République Algérienne
Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche
Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA - JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur un théorème de densité

Présenté par :

- **Lamara Madiha**
- **Bahri Meriem**

Devant le Jury composé de :

N. Arada	MCA	**Université de Jijel**	**Président**
W. Boukrouk	MCB	**Université de Jijel**	**Encadreur**
I. Boutana	MCB	**Université de Jijel**	**Examinateur**

Soutenu le **28/10/2020** Promotion **2019/2020**

Remerciement

Nous adressons en premier lieu notre reconnaissance à ALLAH, notre DIEU tout puissant, de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire, qui nous a permis de nous instruire et d'aller aussi loin dans nos études, qui nous a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui nous a permis d'achever ce travail.

Nous exprimons nos profonds remerciements à notre encadreur, Dr. Wafia Boukrouk pour l'aide qu'elle nous a apportée, pour sa patience et la disponibilité dont elle a fait preuve à notre égard et de son œil critique qui nous a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections de notre mémoire, nous la remercions vivement et nous espérons que nos efforts et nos résultats ont été à la mesure de son attente.

Nous tenons également à remercier les membres du jury, Dr. Nadir Arada et Dr. Imen Boutana, d'avoir accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail.

Nos remerciements s'étendent aussi à tous nos professeurs dont le travail et la compétence nous ont soutenu durant nos études et qui ont contribué à ce couronnement.

Enfin, nous n'oublierons pas de remercier nos parents,nos familles, nos amis et nos collègues à l'université de Jijel, toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin par leur soutien et leurs encouragements.

♣*MADIHA – MYRIEM*♣

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Maman Malika, la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, ma très chère mère, pour tous ses sacrifices, soutiens, encouragements et son amour qui ont été la raison de ma réussite

Mon père Ahmed, pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices

A Mon grand-père et ma grand-mère, je les ai perdus cette année, que Dieu ait pitié d'eux

★ ★ ★

Mes Sœurs, Ahlem, Noura, et l'enfant gâté ZAID (Didoo)

Mon unique frère, Khaled

★ ★ ★

Mon cher Nabil qui était un vrai soutient durant cette période pour moi

★ ★ ★

Ma collègue Myriem

★ ★ ★

Mes très chères amies : Wafia et sa fille Raghoda, Ilham, Amina, Rima, Halima, Nadjwa, Nouha.

Ma cousine Imen

Tous ceux que j'aime et qui m'aiment

J'espère que notre amitié sera éternelle.

♡♠*Madiha*♠♡

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Maman Radia, la femme la plus affectueuse et la plus douce au monde, ma très chère mère, pour tous ses sacrifices, soutiens, encouragements et son amour qui ont été la raison de ma réussite

Mon père Noureddine, pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices

Mon très cher oncle Iyad

★ ★ ★

Mon unique sœur, Sana,

Mon unique frère, Mohamed Saleh

★ ★ ★

Mon Cher Abdel Moumen qui était un vrai soutien durant cette période pour moi.

★ ★ ★

Ma collègue Madiha

★ ★ ★

Toutes mes amies proches

et tous mes cousins et cousines

Tous ceux que j'aime et qui m'aiment

J'espère que notre amitié sera éternelle

♡♠*Myriem*♠♡

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans un espace métrique X, on dit qu'un sous-ensemble A est dense dans un autre sous-ensemble B si $B \subset \overline{A}$. Ceci veut tout tout simplement dire que tout point de B est à distance nulle de A (et peut donc être approché autant que souhaité par un point de A). C'est une notion d'approchabilité. En général, le principal intérêt de la notion de densité est le raisonnement par prolongement. C'est à dire, on montre une propriété d'abord pour un ensemble "simple" en quelque sorte (dénombrable ou bien composé d'éléments particulièrement agréables à manipuler par exemple) puis on la prolonge à un ensemble moins sympathique à l'aide d'un théorème de prolongement (voir [6] pour plus de détails).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach séparable. Dans le cadre de l'analyse multivoque, il est connu que pour une multi-application mesurable $\Gamma : I \rightrightarrows E$, si l'ensemble des sélections intégrables de Γ, S^1_Γ est non vide, alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour la topologie $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$. Ce résultat a été obtenu par plusieurs auteurs dans la dimension finie ([13], [23]) et aussi dans le cas général ([5], [22] et [20]). Dans [10], l'auteur a montré que S^1_Γ est dense dans $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour la norme $\|f\|_{max} = \max\limits_{t',t"\in I} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds \|_E$, et dans la dimension quelconque. Ce théorème de densité fait l'objet principal de ce mémoire, nous donnons une preuve d'une manière très détaillée au cours du deuxième chapitre.

Comme application à ce résultat, dans [10], l'auteur a établi un résultat de relaxation pour une inclusion différentielle du premier ordre, Considérant l'inclusion

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad p.p.t \in I \\ \\ x(0) = a,\end{cases}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application, et $a \in E$, puis considérant sa forme relaxée

$$(\mathcal{II})\begin{cases}\dot{x}(t) \in \overline{co}F(t, x(t)), \quad p.p.t \in I \\ \\ x(0) = a,\end{cases}$$

où $\overline{co}$ est l'enveloppe convexe fermée, l'auteur a pu montrer que sous certaines conditions l'ensemble S_I des solutions de $(\mathcal{I})$ est dense dans S_{II} des solutions de $(\mathcal{II})$, pour la topologie de la convergence uniforme sur l'intervalle I. L'étude détaillée de ce résultat de relaxation fait l'objet du troisième chapitre de ce mémoire.

Notons des résultats de relaxation similaires out été établis en dimension finie (voir exemple [11]). où le second membre F est supposé à valeurs compactes, et où les preuves se basent sur la dimension finie contrairement à [10].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous précisons nos notations et rappelons certaines définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

On note

- $I = [0, T]$ un intervalle de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^d$ l'ensemble des vecteurs de dimension d, à coordonnées réelles.
- X un ensemble non vide.
- (X, θ) un espace topologique.
- (X, d) un espace métrique.
- $B_X(y, r)$ la boule ouverte de X de centre y et de rayon r.
- $\overline{B}_X(y, r)$ la boule fermée de X de centre y et de rayon r.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.

Soit X un espace topologique. On note

- $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X.
- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.

Soit E un espace de Banach et $\|\cdot\|$ la norme de E. On note par

- $C(I, E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues définies sur I à valeurs dans E, muni de la norme $\|f(\cdot)\| = \sup\limits_{t\in I} \|f(t)\|_E$ issue de la distance de la convergence uniforme d_u définie par $d_u(f, g) = \max\limits_{t\in I} \|f(t) - g(t)\|_E$
- $L^1_E(I)$ l'espace de Banach de toutes les applications intégrables au sens de Bochner définies sur I à valeurs dans E, muni de la norme usuelle $\|f(\cdot)\| = \int\limits_I \|f(s)\|_E\, ds$ et de la norme $\|f(\cdot)\|_{max} = \max\limits_{t',t"\in I} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds \|_E$.
- $AC^{1,1}(I, E)$ l'espace des applications absolument continues définies sur I à valeurs dans E, dérivable presque partout avec $f' \in L^1_E(I)$
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de A ($A \subset E$).
- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A.

- $1\!\!\mathrm{I}_A$ ou χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$1\!\!\mathrm{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A; \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

1.2 Espace topologique, espace normé et espace métrique

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de $X(\theta \subset \mathcal{P}(X))$. On dit que θ est une topologie sur X si et seulement si*

1. $\emptyset \in \theta,\ X \in \theta$.
2. $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \theta \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \theta$. *(stabilité par union quelconque)*

3. $\forall (A_i)_{i=1,\cdots,n} \subset \theta \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \theta$ *(stabilité par intersection finie).*

Définition 1.2.2. *Soit θ une topologie sur X. Alors (X, θ) est appelé un espace topologique. On appelle ensemble ouvert de X tout ensemble appartenant à θ, c'est-à-dire*

$$A \text{ est ouvert dans } X \Leftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.2.3. *Soit (X, θ) un espace topologique et $B \subset X$. On dit que B est fermé dans X si et seulement si son complémentaire C_X^B est ouvert.*

Définition 1.2.4. *Soient (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2) deux espaces topologiques et soit*

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2)/x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}.$$

1. *On appelle ouvert premier tout ensemble*

$$O = \{O_1 \times O_2/O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2\}.$$

2. *On appelle ouvert de X tout union d'ouverts premier, i.e.*

$$\theta = \{\cup_k (O_1^k \times O_2^k)/O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}$$

est une topologie sur X appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$ et le couple (X, θ) est appelée l'espace topologique produit de (X_1, θ_1) et (X_2, θ_2).

Définition 1.2.5. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi : & E \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

on dit que φ est une norme sur E si et seulement si

1. *Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.*

2. *Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.*

3. *Pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.*

Définition 1.2.6. *Soit X un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in X \times X$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, x)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.7. *On appelle espace métrique le couple (X, d) formé d'un ensemble X et une distance d définie sur X.*

Définition 1.2.8. *Soit (X, d) un espace métrique, soient $x_0 \in X$ et $r > 0$. On appelle boule de centre x_0 et de rayon r, notée $B_X(x_0, r)$ l'ensemble*

$$\{x \in X / d(x_0, x) < r\}$$

Définition 1.2.9. *Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X. La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a).$$

Définition 1.2.10. *(**L'adhérence**). Soient (X, d_X) un espace métrique, et A une partie non vide de X. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de X défini par*

$$\overline{A} = \{x \in X, d(x, A) = 0\}$$

Corollaire 1.2.11. *Soient A une partie non vide d'un espace métrique (X, d_X) et $x \in X$. Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

Définition 1.2.12. *Soit (E, d_X) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset E$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}; \quad p > q \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Définition 1.2.13. *Soit $(x_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d_X), Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in N}$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow d_X(x_n, x) < \varepsilon$$

Définition 1.2.14. *Un espace métrique (X, d_X) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x,y) = \|x-y\|$.

On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée distance associée à la norme.

La topologie correspondante sera appelée topologie normique.

Définition 1.2.15. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Définition 1.2.16. *Soient A, B deux parties d'un espace métrique X.*
- *On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est partout dense dans X si $\overline{A} = X$.*

1.3 Ensembles convexes

Définition 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel, $a, b \in E$.*
- *On appelle segment fermé d'extrémités a et b (ou tout simplement segment) que l'on note $[a,b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{tel que} \quad \lambda \in [0,1]\}$.*
- *On appelle segment ouvert que l'on note $]a,b[$ l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda) b$ tel que $\lambda \in]0,1[\}$.*

De la même manière on définit les segments $]a,b]$ et $[a,b[$.

Définition 1.3.2. *Une partie A de l'espace vectoriel E est dite convexe si à chaque fois que deux points a, b appartiennent à A le segment $[a,b]$ est contenu dans A, i.e,*

$$\lambda A + (1-\lambda) A \subset A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

ou encore

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda a + (1-\lambda) b \in A.$$

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ le sous ensemble Δ_n, tel que

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ \lambda_i \geq 0 \ , \ i = 1...n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.3.3. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{tel que} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n .$$

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de A est un vecteur de A.*

Définition 1.3.5. *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E. On appelle enveloppe convexe de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de E contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*

Définition 1.3.6. *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de A, qu'on note $\overline{co}(A)$, le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Théorème 1.3.7. *(Théorème 1.4, [17], p. 14) Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co(A)}.$$

Démonstration. Soit $A \subset E$. L'ensemble $\overline{co(A)}$ est un fermé convexe (car $co(A)$ est convexe) contenant A. Mais $\overline{co}(A)$ est le plus petit convexe fermé contenant A.
Donc

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co(A)}.$$

D'autre part, $co(A)$ est contenu dans tout ensemble convexe contenant A (car c'est le plus petit d'entre eux),
d'où

$$co(A) \subset \overline{co}(A).$$

Par conséquent,

$$\overline{co(A)} \subset \overline{\overline{co}(A)} = \overline{co}(A).$$

On conclut que $\overline{co(A)} = \overline{co}(A)$. □

Théorème 1.3.8. *Si $A \subset E$. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \overline{co}(\overline{A}).$$

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$ alors $co(A) \subset co(\overline{A})$ (propriété), d'où

$$\overline{co(A)} \subset \overline{co(\overline{A})},$$

autrement dit, d'après le théorème précédent,

$$\overline{co}(A) \subset \overline{co}(\overline{A}). \tag{1.1}$$

D'autre part, par définition de l'enveloppe convexe fermée, nous avons

$$A \subset \overline{co}(A),$$

d'où

$$\overline{A} \subset \overline{\overline{co}(A)} = \overline{co}(A)$$

(car ce dernier est fermé).
Donc $\overline{co}(A)$ est un convexe fermé qui contient $\overline{A}$. Or, $\overline{co}(\overline{A})$ est le plus petit ensemble de ces ensembles, d'où

$$\overline{co}(\overline{A}) \subset \overline{co}(A). \tag{1.2}$$

Combinant (1.1) et (1.2) on conclut que $\overline{co}(\overline{A}) = \overline{co}(A)$. □

Proposition 1.3.9. *Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *$co(\alpha A) = \alpha co(A)$.*
2. *$co(A + B) = co(A) + co(B)$.*
   Si E un espace vectoriel topologique, alors
3. *Si A est un sous ensemble convexe de E alors $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ le sont aussi.*
4. *$\overline{co}(\alpha A) = \alpha\overline{co}(A)$.*

1.4 Distance de Hausdorff

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [2] et [17]. Dans la suite on considère un espace métrique (X, d) et $A, B, C \subset X$.

Définition 1.4.1. *On appelle distance d'un point $x \in X$ à A, la quantité notée $d(x, A)$ et définie par*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x,\, y).$$

Définition 1.4.2. *On appelle écart entre A et B la quantité notée $e(A, B)$ et définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A}\left(\inf_{y \in B} d(x,\, y)\right).$$

Définition 1.4.3. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B la quantité $\mathcal{H}(A, B)$ définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\Big(e(A, B), e(B, A)\Big),$$

avec la convention

$$\sup \emptyset = 0 \ \textit{et} \ \inf \emptyset = +\infty.$$

Propriétés

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$
2. $e(\emptyset, B) = 0$
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Soit $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X. Alors $\mathcal{P}_f(X)$, muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$, est un espace métrique.

1.5 Quelques notions de mesurabilité

Les définitions et résultats de cette section ont été pris de [1] et [17].

Définition 1.5.1. *(**Tribu, espace mesurable**) Soient X un ensemble non vide et Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 1)$, $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{n} A_n \in \Sigma$

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.

Proposition 1.5.2. *(**Tribu engendrée**) Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de X. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, est appelée tribu engendrée par $\mathcal{A}$, et est usuellement notée $\sigma(\mathcal{A})$.*

$\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ au sens d'une inclusion.

Proposition 1.5.3. ***(Propriétés des tribus engendrées)*** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties de X. Alors,*

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$

(b) Pour toute tribu Σ sur X , $\mathcal{A} \subset \Sigma \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \Sigma$.

Définition 1.5.4. ***(La tribu borélienne)*** *Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par τ, on la note $\mathcal{B}(X)$.*
Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

Définition 1.5.5. ***(Fonction mesurable)*** *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite application Borélienne ou Σ_1-mesurable.

Proposition 1.5.6. *Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(X_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(X_2))$ est mesurable.*

Proposition 1.5.7. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.*

Définition 1.5.8. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, *pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- *Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*
- *Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
- *Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
- *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Proposition 1.5.9. *Croissance et mesure d'une différence*
Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soit $A, B \in \Sigma$ tels que $B \subset A$. Alors

$\mu(B) \leq \mu(A)$.
Si, de plus $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Définition 1.5.10. *Soit X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne. Alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tels que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.5.11. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré positif et A un sous ensemble de X. On dit que A est μ-négligeable ou négligeable, s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*
- *On dit qu'une propriété sur X est vraie μ-presque partout (μ.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.*

Théorème 1.5.12. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \to E$ est mesurable, alors il existe une suite $\{f_n\}_{n \geq 1}$ d'application simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p, et pour μ-presque tout $x \in E$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z;\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu - \text{négligeable}\}.$$

- *La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.*

Soit l'ensemble de parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant

$$\mathcal{A} = \{]a, b[:\ a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ s'appelle la tribu des Boréliens et se note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Définition 1.5.13. *(**Tribu de Lebesgue**). La tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est la tribu complétée de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue.*

Théorème 1.5.14. *(**Mesure de Lebesgue**). Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant*

1. *pour tout intervalle $]a, b[$, $\lambda(]a, b[) = b - a$*

2. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A)$.

Cette mesure λ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Proposition 1.5.15. *([9](**Castaing**), Proposition VII-4, p. 198) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif σ-fini, et μ-complet, E un espace de Banach séparable et soit $f : T \to E$ une application mesurable de T dans E. Alors, il existe une suite $(T_n)_n$ de sous-ensembles mesurables de T, deux à deux disjoints telle que :*

$$\mu(T \setminus \bigcup_n T_n) = 0, \qquad \overline{f(T_n)} \text{ est compact dans } E \quad \forall n.$$

1.6 Intégrale de Bochner

Il s'agit de l'intégrale d'une application à valeurs dans un Banach. Dans toute cette section, E est un espace de Banach séparable que l'on munit de sa tribu borélienne et un espace mesuré (T, Σ, μ).

Les notions de cette section ont été prise de [16].

Définition 1.6.1. *Soit $A \subset X$. La fonction indicatrice (caractéristique) de A est la fonction*

$$\mathbb{1}_A : X \to \{0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A. \end{cases}$$

Définition 1.6.2. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et M un espace métrique. Alors une fonction $g : X \to M$ est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$-mesurable et $g(X)$ est séparable.*

Définition 1.6.3. *(**Fonction simple**). Soient (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach et $f : X \to E$. On dit que f est une application simple si elle mesurable et prend un nombre fini de valeurs.*

Cette notion est la généralisation d'une fonction en escalier (on dit "en escalier" lorsque on départ d'un réel). Toute fonction simple peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}(x) y_i,$$

où les $E_i = f^{-1}(y_i),\ i \in \{1, \cdots, n\}$, *sont des éléments deux à deux disjoints de* Σ *et les* $y_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$, *sont des éléments distincts de* E.
Cette formule est appelée la représentation canonique de f.

Lorsque $f = \sum\limits_{i=1}^{n} 1\!\!\mathrm{I}_{E_i} y_i$ est une fonction simple, on définit l'intégrale de Bochner de f comme suit

$$\int\limits_T f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) y_i.$$

Définition 1.6.4. *Une application mesurable* $f : T \to E$ *est dite intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite d'applications simples* $(f_n)_n$ *telle que*
- $f_n \to f\ \ \mu\ p.p$,
- $\forall n,\ \|f_n - f\|_E(\cdot)$ *est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_T \|f_n - f\|_E(t) d\mu = 0.$$

avec

$$\begin{aligned} \|f\| : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f\|(t) = \|f(t)\|_E. \end{aligned}$$

Et on pose

$$\int_T f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T f_n d\mu.$$

Dans ce cas $\int_A f d\mu$ *est défini pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Théorème 1.6.5. *Une application mesurable* $f : T \to E$ *est intégrable au sens de Bochner si et seulement si* $\int\limits_T \|f\| d\mu < \infty$.

Propriétés

Corollaire 1.6.6. *Si* $f : T \to E$ *est une application intégrable au sens de Bochner et* $A \in \Sigma$, *Alors*

$$\Big\| \int\limits_A f(t) d\mu \Big\|_E \leqslant \int\limits_A \|f(t)\|_E d\mu.$$

Corollaire 1.6.7. *Si* $f, g : T \to E$ *sont deux applications intégrables au sens de Bochner telles que pour tout* $A \in \Sigma$, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, *alors*

$$f(t) = g(t) \quad pour \quad \mu - presque \quad tout \quad t \in T.$$

Proposition 1.6.8. *([17], Lemme 1.1) Nous avons les caractérisations suivantes :*

- *f est Bochner mesurable ;*
- *il existe une suite de fonctions simples définies sur T à valeurs dans E, convergeant simplement vers f ;*
- *il existe une suite de fonctions dénombrable-ment Σ-étagées définies sur T à valeurs dans E, convergeant uniformément sur T vers f.*

On note $L^1_E(T)$ l'ensemble des applications mesurables $f : T \to E$ intégrables au sens de Bochner.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : T \to E$ telles que $f(x) = 0$ μ-p.p sur T, l'espace des classes d'équivalence $L^1_E(T)\backslash\mathcal{N}$ est noté par $L^1_E(T)$, c'est un espace de Banach muni de la norme $\|f\|_1 = \|f\|_{L^1(T,E)} = \int_T \|f(t)\|_E d\mu$.

Dans l'espace $L^1_E(T)$ on considère la norme "faible"

$$\|f\|_{max} = \max_{0\leq t'\leq t"\leq 1} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds\|. \tag{1.3}$$

Cette norme est équivalente á la norme ([7])

$$|||f||| = \max_{0\leq t\leq T} \| \int_0^t f(s)ds\|. \tag{1.4}$$

En effet, pour tout $t \in [0, T]$, et en prenant $t' = 0$ et $t" = t$,

$$\| \int_0^t f(s)ds\| \leq \max_{0\leq t'\leq t"\leq T} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds\| = \|f\|_\omega.$$

D'où,

$$|||f||| \leq \|f\|_\omega. \tag{1.5}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in [0, T]$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds\| &= \| \int_0^{t"} f(s)ds - \int_0^{t'} f(s)ds\| \\ &\leq \| \int_0^{t"} f(s)ds\| + \| \int_0^{t'} f(s)ds\| \\ &\leq 2|||f|||. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|f\|_\omega \leq 2|||f|||. \tag{1.6}$$

De (1.5) et (1.6), on déduit que $\|\cdot\|_\omega$ et $|||\cdot|||$ sont équivalentes.

1.7 Applications continues et absolument continues

Pour plus de détails concernant les notions et les résultats énoncés dans cette section, voir [2], [12], [4] et [24].

Définition 1.7.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $F : X \to Y$. une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X, tel que $f(U) \subset V$. Ou encore, si pour tout ouvert(resp fermé) V de Y , $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp fermé) de X.*

Définition 1.7.2. *Une application f définie sur T à valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints de T ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon\,.$$

Définition 1.7.3. *Soit E un espace de Banach. On définit*
$AC^{1,1}(T, E) = \{f : T \to E : f$ *est absolument continue, dérivable presque partout avec* $f' \in L^1_E(T)\}$.

Proposition 1.7.4. *Soient E un espace de Banach et $f : T \to E$. S'il existe une application $g \in L^1_E(T)$ telle que*

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad \forall\, t \in T.$$

Alors, $f \in AC^{1.1}(T, E)$ et $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur T.

Proposition 1.7.5. *Soit $\varphi : T \to \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, et $E = \{t \in T : \varphi(t) = 0\}$. Alors $mes(\{t \in T : \dot{\varphi}(t) \neq 0\}) = 0$, i.e., $\dot{\varphi}(t) = 0$ p.p sur E.*

Théorème 1.7.6. *([18], Théorème 6.5, p.29) Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec*

$$\mu(E) \leq \delta$$

on a

$$\int_E \parallel f \parallel \leq \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'absolue continuité de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

1.8 Multi-applications et sélections

Les définitions de cette section ont été prises de [2].

Définition 1.8.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y, et on note $F : X \rightrightarrows Y$ ou $F : Y \to \mathcal{P}(Y)$.*

- *On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*

$$dom(F) = \{x \in X;\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle graphe de F, qu'on note $gph(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle image de F, qu'on note $Im(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y;\ \exists x \in X, y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous-ensemble de Y défini par $F(A) = \underset{x \in A}{\cup} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y\ ;\ \exists\, x \in A, y \in F(x)\}.$$

- *On définit la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par*

$$x \in F^{-1}(y) \ \Leftrightarrow\ y \in F(x).$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle image réciproque large de F, le sous-ensemble défini par*
$$F^{-1}(V) = \{x \in X;\ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.8.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*
$$f(x) \in F(x), \forall\, x \in dom(F).$$

1.9 Mesurabilité des multi-applications

Les notions de cette section ont été prise de [2] et [17].

Définition 1.9.1. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace topologique et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1. *On dit que F est Σ-mesurable ou mesurable, si pour tout ouvert V de Y*
$$F^{-1}(V) = \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$
2. *On dit que F est fortement mesurable, si pour tout fermé W de Y*
$$F^{-1}(W) = \{t \in T : F(t) \cap W \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.9.2. *Si $F : T \rightrightarrows Y$ est fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Proposition 1.9.3. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *F est Σ-mesurable.*

(ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : T \to \mathbb{R}$ définie par $d_y(t) = d(y, F(t))$ est Σ-mesurable.*

Théorème 1.9.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable et soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multi-application "mesurable" et $u : T \to E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $t \mapsto F(t, u(t))$ est mesurable.*

Définition 1.9.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y et E deux espaces métriques et soit $f : T \times Y \to E$ une application.*

On dit que f est de Carathéodory si elle est mesurable par rapport à t et continue par rapport à y, c'est à dire pour tout $x \in X$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_y :& T \to E \\ & t \mapsto f_y(t) = f(t, y) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable, et pour tout $t \in T$ fixé l'application

$$\begin{aligned} f_t :& Y \to E \\ & y \mapsto f_t(y) = f(t, y) \end{aligned}$$

est continue.
On dit aussi que f est séparément mesurable, séparément continue.

Proposition 1.9.6. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et E un espace métrique et soit $f : T \times Y \to E$ une "application" de Carathéodory. Alors f est mesurable.*

Lemme 1.9.7. *Soit (Y, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ est μ-complète. Soient E un espace métrique séparable et $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) F est Σ-mesurable.

(b) $gphF \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(E)$.

(c) F est fortement mesurable.

Théorème 1.9.8. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)**. Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées non vides. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 1.9.9. *([24]) Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif avec Σ μ-complète et $\mu - \sigma$ finie. Soient E un espace de Banach séparable, $\Gamma : T \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées, $F : T \rightrightarrows E$ une application mesurable. Alors, la multi-application*

$$\begin{aligned} H :& T \rightrightarrows E \\ & t \mapsto H(t) = \{x \in \Gamma(t); \ \ d(f(t), x) \leq d(f(t), \Gamma(t))\}. \end{aligned}$$

est à valeurs non vides, fermées et elle est mesurable.

1.10 Multi-applications Lipschitziennes

Définition 1.10.1. *([17]) Soient Y, E deux espaces normés et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est Lipschitzienne autour de $y \in Y$ s'il existe une constante positive l et un voisinage $U \subset D(F)$ de y tels que*

$$\forall y_1, y_2 \in U,\ F(y_1) \subset F(y_2) + l \left\| y_1 - y_2 \right\|_E \overline{B}_E$$

Dans ce cas on dit aussi que F est Lipschitzienne sur U.
Elle est Lipschitzienne s'il existe l positive tel que

$$\forall y_1, y_2 \in D(F),\ F(y_1) \subset F(y_2) + l \left\| y_1 - y_2 \right\|_E \overline{B}_E$$

Proposition 1.10.2. *([17]) Soient Y, E deux espaces "$\underline{de\ dimension\ finie}$" et soit $F : Y \rightrightarrows E$ une multi-application Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l. Alors la multi-application $y \mapsto \overline{co}(F(y))$ est Lipschitzienne avec la même constante l.*

Théorème 1.10.3. *(**Représentation de Castaing**). Soient (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable complet. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application mesurable à valeurs fermées.*
Alors, F et Σ-mesurable si et seulement si dom$(F) \in \Sigma$ et il existe une suite $(f_n)_n$ d'applications Σ-mesurable (f_n : dom$(F) \to X$) telle que pour chaque $t \in$ dom(F) on ait $F(t) = \overline{(f_n(t))_n}$.
On dit que $(f_n)_n$ est une représentation de Castaing de F.

CHAPITRE 2

UN THÉORÈME DE DENSITÉ

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable (de dimension quelconque), et $\Gamma : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable. Il est connu que "si l'ensemble des sélections intégrables de Γ, S^1_Γ, est non vide alors il est dense dans son enveloppe convexe fermée $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour la topologie $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$" (voir les travaux [5], [13], [20], [22] et [23]). Dans [10], le résultat principal affirme que sous certaines conditions, S^1_Γ est dense dans $\overline{co}S^1_\Gamma$ pour une certaine norme. L'objectif de ce chapitre est de détailler tuas les arguments relatifs et ce résultat.

Nous commençons d'abord par deux lemmes donnés dans [10], et allons détailler la preuve de l'un des deux.

2.1 Lemmes préparatoires

Lemme 2.1.1. *([10], Lemma 1.1, p. 3) Soit J un sou-ensemble de $\mathbb{R}$ mesurable et borné, soit $(b_i)_i \subset L^1_E(J)$ et $(\lambda_i)_i \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(J), i = 1, 2, \cdots, n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(s) = 1, \forall s \in J$.*
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $\{M_i\}_{i=1}^n$ de J telle que

$$\sup_{[t',t"]\subset\mathbb{R}} \left\| \int_{[t',t"]\cap J} \Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s) b_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s) b_i(s) \Big] ds \right\|_E < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

• Supposons pour l'instant que J est un intervalle. Soient $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_n$ des fonctions constantes par morceaux de J dans E telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_J \left\| b_i(s) - \bar{b}_i(s) \right\|_E ds < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.2}$$

Soit $\{I^j\}_{j=1}^{P}$ une partition de J en intervalles ordonnés de gauche à droite de sorte que pour $j = 1, 2, \cdots, p$, sur chaque I^j chaque fonction $\bar{b}_i$ prend une valeur constante, disons α_i^j,

i.e. pour tout $s \in I^j$,

$$\bar{b}_i(s) = \alpha_i^j, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

et, de plus,

$$\max_{j=1,2,\cdots,p} \sum_{i=1}^{n} \int_{I^J} \left\| b_i(s) \right\| ds < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.3}$$

Pour chaque j fixé, on a la remarque suivante pour I^j

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{I^j} \lambda_i(s) ds = \mu(I^j),$$

en effet, comme nous avons par hypothèse

$$\forall s \in I^j, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s) ds = 1,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{I^j} \lambda_i(s) ds = \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s) ds = \int_{I^j} 1 ds = \mu(I^j).$$

Soit alors (en pensant à la remarque en haut), $\{I_i^j\}_{i=1}^{n}$ une partition de I^j en sous-intervalles tels que

$$\forall i = \overline{1, n}, \ \int_{I^j} \lambda_i(s) ds = \mu(I_i^j), \tag{2.4}$$

l'existence d'une telle partition est vérifiée. En effet,

• Pour $j = 1$ par exemple, notons par

$$l_i^1 := \int_{I^1} \lambda_i(s) ds, \ \forall i \in \overline{1, n},$$

et soit

$$I_i^1 := \left[a_J + \sum_{k=1}^{i-1} l_k^1, a_J + \sum_{k=1}^{i} l_k^1 \right], \ \forall i \in \overline{1, n},$$

(par construction ils sont disjoints et chaque $\mu(I_i^1) = l_i^1 := \int_{I^1} \lambda_i(s) ds$, c.à.d (2.4) est satisfaite).

Il suffit alors de prendre

$$I^1 = \bigcup_{i=1}^{n} I_i^1. \quad (\textit{donc par construction c'est une partition})$$

On fait ça pour le j fixé en général, c'est à dire, pour chaque j, posons

$$l_i^j := \int_{I^j} \lambda_i(s)ds, \quad \forall i \in \overline{1,n}.$$

Soit alors,

$$I_i^j := \left[a_J + \sum_{k=1}^{i-1} {l^j}_k, a_J + \sum_{k=1}^{i} {l^j}_k\right] \quad \forall i \in \overline{1,n},$$

et

$$I^j = \bigcup_{i=1}^{n} {I^j}_i.$$

Nous pouvons aussi montrer que $\forall i_0 \in \overline{1,n}$,

$$\begin{aligned}
\int_{I^j} \chi_{I_{i_0}^j}(s)ds &= \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i^j} \chi_{I_{i_0}^j}(s)ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i^j} \chi_{I_{i_0}^j}(s)ds \\
&= \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \int_{I_i^j} \chi_{I_{i_0}^j}(s)ds + \int_{I_{i_0}^j} \chi_{I_{i_0}^j}(s)ds \\
&= \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \int_{I_i^j} 0ds + \int_{I_{i_0}^j} 1ds \\
&= 0 + \mu(I_{i_0}^j) \\
&= \mu(I_{i_0}^j) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
s \in I^j = \bigcup_{i=1}^{n} I_i^j &\Leftrightarrow \exists! i_0 \in \overline{1,n}; s \in I_{i_0}^j \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in \overline{1,n}; s \in I_{i_0}^j \ \ et \ \ \forall i \neq i_0, s \notin I_i^j \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in \overline{1,n}; s \in \bigcup_{j=1}^{p} I_{i_0}^j \ \ et \ \ \forall i \neq i_0, s \notin \bigcup_{j=1}^{p} I_i^j \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in \overline{1,n}; s \in M_{i_0} \ \ et \ \ \forall i \neq i_0, s \notin M_i \\
&\Leftrightarrow \exists i_0 \in \overline{1,n}; \chi_{M_{i_0}}(s) = 1 \ \ et \ \ \forall i \neq i_0, \chi_{M_i}(s) = 0,
\end{aligned}$$

où $M_i = \bigcup_{j=1}^{p} I_i^j$. Donc, pour tout $s \in I^j$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i^j}(s)\bar{b}_i(s) &= \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \chi_{I_i^j}(s)\bar{b}_i(s) + \chi_{I_{i_0}^j}(s)\bar{b}_i(s) \\
&= \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} 0\bar{b}_i(s) + 1\bar{b}_i(s) \\
&= \sum_{i=1, i\neq i_0}^{n} \chi_{M_i}(s)\bar{b}_i(s) + \chi_{M_{i_0}}(s)\bar{b}_i(s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_{I_i^j}(s)\bar{b}_i(s) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que chaque M_i est mesurable (union finie d'intervalles donc union fini d'ensembles mesurables), et qu'ils forment une partition de J, c.à.d qu'ils sont deux à deux disjoints et que leur union donne J.

Posons

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)b_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)b_i(s) \\
\bar{\phi}(s) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\bar{b}_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)\bar{b}_i(s).
\end{aligned}$$

En utilisant(2.4), (2.5), (2.6) et pour chaque j fixé nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{I^j} \Big[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\bar{b}_i(s)\Big] ds &= \int_{I^j} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\alpha_i^j\right] ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{I^j} \lambda_i(s)\alpha_i^j ds\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i^j \int_{I^j} \lambda_i(s) ds\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i^j \mu({I_i}^j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i^j \int_{I^j} \chi_{I_i^j}(s) ds\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{I^j} \chi_{I_i^j}(s)\alpha_i^j ds\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{I^j} \chi_{I_i^j}(s)\bar{b}_i(s) ds\right] \\
&= \int_{I^j} \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_{I_i^j(s)}\bar{b}_i(s)\right] ds \\
&= \int_{I^j} \left[\sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)\bar{b}_i(s)\right] ds,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_{I^j} \bar{\phi}(s)ds = \int_{I^j} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)\bar{b}_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)\bar{b}_i(s) \right] ds = 0_E. \tag{2.7}$$

D'autre part, pour tout ensemble mesurable A de I^j, on a

$$\begin{aligned}
\int_A \|\bar{\phi}(s)\|_E ds &= \int_A \| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s))\bar{b}_i(s)\|_E ds \\
&\leq \int_A \sum_{i=1}^{n} \|(\lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s))\bar{b}_i(s)\|_E ds \\
&= \int_A \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s) \mid \|\bar{b}_i(s)\|_E ds \\
&\leq \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s) \mid \|\bar{b}_i(s)\|_E ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{I^j} \mid \lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s) \mid \|\bar{b}_i(s)\|_E ds \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{I^j} \|\bar{b}_i(s)\|_E ds
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit maintenant $[t', t"]$ un sous-intervalle arbitraire de J.

$$[t', t"] = \left([t', t"] \cap I^{j'} \right) \cup \left(\bigcup_{j=j'+1}^{j"-1} I^j \right) \cup \left([t', t"] \cap I^{j"} \right) \quad (disjoints)$$

en utilisant (2.7) et (2.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left\| \int_{[t',t"]\cap I^{j'}} \bar{\phi}(s)ds + \int_{[t',t"]\cap I^{j"}} \bar{\phi}(s)ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{[t',t"]\cap I^{j'}} \bar{\phi}(s)ds \right\| + \left\| \int_{[t',t"]\cap I^{j"}} \bar{\phi}(s)ds \right\| \\
&\leq \int_{[t',t"]\cap I^{j'}} \left\| \bar{\phi}(s) \right\| ds + \int_{[t',t"]\cap I^{j"}} \left\| \bar{\phi}(s) \right\| ds \\
&= \int_{A^1} \left\| \bar{\phi}(s) \right\| ds + \int_{A^2} \left\| \bar{\phi}(s) \right\| ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{I^{j'}} \|\bar{b}_i(s)\| ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{I^{j"}} \|\bar{b}_i(s)\| ds \\
&= \int_{I^{j'}} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| ds + \int_{I^{j"}} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| ds \\
&\leq \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| \right) ds + \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| \right) ds \\
&\leq 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| \right) ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{[t',t"]} \phi(s)ds \right\| &= \left\| \int_{[t',t"]} (\bar{\phi}(s) + \phi(s) - \bar{\phi}(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{[t',t"]} \bar{\phi}(s)ds + \int_{[t',t"]} (\phi(s) - \bar{\phi}(s))ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{[t',t"]} \bar{\phi}(s)ds \right\| + \left\| \int_{[t',t"]} (\phi(s) - \bar{\phi}(s))ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{[t',t"]} \bar{\phi}(s)ds \right\| + \int_{[t',t"]} \|\phi(s) - \bar{\phi}(s)\| ds \\
&= Q_1 + Q_2.
\end{aligned}$$

De simples calculs montrent que

$$\begin{aligned}
Q_1 &\leq 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s)\| ds \\
&\leq 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s) - b_i(s) + b_i(s)\| ds \\
&\leq 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|\bar{b}_i(s) - b_i(s)\| + \|b_i(s)\| \Big) ds \\
&\leq 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s) - b_i(s)\| ds + 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \|b_i(s)\| ds \\
&\leq 2 \int_{J} \sum_{i=1}^{n} \|\bar{b}_i(s) - b_i(s)\| ds + 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I^j} \sum_{i=1}^{n} \|b_i(s)\| ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \int_{[t',t"]} \|\phi(s) - \bar{\phi}(s)\| ds \\
&= \int_{[t',t"]} \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s)(b_i(s) - \bar{b}_i(s)) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s)(b_i(s) - \bar{b}_i(s)) \| ds \\
&= \int_{[t',t"]} \| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s))(b_i(s) - \bar{b}_i(s)) \| ds \\
&\leq \int_{[t',t"]} \left(\sum_{i=1}^{n} \|(\lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s))(b_i(s) - \bar{b}_i(s))\| \right) ds \\
&= \int_{[t',t"]} \left(\sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i(s) - \chi_{M_i}(s) \mid \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| \right) ds \\
&\leq \int_{[t',t"]} \left(\sum_{i=1}^{n} 2 \, \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| \right) ds \\
&= 2 \int_{[t',t"]} \left(\sum_{i=1}^{n} \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| \right) ds \\
&\leq 2 \int_{J} \left(\sum_{i=1}^{n} \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| \right) ds.
\end{aligned}$$

Prenant en compte (2.2) et (2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{[t',t"]} \phi(s) ds \right\| &\leq Q_1 + Q_2 \\
&= 4 \int_{J} \left(\sum_{i=1}^{n} \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| \right) ds + 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \int_{I_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \|b_i(s)\| \right) ds \\
&= 4 \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{J} \|b_i(s) - \bar{b}_i(s)\| ds \right) + 2 \max_{j=1,2,\cdots,p} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{I_j} \|b_i(s)\| \right) ds \\
&< 4\frac{\varepsilon}{6} + 2\frac{\varepsilon}{6} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

• Soit maintenant J un ensemble mesurable borné arbitrairement dans $\mathbb{R}$, comme il est borné on peut trouver un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui l'englobe. Nous étendons les fonctions b_i, $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ aux fonctions $\widetilde{b_i}$, $\widetilde{\lambda_i}$ définies sur l'intervalle I comme suit,

$$\forall i \in \overline{1,n}, \quad \widetilde{b_i} : I \to E$$

$$s \mapsto \widetilde{b_i}(s) = \begin{cases} b_i(s) & \text{si } s \in J, \\ 0_E & \text{si } s \in I \setminus J. \end{cases}$$

$$\forall i \in \overline{2,n}, \quad \widetilde{\lambda_i} : I \to \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \widetilde{\lambda_i}(s) = \begin{cases} \lambda_i(s) & \text{si } s \in J \\ 0_{\mathbb{R}} & \text{si } s \in I \setminus J. \end{cases}$$

$\widetilde{\lambda_1} : I \to \mathbb{R}$

$$s \mapsto \widetilde{\lambda_1}(s) = \begin{cases} \lambda_1(s) & \text{si } s \in J \\ 1 & \text{si } s \in I \setminus J. \end{cases} \text{(pour satisfaire la condition de somme égale 1)}$$

Par ce qui précède (cf. la première partie de la démonstration), il existe une partition mesurable $\{\widetilde{M_i}\}_{i=1}^n$ de I telle que

$$\left\| \int_{[t',t"]\cap I} \left[\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i(s)\widetilde{b}_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)\widetilde{b}_i(s) \right] ds \right\|_E < \varepsilon, \ \ (\forall [t',t"] \subset \mathbb{R}).$$

mais

$$[t',t"] \cap I = [t',t"] \cap (J \cup C_I^J) = ([t',t"] \cap J) \cup ([t',t"] \cap C_I^J),$$

d'où $\forall [t',t"] \subset \mathbb{R}$,

$$\left\| \int\limits_{[t',t"]\cap J} \left[\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i(s)\widetilde{b}_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)\widetilde{b}_i(s) \right] ds + \int\limits_{[t',t"]\cap C_I^J} \left[\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i(s)\widetilde{b}_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)\widetilde{b}_i(s) \right] ds \right\|_E < \varepsilon,$$

et donc

$$\left\| \int\limits_{[t',t"]\cap J} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(s)b_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)b_i(s) \right] ds + \int\limits_{[t',t"]\cap C_I^J} \left[1.\ \widetilde{b}_1(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)\ 0_E \right] ds \right\|_E < \varepsilon,$$

or $\widetilde{b}_1(s) = 0_E, \ \forall s \in [t',t"] \cap C_I^J$, et donc

$$\left\| \int\limits_{[t',t"]\cap J} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(s)b_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{\widetilde{M}_i}(s)b_i(s) \right] ds \right\|_E < \varepsilon.$$

En posant pour tout $i = \overline{1,n}$, $M_i = \widetilde{M_i} \cap J$, on obtient

$$\left\| \int\limits_{[t',t"]\cap J} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i(s)b_i(s) - \sum_{i=1}^n \chi_{M_i}(s)b_i(s) \right] ds \right\|_E < \varepsilon.$$

En plus, chaque M_i est mesurable, inclut dans J, borné J, et les M_i constituent une partition pour J. En effet,

$$\bigcup_{i=1}^n M_i = \bigcup_{i=1}^n (\widetilde{M_i} \cap J) = (\bigcup_{i=1}^n \widetilde{M_i}) \cap J = I \cap J = J,$$

et pour $i \neq j$,

$$M_i \cap M_j = (\widetilde{M_i} \cap J) \cap (\widetilde{M_j} \cap J) = (\widetilde{M_i} \cap \widetilde{M_j}) \cap J = \emptyset \cap J = \emptyset,$$

complétant ainsi la preuve. $\square$

Lemme 2.1.2. *([10], Lemma 1.2, p. 5) Soit (X, Σ) un espace mesurable, $(c_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications mesurables de X dans E, et $c : X \to E$ une application mesurable telles que*

$$c(t) \in \overline{co}\{c_i(t),\ i \geq 0\},\ \ \forall t \in X.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite croissante,$(X^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \Sigma$ avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^n = X$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe n fonctions mesurables $\lambda_i^n \geqslant 0$ sur $X^n(i = 1, 2, \cdots, n)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(t) = 1,\ \forall t \in X^n$$

$$\left\| c(t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(t) c_i(t) \right\|_E < \varepsilon,\ \ \forall t \in X^n.$$

2.2 Théorème de densité

Pour un intervalle $I = [0, T]$ de $\mathbb{R}$, et une multi-application $\Gamma : I \rightrightarrows E$, on note

$$S_\Gamma = \{f : I \to E \ / \ \ f(t) \in \Gamma(t), \forall t \in I\}.$$

$$S_\Gamma^1 = \{f \in S_\Gamma \ / \ f \in L_E^1(I)\}.$$

où $L_E^1(I)$ est l'espace des fonctions Bochner intégrables. Nous avons

$$\overline{co}\Gamma : I \rightrightarrows E$$

$$s \mapsto (\overline{co}\Gamma)(s) = \overline{co}(\Gamma(s)).$$

On note,

$$\begin{aligned} S_{\overline{co}\Gamma}^1 &= \{f \in S_{\overline{co}\Gamma} : f \in L_E^1(I)\} \\ &= \{f \in L_E^1(I);\ f(t) \in \overline{co}(\Gamma(t)), \forall t \in I\} \\ &= \overline{co}S_\Gamma^1. \end{aligned}$$

Notons que

$$S^1_\Gamma \subset S^1_{\overline{co}\Gamma} \subset (L^1_E(I), \|.\|_{max})$$

avec

$$\|f\|_{max} = \max_{t',t"\in I} \| \int_{t'}^{t"} f(s)ds\|_E, \ \ \forall f \in L^1_E(I).$$

Théorème 2.2.1. *([10], Corollary 1.1, p.7) Soit $\Gamma : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées (admet une représentation de Castaing). Supposons que Γ admet une sélection intégrable ($S^1_\Gamma \neq \emptyset$).*
Alors, S^1_Γ est dense dans $S^1_{\overline{co}\Gamma}$ pour la norme $\|.\|_{max}$.

Démonstration. commençons par remarquer que

$$S^1_\Gamma \textit{ est dense dans } S^1_{\overline{co}\Gamma} \textit{ pour la norme } \|\cdot\|_{\max} \Leftrightarrow S^1_{\overline{co}\Gamma} \subset \overline{S^1_\Gamma}$$

et que

$$\begin{aligned} S^1_{\overline{co}\Gamma} \subset \overline{S^1_\Gamma} &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, a \in \overline{S^1_\Gamma} \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, d(a, S^1_\Gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, \inf_{b\in S^1_\Gamma} d_{\max}(a,b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, \forall \varepsilon > 0, \inf_{b\in S^1_\Gamma} d_{\max}(a,b) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, \forall \varepsilon > 0, \exists b(\varepsilon) \in S^1_\Gamma, d_{\max}(a, b(\varepsilon)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}, \forall \varepsilon > 0, \exists b(\varepsilon) \in S^1_\Gamma, \|a - b(\varepsilon)\|_{max} < \varepsilon \end{aligned}$$

Soit $a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}$ (on sait que $S^1_\Gamma \subset S^1_{\overline{co}\Gamma}$, et comme, Notre objectif est de construire par hypothèse, le premier est non vide alors le deuxième n'est pas vide non plus) et soit $\varepsilon > 0$.
$\exists$? $b_\varepsilon \in S^1_\Gamma$ tels que $\|a - b(\varepsilon)\|_{max} < \varepsilon$? .
Soit $a_0 \in S^1_\Gamma$.
La démonstration sera divisée en cinq parties.
Étape 1. Pour $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $J \subset I$ et $\delta > 0$ tels que pour tout ensemble mesurable M dans J avec $\mu(M) < \delta$

$$\int_{(I\setminus J)\bigcup M} \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.9}$$

En effet, d'une part comme la fonction $\|a(\cdot)\| + \|a_0(\cdot)\|$ est Lebesgue intégrable sur I(car a, a_0 sont Bochner intégrables), alors considérons la mesure σ associée à l'intégrale,

$$\begin{aligned}&\sigma : \mathbb{L}_I \to \mathbb{R}\\ &\qquad A \mapsto \sigma(A) = \int_A \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds.\end{aligned}$$

Puisqu'elle est régulière, alors pour $\frac{\varepsilon}{6} > 0$ il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que

$$\sigma(I \setminus J) = \int_{I\setminus J} \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds < \frac{\varepsilon}{6},$$

d'autre part, comme la fonction $\|a(\cdot)\|+\|a_0(\cdot)\|$ est Lebesgue intégrable sur J ($J \subset I \subset \mathbb{R}$), alors grâce au Théorème 1.7.6, pour $\frac{\varepsilon}{6} > 0$ il existe $\delta > 0$ tels que pour tout ensemble mesurable M dans J avec $\mu(M) < \delta$

$$\int_M \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds < \frac{\varepsilon}{6}.$$

On conclut que

$$\begin{aligned}\int_{(I\setminus J)\cup M} \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds &= \int_{I\setminus J} \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds + \int_M \Big[\|a(s)\| + \|a_0(s)\|\Big] ds\\ &< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

<u>Étape 2.</u> D'aprèes nos hypothèses, Γ admet une représentation de Castaing $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

$$\forall s \in I, \quad \Gamma(s) = \overline{\{a_i\}_{i=1}^{\infty}}.$$

et donc d'après le propriété démontrée

$$\forall s \in I, \quad \overline{co}(\Gamma(s)) = \overline{co}(\overline{\{a_i\}_{i=1}^{\infty}}) = \overline{co}(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

et comme $a \in S^1_{\overline{co}\Gamma}$, alors

$$\forall s \in I(\textit{en particulier sur } J), \quad a(s) \in (\overline{co}\Gamma)(s) = \overline{co}(\Gamma(s)) = \overline{co}(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}).$$

On peut donc appliquer le Lemme 2.1.2, avec $X := J$, $c := a : X \to E$, $c_i := a_i : X \to E$, $i \geq 1$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3\mu(J)}$. Il vient qu'il existe un ensemble mesurable J^1_ε avec $\mu(J \setminus J^1_\varepsilon) < \frac{\delta}{2}$ (on en déduit l'existence d'une suite croissantes d'ensembles mesurables $(X^n)_n$, d'où la suite $(X \setminus X^n)_n = (J \setminus X^n)_n$ est décroissante et donc la suite des mesures $\mu(J \setminus X^n)_n$ est décroissante, dès qu'on arrive à $\mu(J \setminus X^{n_0}) < \frac{\delta}{2}$ on prend $J^1_\varepsilon := X^{n_0}$) avec n fonctions mesurables positives $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_n^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(s) = 1$, $\forall s \in J_\varepsilon^1$ (donc chaque fonction est bornée, $0 \leq \lambda_i^n(s) \leq 1$, $\forall s \in J_\varepsilon^1$) tel que

$$\left\| a(s) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(s) a_i(s) \right\|_E < \frac{\varepsilon}{3\mu(J)},\ \forall s \in J_\varepsilon{}^1 \tag{2.10}$$

Étape 3.

En outre, il existe un ensemble mesurable $J_\varepsilon^2 \subset J_\varepsilon^1$ avec $\mu(J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2) < \frac{\delta}{2}$ tel que chaque $a_i(J_\varepsilon^2)$ est inclus dans un compact de E. En effet, puisque E^n est un espace de Banach séparable, et la fonction

$$f : J_\varepsilon^1 \to E^n$$
$$s \mapsto f(s) = (a_1(s), a_2(s), \cdots, a_n(s))$$

est mesurable ([1]), alors d'après la Proposition 1.5.15, il existe une suite croissante $(N_j)_{j=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de J_ε^1 tel que $\lim_{j\to\infty} \mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) = 0$ et pour chaque j, $f(N_j)$ est inclus dans un compact de E^n. Donc

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists j_0 \in \mathbb{N}^* : \quad (j \geq j_0) \Rightarrow (\mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) < \varepsilon')$$

pour $\varepsilon' = \frac{\delta}{2}$,

$$\exists p \in \mathbb{N}^* : \quad (j \geq p) \Rightarrow (\mu(J_\varepsilon^1 \setminus N_j) < \frac{\delta}{2}).$$

Alors on prend l'ensemble $J_\varepsilon^2 := N_p$, $f(J_\varepsilon^2) = (a_1(J_\varepsilon^2), a_2(J_\varepsilon^2), \cdots, a_n(J_\varepsilon^2))$ est inclus dans un compact de E^n (chaque composante est incluse dans un compact de E).

Étape 4. En résumé, nous avons

- J_ε^2 est borné (car inclus dans $\subset\ I = [0, T]$), il est mesurable (car $J_\varepsilon^2 := N_p$),
- $\forall s \in J_\varepsilon^1$, en particulier, $\forall s \in J_\varepsilon^2$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n(s) = 1$,
- Touts les λ_i sont mesurables et bornés donc Lebesgue intégrables sur J_ε^1, (et en particulier sur J_ε^2.) Toutes les a_i sont mesurables sur I, en particulier sur J_ε^2, mais pour $i = \overline{1, n}$, elles sont bornées sur J_ε^2 car pour chacune d'entre elles $a_i(J_\varepsilon^2)$ est inclut dans un compact (donc borné)de E. Donc pour $i = \overline{1, n}$, les a_i sont Bochner intégrables sur J_ε^2.

On peut appliquer le Lemme 2.1.1, avec $J := J_\varepsilon^2$, $\lambda_i := \lambda_i^n : J_\varepsilon^2 \to \mathbb{R}^+$, $b_i := a_i : J_\varepsilon^2 \to E$, $i = \overline{1, n}$, et on l'applique pour $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$, nous obtenons une partition mesurable $\{M_i\}_{i=1}^n$ de J_ε^2 tel que

$$\sup_{[t', t"] \subset \mathbb{R}} \left\| \int_{[t', t"] \cap J_\varepsilon^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s) a_i(s) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s) \right] ds \right\|_E < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.11}$$

Soit $M_0 = I \setminus J_\varepsilon^2$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &: I \to E \\ s &\mapsto b_\varepsilon(s) = \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s). \end{aligned}$$

C'est une fonction somme finie de produit d'applications mesurables sur I : les $a_i, i = \overline{1,n}$ et a_0 et les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables χ_{M_i},(remarquez que les a_i ne sont pas forcément Bochner intégrables sur "I" contrairement aux autres) donc elle est mesurable sur I. Mais elle est aussi bornée sur I par conséquent, elle est Bochner intégrable sur I. En plus, b_ε appartient à S_Γ car

$$\forall s \in I, \quad b_\varepsilon(s) = \begin{cases} a_0(s) \in \Gamma(s) \text{ (sélection de } \Gamma \text{)} & \text{si } s \in M_0 \\ a_i(s) \in \Gamma(s) \text{ (représentation de Castaing)} & \text{si } s \in M_i \; avec \; i \in \overline{1,n}. \end{cases}$$

donc $b_\varepsilon \in S_\Gamma^1$.
<u>Étape 5.</u> Soit $[t', t"] \subset I$. Il nous reste qu'à montrer que

$$\psi(t', t") := \left\| \int_{[t', t"]} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds \right\|_E < \varepsilon.$$

Notons que comme $[t', t"] \subset I$, alors

$$\begin{aligned} [t', t"] = [t', t"] \cap I = [t', t"] \cap ((I \setminus J_\varepsilon^2) \cup J_\varepsilon^2) &= ([t', t"] \cap (I \setminus J_\varepsilon^2)) \cup ([t', t"] \cap J_\varepsilon^2) \\ &= ([t', t"] \setminus J_\varepsilon^2) \cup ([t', t"] \cap J_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

et ces deux derniers ensembles sont disjoints, d'où

$$\int_{[t', t"]} [b_\varepsilon(s) - a(s) r] ds = \int_{[t', t"] \setminus J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds + \int_{[t', t"] \cap J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds$$

donc

$$\begin{aligned} \psi(t', t") &= \left\| \int_{[t', t"] \setminus J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds + \int_{[t', t"] \cap J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds \right\|_E \\ &\leq \left\| \int_{[t', t"] \setminus J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds \right\|_E + \left\| \int_{[t', t"] \cap J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds \right\|_E \end{aligned}$$

• Par les propriétés de l'intégrale et la norme, et en utilisant (2.9)

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{[t',t"]\setminus J_\varepsilon^2} [b_\varepsilon(s) - a(s)] ds \right\|_E &\leq \int_{[t',t"]\setminus J_\varepsilon^2} \|[b_\varepsilon(s) - a(s)]\|_E \, ds \\
&= \int_{[t',t"]\setminus J_\varepsilon^2} \|[a_0(s) - a(s)]\|_E \, ds \\
&\leq \int_{[t',t"]\setminus J_\varepsilon^2} (\|a_0(s)\|_E + \|a(s)\|_E) ds \\
&\leq \int_{I\setminus J_\varepsilon^2} (\|a_0(s)\|_E + \|a(s)\|_E) ds \\
&= \int_{(I\setminus J)\cup(J\setminus J_\varepsilon^2)} (\|a_0(s)\|_E + \|a(s)\|_E) ds \\
&= \int_{(I\setminus J)\cup M} (\|a_0(s)\|_E + \|a(s)\|_E) ds \\
&< \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

car $[t', t"] \setminus J_\varepsilon^2 \subset M_0$ d'où $\forall s \in [t', t"] \setminus J_\varepsilon^2$,

$$b_\varepsilon(s) = \sum_{i=0}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s) = \chi_{M_0}(s) a_0(s) + \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(s) a_i(s) = 1.a_0(s) + \sum_{i=1}^{n} 0.a_i(s) = a_0(s).$$

Pour $M = (J \setminus J_\varepsilon^2)$
$\mu(M) = \mu(J \setminus J_\varepsilon^2) = \mu((J \setminus J_\varepsilon^1) \cup (J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2)) = \mu(J \setminus J_\varepsilon^1) + \mu(J_\varepsilon^1 \setminus J_\varepsilon^2) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ (disjoints).

• Pour la deuxième quantité $Q := \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [b_\varepsilon(s) - a(s)]ds \right\|_E$, et en utilisant (2.10), (2.11)

$$\begin{aligned}
Q &= \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [b_\varepsilon(s) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s)]ds \right\|_E \\
&= \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [b_\varepsilon(s) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s)]ds + \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [\sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s)]ds \right\|_E \\
&\leq \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [b_\varepsilon(s) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s)]ds \right\|_E + \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [\sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s)]ds \right\|_E \\
&\leq \left\| \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} [b_\varepsilon(s) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s)]ds \right\|_E + \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s) \right\|_E ds \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \int_{[t',t"]\cap J^2_\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s) \right\|_E ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \int_{J^1_\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i(s)a_i(s) - a(s) \right\|_E ds \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \int_{J^1_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{3\mu(J)} ds \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\mu(J)} \mu(J^1_\varepsilon) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\mu(J)} \mu(J) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

car $[t',t"] \cap J^2_\varepsilon \subset J^2_\varepsilon$ d'où $\forall s \in [t',t"] \cap J^2_\varepsilon, s \in J^2_\varepsilon$, s n'appartient pas à M_0

$$b_\varepsilon(s) = \chi_{M_0}(s)a_0(s) + \sum_{i=1}^n \chi_{M_i}(s)a_i(s) = 0.a_0(s) + \sum_{i=1}^n \chi_{M_i}(s)a_i(s) = \sum_{i=1}^n \chi_{M_i}(s)a_i(s).$$

On conclut que

$$\psi(t',t") < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ceci complète la preuve. □

CHAPITRE 3

APPLICATION À UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE

Il s'agit d'une application du théorème de densité du chapitre précédent dans le domaine des inclusions différentielles. Considérons les deux inclusions différentielles du premier ordre

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\dot{x}(t)\in F(t,x(t)), \quad p.p.t\in I\\[2ex] x(0)=a,\end{cases}$$

$$(\mathcal{I}\mathcal{I})\begin{cases}\dot{x}(t)\in \overline{co}F(t,x(t)), \quad p.p.t\in I\\[2ex] x(0)=a,\end{cases}$$

où $I=[0,T]$ $(T\in\mathbb{R})$, $a\in E$ et $F:\ I\times E\rightrightarrows E$ une multi-application, avec E un espace de Banach séparable de dimension quelconque, $\overline{co}$ désigne l'enveloppe convexe fermée.

Le problème $(\mathcal{I}\mathcal{I})$ représente une forme relaxée du problème $(\mathcal{I})$. Il est clair que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{I}\mathcal{I})$, noté S_{II}, est plus large que celui de $(\mathcal{I})$, noté S_I.

On voudrait comparer et chercher une relation topologique entre S_I et S_{II}. Pour comparer les solutions de $(\mathcal{I})$ liées à F et les solutions de $(\mathcal{I}\mathcal{I})$ liées à $\overline{co}F$, on regarde la relation entre les sélections de F et celles de $\overline{co}F$: cette relation, justement, a été donnée par le théorème de densité du chapitre précédent (Théorème 2.2.1), C'est une relation de densité par rapport à une norme faible dans la dimension quelconque.

En s'appuient sur ce résultat, l'auteur dans [10] a démontré que sous certaines conditions, S_I est dense dans S_{II} par rapport à la distance de la convergence uniforme. C'est le théorème de relaxation en question.

Notre objectif est de présenter au cours de ce chapitre la démonstration de ce théorème (Théorème 3.1.2) d'une manière détaillée.

3.1 Énoncé et démonstration du résultat principal

Commençons par définir la solution à notre problème.

Définition 3.1.1. *Une solution pour $(\mathcal{I})$ est une application $x : I \to E$*

- *définie, continue sur I $(x \in C(I, E))$,*
- *vérifiant $x(0) = a$,*
- *absolument continue (donc dérivable presque partout) sur I,*
- *dont dérivée vérifie $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, p.p. $t \in I$,*

autrement dit,

$$x \in S_I \Leftrightarrow \exists f \in L^1_E(I) : x(t) = \underbrace{a + \int_0^t f(s)ds}_{u_f} \;\; et \;\; f(t) \in F(t, x(t)),\ \forall t \in I.$$

Rappelons que

$$S_I \subset AC^{1,1}(I, E) \subset (C(I, E), d_u).$$

Théorème 3.1.2. *([10], Theorem 2.1, p. 10) On suppose que la multi-application F est à valeurs non vides fermées et que*

(**a**) $\forall y \in E$,

$$\begin{aligned} F(\cdot, y) = F_y : I &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto F_y(t) = F(t, y). \end{aligned}$$

est mesurable et admet une sélection intégrable.

(**b**) *Pour presque tout $t \in I$, $F(t, \cdot) = F_t$ est localement Lipschitzienne avec coefficient L_t*

tel que la fonction $L(t) = L_t$ est intégrable sur I.
Autrement dit, $\forall K \subset E$ compact, $\exists \rho_{(K)} > 0$, $\exists L_{(K)}(\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$ tels que p.p. $t \in I$,

$$\mathcal{H}\Big(F(t, y_1), F(t, y_2)\Big) \leq L_{(K)}(t)\|y_1 - y_2\|_E, \quad \forall y_1, y_2 \in B_E(y, \rho),\ \forall y \in K.$$

Alors, S_I est dense dans S_{II} pour la topologie de la convergence uniforme sur I.

Afin d'établir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1.3. *([10], p. 10) Soit $F : I \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées, et vérifiant la condition (b) et la première partie de la condition (a), et soit $\varphi : I \to E$ une application mesurable. Alors, la multi-application*

$$\begin{aligned} \Gamma : I &\rightrightarrows E \\ s &\mapsto \Gamma(s) = F(s, \varphi(s)). \end{aligned}$$

est mesurable.

Démonstration. Ce résultat a été brièvement démontré dans [10]. Nous nous proposons de donner une preuve plus détaillée. Comme Γ est à valeurs non vides fermées (car F l'est), d'après la Proposition 1.9.3, il suffit de montrer que pour tout $y \in E$, la fonction

$$\begin{aligned} d_y : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto d_y(t) = d(y, \Gamma(t)) \end{aligned}$$

est mesurable. Soit donc $y_0 \in E$ et montrons que d_{y_0} est mesurable.
Comme φ est mesurable alors il existe une suite d'applications étagées (en escalier) <u>*mesurables*</u> $(\theta_n)_n$ qui converge presque partout sur I vers φ. Donc pour tout n, il existe une partition $\{A_i^n,\ i = 1, \cdots, N_n\}$ de I telle que

$$\begin{aligned} \theta_n : I &\to E \\ t &\mapsto \theta_n(t) = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_i^n}(t)\ a_i^n \end{aligned}$$

où chaque A_i^n est un <u>*ensemble mesurable*</u> ($A_i^n \in \mathbb{L}_I$), chaque $a_i^n \in E$.
Dans ce cas, pour tout n, la m.a.

$$\begin{aligned} \Gamma^n : I &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto \Gamma^n(t) = F(t, \theta_n(t)) \end{aligned}$$

est mesurable car pour tout ouvert V dans E,

$$\begin{aligned}
(\Gamma^n)^{-1}(V) &= \{t \in I;\ \ \Gamma^n(t) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \{t \in \bigcup_{i=1}^{N_n} A_i^n;\ \ \Gamma^n(t) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_n} \{t \in A_i^n;\ \ F(t, a_i^n) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_n} \{t \in A_i^n;\ \ F_{a_i^n}(t) \cap V \neq \emptyset\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_n} \Big(A_i^n \cap \{t \in I;\ \ F_{a_i^n}(t) \cap V \neq \emptyset\}\Big) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_n} \Big(A_i^n \cap F_{a_i^n}^{-1}(V)\Big),
\end{aligned}$$

et ce dernier ensemble est mesurable étant union fini d'ensembles mesurables car, d'une part chaque A_i^n est mesurable, et d'autre part comme V est ouvert alors d'après la première partie de la condition (a), chaque $F_{a_i^n}^{-1}(V)$ est mesurable.
On conclut que $\forall n$, la fonction

$$\begin{aligned}
d_{y_0}^n &: I \to \mathbb{R} \\
&\quad t \mapsto d_{y_0}^n(t) = d(y_0, \Gamma^n(t))
\end{aligned}$$

est mesurable.
Mais la suite de fonctions $(d_{y_0}^n)_n$ converge presque partout sur I vers la fonction d_{y_0}. En effet, p.p. $t \in I$, puisque $\mid d(y, A) - d(y, B) \mid \leq \mathcal{H}(A, B)$ alors, pour tout n

$$\begin{aligned}
\mid d_{y_0}^n(t) - d_{y_0}(t) \mid = \mid d(y_0, \Gamma^n(t)) - d(y_0, \Gamma(t)) \mid &\leq \mathcal{H}(\Gamma^n(t), \Gamma(t)) \\
&= \mathcal{H}(F(t, \theta_n(t)), F(t, \varphi(t))) \\
&\leq L(t) \parallel \theta_n(t) - \varphi(t) \parallel_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'où, la fonction limite d_{y_0} est mesurable (voir [1]). La preuve est achevée. □

Lemme 3.1.4. *([10],Lemma 2.1) Sous les conditions du Théorème 3.1.2 :*
Soit $\widetilde{x} : I \to E$ une application continue. Pour $K = \widetilde{x}(I)$, soit $\rho_{(K)} > 0$ et $L_{(K)}(\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$ vérifiant la condition (b) du Théorème 3.1.2.
On suppose qu'il existe une application $f_1 \in L^1_E(I)$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que

$$f_1(t) \in F(t, \widetilde{x}(t)), \quad p.p.\ t \in I$$

et

$$d_u(\widetilde{x}, u_{f_1}) = \max_{t\in I} \left\| \widetilde{x}(t) - (a + \int_0^t f_1(s)ds) \right\|_E \leq \frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon) e^{-\int_I L(s)ds}.$$

Alors, il existe une solution $x \in S_I$ telle que

$$d_u(\widetilde{x}, x) \leq \frac{1}{2}\min(\rho, \epsilon).$$

Démonstration. L'auteur dans [10] a donné une brève démonstration. Nous l'avons reformulé en nous concentrant sur les détails qu'il n'a pas mentionné.
On pose $\alpha = \max_{t\in I} \|u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t)\|_E$. Considérons la multi-application

$$\begin{aligned} \Gamma : I &\rightrightarrows E \\ t &\mapsto \Gamma(t) = F(t, u_{f_1}(t)). \end{aligned}$$

telle que $\forall f \in L^1_E(1), \quad u_{f_1}(t) = a + \int_0^t f_1(s)ds$

- Γ est à valeurs non vides fermées car F l'est.
- Γ est mesurable car F l'est (par le Lemme 3.1.3).

Définissons la multi-application

$$\begin{aligned} H_1 : I &\rightrightarrows E \\ s &\mapsto H_1(s) = \{v \in \Gamma(s); \ \ \|f_1(s) - v\|_E \leq d(f_1(s), \Gamma(s))\}. \end{aligned}$$

Par le Théorème (1.9.9), la multi-application H_1 est mesurable et elle est à valeurs fermées non vides. Donc grâce au Théorème (1.9.8), H_1 admet une sélection mesurable f_2, c'est à dire il existe une application mesurable $f_2 : I \to E$ qui vérifie $f_2(s) \in H_1(s), \ \ \forall s \in I$, ce qui est équivalent à

$$f_2(s) \in F(s, u_{f_1}(s)), \ \forall s \in I$$

et

$$\|f_1(s) - f_2(s)\|_E \leq d(f_1(s), F(s, u_{f_1}(s)), \ \forall s \in I.$$

Maintenant, *p.p.* $s \in I$, puisque $f_1(s) \in F(s, \widetilde{x}(s))$, alors

$$\begin{aligned} d(f_1(s), \Gamma(s)) = d(f_1(s), F(s, u_{f_1}(s))) &\leq \sup_{y \in F(s,\widetilde{x}(s))} d(y, F(s, u_{f_1}(s))) \\ &= e(F(s, \widetilde{x}(s)), F(s, u_{f_1}(s))) \\ &\leq \mathcal{H}(F(s, \widetilde{x}(s)), F(s, u_{f_1}(s))) \\ &\leq L(s) \parallel u_{f_1}(s) - \widetilde{x}(s) \parallel_E \\ &\leq L(s) \max_{s\in I} \parallel u_{f_1}(s) - \widetilde{x}(s) \parallel_E \\ &= \alpha L(s). \end{aligned}$$

Donc p.p. $s \in I$,

$$\|f_1(s) - f_2(s)\|_E \leq \alpha L(s). \tag{3.1}$$

On conclut facilement que $f_2 \in L^1_E(I)$ car pour tout $s \in I$

$$\begin{aligned}
\| f_2(s) \|_E &= \| f_2(s) - f_1(s) + f_1(s) \|_E \\
&\leq \| f_2(s) - f_1(s) \|_E + \| f_1(s) \|_E \\
&\leq \alpha L(s) + \| f_1(s) \|_E,
\end{aligned}$$

et ces deux dernières fonctions sont intégrables. On peut donc définir l'application

$$\begin{aligned}
u_{f_2} : I &\to E \\
t &\mapsto u_{f_2}(t) = a + \int_0^t f_2(s)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.1) p.p. $t \in I$,

$$\begin{aligned}
\| u_{f_2}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E &= \| u_{f_2}(t) - u_{f_1}(t) + u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E \\
&\leq \| u_{f_2}(t) - u_{f_1}(t) \|_E + \| u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E \\
&= \| (a + \int_0^t f_2(s)ds) - (a + \int_0^t f_1(s)ds) \|_E + \| u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E \\
&= \| \int_0^t (f_2(s) - f_1(s))ds \|_E + \| u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E \\
&\leq \int_0^t \| f_2(s) - f_1(s) \|_E \, ds + \max_{t \in I} \| u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t) \|_E \\
&\leq \int_0^t \alpha L(s)ds + \alpha \\
&\leq \int_0^T \alpha L(s)ds + \alpha \qquad (car L(s) \geq 0 \text{ , } \forall\ s \in I) \\
&= \alpha(1 + \int_0^T L(s)ds) \\
&\leq \alpha e^{\int_0^T L(s)ds} \\
&= \max_{t \in I} \|u_{f_1}(t) - \widetilde{x}(t)\|_E \, e^{\int_0^T L(s)ds} \\
&\leq \frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon) e^{-\int_I L(s)ds} e^{\int_I L(s)ds} \\
&= \frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon).
\end{aligned}$$

Ainsi on peut construire par récurrence (voir [10]) une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1_E(I)$ telle que :

$$\|f_{n+1}(s) - f_n(s)\|_E \leq \alpha L(s) \frac{1}{(n-1)!} \Big[\int_0^s L(\tau)d\tau \Big]^{n-1} \quad p.p.\ s \in I \tag{3.2}$$

$$f_{n+1}(s) \in F(s, u_{f_n}(s)) \quad p.p.\ s \in I \tag{3.3}$$

avec $u_{f_0} = \widetilde{x}$.

• Grâce à la relation (3.2), la suite $(u_{f_n})_n$ converge uniformément sur I vers une application u_f avec $f \in L^1_E(I)$. En effet, pour tout n, en intégrant la relation (3.2)

$$\begin{aligned}\int_0^T \| f_{n+1}(t) - f_n(t) \|_E \, dt &\leq \alpha \int_0^T L(t) \frac{1}{(n-1)!} \Big[\int_0^t L(\tau) d\tau \Big]^{n-1} dt \\ &= \frac{\alpha}{n!} \Big[\int_0^T L(t) dt \Big]^n\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|f_{n+1} - f_n\|_{L^1_E(I)} \leq \alpha \frac{1}{n!}(C)^n$ telle que $C = \int_0^T L(t)dt$ est une constante réelle.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{L^1_E(I)} \leq \alpha \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}(C)^n = 0$ (car la série $\sum\limits_n \frac{1}{n!}(C)^n$ est convergente)
$\Rightarrow (f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^1_E(I)$, et comme ce dernier est complet, alors elle converge dans cet espace vers une application $f \in L^1_E(I)$.
c.à.d

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1_E(I)} = 0.$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (f_n(t) - f(t)) dt = 0.$$

Maintenant, puisque $f \in L^1_E(I)$, on peut définir l'application

$$\begin{aligned} u_f &: I \to E \\ & t \mapsto u_f(t) = a + \int_0^t f(s) ds. \end{aligned}$$

Il se trouve que la suite $(u_{f_n})_n$ converge uniformément sur I exactement vers u_f. En effet, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \| u_{f_n}(t) - u_f(t) \|_E &= \| (a + \int_0^t f_n(s)ds) - (a + \int_0^t f(s)ds) \|_E \\ &= \| \int_0^t (f_n(s) - f(s))ds \|_E \\ &\leq \int_0^t \| f_n(s) - f(s) \|_E \, ds \\ &\leq \int_0^T \| f_n(s) - f(s) \|_E \, ds \\ &= \| f_n - f \|_{L^1_E} \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{t\in I} \|u_{f_n}(t) - u_f(t)\| \leq \|f_n - f\|_{L^1_E}$$

en passant à la limite

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{t\in I}\|u_{f_n}(t)-u_f(t)\|)\leq \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1_E}=0$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{t\in I}\|u_{f_n}(t)-u_f(t)\|)=0.$$

Par conséquent, il suffit de prendre $x=u_f$. Elle est continue sur I, d'autre part, $x\in S_I$ car

$$x(0)=u_f(0)=a+\int_0^0 f(s)ds=a+0_E=a$$

et nous pouvons montrer que

$$\dot{x}(s)\in F(t,x(s)),\quad p.p.\ s\in I.$$

De plus, nous pouvons vérifier (en utilisant le relation (3.2), voir [10] pour le détail) que $x=u_f$ vérifie l'inégalité demandée, i.e.

$$d_u(\widetilde{x},u_f)=\max_{t\in I}\|\widetilde{x}(t)-u_f(t)\|_E\leq\frac{1}{2}\min(\rho,\epsilon).$$

Alors, *p.p.* $s\in I$, il nous reste qu'à montrer que $\dot{x}(s)\in F(s,x(s))$. Or,

$$\begin{aligned}\dot{x}(s)\in F(s,x(s)) &\overset{x=u_f}{\Longleftrightarrow} f(s)\in F(s,u_f(s))\\ &\Longleftrightarrow f(s)\in\overline{F(s,u_f(s))}\\ &\Longleftrightarrow d(f(s),F(s,u_f(s)))=0\\ &\Longleftrightarrow d(f(s),F(s,u_f(s)))\leq 0.\end{aligned}$$

Nous allons estimer $d(f(s),F(s,u_f(s)))$. Nous avons,

$$d(f(s),F(s,u_f(s)))\leq d(f(s),f_n(s))+d(f_n(s),F(s,u_f(s))),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

(ceci en utilisant la propriété

$$d(a,A)\leq d(a,b)+d(b,A)\qquad\forall a,b\in E\ \ ,\ \ A\subset E)$$

mais par la relation (3.3)

$$f_n(s)\in F(s,u_{f_{n-1}}(s)),\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} d(f_n(s), F(s, u_f(s))) &\leq \sup_{y \in F(s, u_{f_{n-1}}(s))} d(y, F(s, u_f(s))) \\ &= e(F(s, u_{f_{n-1}}(s)), F(s, u_f(s))) \\ &\leq \mathcal{H}(F(s, u_{f_{n-1}}(s)), F(s, u_f(s))) \\ &\leq L(s) \parallel u_f(s) - u_{f_{n-1}}(s) \parallel_E . \end{aligned}$$

Donc *p.p.* $s \in I$,
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d(f(s), F(s, u_f(s))) &\leq d(f(s), f_n(s)) + d(f_n(s), F(s, u_f(s))) \\ &= \parallel f_n(s) - f(s) \parallel_E + d(f_n(s), F(s, u_f(s))) \\ &\leq \parallel f_n(s) - f(s) \parallel_E + L(s) \parallel u_f(s) - u_{f_{n-1}}(s) \parallel_E, \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n \to \infty} \parallel u_f(s) - u_{f_{n-1}}(s) \parallel_E = 0$ car $(u_{f_n})_n$ converge uniformément sur I vers l'application u_f et donc elle converge "simplement" vers elle. D'autre part, comme $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^1_E(I)$ alors on peut en extraire une sous-suite $(f_{nk})_k$, ou bien noté encore $(f_n)_n$, qui converge presque partout vers f.
En passant donc à la limite,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} d(f(s), F(s, u_f(s))) &\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel f_n(s) - f(s) \parallel_E + L(s) \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel u_f(s) - u_{f_{n-1}}(s) \parallel_E \\ &= 0 + L(s)0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On conclut que *p.p.* $s \in I$,

$$d(f(s), F(s, u_f(s))) \leq 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du Théorème 3.1.2. Commençons par remarquer que :

$$S_I \textit{ est dense dans } S_{II} \textit{ pour la distance } d_u \Leftrightarrow S_{II} \subset \overline{S_I}$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II}, \widetilde{x} \in \overline{S_I}$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II}, d(\widetilde{x}, S_I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II},\ \inf_{x \in S_I} d_u(\widetilde{x}, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II}, \forall \epsilon > 0,\ \inf_{x \in S_I} d_u(\widetilde{x}, x) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II}, \forall \epsilon > 0, \exists x(\epsilon) \in S_I, d_u(\widetilde{x}, x) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \widetilde{x} \in S_{II}, \forall \epsilon > 0, \exists x(\epsilon) \in S_I, \max_{t \in I} \|x(t) - \widetilde{x}(t)\|_E < \epsilon.$$

Soit $\widetilde{x} \in S_{II}$. Alors, il existe $f_0 \in L^1_E(I)$ telle que

$$\widetilde{x}(t) = a + \int_0^t f_0(s)ds,\ \ \forall t \in I$$

et

$$f_0(t) \in \overline{co}F(t, \widetilde{x}(t)), \quad \forall\, t \in I. \tag{3.4}$$

Soit $\epsilon > 0$. $\exists$? $x \in \mathcal{S}_I$ telle que $d_u(\widetilde{x}, x) < \epsilon$?

Comme $\widetilde{x}$ est continue sur le compact I, alors $\widetilde{x}(I)$ est un compact de E, d'où par l'hypothèse (b), pour $K = \widetilde{x}(I)$, $\exists \rho_{(K)} > 0$, $\exists L_{(K)}(.) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(I)$ tels que p.p. $t \in I$,

$$\mathcal{H}\Big(F(t, y_1), F(t, y_2)\Big) \leq L(t)\|y_1 - y_2\|_E \tag{3.5}$$

$\forall y_1, y_2 \in B_E(y, \rho),\ \forall y \in \widetilde{x}(I)$.

i.e. $\forall y_1, y_2 \in B_E(\widetilde{x}(t), \rho),\ \forall t \in I$.

Considérons la multi-application

$$\widetilde{\Gamma} : I \rightrightarrows E$$
$$t \mapsto \widetilde{\Gamma}(t) = F(t, \widetilde{x}(t)).$$

• $\widetilde{\Gamma}$ est à valeurs non vides fermées car F l'est.

• $\widetilde{\Gamma}$ est mesurable car F l'est ($\widetilde{x}$ est mesurable étant continue donc il suffit d'appliquer le Lemme 3.1.3)

• $S^1_{\widetilde{\Gamma}} \neq \emptyset$. En effet, par le Théorème 1.9.8, $\widetilde{\Gamma}$ admet une sélection mesurable, disant $\tilde{f}$.

$\widetilde{x}$ est mesurable et bornée étant continue sur le compact I. Comme toute fonction mesurable "bornée" est limite uniforme de fonctions étagées, il existe une suite d'applications en escalier qui converge uniformément sur I vers $\widetilde{x}$. i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow \| \theta_n(t) - \widetilde{x}(t) \|_E < \varepsilon, \forall t \in I)$$

Donc pour $\varepsilon = \rho_K > 0$, il existe une application en escalier $\bar{x}$ ($\bar{x} := \theta_{n_0}$) qui vérifie

$$\| \widetilde{x}(t) - \bar{x}(t) \|_E < \rho_K, \quad \forall t \in I. \tag{3.6}$$

Construisons la multi-application

$$\begin{aligned} &\overline{\Gamma} : I \rightrightarrows E \\ &\quad t \mapsto \overline{\Gamma}(t) = F(t, \bar{x}(t)) = F(t, \sum_{i=1}^{N} 1\!\!1_{A_i}(t) y_i). \end{aligned}$$

Pour $t \in I,\ \exists 1\!\!\mathrm{I}_0 \in \overline{1,N}:\ t \in A_{i_0}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)F_{y_i}(t) &= 1\!\!\mathrm{I}_{A_{i_0}}(t)F_{y_{i_0}}(t) + \sum_{i\in\overline{1,N}, i\neq i_0} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)F_{y_i}(t) \\
&= 1F_{y_{i_0}}(t) + \sum_{i\in\overline{1,N}, i\neq i_0} 0F_{y_i}(t) \\
&= F_{y_{i_0}}(t) + 0_E \\
&= F_{y_{i_0}}(t) \\
&= F(t, y_{i_0}) \\
&= F(t, 1y_{i_0} + 0_E) \\
&= F(t, 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)y_{i_0} + \sum_{i\in\overline{1,N}, i\neq i_0} 0y_i) \\
&= F(t, \sum_{i=1}^{N} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)y_i) \\
&= \overline{\Gamma}(t).
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \overline{1,N}$, par l'hypothèse (a)(deuxième partie) la m.a. F_{y_i} admet une sélection intégrable, disant $\bar{f}_i$, donc

$$\bar{f}_i(t) \in F_{y_i}(t), \quad \forall t \in I$$

d'où

$$1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)\bar{f}_i(t) \in 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)F_{y_i}(t), \quad \forall t \in I$$

d'où

$$\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)\bar{f}_i(t) \in \sum_{i\in\mathbb{N}} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)F_{y_i}(t), \quad \forall t \in I$$

En posant $\bar{f}(t) := \sum_{i\in\mathbb{N}} 1\!\!\mathrm{I}_{A_i}(t)\bar{f}_i(t), \quad \forall t \in I$, on conclut que

$$\bar{f}(t) \in \overline{\Gamma}(t), \quad \forall t \in I$$

et elle est intégrable étant combinaison linéaires de fonctions intégrables , c.à.d $\bar{f}$ est une "sélection" "intégrable" de la m.a. $\overline{\Gamma}$.

Prenant en compte (3.6) et (3.5), nous avons donc, $p.p.t \in I$

$$d(\bar{f}(t), \widetilde{\Gamma}(t)) \leq \mathcal{H}(\overline{\Gamma}(t), \widetilde{\Gamma}(t)) = \mathcal{H}(F(t, \bar{x}(t)), F(t, \widetilde{x}(t)))$$

$$\leq L_K(t) \parallel \widetilde{x}(t) - \bar{x}(t) \parallel_E \leq L_K(t)\rho_K,$$

car $\widetilde{x}(t),\ \bar{x}(t) \in B_E(\widetilde{x}(t), \rho_K),\ \forall t \in I.$

Grâce à cette inégalité la sélection mesurable $\tilde{f}$ de $\widetilde{\Gamma}$ vérifie pour tout$t \in I$

$$\parallel \tilde{f}(t) \parallel = \parallel \tilde{f}(t) - \bar{f}(t) + \bar{f}(t) \parallel \leq \parallel \tilde{f}(t) - \bar{f}(t) \parallel + \parallel \bar{f}(t) \parallel \leq \rho_K L_K(t) + \parallel \bar{f} \parallel (t),$$

comme L_K est Lebesgue intégrable, $\bar{f}$ est Lebesgue intégrable (car $\bar{f}$ est Bochner intégrable) alors $\parallel \tilde{f} \parallel$ est Lebesgue intégrable, i.e. $\tilde{f}$ est Bochner intégrable. Bref $S^1_{\widetilde{\Gamma}} \neq \emptyset$.

• On conclut que la multi-application $\widetilde{\Gamma}$ satisfait toutes les hypothèses du Théorème de densité du chapitre précédent (Théorème 2.2.1), d'où d'après ce dernier,

$$S^1_{\widetilde{\Gamma}} \textit{ est dense dans } S^1_{\overline{co}\widetilde{\Gamma}} \textit{ pour } \parallel . \parallel_{max} .$$

Par conséquent, pour $a = f_0 \overset{(3.4)}{\in} S^1_{\overline{co}\widetilde{\Gamma}}$, et pour $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(\rho, \epsilon)e^{-\int_I L(s)ds}$, il existe $b_{(\varepsilon)} = f_1 \in S^1_{\widetilde{\Gamma}} \left(\text{i.e. vérifie } f_1(t) \in F(t, \widetilde{x}(t)) \quad \forall t \in I \text{ et } f_1 \in L^1_E(I)\right)$ telle que

$$\|f_0 - f_1\|_{\max} = \max_{t', t'' \in I} \left\| \int_{t'}^{t''} \left[f_0(s) - f_1(s)\right] ds \right\|_E < \varepsilon = \frac{1}{2}\min(\rho, \epsilon)e^{-\int_I L(s)ds}.$$

Or (pour $t' = 0,\ t'' = t$),

$$\forall t \in I, \quad \left\| \int_0^t \left[f_0(s) - f_1(s)\right] ds \right\|_E \leq \max_{t', t'' \in I} \left\| \int_{t'}^{t''} \left[f_0(s) - f_1(s)\right] ds \right\|_E,$$

d'où

$$\forall t \in I, \quad \left\| \int_0^t \left[f_0(s) - f_1(s)\right] ds \right\|_E < \frac{1}{2}\min(\rho, \epsilon)e^{-\int_I L(s)ds}$$

d'où

$$\max_{t \in I} \left\| \int_0^t \left[f_0(s) - f_1(s)\right] ds \right\|_E < \frac{1}{2}\min(\rho, \epsilon)e^{-\int_I L(s)ds}.$$

Mais, pour tout $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \left[f_0(s) - f_1(s) \right] ds \right\|_E &= \left\| \int_0^t f_0(s)ds - \int_0^t f_1(s)ds \right\|_E \\
&= \left\| a + \int_0^t f_0(s)ds - a - \int_0^t f_1(s)ds \right\|_E \\
&= \left\| \widetilde{x}(t) - (a + \int_0^t f_1(s)ds) \right\|_E
\end{aligned}$$

donc

$$\max_{t \in I} \left\| \tilde{x}(t) - (a + \int_0^t f_1(s)ds) \right\|_E = \max_{t \in I} \left\| \int_0^t \left[f_0(s) - f_1(s) \right] ds \right\|_E < \frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon) e^{-\int_I L(s)ds}$$

Par le Lemme 3.1.4, $\exists x \in S_I$ telle que

$$d_u(\widetilde{x}, x) < \frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon)$$

or

$$\frac{1}{2} \min(\rho, \epsilon) \leq \frac{1}{2} \epsilon < \epsilon$$

d'où

$$d_u(\widetilde{x}, x) < \epsilon$$

ce qui achève la démonstration. ■

Résumé

Dans ce travail, nous présentons un théorème de densité qui affirme que, sous certaines conditions, l'ensemble des sélections intégrables d'une multi-application est dense dans son enveloppe convexe fermée par rapport a une certaine norme.
Une application de ce résultat dans la relaxation d'une inclusion différentielle du premier ordre, au sens de l'enveloppe convexe fermée, est ensuite considérée.

Abstract

In this work, we present a density result stating that, under some conditions, the set of integrable selections of a multi-valued mapping is dense in its closed convex hull with respect to a certain norm.
An application of this result in the relaxation of a first order differential inclusion, in the sense of the closed connex hall, is then considered.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Azzam-Laouir, *Cours de mesure et intégration*, polycopié,, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2009).

[2] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse multivoque*, polycopié, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2009).

[3] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse convexe*, polycopié, Département de Mathématiques, Université de Jijel (2014).

[4] S. Bechani et S. Djihal, *Quelques propriétés topologique des espaces de fonctions*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2017-2018).

[5] M. Benamara, *Sélections mesurables extrêmales d'une multi-application*, C.R. Acad. Sci. Paris 278 (1974), 1249-1252.

[6] F. Bienvenu, *Notes de Cours, Math-Bio, Introduction à la topologie*, Université de Montpellier (2015).

[7] N. Boudjerida et K. Dib, *Théorèmes d'existence et de relaxation pour des inclusions différentielles non bornées dans un espace de Banach*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2018-2019).

[8] F. Bouguettouche et I. Boumezbeur, *Sur un théorème de mesurabilité pour les applications multivoques*, mémoire de Master, Université Med Seddik Benyahia-Jijel (2018-2019).

[9] C. Castaing et M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math., 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[10] P.V. Chuong, *A density theorem with an application in relaxation of nonconvex-valued differential equations*, Journal of Mathematical analysis and applications. 124, (1987) 1-14.

[11] A.F. Filippov, *Differential equatons with discontinuous rjghthand side*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2 42 (1964), 199-231 (English transl.).

[12] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, *Series in Mathematical Analysis and Applications, Volume 9 :Nonlinear analysis*, National University of Ireland, (2005).

[13] A. Ghouila-Houri, *Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable*, Rev. Inform. Rech. Opérationnelle 4 (1976), 7-32.

[14] N.EL Haga Hassan, *Topologie générale et espace normés*, Université d'Orléans, août (2011).

[15] C.J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87, (1975)53–72.

[16] P. Laurain , *Extrait d'un cours de M2, Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale* , l'IMJ (2013).

[17] A. Makhlouf, *Etude d'une classe d'inclusions différentielles avec second membre pseudo-Lipschitzien*, mémoire de Magister, Université Med Seddik BenYahia-Jijel (2010).

[18] F. Marçay, *Théorie de l'intégration de Lebesgue,* polycopié, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, France.

[19] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiritsy-Yaillourou, *Handbook of Applied Analysis*, Volume 19 (2008).

[20] R.T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals*, Pacific J. Math. 24 (1968) 525-539.

[21] A. A. Tolstonogov et D. A. Tolstonogov, *Lp-Continuous extreme selectors of multi-functions with decomposable values, Relaxation theorems*, Set-Valued Anal., vol. 87, no. 4, (1996) 237–269.

[22] M. Valadier, *Semi-continuité de fonctionnelles intégrales*, Sém. Anal. Convexe, (1977), Exp. No. 2.

[23] J. Warga, *Functions of relaxed controls*, SIAM J. Control Optim. 5, No. 4 (1967), 628-641.

[24] Q. Zhang et G. Li, *Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions*. Nonlinear Analysis, 70 (2009) 3390–3406.