République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse fonctionnelle

Résultats sur Les Multi-Applications à Valeurs Presque Convexes

Présenté par

Boughedda Amira

Boukerrit Amina

Devant le jury

Président	:	M. Yarou	Prof.	Université de Jijel.
Encadreur	:	I. Boutana	M.C.B.	Université de Jijel.
Examinateur	:	S. Izza	M.C.B.	Université de Jijel.

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Nos remerciements vont avant tout à **Allah** le tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous a données pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos reconnaissances et gratitude à notre encadreur Mme Imen Boutana, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Nous remercions vivement Monsieur le professeur M.Yarou, pour avoir accepté de présidé le jury.

Nous adressons également nos sincères remerciements à Mlle S. Izza, maitre de conférence pour avoir bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce mémoire.

Nous remercions aussi en particulier tous les enseignants de la spécialité ANALYSE sans exception pour leur fidélité et leur patience.

Nou tenons à remercier nos familles pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de nos études. et tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement.

A , TOUS , UN GRAND MERCI.

Dédicaces

Je dédie ce travail

*A ma très chère mère **Saida**, Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différentes obstacles.*

*A mon très cher père **Lakhdar**, merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours pour toi. Merci d'être toujours là pour moi.*

*A mes sœurs **Houda**, **Imane**, **Zineb** et **Hassiba** vous étiez toujours présentes par vos conseilles, vos encouragements tout au long de mes études, merci à vous.*
Que Dieu vous protège et consolide les liens sacré qui nous unissent.

*A mes frère **Adel** et **Mounir**, je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de réussite.*

*A toute **ma famille** et **mes chers amis** pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.*

A tout qui m'aiment et que j'aime.

Amira

Dédicaces

Je dédie ce travail

*A ma très chère mère **Fatima**, celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation.*

*A mon très cher père **Massoud**, celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi, dans ma vie et mes études.*

*A mon fioncé **Fateh** pour son encouragement et soutien.*

*A mes sœurs **Hafida**, **Zoubida**, **Wahiba**, **Saida**, **Malika**, **Nassima**, **Laila**, **Hanan**, **Amel** et ma niéce **Halima** qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces anné d'études je vous souhaite une vie plaine de bonheur et de paix.*

*A mes frère **Kamel**, **Jamel** et **Mouhamed** puisse Dieu vous santé réussite.*

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

A tout qui m'aiment et que j'aime.

Amina

Table des matières

Introduction générale

Les **inclusions différentielles** représentent un sujet de plus en plus abordé ces dernières années. Elles représentent une importante généralisation des équations différentielles et elle sont utilisées pour construire des modèles mathématiques et résoudre de nombreux problèmes émergeant dans divers domaines comme l'économie, la gestion, la biologie, les phénomènes physiques et la théorie du contrôl, par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.
Cette notion consiste à étudier une inclusion différentielle de type

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\dot{x}(t)\in F(x(t)),\ p.p\ ,\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

où F est une multi-application.

Aujourd'hui les problèmes d'analyse univoque ont été quasiment adaptés au cadre multivoque. Les méthodes de résolution des inclusions différentielles de premier ordre de la forme $(\mathcal{P}_F)$ qui est le sujet de notre intérêt, varient beaucoup suivant les hypothèses imposées à la multi-application F.

L'hypothèse de la convexité est largement utilisée, particulièrement pour établir la fermeture de l'ensemble des solutions, qui est généralement non fermé sans la convexité.
Le problème $(\mathcal{P}_F)$ à été étudié par K.Deimling [6] dans le cas où F est semi-continue supérieurement à valeurs convexes.
En l'absence de la convexité des valeurs de F, qui est l'objet de notre travail, A.Cellina et A.Ornelas [3] ont donné une condition assurant l'existence de solutions aux inclusions différentielles $(\mathcal{P}_F)$, où F est semi-continue supérieurement à valeurs non convexes, particulièrement **presque convexes**, qui est une condition plus faible que la convexité. La méthode de dé-

monstration utilisée est d'étudier la relation entre la solution du problème relaxé

$$(\mathcal{P}_{co}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in co\big(F(x(t))\big), \ p.p \ , \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et non relaxé $(\mathcal{P}_F)$. Elle consiste à déduire la solution du problème $(\mathcal{P}_F)$ en fonction de la solution du problème $(\mathcal{P}_{co})$.
Ils ont établit la fermeture de l'ensemble admissible au lieu de l'ensemble des solutions.

Ce mémoire comprend trois chapitres ordonné comme suit :

Dans le premier chapitre, nous commençons par les notations et puis nous définissons et présentons brièvement les notions que nous avons utiliser tout au long de notre travail. Nous commençons par quelques définitions et théorèmes de l'analyse fonctionnelle et convexes aussi des notions de l'analyse multivoque et quelques résultats de convergence qui jouent un rôle central dans les résultats que nous établirons au chapitres 2 et 3.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre de la forme $(\mathcal{P}_F)$ quand F est semi-continue supérieurement à valeurs convexes, existe dans [6], ce résultat sera utiliser dans le chapitre 3.

Dans le troisième chapitre, on commence par donner la notion de la presque convexité, définie dans [3], et un exemple qui montre l'existence des ensembles presque convexes et non convexes.
En utilisant le résultat obtenu dans le chapitre 2 dans l'etude de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$ dans le cas où F est à valeurs presque convexes et on obtient un résultat d'existence à travers une méthode inspiré de [3] qui consiste à trouver la relation entre la solution de problème relaxé et non relaxé puis on déduit la solution en fonction de la solution du problème avec perturbation à valeurs convexes que nous avons donné dans le chapitre 2.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle et convexe que nous avons utilisés tout au long de ce mémoire. Aussi, les notions de l'analyse multivoque essentielles à l'étude de nos problèmes différentiels.

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

• E l'espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$.

• E' le dual topologique de E.

• E'' le bidual topologique de E.

• $\langle ., . \rangle$ produit de dualité entre E et E'

• $B(x_0, r)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

• $\overline{B}(x_0, r)$ La boule fermé de centre x_0 et de rayon r.

• $co(A)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble A.

• $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble A.

• $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \mid x - a \mid$ la distance d'un point x d'un espace metrique X à l'ensemble A (A est une partie non vide de X).

• $\to$ la convergence forte.

• $\rightharpoonup$ la convergence faible.

Considérons X et Y deux espaces Vectoriels normés

• $\mathcal{F}(X, Y)$ l'espace de toutes les applications $f : X \to Y$.

• $\mathbf{C}(X, Y)$ l'espace de toutes les applications continues $f : X \to Y$, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t \in X} \|f(t)\|_Y.$$

• $L^p(X, Y)$ l'espace des applications $p^{ème}$ intégrables $(1 \leq p < \infty)$,
$f : X \to Y$, muni de la norme

$$\|f(.)\|_{L^P} = \Big(\int_X \big(\|f(.)\|_X\big)^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

• χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris des références [2, 7, 10].

1.2.1 Espace topologique

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide. On dit que Θ est une topologie sur X si Θ vérifie les propriétés suivantes*
1) $\emptyset$ et X sont des éléments de Θ.
2) Toute intersection finie d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall O_1, O_2, ..., O_n \in \Theta,\ \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

3) Toute réunion (quelconque) d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall (O_i)_{i \in I} \subset \Theta,\ \bigcup_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

• *Les éléments de Θ sont appelés les ouverts de la topologie Θ.*

Définition 1.2.2. *On appelle espace topologique le couple (X, Θ) constitué par un ensemble X et par une topologie Θ sur cet ensemble.*

Proposition 1.2.3. *Soit X un espace topologique. Alors*

1) Toute intersection de fermés est un fermé.

2) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Définition 1.2.4. *Soit (X, Θ) un espace topologique et soient $A, B \subset X$.*

- *On dit que A est dense dans B si et seulement si $A \subset B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est dense dans X ou que A est partout dense si $A \subset X \subset \overline{A}$, et comme nous avons toujours $\overline{A} \subset X$, alors A est partout dense si et seulement si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.2.5. *(**Espace séparable**)*

Soit (X, Θ) un espace topologique et soit $A \subset X$. On dit que X est séparable si et seulement si il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.

Exemple 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ *est séparable.*

Rappel sur la topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

Soient X un ensemble et $(Y_i)_i \in I$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$. La question naturelle qui se pose est de munir X de la topologie θ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rende continues toutes les applications $\varphi_{(i \in I)}$.

Définition 1.2.6. *Soient θ, θ' deux topologies sur X. On dit que θ est moins fine que θ' s et seulement si $\theta \subset \theta'$.*

Proposition 1.2.7. *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Alors τ définit une topologie sur X.

De plus, τ est la topologie la moins fine qui rende continues toutes les applications $\varphi_i (i \in I)$.

La topologie faible

Soit E un espace vectoriel normé réel. On note E' l'espace dual, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \underset{x \in \overline{B}_E(0,1)}{sup} |\langle f, x \rangle|.$$

Définition 1.2.8. *Soit $f \in E'$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi_f : & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f (f \in E')$.

Proposition 1.2.9. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Proposition 1.2.10. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a*

1. *$(x_n)_n$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f, x_n \rangle)_n$ converge vers $\langle f, x \rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_n$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée et nous avons*

$$\|x_n\|_E \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_E.$$

4. *Si (x_n) converge faiblement vers x et $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans E', alors $(\langle f_n, x_n \rangle)_n$ converge vers $\langle f, x \rangle$.*

1.2.2 Espace métrique

Définition 1.2.11. *Soit X un ensemble non vide. On dit que $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur X si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$.

2) $\forall x, y \in X,\ d(x,\ y) = d(y,\ x)$.

3) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

• *On appelle espace métrique tout couple (X, d) constitué d'un ensemble X et d'une distance sur X.*

Définition 1.2.12. *Soient X un espace métrique et A une partie non vide de X. La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Définition 1.2.13. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d). Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.14.
Soient (X, d) un espace métrique et A un ensemble non vide de X. Alors,

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0 \iff \exists (x_n)_n \subset A, \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.2.15. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_n \in \mathbb{N}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.*

Définition 1.2.16. ***(Espace métrisable)***
Un espace topologique est dit métrisable s'il existe une distance induisant sa topologie.

1.2.3 Espace complet

Définition 1.2.17. *Soit (X, d) un espace métrique. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} :\ p, q \geq n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.18. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Définition 1.2.19. *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*
Une norme sur X est une fonction $N : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant
1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R};\ N(\lambda x) =\mid \lambda \mid N(x)$.
3) $\forall x \in X, \forall y \in E;\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
• *Le couple (X, N) où X est un espace vectoriel et N définit une norme sur X est appelé espace normé et on note souvent $\| \, . \, \|$ au lieu de N.*

Définition 1.2.20. *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

1.2.4 Espace mesurable

Définition 1.2.21. *Soit E un ensemble non vide. On appelle* ***tribu*** *ou* ***σ-algèbre*** *sur E une famille Σ de parties de E possedant les proprietes suivantes*
1) $E \in \Sigma$.
2) Si $A \in \Sigma$, *alors* $E \setminus A \in \Sigma$.
3) Si $A_n \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.
• *On appelle* ***espace mesurable*** *tout couple (E, Σ) formé par un ensemble E et une tribu Σ sur E.*
• *Si la troisiéme relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur E.*
• *Si E un espace topologique la tribu Borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ est la plus petite tribu contenant la topoligie de E.*

Définition 1.2.22. *Soit (E, Σ) un espace mesurable. On appelle mesure positive une application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant*
1) $\mu(\emptyset) = 0$.
2) μ est σ-additive, c'est à dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Σ disjoints deux à deux (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

• *Le triplet (E, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

Définition 1.2.23. *Soit E un espace topologique. La mesure $\mu : \mathcal{B}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.2.24. *Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré.*
• *On dit que μ est finie (ou que (E, Σ, μ) est finie) si $\mu(E) < +\infty$.*
• *On dit que μ est σ-finie (ou que (E, Σ, μ) est σ-finie) si*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \mu(A_n) < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

• *on dit que μ est positive si $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \Sigma$.*

Définition 1.2.25. *Soit E un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne ($\mu : \mathcal{B}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$).*
• *On dit que μ est* ***régulière*** *si pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de E tel que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
• *Toute mesure Borélienne finie et régulière est appelée* ***mesure de Radon****.*

Définition 1.2.26. *Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré positif. Soit Z un sous ensemble de E.*

*• on dit que Z est μ-**négligeable**, s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

• On dit que μ est complète (ou que (E, Σ, μ) est complet) si toutes les parties μ-négligeable sont mesurables i.e,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset B,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0) \Longrightarrow A \in \Sigma.$$

• on dit qu'une propriété sur E est vraie μ-presque par tout (μ.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

1.2.5 Compacité

Définition 1.2.27. *Soit X un espace topologique.*

1) *un recouvrement de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.*
2) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Soit $J \subset I$ tel que $X = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$.*
3) *un recouvrement ouvert de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.*

Définition 1.2.28.

*Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X. On dit que A est **compacte** s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :*
de tout recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.

• Ceci se traduit de la manière suivante :
Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ alors il existe un sous-ensemble fini $J \in I$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.

Proposition 1.2.29. *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

(a) *Si A est compacte alors A est fermée.*
(b) *Si X est compact et A est fermée, alors A est compacte.*
(c) *Si A est un compact de X et $f : X \to Y$ est continue alors $f(A)$ est un compact de Y.*

Définition 1.2.30. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$. On dit que A est borné si $\exists r > 0,\ A \subset B_E(0, r) \iff \exists r > 0, \forall a \in A,\ \|a\|_E < r$.*

• *Il est clair qu'un ensemble compact est borné.*

Proposition 1.2.31. *soit A une partie de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$.*
Alors A est compacte si et seulement si A est une partie fermée et bornée.

Définition 1.2.32. *Soient X un espace topologique séparé, A une partie de X. On dit que A est **relativement compacte** si son adhérence $\overline{A}$ dans X est compacte.*

Proposition 1.2.33. *Soit A une partie d'un espace métrique E. A est compacte si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weiestrass : toute suite d'éléments de A admet une sous suite convergente dans A.*

Proposition 1.2.34.

1. *Une union finie de compacts est compacte.*
2. *Une intersection de compacts est compacte.*

Définition 1.2.35. ***(Espaces réflexifs)***
*Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est **réflexif** si $J(E) = E''$, où*

$$J : E \to E''$$
$$x \to J(x) = J_x(f)$$

est un isomorphisme isométrique de E sur E''. Lorsque E est réflexif, on identifiera souvent implicitement E et E'' (à l'aide de l'isomorphisme J).

Remarque 1.2.1. *L^2 est réflexif.*

Théorème 1.2.36. ***(Alaoglu)***
Soit E un espace de Banach séparable, et soit $A \subset E$. Si A est borné pour la norme de E' et fermé pour la topologie $\sigma(E', E)$, alors, A est compact pour cette topologie.

Théorème 1.2.37. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Définition 1.2.38. ***(Équicontinuité)***
Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques. Une partie H de $\mathcal{F}(X, Y)$ est dite équicontinue au point $x \in X$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in H : d(x, x') \leq \delta \implies d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

• *H est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.*

Théorème 1.2.39. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soit (K, d) un espace métrique compact, (X, d') un espace métrique complet, et $H \subset C(K, X)$(l'espace des applications continues définies sur K à valeurs dans X), muni de la distance de la convergence uniforme, i.e.

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} \left\{ d'(f(x), g(x)), \forall f, g \in C(K, X) \right\}.$$

Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact pour tout $x \in K$, avec

$$H(x) = \{f(x) | f \in H\}.$$

Théorème 1.2.40. ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soient I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|f_n(x)| < M, \ \forall n \in \mathbb{N} \ et \ \forall x \in I.$$

Alors, on peut extraire une sous suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f.

1.2.6 Convexité

Définition 1.2.41. ***(Ensembles convexes)***
Soit E un espace vectoriel, et soit $A \subset E$. On dit que A est ***convexe*** *si et seulement si*

$$\forall u, v \in A; \forall \lambda \in [0, 1], \lambda u + (1 - \lambda)v \in A.$$

Autrement dit, pour tout $(u, v) \in A$, le segment de droite

$$[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v / \lambda \in [0, 1]\} \subset A.$$

Définition 1.2.42. *On appelle* ***simplexe*** *de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\triangle_n$ défini par*

$$\triangle_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0 \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.2.43. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in E$. On appelle* ***combinaison convexe*** *des élément $x_1, x_2, ..., x_n$ tout élément $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tels que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \triangle_n$.*

Proposition 1.2.44. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est* **convexe** *si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Proposition 1.2.45. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Si $(A_i)_i \in I$ est une famille quelconque de convexes de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est un convexe de E.*
2. *Si $A, B \subset E$ sont convexes alors $A + B$ est convexe.*

Exemples 1.2.1.

• *Les sous-ensembles convexes de l'espace $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

• *Dans un espace vectoriel normé réel E, toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

Théorème 1.2.46. *Soit $A \subset E$ un sous ensemble convexe, alors A est faiblement fermé (fermé pour $\sigma(E, E')$) si et seulement si il est fortement fermé.*

Définition 1.2.47. ***(Enveloppe convexes)***

Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel E.

• *On appelle* **enveloppe convexe** *de A, qu'on note $co(A)$ l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*

• *on appelle* ***enveloppe convexe fermé*** *de A, qu'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de E qui contenant A. C'est le plus petit convexe fermé de E qui contient A.*

Théorème 1.2.48. *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$. Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_j x_j \ ; \ n \in \{0, 1, ...\}, (\lambda_1, ..., \lambda_n + 1) \in \Delta_n, x_1, ..., x_{n+1} \in A \right\}.$$

Théorème 1.2.49. ***(Théorème de Carathéodory)***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_j x_j \ où \ (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \Delta_n, \ x_1, ..., x_m \in A, \ tel \ que \ 1 \leq m \leq n+1 \right\}.$$

Théorème 1.2.50. ***(Banach-Mazur)***

Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d' éléments de E convergent faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_n)_n$ telle que z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$ convergent fortement vers x. ($z_n = \sum\limits_{i \geq n} \alpha_i x_i$, $\sum\limits_{i \geq n} \alpha_i = 1$).

Proposition 1.2.51. *L'envloppe convexe d'un sous ensemble compact d'un espace de dimension fini est compacte.*

Proposition 1.2.52. *Soit E un espace vectoriel topologique et soient $A \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors*

1) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.

2) $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

Proposition 1.2.53. *Soit U un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide.*
Alors $U = co(Fr(u))$.

Théorème 1.2.54. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles d'un espace métrique (X, d) Alors,*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{m\geq n} B(A_m, \varepsilon) \Big).$$

Et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{m\geq n} A_m = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(\bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{m\geq n} B(A_m, \varepsilon) \Big).$$

Lemme 1.2.55. *Considérons une suite de sous ensembles K_n contenus dans un sous ensemble bornée d'un espace de dimension finie X ($X = \mathbb{R}^n$).*
Alors,

$$\overline{co}\Big(\limsup_{n\to\infty} K_n \Big) = \bigcap_{N>0} \overline{co}\Big(\bigcup_{n\geq N} K_n \Big).$$

1.2.7 Application continue

Définition 1.2.56. ***(Application continue)***
Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

• *f est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point $x \in X$.*

Remarque 1.2.2. *Si $(E.\|.\|), (\tilde{E}.\|.\|_{\tilde{E}})$ sont deux espaces vectoriels normés. On dit que $f : E \to \tilde{E}$ est continue au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\tilde{E}} < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.57. *Si f est continue au point x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Définition 1.2.58. ***(Applications absolument continues)***
Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon$$

.

Théorème 1.2.59. *Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée i.e*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt. \tag{1.1}$$

Remarque 1.2.3.
- *Une fonction absolument continue est continue.*

Théorème 1.2.60. ***(Théorème de Lusin)***
Soit (T, d) un espace métrique compact et (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec μ positive.
Soit X un espace de dimension finie.
Alors, pour toute fonction $\phi : T \to X$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de ϕ à T_ε est continue.

1.3 Multi-applications (ou fonctions multivoques)

Pour plus de résultats sur les multi-applications voir [1, 7, 6, 9].

1.3.1 Rappels sur les multi-applications

Définition 1.3.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle* ***multi-application*** *ou fonction multivoque définie sur X à valeurs dans Y, toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$.*
Pour tout $t \in X$, $F(t) \subset Y$ est un sous ensemble de Y.
- *On appelle* ***domaine*** *(effectif) de F le sous ensemble de X défini par*

$$Dom(F) = \{t \in X : F(t) \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle **image** de F le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y : \exists t \in X, y \in F(t)\}.$$

• *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t)$ et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists t \in A,\ y \in F(t)\}.$$

Ainsi, $Im(F) = F(X)$.

Définition 1.3.2. ***(Graphe d'une multi-application)***
*Soient X et Y deux ensembles non vides, et soit $F : X \rightrightarrows Y$. On appelle **le graphe** de F qu'on note **gph(F)** le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

Exemples 1.3.1.

1) Soit F une multi-application définie par

$$F : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$$
$$x \mapsto F(x) = [0, x].$$

Calculons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) =& \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \in F(x)\} \\ =& \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \in [0, x]\} \\ =& \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \leq x\}. \end{aligned}$$

2) Soit F une multi-application définie par

$$F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightrightarrows \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F(x) = \{r \cos x / 0 \leq r \leq 1\}.$$

Calculons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) &= \left\{(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}, y \in F(x)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1], y \in \{r \cos x / 0 \leq r \leq 1\}\right\}. \end{aligned}$$

1.3.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.*

• On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.

Théorème 1.3.4. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : M \rightrightarrows Y$ une multi-aplication à valeurs compacts, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $(y_n)_n \in F(x_n)$, il existe une sous-suite $(y_m)_m$ de $(y_n)_n$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty} y_m \in F(x).$$

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

• Le réciproque est donnée par le lemme suivant

Lemme 1.3.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Théorème 1.3.7. *Soit X un espace métrique, M un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application si F est s.c.s, alors la multi-application $co(F) : x \in X \rightrightarrows co(F(x)) \subset \mathbb{R}^n$ est aussi s.c.s.*

Théorème 1.3.8. *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x'\to x} F(x') = F(x).$$

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.3.9. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.3.10. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction*

$$\begin{aligned} g_y : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto d(y, F(x)) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Définition 1.3.11. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in dom(F).$$

Théorème 1.3.12. *Soient (X, Σ, μ) un espace mésuré tel que Σ est μ-complète et soient (Y,d) un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *Le graphe de F est mesurable.*

iii) *$F^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(Y)$.*

iv) *$F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de Y.*

Théorème 1.3.13. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables de Castaing)*** *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

1.4 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.4.1. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $1 \le p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p([0, T], \mathbb{R}^n)$. On suppose que

1. *$(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur $[0, T]$.*
2. *Il existe une application positive $g(\cdot) \in L^p([0, T], \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \le g(t) \quad p.p\ t \in [0, T].$$

Alors $f(\cdot) \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *et la suite* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.4.2.
Soit $1 \leq p < \infty$ *et soit* $(f_n)_n \subset L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *une suite convergente vers une fonction* $f \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *pour la norme de* $L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$. *Alors, il existe une sous suite* $(f_{n_k})_k$ *convergente vers* f *p.p sur* $[0,T]$.

1.5 Théorème de Lyapunov

Le résultat de cette section est pris de la référence [4].

Théorème 1.5.1. *Soient* $f_1, f_2..., f_n$ *des fonctions intégrables définies de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $p_1, ..., p_n$ *des fonctions mesurables vérifiant*

$$0 \leq p_i(t) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \in [a,b].$$

Alors, il existe une suite d' ensembles mesurables (A_i) *formant une partition de* $[a,b]$, *telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{[a,b]} \chi_{A_i}(t) f_i(t) dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{[a,b]} p_i(t) f_i(t) dt.$$

Chapitre 2

Résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle avec second membre à valeurs convexes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre avec perturbation semicontinue supérieurement à valeurs convexes de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\dot{x}(t) \in F(x(t)), p.p,\\ x(0) = x_0.\end{cases}$$

Le résultat de ce chapitre existe dans la référence [6].

2.2 Quelques définitions utiles

On commence par quelques définitions qu'on a utilisé.

Définition 2.2.1. *Soient X, Y deux espaces normés, et soit $F : X \rightrightarrows Y$. On définit la norme de F par*

$$\|F(x)\| = sup\{\|y\|_Y;\ y \in F(x)\}.$$

Définition 2.2.2. *Soit X un espace métrique et $\Omega \subset X$, on appelle le cône tangent à Ω au point $x \in \Omega$ le sous ensemble de X défini par*

$$T_\Omega(x) = \left\{ y \in X : \liminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d(x + \lambda y, \Omega) = 0 \right\}.$$

Définition 2.2.3.

Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel) notée $\leq$

• *On dit qu'un sous ensemble $Q \subset A$ est totalement ordonné si pour tout couple (a, b) de Q on a (au moins) l'une des relations $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

• *On dit que A est inductif si tout sous ensemble totalement ordonné de A admet un majorant.*

Lemme 2.2.4. ***(Zorn)***

Tout ensemble ordonné inductif non vide admet un élément maximal.

2.3 Le résultat principale du chapitre

On donne maintenant le théorème principale de ce chapitre.

Théorème 2.3.1.

Soient $J = [0, T] \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ un fermé et $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides convexes fermées vérifiant

1. $\|F(x)\| \leq 1,\ \forall x \in \Omega.$
2. $F(x) \cap T_\Omega(x) \neq \emptyset, \forall x \in \Omega.$

Alors, le problème

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)),\ p.p\ t \in J, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution absolument continue sur J, pour tout $x_0 \in \Omega$.

Démonstration.

Etape 1.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, et soit $x_0 \in \Omega$ soit $v : J \to \mathbb{R}^n$ une application absolument continue telle que les relations

$$(I) : \begin{cases} v(t) = x_0 + \int\limits_0^t \dot{v}(s)ds, \ \forall t \in J \\ \quad \Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon) \neq \emptyset, \ \forall t \in J \\ \quad v(T) \in \Omega, \\ \dot{v}(t) \in F(\Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)) + \overline{B}(0, \varepsilon) \quad p.p \; sur J, \end{cases}$$

soient satisfaites.

Nous allons montré que ce choix est possible.

On considère l'ensemble

$$M = \{(v, \lambda); \lambda \in]0, T], v : [0, \lambda] \to \mathbb{R}^n \quad \text{satisfaisant les relations (I) sur } [0, \lambda]\}.$$

M est non vide.

En effet,

D'aprés l'hypothèse 2, $F(x_0) \cap T_\Omega(x_0) \neq \emptyset$, donc il existe $y \in F(x_0) \cap T_\Omega(x_0)$.

$$\begin{aligned} y \in T_\Omega(x_0) \iff & \liminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d(x_0 + \lambda y, \Omega) = 0 \\ \implies & \liminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \inf_{z \in \Omega} \|x_0 + \lambda y - z\| = 0 \\ \implies & \lambda^{-1} \inf_{z \in \Omega} \|x_0 + \lambda y - z\| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \ 0 \leq \lambda \leq \varepsilon \\ \implies & \inf_{z \in \Omega} \|x_0 + \lambda y - z\| \leq \lambda\varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall \ 0 < \lambda \leq \varepsilon \\ \implies & \|x_0 + \lambda y - z\| \leq \lambda\varepsilon, \forall z \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \forall \ 0 < \lambda \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $z \in \Omega, \ \lambda \in]0, \varepsilon], soit$

$$v(t) = x_0 + \frac{(z - x_0)t}{\lambda}, \ \forall \ t \in J.$$

On a $v(T) \in \Omega$ et

$$\dot{v}(t) = \frac{z - x_0}{\lambda} \in \overline{B}(y, \varepsilon).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(t) - y\| &= \left\| \frac{z - x_0}{\lambda} - y \right\| \\ &= \frac{1}{\lambda} \|z - x_0 - \lambda y\| \\ &= \frac{1}{\lambda} \|x_0 + \lambda y - z\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \lambda\varepsilon \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$\dot{v}(t) \in \overline{B}(y, \varepsilon).$$

Et on a aussi

$$\overline{B}(y, \varepsilon) \subset F(x_0) + \overline{B}(0, \varepsilon).$$

En effet,

$$\begin{aligned} x \in \overline{B}(y, \varepsilon) &\iff \|x - y\| \leq \varepsilon \; et \; y \in F(x_0) \\ &\Rightarrow \inf_{y \in F(x_0)} \|x - y\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow d(x, F(x_0)) \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow x \in F(x_0) + \overline{B}(0, \varepsilon) \\ &\Rightarrow \overline{B}(y, \varepsilon) \subset F(x_0) + \overline{B}(0, \varepsilon). \end{aligned}$$

D'où,

$$\dot{v}(t) \in F(x_0) + \overline{B}(0, \varepsilon), \forall t \in [0, \lambda].$$

D'autre part,

$$\|v(t) - x_0\| \leq 2\varepsilon, \quad \forall t \in [0, \lambda].$$

En effet,

Soit $t \in [0, \lambda]$,

$$\begin{aligned} \|v(t) - x_0\| &= \left\| (z - x_0)\frac{t}{\lambda} \right\| \\ &= \|z - x_0\| \frac{t}{\lambda} \\ &= \|z - x_0 + \lambda y - \lambda y\| \frac{t}{\lambda} \\ &\leq \|z - x_0 - \lambda y\| \frac{t}{\lambda} + t\|y\| \\ &\leq \lambda\varepsilon \frac{t}{\lambda} + t\|y\| \\ &\leq \lambda\varepsilon + \lambda \|F(x_0)\| \\ &\leq \varepsilon^2 + \varepsilon = \varepsilon(1 + \varepsilon) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

D'où, $x_0 \in \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)$, et par suite, $x_0 \in \Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)$.

Donc $\Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon) \neq \emptyset$.

Par conséquent,

$$F(x_0) \subset F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)\Big).$$

Nous avons,

$$\dot{v}(t) \in F(x_0) + \overline{B}(0,\varepsilon) \subset F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)\Big) + \overline{B}(0,\varepsilon),$$

et donc,

$$\dot{v}(t) \in F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), 2\varepsilon)\Big) + \overline{B}(0,\varepsilon), \forall t \in [0,\lambda].$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} v(t) &= x_0 + (z - x_0)\frac{t}{\lambda} \\ &= x_0 + \int_0^t \frac{z - x_0}{\lambda} ds \\ &= x_0 + \int_0^t \dot{v}(s) ds. \end{aligned}$$

D'où, v est absolument continue.

Par conséquent, $(v, \lambda) \in M$ i.e. $M \neq \emptyset$.

Nous introduisons sur M la relation d'ordre suivante

$$(v_1, \lambda_1) \leq (v_2, \lambda_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \quad \text{et} \quad v_1(t) = v_2(t) \quad \text{sur} \quad [0, \lambda_1].$$

Il est clair que chaque sous ensemble ordonné de M admet une borne supérieure, donc d'après le Lemme 2.2.4, M admet un élément maximal (v^*, λ^*).

On a $\lambda^* = T$, donc on peut prolonger v^* à $[0, T]$.

D'où la possibilité de choisir v(.) vérifiant les relations (I) sur $[0, T]$.

Etape 2.

Considérons $\varepsilon_n > 0$ et une application absolument continue $v_n : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les relations (I) pour $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Alors $(v_n) \subset C(J, \mathbb{R}^n)$ et on a d'après l'hypothèse (1)

$$\dot{v}_n(t) \in F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), 2\varepsilon)\Big) + \overline{B}(0, \varepsilon_n) \Rightarrow \|\dot{v}_n(t)\| \leq 1 + \varepsilon_n < 2.$$

Nous avons

$$v_n(t) = x_0 + \int_0^t \dot{v}_n(s) ds, \ \forall t \in [0, T]$$

d'où

$$\|v_n(t)\| < \|x_0\| + 2T.$$

Alors, la suite $(v_n(.))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ donc elle est relativement compact.

De plus, pour tous $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \leq t_2$ et ε>0 tel que $\|v_n(t_2) - v_n(t_1)\| \leq \varepsilon$

nous avons

$$\begin{aligned}\|v_n(t_2) - v_n(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}_n(s)ds \right\| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{v}_n(s)\|ds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} 2ds \\ &= 2|t_2 - t_1|.\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $|t_2 - t_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc la suite $(v_n(.))_n$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.2.39), $(v_n(.))_n$ est relativement compacte.

Donc d'après le corollaire 1.2.40 et sans pert de généralités, on peut posé,

$$\|v_n(.) - v(.)\|_C = \sup_t \|v_n(t) - v(t)\|_{R^n} \longrightarrow 0$$

pour une certaine application continue $v : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Montrons que pour tout $t \in J,\ v(t) \in \Omega$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in J$ on a,

$$\begin{aligned}\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), 2\varepsilon_n) \neq \emptyset &\Rightarrow \exists y \in \Omega \cap \overline{B}(v_n(t), 2\varepsilon_n) \\ &\Rightarrow y \in \Omega \text{ et } y \in \overline{B}(v_n(t), 2\varepsilon_n) \\ &\Rightarrow y \in \Omega \text{ et } \|y - v_n(t)\| \leq 2\varepsilon_n.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|y - v(t)\| &\leq \|y - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v(t)\| \\ &\leq 2\varepsilon_n + \varepsilon_n.\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient

$$v(t) = y \in \Omega,\ \forall t \in J.$$

Comme $(\dot{v}_n(.))_n$ est bornée dans $L^2(J, \mathbb{R}^n)$ qui est réflexif, alors d'après le Théorème 1.2.37, $(\dot{v}_n(.))_n$ converge faiblement vers $w(.) \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$.

Pour $t \in J$ et $z \in \mathbb{R}^n$, on a $z\chi_{[0,t]}(.) \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$, d'où,

$$\begin{aligned}
\langle v_n(t), z\rangle &= \langle x_0 + \int\limits_0^t \dot{v}_n(s)ds, z\rangle \\
&= \langle x_0, z\rangle + \langle \int\limits_0^t \dot{v}_n(s)ds, z\rangle \\
&= \langle x_0, z\rangle + \int\limits_0^t \langle \dot{v}_n(s), z\rangle ds \\
&= \langle x_0, z\rangle + \int\limits_0^T \langle \dot{v}_n(s), z\chi_{[0,t]}(s)\rangle ds.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, et en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.4.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle v(t), z\rangle &= \langle x_0, z\rangle + \int\limits_0^T \langle w(s), z\chi_{[0,t]}(s)\rangle ds \\
&= \langle x_0, z\rangle + \langle \int\limits_0^t w(s)ds, z\rangle \\
&= \langle x_0 + \int\limits_0^t w(s)ds, z\rangle.
\end{aligned}$$

D'où

$$v(t) = x_0 + \int_0^t w(s)ds,$$

par conséquent, $w = \dot{v}$ i.e, $\dot{v}_n \rightharpoonup \dot{v}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Comme $\|v_n - v\|_C \to 0$, alors,

$$v_n(t) \longrightarrow v(t),\ \forall t \in J \iff \forall \delta > 0, \exists n_\delta \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\delta \Rightarrow \|v_n(t) - v(t)\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Soit $\delta > 0$, nous avons, pour $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$

$$\dot{v}_n(t) \in F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{2})\Big) + \overline{B}(0, \frac{\delta}{4}),\ p.p\ sur\ J.$$

Montrons que $\overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{2}) \subset \overline{B}(v(t), \delta)$.

Soit

$$y \in \overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{2}) \Rightarrow \|y - v_n(t)\| \leq \frac{\delta}{2},$$

$$\begin{aligned}
\|y - v(t)\| &\leq \|y - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v(t)\| \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\ , \forall n \geq n_\delta \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

D'où
$$y \in \overline{B}(v(t), \delta).$$
Par suite,
$$\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{2}) \subset \Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta),$$
alors,
$$F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{2})\Big) + \overline{B}(0, \frac{\delta}{4}) \subset F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta)\Big) + \overline{B}(0, \frac{\delta}{4}),$$
donc,
$$F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v_n(t), \frac{\delta}{4})\Big) + \overline{B}(0, \frac{\delta}{2}) \subset F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta)\Big) + \overline{B}(0, \delta),$$
par conséquent, pour $\delta > 0$, $\exists\, n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que
$$\dot{v}_n(t) \in F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta)\Big) + \overline{B}(0, \delta),\ p.p\ sur J,\ \forall\, n \geq n_\delta.$$

Etape 3.

Soit $\delta > 0$.

Soit pour tout $t \in J$, $K_\delta(t) = \overline{co}\Big(F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta)\Big) + \overline{B}(0, \delta)\Big)$.

Alors,
$$\dot{v}_n \in C_\delta := \Big\{u \in L^2(J, \mathbb{R}^n), u(t) \in K_\delta(t)\ p.p\ sur\ J\Big\},\ \forall n \geq n_\delta.$$
L'ensemble C_δ est convexe fermé.

En effet,

Soit $t \in J$.

Soit $u_1, u_2 \in C_\delta$, soit $\lambda \in [0,1]$, soit $t \in J \setminus \mu$, telle que μ est de mesure nulle,

On a
$$u_1 \in C_\delta \Leftrightarrow u_1(t) \in K_\delta(t).$$
$$u_2 \in C_\delta \Leftrightarrow u_2(t) \in K_\delta(t).$$
Comme $K_\delta(t)$ est convexe, alors
$$\lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t) \in K_\delta(t).$$
C'est à dire,
$$(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)(t) \in K_\delta(t).$$
Par conséquent,
$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in C_\delta.$$
D'où, C_δ est convexe.

Il reste à montrer que C_δ est fermé.

Soit $(u_n(.))_n$ une suite de C_δ convergent vers $u \in L^2(J, \mathbb{R}^n)$ et d'après le Théorème 1.4.2, on peut lui extraire une sous suite $(u_{n_k}(.))$ qui converge presque partout vers $u(.)$, i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} u_{n_k}(t) = u(t) \text{ p.p sur } J.$$

Comme $K_\delta(t)$ est fermé et $u_{n_k}(t) \in K_\delta(t)$, on obtient $u(t) \in K_\delta(t)$ ce qui est équivalent à $u(.) \in C_\delta$.

Sachant que C_δ est convexe on conclut qu'il est faiblement fermé (d'après le Théorème 1.2.46). Comme $(\dot{v}_n(.))_n \subset C_\delta$, alors $\dot{v}(.) \in C_\delta$, $\forall \delta > 0$.

Soit $(\delta_n)_n$ une suite décroissante vers 0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}, \dot{v}(.) \in C_{\delta n}$.

Alors, pour tout $t \in J \setminus \mu$, avec μ un ensemble de mesure de lebesgue nulle,

$$\Longrightarrow \dot{v}(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{co}\left(F\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta_n)\Big) + \overline{B}(0, \delta_n)\right).$$

Et, par le Lemme 1.2.55

$$\dot{v}(t) \in \overline{co}\left(\limsup_{n \to \infty}\left(F(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta_n))\right)\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty}\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta_n) + \overline{B}(0, \delta_n)\Big) &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n}\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta_k) + \overline{B}(0, \delta_k)\Big) \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}}\Big(\Omega \cap \overline{B}(v(t), \delta_n) + \overline{B}(0, \delta_n)\Big) \\
&= \{v(t) + 0\} \\
&= \{v(t)\}.
\end{aligned}$$

Comme F est $s.c.s$ et à valeurs compactes, alors par le Théorème 1.3.8,

$$\dot{v}(t) \in \overline{co}\Big(F(v(t))\Big) \text{ p.p } t \in J.$$

Et comme F est à valeurs fermées convexes on obtient,

$$\dot{v}(t) \in F(v(t)) \text{ p.p } t \in J.$$

Par conséquent, comme $v(0) = x_0$, v est une solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre à valeurs presque convexes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre un résultat d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ p.p,\\ x(0) = x_0,\end{cases}$$

où on affaiblit la condition de la convexité des valeurs de F dans le chapitre 2, par la presque convexité et on obtient un résultat nouveau où $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est semi continue supérieurement à valeurs fermées. La méthode utilisée est inspirée de l'étude des inclusions différentielles, donnée par Cellina et Ornelas dans [3].

Il existe plusieurs définitions de la presque convexité, la définition qu'on a utilisé est celle introduite dans [3] et définie comme suit

3.2 La presque convexité

Définition 3.2.1. *L'ensemble C d'un espace vectoriel est dit presque convexe si pour tout $q \in co(C)$, il existe deux scalaires α_1 et α_2 , $0 \leq \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2$ tels que*

$$\alpha_1 q \in C \quad et \quad \alpha_2 q \in C.$$

Remarques 3.2.1.

1. *Si l'ensemble C est presque convexe et $0 \in co(C)$, alors C contient l'origine 0.*

   En effet,

   d'aprés la définition de la presque convexité on a

   $0 \in co(C) \implies \exists\, \alpha_1,\ \alpha_2,\ (0 \leq \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2)$ *tels que*

   $$\alpha_1 0 \in C \quad et \quad \alpha_2 0 \in C.$$

   Donc $0 \in C$.

2. *Tout ensemble convexe est presque convexe.*

   En effet,

   Soit C un ensemble convexe.

   Donc, $co(C) = C$.

   Soit $q \in co(C)$ alors $q \in C$.

   Il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

   Donc C est presque convexe.

3. *L'inverse en générale n'est pas nécessairement vrai.*

   C'est à dire, il existe des ensembles presque convexes mais non convexes.

   Exemple

   Considérons l'ensemble

   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2.$

   C est non convexe mais presque convexe.

   En effet,

   On a $co(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Soit $q = (x, y) \in co(C)$ alors $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Montrons l'existence de $\lambda_1,\ \lambda_2,\ 0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2$ tel que $\lambda_1 q \in C$ et $\lambda_2 \in C$.

   • *Si on prend $\lambda_1 = 0$, alors $\lambda_1 q = (0, 0) \in C$.*

   Pour λ_2, on distingue deux cas

   1. *si $q = (x, y) \in C$ donc, il suffit de prendre $\lambda_2 = 1$*

      c-à-d , $\lambda_2 q = (x, y) \in C$.

2. *si* $q = (x, y) \notin C$ *donc* $y = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   - *D'autre part,* $(x, y) \in co(C)$, *c-à-d*

$$x^2 \leq 1 \implies 0 <\mid x \mid \leq 1.$$

Si on prend $\lambda_2 = \frac{1}{|x|} \geq 1$ *alors* $\lambda_2 q = (\frac{x}{|x|}, 0) \in C$.

D'où, C *est presque convexe.*

3.3 Le résultat principale du chapitre

Avant de donner le résultat final, on commence par le résultat suivant où on étudie la relation entre la solution du problème relaxé et non relaxé.

Théorème 3.3.1.
Soient $J = [0, T] \subset \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application semi continue supérieurement, à valeurs non vides fermées vérifiant*

1. $\|F(x)\| \leq 1, \ \forall x \in \Omega$.
2. $co(F(x)) \cap T_\Omega(x) \neq \emptyset, \forall x \in \Omega$.

Soit $x_0 \in \Omega$ *et soit* $x : J \longrightarrow \Omega$ *une solution absolument continue du problème*

$$(\mathcal{P}_{co}) \begin{cases} \dot{x}(t) \in co(F(x(t))) \text{ p.p. sur} J, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(.)$ *et* $\lambda_2(.)$ *définies sur* J *vers* $\mathbb{R}$, *satisfaisants* $0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t), \ \forall t \in J$ *et telles que pour presque tout* $t \in J$,
nous avons

$$\lambda_1(t)\dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ et } \lambda_2(t)\dot{x}(t) \in F(x(t)).$$

Alors, il existe $t = t(s)$ *une fonction croissante, absolument continue définie de l'intervalle* J *dans lui même, telle que l'application* $\tilde{x}(s) = x(t(s))$ *est une solution du problème*

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} \dot{x}(s) \in F(x(s)) \text{ p.p. sur} J, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.

Démonstration.

Etape 01.

Soit $[\alpha, \beta]$, $(0 \leq \alpha < \beta < T)$ un intervalle et supposons que sur cet intervalle l'existence de deux fonctions $\lambda_1(.), \lambda_2(.)$ tel que

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t).$$

De plus, supposons que $\lambda_1(t) > 0$, p.p et qu'il existe deux sous ensembles mesurables de $[\alpha, \beta]$ admettant deux fonctions caractéristiques $\chi_1(.)$ et $\chi_2(.)$ telles que

$$\chi_1(.) + \chi_2(.) = \underset{[\alpha,\beta]}{\chi(.)}$$

et il existe une fonction absolument continue $S = S(t)$ definie de $[\alpha, \beta]$ dans lui même, avec

$$S(\alpha) - S(\beta) = \alpha - \beta$$

et

$$\dot{S}(t) = \chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}.$$

En effet,

soit p définie de $[\alpha, \beta]$ par $p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1 \\ \dfrac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} & sinon \end{cases}$

Nous avons $0 \leq p(t) \leq 1, \forall t \in [\alpha, \beta]$.
Car, $\lambda_1(t) \leq 1 \; et \; \lambda_2 \geq 1$.
Donc $\quad 0 \leq \lambda_2(t) - 1 \leq \lambda_2(t) - \lambda_1(t)$.
D'où

$$0 \leq \frac{\lambda_2(t) - 1}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)} \leq 1.$$

De plus, les deux égalités

$$p(t) + (1 - p(t)) = 1.$$

$$p(t)\lambda_1(t) + (1 - p(t))\lambda_2(t) = 1.$$

Sont toujours vérifiées.
Car, si $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 1$, on obtient

$$p(t) + (1 - p(t)) = p(t)\lambda_1(t) + (1 - p(t))\lambda_2(t) = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2}) = 1.$$

Sinon

$$\begin{aligned}
p(t)\lambda_1(t) + (1-p(t))\lambda_2(t) &= \left(\frac{\lambda_2(t)-1}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\right)\lambda_1(t) + \left(1-\frac{\lambda_2(t)-1}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\right)\lambda_2(t) \\
&= \frac{\lambda_1(t)\lambda_2(t)-\lambda_1(t)+\Big(\lambda_2(t)-\lambda_1(t)-\lambda_2(t)+1\Big)\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)} \\
&= \frac{\lambda_1(t)\lambda_2(t)-\lambda_1(t)-\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

on particulier, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta 1dt &= \int_\alpha^\beta [p(t)+(1-p(t))]\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\frac{p(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)} + \frac{(1-p(t))\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)}\right] dt.
\end{aligned}$$

On souhaite d'appliquer le Théorème de Lyapunov pour assurer l'existence de deux sous ensembles mesurables admettant deux fonctions caractéristiques $\chi_1(.)$ et $\chi_2(.)$
tel que

$$\chi_1(.)+\chi_2(.) = \underset{[\alpha,\beta]}{\chi(.)}$$

et

$$\int_\alpha^\beta 1dt = \int_\alpha^\beta \left(\chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\lambda_1(t)}$ n'est pas nécessairement intégrable,
donc on concidère une partition de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par les ensembles

$$E^n = \{t\in[\alpha,\beta] : n < \frac{1}{\lambda_1(t)} \le n+1,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

En effet,

- E^n sont disjoints.
- Par définition $E^n \subset [\alpha,\beta], \forall n\in\mathbb{N}$ donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n \subset [\alpha,\beta]$.

D'autre part, soit $t\in[\alpha,\beta]$ on a $0<\lambda_1(t)\le 1$ alors $\frac{1}{\lambda_1(t)} \ge 1$ est un nombre réel positif, il résulte de la propriété d'Archiméde sur $\mathbb{R}$ l'existence d'un entier naturel $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$n < \frac{1}{\lambda_1(t)} \le n+1,$$

donc $t\in E^n$ et par conséquent $t\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n$,
c'est à dire $[\alpha,\beta]\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n$.

D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n = [\alpha, \beta]$.
En appliquant le Théorème de Lyapunov 1.5.1 sur chaque E^n nous déduisons l'existence de deux suites des sous ensembles mesurables $(E_1^n)_n, (E_2^n)_n$ ayant des fonctions caractéristiques $(\chi_1^n(.)), (\chi_2^n(.))$, telles que pour tout n,

$$\int_{E^n} 1dt = \int_{E^n} \left[\frac{p(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)} + \frac{(1-p(t))\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)}\right] dt = \int_{E^n} [\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}]dt.$$

On pose

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_1^n = E_1, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_2^n = E_2$$

et

$$\chi_1(.) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_1^n(.), \chi_2(.) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_2^n(.).$$

Pour chaque m, la fonction

$$\sigma^m(t) = \sum_{n=0}^{m} [\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}]$$

est positive, et la suite des fonctions $(\sigma^m(.))$ est croissante simplement convergente vers la fonction

$$\sigma(t) = \chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}.$$

D'autre part, la suite d'ensembles $(V^m)_m = (\bigcup\limits_{n=0}^{m} E^n)_m$ est strictement croissante et converge vers l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
Donc,

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \int_{\bigcup\limits_m V^m} 1dt.$$

Avec,

$$\int_{\bigcup\limits_m V^m} 1dt = \lim_{m\to\infty} \int_{V^m} 1dt.$$

Comme les ensembles (E^n) sont disjoints on obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \lim_{m\to+\infty} \int_{V^m} 1dt = \lim_{m\to+\infty} \int_{\bigcup\limits_{n=0}^{m} E^n} 1dt = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{E^n} 1dt$$

alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} 1dt &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{E^n} \left[\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right] dt \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{E^n} \sum_{n=0}^{m} \left(\chi_1^n(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^n(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{E^n} \sigma^m(t)dt \\
&= \lim_{m\to+\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^{m} E^n} \sigma^m(t)dt \\
&= \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt.
\end{aligned}$$

on conclut que $\int_{\alpha}^{\beta} 1dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\chi_1(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\right) dt.$
Définissons

$$\dot{S}(t) = \sigma(t)$$

alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} \dot{S}(t)dt = \beta - \alpha.$$

Etape 02.

Considérons l'ensemble

$$C = \{t \in J; 0 \in F(x(t))\}.$$

C est fermé.

En effet,

Soit (t_n) une suite d'éléments de C convergente vers $t \in J$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$0 \in F(x(t_n)).$$

D'aprés la Proposition 1.3.5, comme F est semi-continue supérieurement à valeurs fermées, le graphe de $F(x(.))$ est fermé, donc $0 \in F(x(t))$.

D'où $t \in C$ et C est fermé .

Supposons sans perdre de généralité que pour tout $t \in C$, $\lambda_1(t)\dot{x}(t) = 0$ et quand $\dot{x}(t) = 0$, on peut prendre $\lambda_2(t) = 1$.

a) Considérons le cas où C est vide.

Dans ce cas $\lambda_1(t) \neq 0, \forall t \in J$,

car si on considère $t_0 \in J : \lambda_1(t_0) = 0$ on obtient $\lambda_1(t_0)\dot{x}(t_0) \in F(x(t_0))$, ce qui donne $0 \in F(x(t_0))$ c'est à dire, $t_0 \in C$, contraduction avec $C = \emptyset$

Donc l'étape 1 peut être appliqué sur l'intervalle J.

Soit $S(t) = \int\limits_0^t \dot{S}(\tau)d\tau$.

S est strictement croissante et $S(0) = 0,\ S(T) = \int\limits_0^T \dot{S}(\tau)d\tau = T$.

Donc, $S(.)$ est definie de $[0, T]$ sur lui même.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} t(.) : [0,T] &\to [0, T] \\ \tau &\mapsto t(\tau) = S^{-1}(\tau) \end{aligned}$$

où S^{-1} est la fonction inverse de S(.).

Donc

$$t(0) = 0,\ t(T) = T$$

et

$$1 = \dot{S}(t(\tau))\dot{t}(\tau) = \frac{d}{dt}S(t(\tau)).$$

D'où

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{S}(t(\tau))} = \lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau)).$$

Considérons l'application $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)),\ \forall \tau \in J.$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(\tau) &= \dot{x}(t(\tau))\dot{t}(\tau) \\ &= \dot{x}(t(\tau))\frac{1}{\dot{S}(t(\tau))} \\ &= \dot{x}(t(\tau))\lambda_1(t(\tau))\chi_1(t(\tau)) + \dot{x}(t(\tau))\lambda_2(t(\tau))\chi_2(t(\tau)) \\ &\in F\Big(x(t(\tau))\Big) = F\Big(\tilde{x}(\tau)\Big). \end{aligned}$$

D'où, $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.

b) Maintenant, on suppose que C est non vide.

Soit $l = sup\{\tau \in J, \tau \in C\}$ alors $l \in C$.

En effet,

On a $l = sup\{\tau \in J, \tau \in C\}$,

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau_\varepsilon \in C : l - \varepsilon < \tau_\varepsilon \leq l.$$

On peut écrire

$$\forall n > 0, \exists (\tau_n) \in C : l - \frac{1}{n} < \tau_n < l + \frac{1}{n},$$

c'est à dire,

$$\forall n > 0, \exists (\tau_n) \in C : |\tau_n - l| < \frac{1}{n}.$$

Donc, il exist une suite $(\tau_n) \in C$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = l$ et comme C est fermé , $l \in C$.

D'autre part, l'ensemble complémentaire de C dans J c-à-d (J\C) est un ouvert dans J. Donc il est constitue d'une famille dénombrables d' intervalles ouverts de la forme $]a_i, b_i[$ disjoints deux à deux avec l'exeption de deux intervalles prenant la forme $[0, b_i[$ et $]l, T]$.

Pour chaque i, appliquons l'étape 1 sur chaque intervalle $]a_i, b_i[$ pour déduire l'existence de k_1^i et k_2^i, deux sous ensembles de $]a_i, b_i[$ leurs fonctions caractéristiques sont $\chi_1^i(.)$ et $\chi_2^i(.)$ respectivement tel que

$$\chi_1^i(.) + \chi_2^i(.) = \chi_{]a_i,b_i[}(.)$$

on pose

$$\dot{S}(t) = \chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)},\ \forall t \in]a_i, b_i[$$

on obtient $\int_{a_i}^{b_i} \dot{S}(\omega)d\omega = b_i - a_i$.

- Sur l'intervalle $[0, l]$, on considère

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{\lambda_2(t)}\chi_C(t) + \sum_i \Big(\chi_1^i(t)\frac{1}{\lambda_1(t)} + \chi_2^i(t)\frac{1}{\lambda_2(t)}\Big)$$

où la somme est prise pour tous les intervalles inclus dans le complémentaire de C contenus dans $[0, T]$.

Donc, nous avons

$$\int_0^l \dot{S}(\tau)d\tau = k \leq l - 0$$

puisque $\lambda_2(t) \geq 1$ et $\int_{a_i}^{b_i} \dot{S}(\tau) = b_i - a_i$.

Posons $S(t) = \int_0^t \dot{S}(\tau)d\tau$, alors $S(.)$ est une fonction inversible de $[0, l]$ vers $[0, k]$.

- Soit $t : [0, k] \to [0, l]$ l'inverse de $S(.)$.

Le prolongement absolument continue de $t(.)$ noté $\tilde{t}(.)$ est défini sur $[0, l]$ de la manière suivante

$$\tilde{t}(\tau) = \begin{cases} t(\tau) \quad si \quad \tau \in [0, k], \\ l \quad si \quad \tau \in]k, l]. \end{cases}$$

Donc $\frac{d\tilde{t}}{dt}(\tau) = 0$ Pour $\tau \in]k, l]$.

Démontrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$ sur l'intervalle $[0, l]$ et que $\tilde{x}(l) = x(l)$.

Nous avons, pour τ dans $[0, k]$, $\tilde{t}(\tau) = t(\tau)$ est inversible et

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{S}(t(\tau))} = \lambda_2\big(t(\tau)\big)\chi_C\big(t(\tau)\big) + \sum_i \Big(\chi_1^i\big(t(\tau)\big)\lambda_1\big(t(\tau)\big) + \chi_2^i\big(t(\tau)\big)\lambda_2\big(t(\tau)\big)\Big).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(\tau) &= \dot{x}\big(t(\tau)\big)\dot{t}(\tau) \\ &= \dot{x}\big(t(\tau)\big)\left[\lambda_2\big(t(\tau)\big)\chi_C\big(t(\tau)\big) + \sum_i \Big(\chi_1^i\big(t(\tau)\big)\lambda_1\big(t(\tau)\big) + \chi_2^i\big(t(\tau)\big)\lambda_2\big(t(\tau)\big)\Big)\right] \\ &\in F\Big(x\big(t(\tau)\big)\Big) = F\big(\tilde{x}(\tau)\big). \end{aligned}$$

Sur $]k, l]$, $\tilde{t}(\tau) = l$, d'où

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau)) = x(l).$$

Donc $\tilde{x}$ est constante et puisque $l \in C$, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(\tau) = 0 \in F\big(x(l)\big) &= F(x(\tilde{t}(\tau)) \\ &= F(\tilde{x}(\tau)). \end{aligned}$$

De plus $\tilde{x}(l) = x(\tilde{t}(l)) = x(l)$.

C'est a dire $\tilde{x}(.)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$ sur $[0, l]$.

- Il reste à définir la solution sur $[l, T]$.

Nous avons, C est vide et $\lambda_1(t) > 0$, donc on peut répéter les arguments de l'étape 1 et (a), pour obtenir une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.

Ceci complète la démonstration de notre théorème. ■

Théorème 3.3.2. *Soit $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un fermé et $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application semi continue supérieurement à valeurs non vides, fermées et presque convexes, vérifiant*

$$\|F(x)\| \leq 1, \ \forall x \in \Omega \ et \ F(x) \cap T_\Omega(x) \neq \emptyset, \forall x \in \Omega.$$

Alors, le problème

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}\dot{x}(t)\in F(x(t))\ p.p.\ sur J,\\ x(0)=x_0\in\Omega,\end{cases}$$

admet une solution absolument continue définie sur J.
De plus, pour tout $\tau \in J$, l'ensemble admessible au point τ, $A_{x_0}(\tau)$ du problème $(\mathcal{P}_F)$ coinside avec $A^{co}_{x_0}(\tau)$ l'ensemble admessible au point τ du problème

$$(\mathcal{P}_{co})\begin{cases}\dot{x}(t)\in co(F(x(t)))\ p.p.\ sur J,\\ x(0)=x_0\in\Omega,\end{cases}$$

où

$$A_{x_0}(\tau)=\{u(\tau):u(.)\ \textit{est une solution absolument continue de}\ (\mathcal{P}_F)\ \textit{sur}\ [0,\tau]\}.$$
$$A^{co}_{x_0}(\tau)=\{u(\tau):u(.)\ \textit{est une solution absolument continue de}\ (\mathcal{P}_{co})\ \textit{sur}\ [0,\tau]\}.$$

Démonstration. Nous avons $co(F):\Omega\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ est semi continue supérieurement d'aprés le Théorème 1.3.7, et à valeurs convexes compacts d'aprés la Proposition 1.2.51, alors pour tout $x\in\Omega$, $co(F(x))$ est fermé et borné.
D'autre part, pour tout $x\in\Omega$,

$$co(F(x))\subset co(\overline{B}(0,1))=\overline{B}(0,1)$$

et puisque pour tout $x\in\Omega,\ F(x)\subset co(F(x))$ et $(F(x)\cap T_\Omega(x)\neq\emptyset)$, alors

$$co(F(x))\cap T_\Omega(x)\neq\emptyset,\forall x\in\Omega.$$

D'où la multi-application $co(F)$ vérifie tous les hypotèses du Théorème 2.3.1.
Donc, le problème $(\mathcal{P}_{co})$ admet une solution absolument continue $x(.):J\to\Omega$.
On doit appliquer le Théorème 3.3.1 pour obtenir la solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.
C-à-d, montrons l'existence de deux fonctions intégrables $\lambda_1(.)$ et $\lambda_2(.)$ définis sur J telles que

$$0\leq\lambda_1(t)\leq 1\leq\lambda_2(t)$$

et

$$\lambda_1(t)\dot{x}(t)\in\ F(x(t))\ et\ \lambda_2(t)\dot{x}(t)\in\ F(x(t)).$$

On a, pour chaque $x\in\Omega$, $F(x)$ est presque convexe.
Donc, pour presque tout $t\in J$, il existe deux multi-applications à valeurs non vides

$$\Lambda_1:J\rightrightarrows[0,1]\ et\ \Lambda_2:J\rightrightarrows[1,+\infty[$$

tels que

$$\Lambda_1(t) = \{\lambda_1 \in [0,1],\ \lambda_1(t)\dot{x}(t) \in F(x(t))\}$$

$$\Lambda_2(t) = \{\lambda_2 \in [1,+\infty[,\ \lambda_2(t)\dot{x}(t) \in F(x(t))\}$$

Soit $Z = \{t \in J;\ \dot{x}(t) = 0\}$.
Sans perte de généralité on peut assumer que pour $t \in Z,\ \Lambda_1(t) = \Lambda_2(t) = 1$.
Pour montrer que la multi-application Λ_1 est mesurable, on applique le Théorème de Lusin 1.2.60 pour la fonction $\dot{x}$ sur $J \setminus Z$.
Alors, $\forall\varepsilon > 0$, il existe des ensembles compactes $K_\varepsilon \subset J \setminus Z$ tel que

$$\mu(J \setminus Z) \setminus (\cup K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

C-à-d, on peut défini $J \setminus Z$ par $(\cup K_\varepsilon) \cup N$ tel que la mesure de N est nulle et la restriction de $\dot{x}$ à K_ε est une fonction continue dans K_ε.
Alors, par la continuité de $\dot{x}$ et x et la semi-continuité supérieure de F, le graphe de la multi-application Λ_1 est fermé dans $K_\varepsilon \times \mathbb{R}^n$.
En effet,

$$\begin{aligned} gph(\Lambda_1) &= \{(t,\lambda_1) \in K_\varepsilon \times [0,1] : \lambda_1\dot{x}(t) \in F(x(t))\} \\ &= \{(t,\lambda_1) \in K_\varepsilon \times [0,1] : d(\lambda_1\dot{x}(t), F(x(t))) = 0\} \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (K_\varepsilon \times [0,1]), \end{aligned}$$

où $\varphi : (t,\lambda_1) \longrightarrow d(\lambda_1\dot{x}(t), F(x(t)))$.
Alors, $gph(\Lambda_1)$ est fermé dans $K_\varepsilon \times [0,1]$
de plus, Λ_1 à valeurs bornée dans $[0,1]$, alors, d'aprés le Lemme 1.3.6 Λ_1 est s.c.s donc, Λ_1 est mesurable dans K_ε.
D'où Λ_1 est mesurable dans J.
La démonstration de Λ_2 est mesurable et similaire, la différence est que les valeurs de Λ_2 ne sont pas bornées.
Donc, on défini $J \setminus Z$ par l'union dénombrable des ensembles $M_n = \{t : \|\dot{x}(t)\| \geq \frac{1}{n}\}$.
Alors,

$$\begin{aligned} gph(\Lambda_2) &= \{(t,\lambda_2) \in M_n \times [1,+\infty[: \lambda_2\dot{x}(t) \in F(x(t)\} \\ &= \{(t,\lambda_2) \in M_n \times [1,+\infty[: d(\lambda_2\dot{x}(t), F(x(t))) = 0\} \\ &= \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (M_n \times [1,+\infty[). \end{aligned}$$

Donc, $gph(\Lambda_2)$ est fermé dans $M_n \times [1,+\infty[$ et les valeurs de Λ_2 sont bornées dans $[1,+\infty[$.
D'où Λ_2 est mesurable dans J.

On appliquant le Théorème 1.3.13 on obtient l'existence de deux sélections mesurables $\lambda_1(.)$ et $\lambda_2(.)$ de $\Lambda_1(.)$ et $\Lambda_2(.)$ respectivement, satisfaisant pour tout $t \in J$

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \; et \; 1 \leq \lambda_2(t) < +\infty$$

et

$$\lambda_1(t)\dot{x}(t) \in F(x(t)) \; et \; \lambda_2(t)\dot{x}(t) \in F(x(t)), \; p.p. \; t \in J.$$

Appliquant le Théorème 3.3.1, on conclut que le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ admet une solution $\tilde{x}(.)$ tel que $\forall t \in J : \tilde{x}(t) = x(t)$.
Par conséquent, fixons $\tau \in J$, on obtient

$$A^{co}_{x_0}(\tau) \subset A_{x_0}(\tau).$$

Inversement, comme $F(x) \subset co(F(x)), \; \forall x \in \Omega$, alors toute solution $x(.)$ de $(\mathcal{P}_F)$ satisfait

$$F(x(t)) \subset co(F(x(t))), \; \forall t \in J.$$

Donc

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \subset co(F(x(t))) \; , \; p.p \; t \in J.$$

D'où, toute solution $x(.)$ de $(\mathcal{P}_F)$ est une solution de $(\mathcal{P}_{co})$.
C-à-d

$$A_{x_0}(\tau) \subset A^{co}_{x_0}(\tau).$$

Ce qui achève la démonstration de notre théorème.

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à établir un résultat nouveau d'existence de solutions en dimension finie pour une inclusion différentielle du premier ordre dont le second membre est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs presque convexes.

On remplace la convexité des valeurs de la multi-application dans le résultat donner dans [6] par une condition plus faible introduite la première fois par Cellina-Ornelas dans [3].

La méthode qu'on a utilisé est inspirée de l'étude donnée dans [3].

Bibliographie

[1] J.P.Aubin et A.Cellina, **Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory**, *Spring-verlag, Berlin, Newyork*, (1984).

[2] C.Casting, M.Valadier, **Convex Analysis and Measurable multifunctions**, **Lectures Notes in mathematics**, *Springer-Verlag, Berlin.* 580 (1977).

[3] A.Cellina and A.Ornelas, **Existence of Solutions to Differential Inclusion and to Time Optimal Control Problemes in the Autonomous cas**, *Siam J.control Optim.*Vol.42, No.1, pp.260-265 (2003).

[4] A.Cellina and G.Colombo, **On a Classical Problem of the Calculs of Variations Without Convexity Assumptions**, *Ann.Inst. Henri Poincaré,* Vol.7,n 2,(1990).

[5] L.Cesari, **Optimization-Theory and Applications,** *Springer-Verlag, Newyork,* (1983).

[6] K.Deimling, **Multivalued Differential Equations, Walter de Gruyter**, *Berlin, Newyork,* (1992).

[7] M.Kisielewicz, **Differential Inclusions and Optional Controle**, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.* (1991).

[8] G.V.Smirnov, **Introduction to the theory of Differential Inclusions**, *Graduate Studies in Mathematics* 41, *American Mathematical Society, providence,* (2002).

[9] J.P.Aubin and H.Frankowska, **Set-Valued Analysis**, *Birkhäuser Boston, Basel, Berlin*, (1990).

[10] L.Schwartz, **Analyse-Topologie générale et Analyse Fonctionnelle**, *Herman, Paris* (1970).