence of anti-periodic solutions for a class of first order evolution inclusions, Filomat 26 :8 (2014), 1167–1180.

[12] Z. Liu, Anti-periodic solutions to nonlinear evolution equations, J. Funct. Anal., 258 (2010), 2026-2033.

[13] H. Okochi, On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations, J. Math. Sot. Japan 40 (1988), 541-553.

[14] H. Okochi, On the existence of anti-periodic solutions to a nonlinear evolution equation associated with odd subdifferential operators, J. Funct. Anal., 91 (1990), 246-258.

[15] A. Rondepierre, Introduction à l'optimisation convexe non différentiable, disponible sur le lien
$https://www.math.univ-toulouse.fr/ rondep/CoursTD/poly4GMM_nondiff.pdf$

[16] S. Saïdi, Cours sur la théorie spectrale des opérateurs, (2017) polycopié disponible sur le lien
http ://elearning.univ-jijel.dz/elearning/course/view.php ?id=550

[17] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, ellipses, édition marketing S.A, 1998.

[18] J.V. Tiel, Convex analysis, an introductory text, Royal Netherlands Meteorological Institute, John Wiley and Sons Ltd, 1984.

[19] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications, II, Springer-Verlag, New York. 1990.