République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique
Université de Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :........
N° de série :.........

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de
Master
Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Contrôle optimal pour les systèmes de contrôle fractionnaire semi- linéaire

Présenté par :
- Khadidja Boukedjane
- Yassmine Bouzekouk

Devant le jury :

Makhlouf Amira	**M.C.B**	**Université de Jijel**	**Président**
Aliouane Fatine	**M.C.A**	**Université de Jijel**	**Encadreur**
Menigher Hammoud	**M.A.A**	**Université de Jijel**	**Examinateur**

Promotion **2019-2020**

⁂ *Remerciements* ⁂

Avant tout, nous remercions ALLAH le tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'étude.

Nous tenons à exprimer notre profond respect à notre encadreur, Melle **Fatine Aliouane**, pour ces conseils précieux et sa critique constructive qui ont été trés positifs.

Nous remercions sincérement les membres du jury :
- Makhlouf Amira : d'avoir accepté la présidence du Jury
- Menigher Hammoud : d'avoir accepté l'examination de notre travail.

Il est important de remercier nos familles qui ont toujours été une source d'encouragement.

Merci à tous les enseignants d'université de Mohammed Seddik Ben Yahia -JIJEL-

Sans oublier tous les personnes qui y ont contribué de près ou de loin.

⁂ *Dédicace* ⁂

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail

♡ A mon très chère père Allaoua, " le premier homme de ma vie, source d'amour, d'affection, de générosité et de sacrifies, tu étais toujours là, près de moi pour me soutenir, et me guider avec les précieux conseils. Aucun dédicace ne saurait exprimer l'amour que je porte au grand homme que vous êtes. Que Dieu te garde pour nous".

♡ A ma très chère mère Fatima,
"source de ma vie, d'amour et de tendresse qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi, puisse Dieu le tout puissant t'accorde la meilleure santé, une longue vie et le bonheur".

♡ A mes chers frères " Salah et Hichem" et mes belles Soeurs "Meriem et Asmaa".

Puisse Dieu vous donne la santé, le bonheur, le courage et surtout la réussite.

♡ A ma grande soeur " Wissame" et son mari "Adel" et leur petite princesse.

♡ A ma grand-mère "Zineb", à qui je lui souhaite une bonne santé.

♡ A ma chère binôme "Yassmine", merci pour les très bons moments qu'on a partagé.

♡ A tout mes ami(e)s et mes collègues

♡ A tout ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

⁂ *Khadidja* ⁂

⁂ *Dédicace* ⁂

♡ A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifier pour me voir réussir, à toi mon père "Hacen".

♡ A celui qui m'a appris à faire le premier pas, celui qui m'a appris à tenir la plume, m'a encouragé et m'a planté dans le réel de la patience et de l'amour. Je suis très reconnaissante pour toi, ma mère "Hafida", je te dédie le fruit de mon succès et j'espère que dieu seul te préservera et prolongera ta vie.

♡ A mes frères "Fouzi, Ilyas, Mehamed" et leurs femmes.

♡ A mes belles soeurs "Ibtissam, Selma, Meriem" et leurs maries "Mounir, Madjid, Amer".

♡ A Isslam, Anfal, Samah, Djawad, Adem.

♡ A mon marie qui n'a pas cessé de m'encourager tout au long de ce travail pour que j'arrive à ce jour là. Tu est très cher à mon Coeur.

♡ A toute ma famille.

♡ A tous mes amis et mes collègues de promos, surtout mon binôme "Khadidja".

⁂ *Yassmine* ⁂♡

Table des matières

Notations générales

Espaces

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres naturels. .
$\mathbb{N}^*$	:	Ensemble des nombres naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$[a,b]$	:	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.
$\mathbb{R}^n$	:	Espace vectoriel muni du produit scalaire $< x, y >= \sum_{k=0}^{n} x_k y_k$.
Ω	:	Ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont $\partial\Omega$ sa frontière.
$(E, \|.\|)$	:	Espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, E^* son dual.
$\overline{B_E}(0,1)$	:	La boule unité fermé de E de centre 0 et de rayon 1.
$(\mathcal{L}(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}})$	:	Espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés définis de E dans F muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$.
$C_E([a,b])$	:	Espace de Banach des applications continues $x : [a,b] \longrightarrow E$ muni de la norme $\| \cdot \|_C$ définie par $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|x(t)\|$.
$C_E^k([a,b])$	:	Espace des fonctions k- différentiables sur $[a,b]$.
$AC^n([a,b])$	:	Espace de Banach des fonctions ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ absolument continues sur $[a,b]$ muni de la norme $\|u\|_{AC}$.

Symboles et fonctions

$\langle .,. \rangle_{E,E^*}$	:	Produit de dualité entre E et E^*.
$u_n \rightharpoonup u$	:	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u i.e. $\langle u_n, \xi \rangle \to \langle u, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in E^*$.
$\mathcal{R}e(z)$	:	Partie réelle d'un nombre complexe z.
$\frac{d^n f}{dt^n}$ où $f^{(n)}$	:	Dérivée n^{ieme} d'une fonction f.
$(I_+^\alpha f)(t)$	:	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f.
$(D_+^\alpha f)(t)$	:	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f .
$(D_a^\alpha f)(t)$	:	Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre a d'une fonction f au point t.
$\mathcal{L}[.](\lambda)$	:	Transformée de Laplace.
$\mathcal{L}^{-1}[.](t)$	:	Transformée de Laplace inverse.
∇f	:	Gradient de la fonction f.
Δf	:	Le Laplacien d'une fonction f.
$\Gamma(.)$	:	Fonction Gamma.
$\beta(.,.)$	:	Fonction béta.
$E_{\alpha,\beta}(.)$	:	Fonction de Mittag-Leffler.
$\Phi_\alpha(.)$	:	Fonction de Mainardi.

Introduction

Le calcul fractionnaire est un champ d'étude mathématiques qui sort du traditionnel. C'est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique connu aujourd'hui.

Leibniz a introduit le symbôle $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée n-ième d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital en 1695, qui a répondu à son tour : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Aujourd'hui, cette lettre est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital s'est intérogé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, a en fait donné lien au nom de cette partie mathématique.
Plusieurs mathématiciens y ont contribué à ce sujet au fil des ans, notamment Liouville, Reimaun et Weyl, qui ont largement contribué à la théorie du calcul fractionnaire, ainsi que Fourier, Abel, Leibniz, Gronwall et Letnikov.

Dans ce mémoire, nous appliquons la théorie classique du contrôle à une équation de diffusion fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D_+^\alpha y - \Delta y = v & \text{Dans} \quad Q \\ y = 0 & \text{Dans} \quad \sum \\ I_+^{1-\alpha} y(0^+) = y^0 & \text{Dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1}$$

dans un domaine borné. Pour résoudre ce problème nous démontrons qu'il y a une solution unique dans L^2. Puis nous appliquons ses résultats pour affirmer que le problème de contrôle optimal suivant

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)} \tag{2}$$

admet une solution unique. En interprétant la condition d'optimalité du premier ordre d'Euler-Lagrange avec un problème adjoint défini au moyen d'une dérivée de Caputo, nous obtenons un système d'optimalité pour le contrôle optimal où nous sommes appuyées sur les articles ([1], [15], [2]). Une forte motivation pour étudier la solution et les propriétés des équations de diffusion fractionnaire vient du fait qu'ils décrivent efficacement la diffusion anormale sur les fractales (objets physiques de dimension fractionnaire, comme certains semi-conducteurs amorphes ou matériaux fortement poreux), marches aléatoires fractionnaires, etc. Dans [17], Oldham et Spanier ont discuté la relation entre une équation de diffusion régulière et une équation de diffusion fractionnaire qui contient une dérivée du premier ordre dans l'espace et une dérivée du demi-ordre dans le temps. Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre intitulé « préliminaires », contient les différents outils et technique mathématiques utilisés par la suite.

Tandis que le deuxième chapitre sous titre «Théorèmes d'existences et d'unicités de solution», présente quelques résultats d'existences et d'unicités de solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires.

Enfin, le troisième chapitre intitulé «Application au contrôle optimal» , traitera l'existence d'un contrôle optimal pour le système différentielle fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D_+^{\alpha} y - \Delta y = v & \text{Dans} \quad Q \\ y = 0 & \text{Dans} \quad \sum \\ I_+^{1-\alpha} y(0^+) = y^0 & \text{Dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3}$$

où $y^0 \in H^2(\Omega) \cap H_1^0(\Omega)$, $v \in L^2(Q)$ et $I_+^{1-\alpha} y(0^+) = \lim_{t \to 0^+} I_+^{1-\alpha} y(t)$ et $Q = \Omega \times]0, T[$, $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$.

Nous terminons notre mémoire par un résumé récapitulant les principaux résultats.

Mots clés : Calcul fractionnaire, transformé de Laplace, contrôle optimal.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons certaines théories de bases qui concernent les fonctions spéciales. Dans cet esprit, l'accent sera volontairement porté sur différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et d'intégration pour un ordre fractionnaire. On mettra aussi le point sur quelques notions de semi-groupes.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma à été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser le factoriel des valeurs non entiers (voir [19]).

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{1.1}$$

Nous avons $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Propriété 1.1.1 *La fonction Gamma est caractérisée par les propriétés suivantes :*

1. *La relation de récurrence*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{1.2}$$

Qu'on peut la démontrer par une intégration par partie.

2. *Généralise le factoriel car*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

3. *Peut être représentée aussi par la limite :*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \quad \mathcal{R}e(z) > 0 \tag{1.4}$$

1.1.2 La fonction bêta

Nous renvoyons le lecteur à [19] pour plus de détails.

Définition 1.1.2 *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, la fonction bêta est définie par*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.5}$$

Remarque 1.1.3 *Par le changement de variable $s = 1-t$, on a*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p). \tag{1.6}$$

Proposition 1.1.4 (Lien entre la fonction Gamma et la fonction bêta)
Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on a

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.7}$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Cette fonction est introduite par Mittage-Leffler en 1903 (voir [19, 16]).

Définition 1.1.5 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on définit la fonction de Mittag-Leffler comme suit*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\sigma^{\alpha-1}e^\sigma}{\sigma^\alpha - z}d\sigma, \quad \alpha > 0, \tag{1.8}$$

où G est le contour qui commence et se termine à $-\infty$ et encercle l'origine une fois dans le sens des aiguilles d'une montre. En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle $E_1(z) = e^z$.
Plus généralement, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.9}$$

Remarque 1.1.6

1. *Pour $\beta = 1$, on trouve la relation (1.8) car*

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z).$$

2. *Si $\alpha = \beta = 1$, il est clair que*

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

1.1.4 Fonction de Mainardi

Les notions de cette sous section sont prises des références [12, 6].

Définition 1.1.7 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0,1[$. La fonction de Mainardi est définie par*

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\alpha n + 1 - \alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma, \tag{1.10}$$

où G est le contour qui commence et se termine à $-\infty$ et encercle l'origine une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

Proposition 1.1.8 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0,1[$, nous avons les assertions suivantes*

1. *La transformée de Laplace de la fonction $\Phi_\alpha(z)$ est*

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha](t) = E_\alpha(-z)$$

2. $$\int_0^{+\infty} t^n \Phi_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. *La fonction Φ_α est une fonction positive, i.e. $\Phi_\alpha(t) \geqslant 0, \quad \forall t > 0$.*

Démonstration

1. Nous avons par la relation (1.10)

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t) e^{-zt} dt &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - t\sigma^\alpha)} d\sigma \right] e^{-zt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{\sigma} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+\sigma^\alpha)} dt \right] d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{\sigma^{\alpha-1} e^{\sigma}}{z + \sigma^\alpha} d\sigma \\
&= E_\alpha(-z)
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha](t) = E_\alpha(-z).$$

2. En utilisant la propriété suivante (voir [6]),

$$\int_0^{\infty} t^n \Phi_\alpha(t) dt = \lim_{s \to 0} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} E_\alpha(-s)$$

et

$$\frac{d^n}{ds^n}E_\alpha(-s) = \frac{d^n}{ds^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha n+1)}.$$

On en déduit que

$$\int_0^\infty t^n\Phi_\alpha(t)dt = \lim_{s\to 0}(-1)^n\frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

or $\Gamma(n+1) = n!$.

□

Remarque 1.1.9 *Par la Proposition 1.1.8 (2), on trouve pour $n = 0$*

$$\int_0^{+\infty}\Phi_\alpha(t)dt = 1, \quad \forall t > 0.$$

Autrement dit, Φ_α est une densité de probabilité. D'autre part, notons par

$$\rho_\alpha(t^{-1/\alpha}) = \alpha t^{1+\frac{1}{\alpha}}\Phi_\alpha(t).$$

où la transformée de Laplace de ρ_α est donnée par la relation

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\rho_\alpha(t)dt = e^{-\lambda^\alpha}. \tag{1.11}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(e^{-\lambda^\alpha})(t) =& \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^\alpha)^n}{n!}\right)(t)\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{L}^{-1}(\lambda^{\alpha n})(t)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n-1}}{n!\Gamma(-\alpha n)}\\
=& -\alpha t^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n}}{\alpha(n+1)!\Gamma(-\alpha n-\alpha)}\\
=& \alpha t^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n}}{n!\Gamma(-\alpha n-\alpha+1)}\\
=& \alpha t^{-\alpha-1}\Phi_\alpha(t^{-\alpha}) = \rho_\alpha(t).
\end{aligned}$$

1.2 Théorie de semi-groupe

Les définitions et les propriétés suivantes ainsi que leurs preuves sont prises de [13, 2].

1.2.1 Semi-groupe d'opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur, où $D(A) = \{x \in E, \quad Ax \in F\}$ est le domaine de définition de A.

Définition 1.2.1 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur. A est dit linéaire si $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et pour tous $x, y \in D(A)$,et pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.*

$$A(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \alpha_1 Ax + \alpha_2 Ay.$$

Définition 1.2.2 *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. A est dit borné si pour tout ensemble borné M de E, $A(M)$ est un sous ensemble borné de F. En d'autre terme, A est dite borné si $A(\overline{B_E}(0,1))$ est un borné de F.*

Proposition 1.2.3 *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, alors A est borné si et seulement si A est continu i.e.*

$$\exists C > 0, \quad \|Ax\| \leqslant C\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus (bornés) sur E muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$. Si $E = F$, on le note $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.2.4 *Soit E un espace de Banach. On appelle semi-groupe d'opérateur linéaire sur E ou simplement semi-groupe, qu'on le note $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, l'opérateur $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ vérifiant*

1. *$T(0) = I$ (I est l'opérateur identité).*
2. *$T(t + s) = T(t)T(s), \quad$ pour tous $t, s \geqslant 0$.*

Définition 1.2.5 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateur borné sur E est dit uniformément continu sur E si*

$$\lim_{t \xrightarrow{\geq} 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

1.2.2 Semi-groupe de classe C_0

Dans cette partie, nous introduisons une classe plus générale des semi-groupes où nous étudions leurs propriétés élémentaires.

Définition 1.2.6 *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateur linéaire borné sur E une famille $\{T(t)\}_{t>0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour tous* $t, s > 0$;
3. $\lim_{t \to 0} T(t)x = x$, *pour tout* $x \in E$.

Définition 1.2.7 *Le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t>0}$, *l'opérateur* A *défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in E / \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \, existe \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad pour\ tout\ x \in D(A).$$

Remarque 1.2.8 *Tout semi-groupe uniformément continu est de classe* C_0 *mais l'inverse est faux.*

Théorème 1.2.9 *Soit* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un* C_0*-semi-groupe, Alors*

1. *Il existe* $n > 0$ *et* $M \geq 1$ *tels que*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \quad \forall t \in [0, n]$$

2. *Il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tels que*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Dans ce cas on dit que $\{T(t)\}_{t>0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de type* (M, ω).

Démonstration (voir [2]).

Définition 1.2.10 *Soit* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* E.

1. $\{T(t)\}_{t>0}$ *est dit (uniformément) borné s'il est de type* $(M, 0)$, *i.e. s'il existe* $M \geqslant 1$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \ \forall t \geqslant 0.$$

2. $\{T(t)\}_{t>0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction s'il est de type (1,0), i.e. si*

$$\|T(t)\| \leqslant 1, \ \forall t \geqslant 0.$$

1.2.3 Propriété spectrale des C_0-semi-groupes

Définition 1.2.11 *Soit E un espace de Banach complexe et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire.*

1. *L'ensemble résolvant de A est*
$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \subset E \to E \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}.$$

2. *L'application*
$$\begin{aligned} R(.,A) : &\rho(A) \to \mathcal{L}(E) \\ &\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$
est dite, la résolvante de A.

Théorème 1.2.12 *Soient $\{T(t)]\}_{t>0}$ un C_0-semi-groupe différentiable et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\mathcal{R}e\lambda > 0)$. Alors l'application $R_\lambda : E \to E$*
$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$
définit un opérateur linéaire borné sur E avec $\lambda \in \rho(A)$ et
$$R_\lambda x = R(\lambda, A)x, \quad \text{pour tout} \quad x \in E. \tag{1.12}$$

Démonstration (voir [2]).

Exemple 1.2.1 (Semi-groupe de la chaleur) *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit Δ_D le Laplacien de Dirichlet sur Ω, défini de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On sait que Δ_D est auto-adjoint, négatif et inversible et que son inverse Δ_D^{-1} est auto-adjoint et compact sur $L^2(\Omega)$ (compacité de H^2 dans L^2). La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoint compact montre qu'il existe une base Hilbertienne $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de Δ_D^{-1} associée aux valeurs propres (μ_n) qui sont réelles, de multiplicité finie et vérifient $\mu_n \to 0$. On en déduit que (φ_n) est une base Hilbertienne de fonctions propres de Δ_D correspondant aux valeurs propres $\lambda_n = 1/\mu_n < 0$ avec $\lambda_n \to -\infty$. Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on notera $c_n(u)$ le coefficient de φ_n dans la décomposition de u. Pour tous $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $t \geq 0$, on pose*
$$u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n\geq 0} c_n(u_0) e^{\lambda_n t} \varphi_n$$
Il sagit d'un semi-groupe C^0 mais qu'il ne peut être prolongé en groupe car $S(t)$ n'est pas inversible pour $t > 0$. On note aussi que $S(t)$ est une contraction compacte pour $t > 0$ et que $S(t)$ n'est pas uniformément continu en $t = 0$. Enfin, $u(t)$ est solution (au moins formellement) de l'équation de la chaleur
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_D u \qquad u(0) = u_0.$$
On note formellement $S(t) = e^{\Delta_D t}$.

1.3 Calcul Fractionnaire

Nous concentrons notre attention sur les propriétés essentielles des dérivées et intégrales fractionnaires, notamment celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.3.1 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *[1]*
On appelle intégrale fractionnaire à gauche (resp. à droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, et on la note I_+^α (resp I_-^α), la fonction définie par

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad t > a. \tag{1.13}$$

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad t < b. \tag{1.14}$$

Propriété 1.3.1 *Nous avons les propriétés suivantes*

1. *Par convention $I_+^0 f(t) = f(t)$, c'est à dire $I_+^0 \equiv I$ est l'opérateur identité.*
2. *L'opérateur intégrale I_+^α est linéaire.*

Dans la suite on va utiliser l'équation (1.13).

Théorème 1.3.2 *[1]*
Soit $f \in L_E^1([a,b])$ et soit $\alpha > 0$. Alors $I_+^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$, et

$$I_+^\alpha f \in L_E^1([a,b]).$$

Démonstration Soient $\Lambda = [a,b]^2$, et $k : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par

$$k(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & \text{si} \quad a \le s \le t \le b \\ 0 & \text{si} \quad a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

Alors $k(.,.)$ est mesurable sur Ω, et nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^b k(t,s)dt &= \int_a^s k(t,s)dt + \int_s^b k(t,s)dt \\ &= \int_s^b (t-s)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} dt \end{aligned}$$

Sachant que le produit de deux fonctions Bochner mesurables est aussi Bochner mesurable (Théorème 4.1.8), on a $f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = f(s)$ sur $[a,b]^2$ est fortement mesurable sur $[a,b]^2$.

Il est clair que $k(t,s)$ est finie presque partout sur $[a,b]^2$, et est une fonction mesurable à valeurs réelles. Nous avons maintenant que

$$k(t,s)f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = k(t,s)f(s) \quad \text{sur} \quad [a,b]^2$$

est une fonction fortement mesurable. Ensuite, nous travaillons sur l'intégrale double

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\| \int_a^b k(t,s)f(s)ds \right\| dt &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)| \|f(s)\| ds \right) dt \\
&= \int_a^b \|f(s)\| \left(\int_a^b |k(t,s)| dt \right) ds \\
&= \int_a^b \|f(s)\| \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} ds \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \int_a^b \|f(s)\| ds \\
&= \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Par le Théorème de Tonelli (Théorème 4.1.8), la fonction $H : \Omega \to E$ telle que $H(t,s) = k(t,s)f(s)$ est Bochner intégrable sur Ω.
D'où par le Théorème de Fubini (Théorème 4.1.6), nous obtenons que $\int_a^b k(t,s)f(s)ds$ est une fonction Bochner intégrable sur $[a,b]$. Alors $(I_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$ est Bochner intégrable sur $[a,b]$, et existe presque partout sur $[a,b]$. □

Lemme 1.3.3 *[1]*
Soit $f \in L_E^1([a,b])$ et soit $\alpha \geqslant 1$, alors

$$I_+^\alpha f \in C_E([a,b]).$$

Démonstration On distingue deux cas.

1. Cas de $\alpha = 1$. On a
$$(I_+^1 f)(t) = \int_a^t f(x)dx. \tag{1.15}$$
Soient $t, x \in [a,b]$ tels que $t \geqslant x$ et $t \to x$ on observe que
$$\begin{aligned}
\left\| (I_+^1 f)(t) - (I_+^1 f)(x) \right\| &= \left\| \int_a^t f(y)dy - \int_a^x f(y)dy \right\| \\
&= \left\| \int_a^x f(y)dy + \int_x^t f(y)dy - \int_a^x f(y)dy \right\| \\
&= \left\| \int_x^t f(y)dy \right\| \\
&\leqslant \int_x^t \|f(y)\| dy \\
&= \int_a^t \| f(y) \| dy - \int_a^x \| f(y) \| dy \underset{t \to x}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$
car $\int_a^t \| f(x) \| dx$ est continue sur [a,b].

2. Cas de $\alpha > 1$. Soit $t, x \in [a,b]$ tels que $t \geqslant x$ et $t \to x$ observons que

$$\begin{aligned}
\| I_+^\alpha f(t) - I_+^\alpha f(x) \| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy - \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^x (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy + \int_x^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy - \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy + \int_x^t |t-y|^{\alpha-1} \parallel f(y) \parallel dy \right] \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy + (t-x)^{\alpha-1} \parallel f \parallel_1 \right]
\end{aligned}$$

Comme $t \to x$ on a, $(t-y)^{\alpha-1} \to (x-y)^{\alpha-1}$, ainsi $|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \to 0$. Mais aussi

$$|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \leqslant 2(b-a)^{\alpha-1}.$$

Donc

$$|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel \leqslant 2(b-a)^{\alpha-1} \parallel f(y) \parallel \in L_E^1([a,b]).$$

De plus, $|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel \to 0$ quand $t \to s$.

Alors par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue on conclut que, quand $t \to x$,

$$\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy \to 0.$$

Par conséquence, quand $t \to x$

$$\| I_+^\alpha f(t) - I_+^\alpha f(x) \| \to 0$$

Il résulte que $I_+^\alpha f \in C_E([a,b])$. □

Exemple 1.3.1 *1. Soit $f(t) = (t-a)^m$. Par définition*

$$I_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

A l'aide du changement de variable $s = a + \tau(t-a)$ on trouve

$$\begin{aligned}
I_+^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^m ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^m d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \beta(m+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{\alpha+m}.
\end{aligned}$$

2. *Soit $f(t) = c$, $c = Cte$ une fonction définie sur [a,b]. On a*

$$\begin{aligned}(I_+^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}cds\\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}ds.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, On a alors $ds = (t-a)d\tau$, d'où (Sachant que $\Gamma(1) = 1$)

$$\begin{aligned}(I_+^{\alpha}f)(t) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau\\ &= \frac{c(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\beta(1,\alpha)\\ &= \frac{c(t-a)^{\alpha}\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}\\ &= \frac{c(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Théorème 1.3.4 (Loi de composition) *[18]*
Soient $\alpha, \beta \geqslant 0$, $f \in L_E^1([a,b])$. Alors

$$I_+^{\alpha}(I_+^{\beta}f)(t) = I_+^{\beta}(I_+^{\alpha}f)(t) = I_+^{\alpha+\beta}f(t)$$

est vérifiée presque partout sur $[a,b]$. Si de plus $f \in C_E([a,b])$ ou $\alpha+\beta \geqslant 1$, alors cette identité est vraie sur $[a,b]$. Autrement dit, la famille $\{I_+^{\alpha}f, \quad \alpha > 0\}$ possède la propriété de semi-groupe.

Démonstration La preuve découle directement de la définition.

$$\begin{aligned}I_+^{\alpha}(I_+^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}I_+^{\beta}f(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\int_a^t (t-s)^{\beta-1}f(s)dsdt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dtds.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = s + (x-s)\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. On obtient,

$$\begin{aligned}I_+^{\alpha}(I_+^{\beta}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau\\ &= \frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds\\ &= I_a^{\alpha+\beta}f(x) \qquad \text{(Vraie presque partout sur [a,b])}\end{aligned}$$

Si $f \in C_E([a,b])$, alors $I_+^{\beta}f \in C_E([a,b])$ donc $I_+^{\alpha}(I_+^{\beta}f) \in C_E([a,b])$ et $I_+^{\alpha+\beta}f \in C_E([a,b])$.
□

Proposition 1.3.5 *[8, 5]*
Soit $\alpha > 0$, alors la transformée de Laplace de $I_+^\alpha f$ est formulée comme suit

$$\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = t^{-\alpha}\mathcal{L}[f](t), \quad t > 0.$$

Démonstration On peut écrire $I_+^\alpha f$ comme une convolution de deux fonction ϕ (définie dans le Lemme 4.1.9) et f

$$\begin{aligned} I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= (\phi * f)(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = \mathcal{L}[\phi](t)\mathcal{L}[f](t).$$

Comme $\mathcal{L}[\phi](t) = t^{-\alpha}$, on déduit que $\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = t^{-\alpha}\mathcal{L}[f](t)$. □

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.6 *[1] Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = [\alpha] + 1$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dt^n}(I_+^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.16}$$

En particulier,

1. Si $\alpha = 0$, on aura $D_+^0 f(x) = f(x)$.
2. Si $f \in C_E^1([a, b])$, alors
$$D_+^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} I_+^{1-\alpha} f(x). \tag{1.17}$$

Exemple 1.3.2 *Soit $f(t) = (t-a)^m$*

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^m dt.$$

En fait le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on aura,

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n+m-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^m ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \beta(n-\alpha, m+1) \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{n+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+m+1)\Gamma(n-\alpha+1)} (x-a)^{m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} (x-a)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.7 *[14] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$D_+^\alpha(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_+^\alpha f(x) + c_2 D_+^\alpha g(x) \tag{1.18}$$

Lemme 1.3.8 *[3]*

1. *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L_E^1([a,b])$. Alors l'égalité, $D_+^\alpha I_+^\alpha f(x) = f(x)$ est vraie pour presque tout $x \in [a,b]$.*
2. *S'il existe une fonction $g \in L_E^1([a,b])$ telle que $f = I_+^\alpha g$ alors, $I_+^\alpha D_+^\alpha f = f$ presque pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration Pour la 1ère relation en utilisant la Définition 1.3.6. On a

$$D_+^\alpha I_+^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_+^{n-\alpha} I_+^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_+^n f(x) = f(x).$$

La 2ème assertion est une conséquence de la 1ère

$$I_+^\alpha D_+^\alpha f = I_+^\alpha (D_+^\alpha I_+^\alpha g) = I_+^\alpha g = f.$$

□

Théorème 1.3.9 *[8, 5]*
Si $f \in L_E^1([a,b])$, $\alpha > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville de f est

$$\mathcal{L}[D_+^\alpha f](t) = t^\alpha \mathcal{L}[f](t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-k-1} \left(\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right)_{t=0}$$

avec $n-1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Remarque 1.3.10 *La dérivée fractionnaire d'une constante n'est pas en générale nulle. En effet, Soit $f(t) = c$ une constante*

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} c dx \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} dx \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.3.11 *[1] Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1_E([a,b])$. On définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par*

$$D^\alpha_a f(t) := I^{n-\alpha}_+ f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx, \qquad t > a. \tag{1.19}$$

avec $[\alpha] = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.3.12 *Il est évident que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est égale à zéro, et nous remarquons que*

$$D^\alpha_+ c \neq \quad D^\alpha_a c.$$

Exemple 1.3.3 *Soit la fonction f définit par : $f(t) = (t-a)^m$ et soit $n-1 < \alpha < n$. Alors on a*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(\tau - a)^{m-n}.$$

D'où

$$D^\alpha_a f(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{m-n} d\tau$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
D^\alpha_a f(t) &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{m-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)}(t-a)^{m-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{m-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\beta(n-\alpha, m-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)}(t-a)^{m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.3.13 *[1] Soit $\alpha > 0$ et $f \in C_E([a,b])$, alors $D^\alpha_a I^\alpha_a f(t) = f(t)$. (i.e. D^α_a est l'inverse à gauche de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville).*

Théorème 1.3.14 *[18] Soit $\alpha > 0$ et $f \in AC^n([a,b])$. Alors,*

$$I^\alpha_+ D^\alpha_a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \qquad \forall t \in [a,b]$$

(i.e. D^α_+ n'est pas l'inverse à droite de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville).

Proposition 1.3.15 *[18] Nous donnons les propriétés suivantes :*

1. *Si $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a alors,*

   (a)
$$\lim_{\alpha \to n} D_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t).$$

   (b)
$$\lim_{\alpha \to n-1} D_a^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a).$$

2. *La dérivée fractionnaire de Caputo est un opérateur liniéair i.e., soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$*
$$D_a^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D_a^\alpha f(t) + D_a^\alpha g(t).$$

Théorème 1.3.16 *[21, 4]*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ($n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$), la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo est donnée par

$$D_a^\alpha f(t) = D_+^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a). \tag{1.20}$$

Théorème 1.3.17 *[5]*
Si $f \in C_E([a,b])$ et pour $\alpha > 0$. Alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est

$$\mathcal{L}[D_a^\alpha f](t) = t^\alpha \mathcal{L}[f](t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a). \tag{1.21}$$

Démonstration Pour $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $t > 0$ on a

$$D_a^\alpha f(t) = I_+^{n-\alpha} f^{(n)}(t),$$

alors par la Proposition 1.3.5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_a^\alpha f](t) &= \mathcal{L}[I_+^{n-\alpha} f^{(n)}](t) \\ &= t^{\alpha-n}(\mathcal{L}[f^{(n)}])(t) \end{aligned}$$

or

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](t) = t^n \mathcal{L}[f](t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-k-1} f^{(k)}(a).$$

Donc

$$\mathcal{L}[D_a^\alpha f](t) = t^\alpha (\mathcal{L}[f])(t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} f^{(k)}(a).$$

$\square$

Chapitre 2

Téorèmes d'existences et d'unicités de solution

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1) ainsi : Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D_+^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \in [0,T] \\ I_+^{1-\alpha} y(0) = y^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé défini sur un espace dense $D(A)$ de l'espace E, $y^0 \in D(A)$ et $f \in L_E^2([0,T])$. Pour résoudre ce problème nous aurons besoin de l'hypothèse suivante

(H_1) $\quad A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur d'un C_0-semi groupe $\{Q(t)\}_{t \geqslant 0}$ uniformément borné dans E, c'est-à-dire, qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_{t \geqslant 0} \quad \|Q(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant k \tag{2.2}$$

où $(\mathcal{L}(E), \|.\|_{\mathcal{L}(E)})$ est l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur E.

Théorème 2.0.18 *[15]*
Soient $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $f \in L_E^2([0,T])$. Supposons que (H_1) est satisfaite. Alors pour tout $y^0 \in D(A)$, le problème (2.1) *admet une solution unique $y \in L_E^2([0,T])$ donnée par*

$$y(t) = \mathbb{P}_\alpha(t) y^0 + \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s) f(s) ds, \tag{2.3}$$

où

$$\mathbb{P}_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty \theta t^{\alpha-1} \Phi_\alpha(\theta) Q(t^\alpha \theta) d\theta \tag{2.4}$$

avec Φ_α donnée dans (1.10). *De plus,*

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)}} \|y^0\| + \sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}} \|f\|_2 \right). \tag{2.5}$$

Démonstration En utilisant la relation (1.17) et la Proposition 1.3.5, la transformée de Laplace de $D_+^\alpha y$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_+^\alpha y](\lambda) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dx}I_+^{1-\alpha}y(x)\right](\lambda)\\ &= \lambda\mathcal{L}[I_+^{1-\alpha}y](\lambda) - I_+^{1-\alpha}y(0^+)\\ &= \lambda^\alpha\mathcal{L}[y](\lambda) - I_+^{1-\alpha}y(0^+).\end{aligned}$$

D'après (2.1) on a

$$\begin{cases}\mathcal{L}[D_+^\alpha y](\lambda) = \mathcal{L}[Ay+f](\lambda)\\ I_+^{1-\alpha}y(0) = y^0.\end{cases}$$

Combinant ces deux dernières relations et la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, il s'ensuit que

$$\begin{cases}\lambda^\alpha\mathcal{L}[y](\lambda) - I_+^{1-\alpha}y(0^+) = A\mathcal{L}[y](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda)\\ I_+^{1-\alpha}y(0) = y^0\end{cases}$$

i.e,

$$\begin{cases}(\lambda^\alpha I - A)\mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda) + I_+^{1-\alpha}y(0^+)\\ I_+^{1-\alpha}y(0) = y^0\end{cases}$$

Donc la transformée de Laplace de la solution du problème (2.1) est

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[f](\lambda) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1}y^0. \tag{2.6}$$

On remarque (Théorème 1.2.12) que pour tout $h \in E$

$$(\lambda I - A)^{-1}h = \int_0^\infty e^{-\lambda s}Q(s)h ds.$$

Moyennant la définition de la densité de probabilité ρ_α dont la transformée de Laplace satisfait la relation (1.11)

$$\begin{aligned}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h &= \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}Q(s)h ds\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda s^{\frac{1}{\alpha}}u}\rho_\alpha(u)Q(s)h du ds.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = s^{\frac{1}{\alpha}}u$, il vient que

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_0^\infty s^{-\frac{1}{\alpha}}\rho_\alpha(ts^{-\frac{1}{\alpha}})Q(s)h ds\right)dt.$$

Sachant que la transformée de Laplace de ρ_α satisfait

$$\alpha\Phi_\alpha(\theta) = \theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\rho_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \tag{2.7}$$

Donc, grâce de (2.7), on obtient (avec $\theta = t^{-\alpha}s$)

$$\begin{aligned}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty s^{-\frac{1}{\alpha}}\rho_\alpha(ts^{-\frac{1}{\alpha}})Q(s)hds\Big)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty \alpha s t^{-\alpha-1}\Phi_\alpha(t^{-\alpha}s)Q(s)hds\Big)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)Q(t^\alpha\theta)hd\theta\Big)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{P}_\alpha(t)hdt\end{aligned}$$

où

$$\mathbb{P}_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)Q(t^\alpha\theta)d\theta. \tag{2.8}$$

D'où

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h = \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)h \tag{2.9}$$

Remplaçant la relation (2.9) dans l'équation (2.6), il résulte que

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[f](\lambda) + \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)y^0. \tag{2.10}$$

On obtient en introduisant la transformée de Laplace inverse dans la relation (2.10)

$$\begin{aligned}y(t) &= (\mathbb{P}_\alpha * f)(t) + \mathbb{P}_\alpha(t)y^0 \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds + \mathbb{P}_\alpha(t)y^0.\end{aligned}$$

Il reste à montrer la relation (2.5). Nous avons,

$$\|y(t)\| = \Big\|\mathbb{P}_\alpha(t)y^0 + \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds\Big\| \leqslant \|\mathbb{P}_\alpha(t)y^0\| + \Big\|\int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds\Big\|.$$

En évoquant la relation (2.2) et comme $\int_0^\infty \theta\Phi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ (Proposition 1.1.8)

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leqslant \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)\|Q(t^\alpha\theta)y^0\|d\theta + \int_0^t\int_0^\infty \alpha\theta(t-s)^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)\|Q((t-s)^\alpha\theta)\|\|f(s)\|d\theta ds \\ &\leqslant \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)k\|y^0\|d\theta + \int_0^t\int_0^\infty \alpha\theta(t-s)^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)k\|f(s)\|d\theta ds \\ &\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha-1}\|y^0\| + \frac{\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|ds \\ &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\| + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|ds\end{aligned}$$

car $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. Par conséquent, puisque $(t-s)^{\alpha-1}\in L^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $f\in L^2_E([0,T])$ et par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[(t-s)^{\alpha-1}]^{\frac{1}{2}}[(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2]^{\frac{1}{2}}ds\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^{1/2}\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|^2 &\leqslant \left[\frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&\leqslant \frac{k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}t^{2\alpha-2}\|y^0\|^2+\frac{k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{2k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}t^{2\alpha-2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Soit alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|y(t)\|^2dt &\leqslant \frac{2k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2\int_0^T t^{2\alpha-2}dt+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2dsdt\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^2(2\alpha-1)}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\|f(s)\|^2\int_s^T(t-s)^{\alpha-1}dtds\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^2(2\alpha-1)}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\|f(s)\|^2\frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}ds\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|y\|_2 &\leqslant \left(\frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left[\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}}\|y^0\|+\sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|f\|_2\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.0.19 *[15] Soit $0<\alpha<1$ et $y^0\equiv 0$. Supposons que (H_1) est satisfaite. Le problème* (2.1) *admet une solution unique $y\in L^2_E([0,T])$ donnée par*

$$y(t)=\int_0^t\mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

De Plus,

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|f\|_2.$$

Théorème 2.0.20 *[15]*
Soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, *soient* $y^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et* $v \in L^2(Q)$. *Alors,* (1) *a une solution unique dans* $L^2(Q)$. *De plus,*

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)}}\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|v\|_2\right) \tag{2.11}$$

Démonstration Nous appliquons directement le Théorème 2.0.18 avec $A = \Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $E = L^2(\Omega)$ et $f = v$. Notons que (2.11) est obtenu à partir de (2.5) en prenant $k < 1$ puisque Δ génère un semi-groupe de contraction. □

Corollaire 2.0.21 *[15] Soit* $0 < \alpha < 1$, $y^0 \equiv 0$ *et* $v \in L^2(Q)$. *Alors, le problème* (1) *a une solution unique dans* $L^2(Q)$. *De plus*

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|v\|_2.$$

Désormais, nous utilisant la notation suivante

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (s-t)^{-\alpha} f'(s)ds. \tag{2.12}$$

Considérons l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha p(t) - Ap(t) = g(t), \quad t \in [0,T] \\ p(T) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g \in L^2_E([0,T])$.

Proposition 2.0.22 *[15] Soit* $0 < \alpha < 1$, *Supposons que* (H_1) *est satisfaite. Alors, le problème* (2.13) *admet une solution unique* $p \in L^2(Q)$ *donnée par*

$$p(t) = \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds \tag{2.14}$$

où $\mathbb{P}_\alpha$ *est l'opérateur définie par* (2.4). *De plus,*

$$\|p\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|g\|_2. \tag{2.15}$$

Démonstration Nous procédons en deux étapes.
Etape 1. Nous montrons que (2.13) est une équation de diffusion fractionnaire rétrograde définie avec une dérivée de Caputo. Posons

$$\mathcal{T}_T p(t) = p(T-t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.16}$$

Alors,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_T p(t) = -p'(T-t) = -\mathcal{T}_T p'(t). \tag{2.17}$$

En fait le changement de variable $t \to T-t$ dans l'expression (2.12)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha p(T-t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(s-(T-t))^{-\alpha}p'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(s-T+t)^{-\alpha}p'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-u)^{-\alpha}p'(T-u)du \qquad (u=T-s).
\end{aligned}$$

Alors d'après (2.16) on obtient,

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-u)^{-\alpha}(\mathcal{T}_T p)'(u)du$$

i.e.

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) = -D_0^\alpha \mathcal{T}_T p(t).$$

Enfin, en effectuant le changement de variable $t \to T-t$ dans le problème (2.12), on trouve que

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha p(T-t) - Ap(T-t) = g(T-t), \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) - A\mathcal{T}_T p(t) = \mathcal{T}_T g(t), \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} D_0^\alpha \mathcal{T}_T p(t) - A\mathcal{T}_T p(t) = \mathcal{T}_T g(t), \quad T-t \in [0,T] \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

$T-t \to \tau$ on obtient

$$\begin{cases} D_0^\alpha p(\tau) - Ap(t) = g(t), \quad \tau \in [0,T] \\ p(0) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Etape 2. Nous montrons que (2.14) et (2.15) sont vérifiées. Utilisant le relation (1.19) et la Proposition 1.3.5, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D_0^\alpha p](\lambda) =& \mathcal{L}[I_+^{1-\alpha}p'](\lambda) \\
=& \lambda^{\alpha-1}\mathcal{L}[p'](\lambda) \\
=& \lambda^\alpha \mathcal{L}[p](\lambda) - \lambda^{\alpha-1}p(0)
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}[D_0^\alpha p](\lambda) - \mathcal{L}[Ap](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda) \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

éliminant $\mathcal{L}[D_0^\alpha p](.)$ de cette dernière relation, on aura

$$\begin{cases} \lambda^\alpha \mathcal{L}[p](\lambda) - \lambda^{\alpha-1}p(0) - A\mathcal{L}[p](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda) \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$(\lambda^\alpha I - A)\mathcal{L}[p](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda).$$

On déduit que la transformée de Laplace de la solution du problème (2.13) est donnée par

$$\mathcal{L}[p](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathcal{L}[g](\lambda). \tag{2.19}$$

Par ailleur, par (2.9) et en introduisant la transformée de Laplace inverse on a

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[g](\lambda)) \\ &= (\mathbb{P}_\alpha * g)(t) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

qui est solution du problème (2.13). D'autre part, un même procédé du Théorème 2.0.18, on trouve

$$\begin{aligned} \|p(t)\| &= \left\| \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t \int_0^\infty \alpha(t-\tau)^{\alpha-1}\theta\Phi_\alpha(\theta)Q((t-s)^\alpha\theta)g(s)d\theta ds \right\| \\ &\leqslant \int_0^t \int_0^\infty \alpha(t-s)^{\alpha-1}\theta\Phi_\alpha(\theta)\big\|Q((t-s)^\alpha\theta)g(s)\big\|d\theta ds \\ &\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|ds \\ &\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((t-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left((t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha}T^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|p(t)\|^2 dt &\leqslant \frac{k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 dsdt\\ &\leqslant \frac{k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T \|g(s)\|^2\int_s^T (t-s)^{\alpha-1}dtds\\ &\leqslant \frac{k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|g\|_2^2.\end{aligned}$$

On déduit alors,

$$\|p\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|g\|_2.$$

Ce qui finit la preuve. $\square$

Chapitre 3

Application au Contrôle Optimal

Dans ce chapitre, on cherche à contrôler le problème (1). Plus précisément, on cherche à approcher l'état $y(v)$ du problème (1) par l'état désiré z_d en controllant v.
Soit $v \in L^2(Q)$. Donc, en vertu du résultat du chapitre 2, on sait que la solution $y = y(v)$ de (1) appartient à $L^2(Q)$. A cet égard, on peut définir la fonction $J(.)$ sur $L^2(Q)$ par

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|_2^2 + N\|v\|_2^2 \tag{3.1}$$

où $z_d \in L^2(Q)$ et $N > 0$. Le problème du contrôle optimal consiste à trouver $u \in L^2(Q)$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(Q)} J(v). \tag{3.2}$$

Lemme 3.0.23 *[15] Pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = &\int_\Omega \varphi(x,T) I_+^{1-\alpha} y(x,T)dx - \int_\Omega \varphi(x,0) I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)dx \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} y \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi d\sigma dt \\ &+ \int_\Omega \int_0^T y(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big)dxdt.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration Soit $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t))dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Par la formule de Green (4.2.9), sachant que

$$\int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dx = -\int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi d\sigma,$$

et

$$\int_\Omega y(x,t)\Delta\varphi(x,t)dx = -\int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} y d\sigma,$$

par soustraction, on trouve

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt = -\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi d\sigma dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}y d\sigma dt - \int_0^T\int_\Omega y(x,t)\Delta\varphi(x,t)dxdt. \tag{3.4}$$

Il s'avère, via la relation (1.17) et le Théorème de Fubini (Théorème 4.1.6), que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega\left[\int_0^T\frac{d}{dt}\big(I_+^{1-\alpha}y(x,t)\big)\varphi(x,t)dt\right]dx\\ &= \int_\Omega \varphi(x,T)(I_+^{1-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega\varphi(x,0)\big(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+)\big)dx\\ &-\int_\Omega\left[\int_0^T\big(I_+^{1-\alpha}y(x,t)\big)\varphi'(x,t)dt\right]dx.\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left[\int_0^T\varphi'(x,t)(I_+^{1-\alpha}y(x,t))dt\right]dx &= \int_\Omega\left[\int_0^T\varphi'(x,t)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}y(x,s)ds\right)dt\right]dx\\ &= \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_s^T(t-s)^{-\alpha}\varphi'(x,t)dt\right)ds\right]dx\\ &= \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,s)ds\right]dx.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega\varphi(x,T)(I_+^{1-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega\varphi(x,0)(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+))dx\\ &-\int_\Omega\left[\int_0^T y(x,t)\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,t))dt\right]dx \end{aligned}\tag{3.5}$$

Donc en ajoutant (3.4) à (3.5) on obtient (3.3).

Lemme 3.0.24 *[15] Soit y la solution de* (1). *Pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$ tel que $\varphi(x,T)=0$ dans Ω et $\varphi = 0$ sur Σ. On a*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\big(D_+^\alpha y(x,t)-\Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt &= -\int_\Omega\varphi(x,0)(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+))dx\\ &-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi d\sigma dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega}y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma dt\\ &+\int_0^T\int_\Omega y(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,t)-\Delta\varphi(x,t)\big)dxdt.\end{aligned}$$

Démonstration C'est une conséquence immédiate du Lemme 3.0.23.

Proposition 3.0.25 *[15] Supposons que l' hypothèse du problème* (1) *est vérifiée, alors il existe un contrôle optimal unique u tel que* (3.2) *détient.*

Démonstration Soit $v_n \in L^2(Q)$ une suite minimisante telle que

$$J(v_n) \rightarrow \inf_{v \in L^2(Q)} J(v). \tag{3.6}$$

Alors $y_n = y(v_n)$ est une solution de (1), ceci signifie que y_n satisfait :

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n = v_n \qquad \text{dans} \quad Q, \tag{3.7}$$

$$y_n = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{3.8}$$

$$I_+^{1-\alpha} y_n(x,0) = y^0 \qquad \text{sur} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

De plus, en vue de (3.6), il existe $C > 0$ tel que

$$\|v_n\|_2 \leqslant C,$$

$$\|y_n\|_2 \leqslant C.$$

Il résulte de (3.7) que

$$\|D_+^\alpha y_n - \Delta y_n\|_2 \leqslant C. \tag{3.10}$$

Par conséquent, ils existent $u, y, \gamma \in L^2(Q)$ et des sous-suites extraitent de (v_n) et (y_n) (notées aussi (v_n) et (y_n)) telles que

$$v_n \rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q) \tag{3.11}$$

$$y_n \rightharpoonup y \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q) \tag{3.12}$$

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup \gamma \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{3.13}$$

Posons

$$\mathbb{D}(Q) = \Big\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(Q) \text{ tel que } \varphi|_{\partial\Omega} = 0,\ \varphi(x,0) = \varphi(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega \Big\}$$

et notons par $\mathbb{D}'(Q)$ le dual de $\mathbb{D}(Q)$. D'après le Lemme 3.0.24, on a pour tout $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big)dxdt.$$

Donc par (3.12) on obtient pour tout $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt &= \int_0^T \int_\Omega y(x,t)\big(- \mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big)dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt.\end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D_+^\alpha y - \Delta y \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q).$$

Il résulte que

$$D_+^\alpha y - \Delta y = \gamma \in L^2(Q). \tag{3.14}$$

Donc, par la relation (3.14), on déduit que

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D_+^\alpha y - \Delta y \qquad \text{faiblement dans } L^2(Q) \tag{3.15}$$

Un passage à la limite dans la relation (3.7) et en évoquant la relation (3.11), on conclut que

$$D_+^\alpha y - \Delta y = u \qquad \text{dans} \quad Q. \tag{3.16}$$

Si $y \in L^2(Q) \equiv L^2([0,T]; L^2(\Omega))$, donc en vertue du Lemme 4.1.9, $I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2(Q)$ $\big($par définition de $I_+^{1-\alpha} y(x,t)\big)$. Donc, d'une part on a

$$D_+^\alpha y(x,t) = \frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Alors,

$$D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t) \in L^2([0,T]; L^2(\Omega)) \subset H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega)).$$

D'où $\Delta y \in H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega))$ puisque (3.14) eu lieu. Ainsi $y(t) \in L^2(\Omega)$ et $\Delta y(t) \in L^2(\Omega)$. On en déduit (en vertu du Théorème 4.2.7) que $y|_{\partial\Omega}$ existe et appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

D'autre part, on a $\Delta y \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega))$. Puisque $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$, on déduit de la relation (3.14) que

$$D_+^\alpha y(x,t) = \frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega)).$$

Alors $I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2(Q)$ et $\frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega))$

En conséquence, le Théorème 4.2.8 montre que $I_+^{1-\alpha} y$ appartient à $C([0,T], H^{-1}(\Omega))$. Ceci signifie que $I_+^{1-\alpha} y(x, 0^+)$ existe et appartient à $H^{-1}(\Omega)$.

Maintenant, multipliant (3.7) par $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, avec $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = 0$ sur Ω, on obtient en utilisant le Lemme 3.0.24

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big) \varphi(x,t) dx dt = -\int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx + \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t) \big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta \varphi(x,t)\big) dx dt$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ où en utilisant (3.12) et (3.15),

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big) \varphi(x,t) dx dt + \int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx = \int_0^T \int_\Omega y(x,t) \big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta \varphi(x,t)\big) dx dt. \tag{3.17}$$

Par le Lemme 3.0.23, on obtient pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, avec $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = 0$ sur Ω

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt + \int_\Omega \varphi(x,0)y^0 dx = \\ \int_\Omega \varphi(x,0) I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} y \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

donc,

$$\int_\Omega \varphi(x,0)y^0 dx = \big\langle \varphi(x,0), I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)\big\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} - \int_0^T \left\langle y, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} dt.$$

Prenant $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ dans cette dernière égalité, on trouve

$$I_+^{1-\alpha} y(x,0^+) = y^0(x), \qquad sur\ \ \Omega, \tag{3.18}$$

et donc

$$y = 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega. \tag{3.19}$$

En vertu des relations (3.16), (3.18) et (3.19), on déduit que $y = y(u)$ est une solution de (1). La fonction $v \mapsto J(v)$ étant faiblement semi continue inférieurement, on aura

$$J(u) \le \liminf_{n\to\infty} J(v_n).$$

En effet, nous avons par définition de $J(.)$ et en appliquant le Lemme de Fatou

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} J(v_n) =& \liminf_{n\to\infty} \big(\|y(v_n) - z_d\|_2^2 + N\|v_n\|_2^2\big) \\ \ge& \|\liminf_{n\to\infty}(y(v_n) - z_d)\|_2^2 + N\|\liminf_{n\to\infty} v_n\|_2^2 \\ =& \|y(u) - z_d\|_2^2 + N\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

(en moyennant les relations (3.12) et (3.13)). On déduit de (3.6) que

$$J(u) \le \inf_{v\in L^2(Q)} J(v),$$

d'où

$$J(u) = \inf_{v\in L^2(Q)} J(v).$$

Pour montrer l'unicité, supposant qu'ils existent $u_1,\ u_2 \in L^2(Q)$ tel que $u_1 \ne u_2$ avec

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{v\in L^2(Q)} J(v). \tag{3.20}$$

Sachant que J est strictement convexe (i.e.

$$J(tu_1 + (1-t)u_2) < tJ(u_1) + (1-t)J(u_2),$$

Pour tous $u_1,\ u_2 \in L^2(Q)$ et $t \in]0,1[$ avec $u_1 \neq u_2$.) on a alors

$$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = J(u_1),$$

contradiction avec (3.20). □

Théorème 3.0.26 *[15]*
Si u est une solution de (3.2)*, alors il existe $p \in L^2(Q)$ tel que (u, y, p) satisfait le système optimal suivant*

$$\begin{cases} D_+^\alpha y - \Delta y = u \quad \textit{dans} \quad Q \\ y = 0 \qquad \textit{sur} \quad \Sigma \\ I_+^{1-\alpha} y(x, 0^+) = y^0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha p - \Delta p = y - z_d \quad \textit{dans} \quad Q \\ p = 0 \qquad \textit{sur} \quad \Sigma \\ p(T) = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

$$u = -\frac{p}{N} \quad \textit{dans} \quad Q. \tag{3.23}$$

Démonstration Les relations (3.16), (3.18) et (3.19) donne la relation (3.21). Pour montrer (3.22) et (3.23), nous exprimons les conditions d'optimalités d'Euler-Lagrange qui caractérisent le contrôle optimal u

$$\frac{d}{d\mu} J(u + \mu\varphi) \mid_{\mu=0} = 0, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in L^2(Q). \tag{3.24}$$

L'état $z(\varphi)$ associé au contrôle $\varphi \in L^2(Q)$ est une solution de

$$\begin{cases} D_+^\alpha z - \Delta z = \varphi \quad \text{dans} \quad Q \\ z = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma \\ I_+^{1-\alpha} z(x, 0^+) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

La relation (3.24) donne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} J(u+\mu\varphi) =& \frac{d}{d\mu}\left(\left\| y(u+\mu\varphi) - z_d \right\|_2^2 + N \left\| u + \mu\varphi \right\|_2^2 \right) \\ =& \frac{1}{2}\left[\left\langle \frac{d}{d\mu}\big(y(u+\mu\varphi) - z_d\big), y(u+\mu\varphi) - z_d \right\rangle + N \left\langle \frac{d}{d\mu}\big(u+\mu\varphi\big), u+\mu\varphi \right\rangle \right] \\ =& \frac{1}{2}\left[\big\langle z(\varphi), y(u+\mu\varphi) - z_d \big\rangle + N \big\langle \varphi, u+\mu\varphi \big\rangle \right], \end{aligned}$$

alors quand $\mu \to 0$, on trouve

$$\int_0^T \int_\Omega z(\varphi)(y(u) - z_d)dxdt + N \int_0^T \int_\Omega u\varphi dxdt = 0, \quad \varphi \in L^2(Q). \tag{3.26}$$

Pour interpréter (3.26), on considère l'équation d'état adjoint

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha p - \Delta p = y(u) - z_d & \text{dans} \quad Q \\ p = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma \\ p(T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

Puisque $y(u) - z_d \in L^2(Q)$, appliquant la Proposition 2.0.22 avec $(A, D(A)) = (\Delta, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, on déduit que le problème (3.27) admet une solution unique dans $L^2(Q)$. Donc, en multipliant (3.25) par, p, la solution de (3.27), on obtient par le Lemme 3.0.24.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha z - \Delta z)pdxdt &= \int_0^T \int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha p - \Delta p)zdxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (y(u) - z_d)zdxdt. \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (3.25) et (3.26), on déduit que

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi pdxdt = -N \int_0^T \int_\Omega \varphi udxdt, \quad \varphi \in L^2(Q).$$

Par conséquence,

$$u = -\frac{p}{N} \quad \text{dans} \quad Q.$$

$\square$

Chapitre 4

Appendice

4.1 Espaces de Bochner

Soit E un espace de Banach séparable muni de la norme $\|.\|$, E^* son dual et $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, une focntion $f : S \to E$ est dite mesurable si et seulemment si la fonction $\langle f, x^* \rangle$ est mesurable pour tout $x^* \in E^*$ (voir [7]).

Définition 4.1.1 *Une fonction $f : S \to E$ est dite μ-simple si et seulement si*

$$f = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{A_n} \otimes x_n,$$

avec $A_n \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(A_n) < \infty$ et $x_n \in E$ pour tout $1 \leq n \leq N$.

$\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A et $(f \otimes x)(s) := f(s)x$.

Définition 4.1.2 *Une fonction $f : S \to X$ est dite fortement μ-mesurable (ou Bochner mesurable) s'il existe une suite de fonctions μ-simples $f_n : S \to E$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-presque partout.*

Définition 4.1.3 *Pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de toutes (classes d'équivalences) les fonctions fortement μ-mesurable $f : S \to E$ telles que*

$$\int_S \|f\|^p d\mu < \infty,$$

on le note $L^p_E(S)$. Si $p = \infty$, $L^\infty_E(S)$ est l'espace de toutes (classes d'équivalences) les fonctions fortement μ-mesurables $f : S \to E$ telles qu'il existe $c > 0$ où $\mu\{\|f\| > c\} = 0$. Munis des normes

$$\|f\|_p := \left(\int_S \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}$$

et (respectivement)

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ c \geq 0 : \ \mu\{\|f\| > c\} = 0 \right\},$$

les espace $L^p_E(S)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Banach.

Définition 4.1.4 *Une fonction fortement μ-mesurable $f : S \to E$ est dite Bochner intégrable si et seulement si*

$$\int_S \|f\| d\mu < \infty,$$

et dans ce cas on a

$$\left\| \int_S f d\mu \right\| \leq \int_S \|f\| d\mu.$$

Théorème 4.1.5 (Théorème de convergence dominée) *Soit $f_n : S \to E$ une suite de fonctions Bochner intégrables. S'il existe une fonction $f : S \to E$ et une fonction positive intégrable $g : S \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ p.p. et $\|f_n\| \leq g$ p.p., alors f est Bochner intégrable et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Théorème 4.1.6 (Théorème de Fubini) *Soient $(S, \mathcal{A}, \mu)$ et $(T, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : S \times T \to E$ une fonction Bochner intégrable.*

1. *Pour presque tout $s \in S$, la fonction $t \mapsto f(s,t)$ est Bochner intégrable.*
2. *Pour presque tout $t \in T$, la fonction $s \mapsto f(s,t)$ est Bochner intégrable.*
3. *Les fonctions $s \mapsto \int_T f(s,t) d\nu(t)$ et $t \mapsto \int_S f(s,t) d\mu(s)$ sont Bochner intégrables et*

$$\int_{S\times T} f(s,t) d\mu \times \nu(s,t) = \int_T \int_S f(s,t) d\mu(s) d\nu(t) = \int_S \int_T f(s,t) d\nu(t) d\mu(s).$$

Théorème 4.1.7 (Théorème de Tonelli) *Soient $(S, \mathcal{A}, \mu)$ et $(T, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : S \times T \to E$ une fonction Bochner intégrable. Si $\int_S d\mu(s) \int_T |f| d\nu(t)$ existe, alors*

$$\int_{S\times T} f(s,t) d\mu \times \nu(s,t) = \int_T \int_S f(s,t) d\mu(s) d\nu(t) = \int_S \int_T f(s,t) d\nu(t) d\mu(s).$$

Théorème 4.1.8 *Soit $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient X et Y deux espaces de Banach. Si $f : S \to X$ et $g : S \to Y$ sont deux fonctions fortements μ-mesurables (l'une de ces fonctions à valeurs réelles), alors le produit $fg : S \to X \times Y$ est fortement μ-mesurable.*

Lemme 4.1.9 *Soient $0 < \alpha < 1$, $g \in L^p([0,T])$ $\quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ et $\phi :]0,T] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction définie par :*

$$\phi(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Alors pour presque tout $t \in [0,T]$, la fonction $s \mapsto \phi(t-s)g(s)$ est intégrable sur $[0.T]$. Posons

$$\phi * g(t) = \int_0^t \phi(t-s) g(s) ds.$$

Alors, $\phi * g \in L^p([0,T])$ et

$$\|\phi * g\|_p \leqslant \|\phi\|_1 \|g\|_p.$$

4.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont $\partial\Omega$ désigne sa frontière. Pour plus de détails concernant les espaces de Sobolev, consultez [10].

Définition 4.2.1 *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distibutions u définies dans Ω telles que*

1. *$\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.*
2. *$u \in H^m(\Omega)$ et*
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty$$
pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m un entier et σ la partie fractionnaire de s, $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$ de la norme (naturelle)

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha v\|_2^2} \quad \textit{dans le cas 1 et}$$

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{1/2} \quad \textit{dans le cas 2.}$$

Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Proposition 4.2.2 *$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{H^s(\Omega)}$.*

Définition 4.2.3 *$H_0^s(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$. ($\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à support compact inclus dans Ω).*

Définition 4.2.4 *Si $s < 0$, alors $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Lemme 4.2.5 *Si $u \in H^s(\Omega)$ alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\Omega)$.*

Remarque 4.2.6 *Les espaces de Sobolev forment une chaine décroissante d'espace*

$$... \supset H^{-1} \supset L^2 \supset H^1 \supset ...$$

Théorème 4.2.7 *Soit s un réel quelconque inférieur ou égale à 0, si $u \in H^{s+2}(\Omega)$ alors $u \mid_{\partial\Omega} \in H^{s+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.*

Théorème 4.2.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Alors,*

$$H^k(\Omega) \subseteq C^k(\Omega), \ \textit{si}\ k < s - \frac{n}{2}.$$

Théorème 4.2.9 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^2$, et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \ \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Bibliographie

[1] **G. A. Anastasiou**, Strong right fractional calculus for Banache space Volumed function , University of Memphis, USA. Vol. 36, No 1, p 149-186, (2017).

[2] **L. Banlemle**, Autour des propriétés spectrales des semi-groupes, Lecturas Matematicas, Vol 31, paginas 99 - 145, (2010).

[3] **S. Das and I. Pan**, Fractional order signal processing, Introductory concepts and application, Departement of power enginering , Springer, London New York, (2012).

[4] **Z. Djelloul**, Etude de l'existence et de la stabilité des solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire, mémoire Magister en Mathématique, univ ORAN , 2011-2012.

[5] **M. Gheziel**, Problèmes aux pans des espaces de Banach sur des équations différentielles fractionnaires dans des espaces de Banach, Mémoire de Master (LMD) en Mathématiques, univ Abou Bekr Belkaid Telemcen, 2014 - 2015.

[6] **R. Gorenflo, Y. Luchko and F. Mainardi**, Analytical properties and applications of the wright function, Fracalmo. Pre-print : www. fracalmo.org, vol 2 no 4, PP. 383-414, (1999).

[7] **De Tuomas Hytönen, Jan van Neerven and Mark Veraar, Lutz Weis**, Analysis in Banach Spaces : Volume I : Martingales and Littlewood-Paley Theory. Springer (2016).

[8] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo**, Theory and applications of fractional differential equations, (2006).

[9] **A. Lambert**, Théorie de la mesure et intégration, mémoire, Univ. Pierre and Marie. Curie (Paris 6), (2011).

[10] **J. L. Lions and E. Magenes** , Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol 1, Dunod Paris, (1968).

[11] **F. Mainardi, P. Paradis and R. Gorenflo**, Probability distributions generated by fractional diffusion equations, FRACALMO. PRE-PRINT. www.fracalmo.org

[12] **F. Mainardi**, Some basic problems in Continum and statistical mechanics, in : A. Carpintri, F. mainardi (E ds), Fractals and Fractional calculus in Continum Mechanics, in : CISM courses and lecteures Springer Verlag, Wien , PP 291-348, (1997).

[13] **A. Mekhlouf**, Cours de semi-groupe. département de mathématique, université de Jijel, (2019).

[14] **A. B. Malinowska and D. F. M. Torres**, Introduction to the fractional calculus of variation, London, Imperial College Press, (2012).

[15] **G. M. Mophon**, optimal contyrol of fractional diffusion equation. computers and mathématics with application 61, P 68-78, (2011).

[16] **I. N'Doye**, Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilité des systèmes fractionnaires, thèse de doctorat, Univ. Henri Poincaré - Nancy 1 et Univ. Hassan II Aïn Chock, Casablanca, Spécialité automatique, (2011).

[17] **K. B. Oldham and J. Spanier**, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, (1974).

[18] **I. Podlubny**, Fractional differential equation, Academic Press, San Diego, (1999).

[19] **B. Tallab**, Résolution des équation différentielles fractionnaires, thèse de doctorat, Univ. des frères Mentouri, Constantine, Faculté des Sciences exactes, Département de mathémathique, (2018).

[20] **M. Weillbeer**, Efficient numerical methods for fractional differential equations and their, Analytical Bockground, D. University Braunschweig, No .DAMD, 17.01.1.0673, (2010).

[21] **Y. Zhou, J. R. Wang and Lu Zhang**, Basic theory of fractional Differential equations, second Edition, New Jersey : World Scientific, (2016).

Résumé

Dans ce mémoire, on a appliqué la théorie classique du contrôle à une équation de diffusion fractionnaire dans un domaine borné. La dérivée du temps fractionnaire est considérée au sens de Riemann-Liouville. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation de diffusion fractionnaire dans un espace de Hilbert est étudiée en premier lieu. Puis, nous avons démontré que le problème de contrôle optimal considéré a une solution unique ainsi que l'interprétation de la condition d'optimalité du premier ordre d'Euler- Lagrange avec un problème adjoint défini au moyen de la dérivée fractionnaire de Caputo, où nous avons obtenu un système d'optimalité pour le contrôle optimal.

Abstract

In this thesis, we have applied the classical control theory to a fractional diffusion equation in a bounded domain. The derivative of fractional time is considered in the sense of Riemann-Liouville. The existence and uniqueness of the solution of the fractionnal diffusion equation in a Hilbert space is studied in a first place. Then, we showed that the control problem optimal considered has a unique solution as well as the interpretation of the first order optimality condition of Euler-Lagrange with an adjoint problem defined by means of the fractional derivative of Caputo, where we obtained an optimality system for the optimal control.