République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : .....
№ de séries : .....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Méthodes asymptotiques pour la résolution d'une classe d'équations différentielles d'ordre deux

Présenté par :

Hadjira Boucherout & Amina Hazel

Devant le jury composé de :

Aliouane Fatine	M.C.A	Université de Jijel	Président
Menigher Hammoud	M.A.A	Université de Jijel	Encadreur
Makhlouf Amira	M.C.B	Université de Jijel	Examinateur

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Tous mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Tout d'abord, je tiens à remercier infiniment mon encadreur de ce mémoire, Monsieur Menigher Hammoud Maître Assistant "A" à l'université de Jijel, pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury :

Mlle Aliouane Fatine, Maître de Conférence "A" à l'université de Jijel, qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de cette soutenance.

Mme Makhlouf Amira Maître de Conférence "B" à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie tout particulièrement, mes parents pour leurs soutien, et dont la patience et l'encouragement m'ont été très précieux durant mes années d'études, mes frères et mes sœurs.

Enfin, je n'oublie pas tous mes enseignants au département de mathématiques de l'université de Jijel.

H. Amina

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie ***ALLAH*** qui m'a donnée la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier chèrement et chaleureusement ma chére famille mon père, ma mère, mon frère, mes sœurs, tous mes proches et tous mes amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier infiniment à mon encadreur de ce mémoire à Monsieur **Mnigher Hammoud** Maitre Assistant "A" à l'université de jijel, pour l'aide et le temps qui a bien voulu me consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury :
Mlle Aliouane Fatine, Maitre de Conférence "A" à l'université de jijel, qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime une profonde gratitude à **Mme Makhlouf Amira** Maitre Conférence "B" à l'université de jijel, qui a eu l'amabilité d'examiner on travail.

Enfin, je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

***A*, tous, un grand merci**.
B. Hadjira

Table des matières

Introduction **iii**

1 Préliminaires **1**

1.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires 1

1.1.1 Théorie des équations linéaires homogènes 3

1.1.2 Solutions d'équations linéaires homogènes 5

1.2 Séries de puissances 10

1.3 Notions d'analyse asymptotique 13

1.3.1 Relations de comparaisons 13

1.3.2 Séries asymptotiques 15

1.3.3 Développement asymptotique des fonctions 15

1.3.4 Méthode de l'équilibre dominant 16

2 Comportement local aux points singuliers réguliers des équations linéaires homogènes **19**

2.1 Classification des points singuliers des équations linéaires homogènes . . . 19

2.2 Comportement local au voisinage d'un point ordinaire 24

2.3 Comportement local au voisinage d'un point singulier régulier 28

2.3.1 Méthode de Frobenius pour les équations du seconde ordre 30

3 Comportement local aux points singuliers irréguliers des équations linéaires homogènes 47

3.1 Comportement pour les points singuliers irréguliers 48

3.2 Expansion asymptotique complète 54

Bibliographie 60

Introduction

La théorie des équations différentielles linéaires est très puissante que l'on peut généralement prédire le comportement local des solutions au voisinage d'un point x_0 sans savoir comment résoudre l'équation différentielle. Il suffit d'examiner les fonctions de coefficient de l'équation différentielle au voisinage de x_0.

Par exemple, les solutions de la formidable équation différentielle du quatrième ordre $d^4y/dx^4 = (x^4 + \sin x)y$ ne sont pas exprimables en termes de fonctions mathématiques connues.

Même lorsque la solution d'une équation différentielle peut être exprimée en termes de fonctions transcendantales supérieures communes par exemple la fonction logarithme et la fonction exponentielle, les techniques d'analyse locale sont toujours très utiles. Par exemple, dire que les solutions de $y'' = x^4y$ sont exprimables en termes de fonctions de Bessel modifiées d'ordre $1/6$ ne donne pas beaucoup d'informations qualitatives à quelqu'un qui n'est pas un expert des fonctions de Bessel. D'un autre côté, une analyse locale facile de l'équation différentielle montre que les solutions se comportent comme des combinaisons linéaires de $x^{-1}e^{\pm x^3/3}$ quand $x \to \infty$.

Le but principal de ce mémoire est d'approximer les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre. Nous n'entrerons pas dans les techniques pour trouver la solution exacte des équations, sauf pour les cas les plus simples. Notre objectif sera de trouver des solutions approximatives, soit à travers une série de Taylor, soit une série asymptotique. Cependant, certaine théorie sera nécessaire pour comprendre la nature des solutions aux équations différentielles.

Afin d'atteint ce but et pour fournir une présentation qui facilite l'accès à ce mémoire, nous décomposons le travail en trois chapitre.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques notions de bases des équations différentielles et des définitions élémentaires, ensuite nous donnons quelques résultats sur

les séries de puissance. Nous terminons ce chapitre par quelques notions d'analyse asymptotique, tels que les relations de comparaisons et les séries asymptotiques, sans oublier la méthode de l'équilibre dominant qui est l'outil principal de résolution asymptotique des équations différentielles.

Dans le deuxièmes chapitre, notre objectif sera de trouver des méthodes générales pour trouver des solutions approximatives, au voisinage d'un point x_0, aux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre deux. Notre stratégie dépendra de la question de savoir si x_0 est un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier de l'équation différentielle. Ce chapitre couvrira les cas d'un point ordinaire et un point singulier régulier, où nous appuyons dans ces cas sur les séries de Taylor et les séries de Frobenius.

Dans le dernier chapitre nous expliquons comment utiliser la méthode de l'équilibre dominant pour déterminer le comportement asymptotique, au voisinage d'un point singulier irrégulier, des solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre deux, puis la méthode de trouver l'expansion asymptotique complète.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions de bases des équations différentielles et des séries de puissances, avec un aperçu sur l'analyse asymptotique qui nous aiderons à comprendre ce mémoire.

1.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

Une équation différentielle d'ordre n a la forme

$$y^n(x) = F[x, y(x), y'(x), \ldots ..., y^{n-1}(x)], \tag{1.1}$$

où

$$y^k = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

L'équation (1.1) est une équation linéaire si F est une fonction linéaire de $y(x)$ et de ses dérivées (la dépendance x explicite de F est toujours arbitraire). Si (1.1) est linéaire, alors la solution générale $y(x)$ dépend de paramètres indépendants appelés constantes d'intégration ; toute solution d'une équation différentielle linéaire peut être obtenue par un choix approprié de ces constantes. Si (1.1) est une équation différentielle non linéaire, alors elle a aussi une solution générale qui contient n constantes d'intégration. Cependant, il existe parfois des solutions supplémentaires spéciales d'équation différentielle non linéaire qui ne peuvent être obtenues à partir de la solution générale pour tout choix des constantes d'intégration. Nous omettons une discussion rigoureuse de ces propriétés fondamentales des équations différentielles mais les illustrons dans les deux exemples suivantes.

Exemple 1.1.1. *Équations séparables : les équations séparables sont les équations différentielles les plus faciles à résoudre. Une équation est séparable si elle est du premier ordre et les dépendances en x et y de F dans le facteur (1.1) sont réparées. L'équation séparable la plus générale est*

$$y'(x) = a(x)b(y). \tag{1.2}$$

L'intégration directe donne la solution générale

$$\int_y \frac{dt}{b(t)} = \int_x a(s)ds + c_1, \tag{1.3}$$

où c_1 est une constante d'intégration. (La notation $\int_x a(s)ds$ représente la primitive de $a(x)$).

Les équations linaires ont une gamme plus simple et plus restreinte de que les équations non linéaires, mais elles constituent une classe importante car elles apparaissent très fréquemment dans la description mathématique des phénomènes physiques. Formellement, une équation différentielle linéaire peut s'écrire

$$Ly(x) = f(x), \tag{1.4}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire :

$$L = p_0(x) + p_1(x)\frac{d}{dx} + \ldots\ldots + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{d^n}{dx^n}. \tag{1.5}$$

Il est classique, bien que non nécessaire, de choisir le coefficient de la dérivée la plus élevée à 1. Si $f(x) = 0$, l'équation différentielle (1.4) est homogène ; sinon, elle est non homogène.

Exemple 1.1.2. *Solution d'une équation linéaire. La solution générale de l'équation linéaire homogène*

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0 \tag{1.6}$$

est

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(1+x),$$

ce qui montre la dépendance explicite des deux constantes d'intégration c_1 et c_2. Chaque solution de (1.6) a cette forme.

Les équations non linéaires ont une structure mathématique plus riche que les équations linéaires et sont généralement plus difficiles à résoudre sous forme fermée. Pourtant, la solution de nombreuses équations non linéaires d'apparence difficile est assez courante.

1.1.1 Théorie des équations linéaires homogènes

Dans cette section, nous passons en revue les aspects élémentaires de la théorie élégante des problèmes de valeur initiale et de valeur limite pour les équations différentielles linéaires homogènes.

Indépendance linéaire des solutions

La solution générale d'une équation linéaire homogène d'ordre n

$$y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots\ldots + p_0(x)y = 0 \tag{1.7}$$

a la forme particulièrement simple

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) \tag{1.8}$$

où les c_j sont des constantes d'intégration arbitraires et $y_j(x)$ est un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, chacune satisfaisant (1.7). Il existe toujours exactement n solutions linéairement indépendantes de (1.7) dans toute région où les fonctions de coefficient $p_0(x), p_1(x), \ldots\ldots, p_{n-1}(x)$ sont continues. (Un ensemble de fonctions $y_j(x)$ est dit linéairement dépendent s'il est possible de trouver un ensemble de nombres c_j qui ne sont pas tous nuls et qui satisfont

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) = 0.$$

s'il n'est pas possible de trouver un tel ensemble alors $y_j(x)$ est linéairement indépendant. Le concept d'indépendance linéaire est important car il permet de décider si une solution de la forme (1.8) est bien la solution générale. Si les n fonctions $y_j(x)$ ne sont pas linéairement indépendantes, alors au moins une y_j est une combinaison linéaire des autres et il est nécessaire de rechercher plus de solution de l'équation différentielle. Notez qu'il n'est pas logique de discuter de l'indépendance linéaire en un point ; indépendance linéaire est un concept globale. On dit toujours qu'un ensemble de fonctions est linéairement dépendant ou indépendant sur un intervalle.

Le Wronskian

Il existe un test simple pour la dépendance linéaire ensemble de fonctions différentiables. Le Wronskian $w(x)$ est défini comme le déterminant

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)] \tag{1.9}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & ... & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

$w(x)$ s'annule de façon identique sur un intervalle si et seulement si $y_j(x)$ est un ensemble de fonctions linéairement dépendantes. Si $y_j(x)$ est libre sur un certain intervalle, alors $w(x)$ ne disparait pas, sauf des points isolés.

Exemple 1.1.3. *Indépendance linéaire. Pour vérifier que la solution*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2(1 + x)$$

de

$$y'' - y'\frac{1+x}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

dans l'exemple (1.1.2) est bien la solution générale, on évalue le Wronskian :

$$w[1 + x, e^x] = xe^x.$$

Notez que xe^x ne s'annule qu'en $x = 0$. Ainsi, pour tout x, $1 + x$, e^x est un ensemble des vecteurs libre.

Les équations linéaires homogènes ont une propriété remarquable : le Wronskian $w(x)$ de tout n solution de (1.7) satisfait l'équation simple du premier ordre

$$w'(x) = -p_{n-1}(x)w(x) \tag{1.11}$$

La solution de (1.11) est

$$w(x) = e^{[-\int_x p_{n-1}(t)dt]}. \tag{1.12}$$

Aussi, nous avons du résultat surprenant que $w(x)$ peut être calculer avant qu'aucune des solutions de l'équation différentielle ne soit connue. L'intégrale indéfinie dans la formule (1.12) signifie que $w(x)$ est déterminé jusqu'à une constante multiplicative arbitraire. Le choix d'un nouvel ensemble de n solutions modifie simplement la constante.

1.1.2 Solutions d'équations linéaires homogènes

Nous passons ici aux aspects plus pratiques de l'équation

$$Ly = 0$$

à savoir, comment le résoudre. Une équation du premier ordre de ce type est facile à résoudre car elle est séparable (voir l'exemple (1.1.1)). Cependant, lorsque l'ordre n est supérieur ou égale à deux, les solutions exactes de forme fermée n'existent que rarement. En mathématiques, une expression est dite être sous forme fermée si elle peut être exprimée de manière analytique en termes de nombre fini de certaines fonctions bien connues.

Équations à coefficient constant

Les équations à coefficient constant sont caractérisées en ce que $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ sont indépendants de x. On cherche des solutions de la forme

$$y(x) = e^{rx}.$$

Substituant cette fonction d'essai dans l'équation différentielle donne

$$L[e^{rx}] = e^{rx}p(r),$$

où

$$p(r) = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j r^j$$

est un polynôme au même degré de l'équation. La solution de Ly=0 correspondant à des racines distinctes $r_1, r_2, ...$ de

$$p(r) = 0$$

sont

$$y = e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ... \tag{1.13}$$

Cependant, s'il y a des racines répétées, (1.13) n'est pas un ensemble complet de solutions. Pour construire les solutions restantes, supposons que r_1 est une racine répétée m fois. Alors

$$L[e^{rx}] = e^{rx}(r - r_1)^m Q(r) \tag{1.14}$$

où Q est un polynôme de degré $n - m$. La fonction entre crochets est une solution de l'équation différentielle si elle fait disparaître le côté droit de (1.14). En effet, laisser

$$r = r_1$$

montre que $e^{r_1 x}$ est une solution. Plus on génère plus de solutions, on prend simplement des dérivées par rapport à r et on fixe

$$r = r_1.$$

Ce processus donne les m solutions

$$y = e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, ..., x^{m-1}e^{r_1 x}. \tag{1.15}$$

Une combinaison linéaire de toutes les solutions en (1.13) et (1.15) constitue une solution générale à l'équation différentielle.

Exemple 1.1.4. *Équations à coefficient constant. (a)la substitution de*

$$y = e^{rx}$$

dans l'équation

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

donne l'équation quadratique

$$(r - 1)(r - 4) = 0$$

qui doit être satisfaite par r. La solution générale est donc

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

(b) La substitution de

$$y = e^{rx}$$

dans l'équation

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

donne une équation polynomiale cubique pour r avec une racine triple en r=1. La solution générale est donc

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

Équations équidimensionnelles

Les équations équidimensionnelles (ou d'Euler) sont ainsi désignées parce qu'elles sont invariantes sous le changement d'échelle $x \to ax$. Les coefficients ont la forme

$$p_j(x) = \frac{q_j}{x^{n-j}},$$

où q_j est indépendant de x. Les équations différentielles équidimensionnelles peuvent être résolues en les transformant en coefficients constants en t par le changement de variable

$$x = e^t,$$
$$x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}.$$

Alternativement, les équations équidimensionnelles peuvent être résolues en substituant directement la fonction d'essai

$$y = x^r$$

dans l'équation différentielle. Cette substitution donne

$$L[x^r]p(r)x^{r-n} \tag{1.16}$$

où $p(r)$ est un polynôme de degré n. Ainsi, les solutions ont la forme

$$y = x^{r_1}, x^{r_2}, ..., \tag{1.17}$$

lorsque $r_1, r_2, ...$ sont des racines distinctes de $p(r)$. Lorsque $P(r)$ a une racine r_1 répétée, un ensemble complet de solutions est dérivé en différenciant la relation

$$L[x^r] = p(r)x^{r-n}$$

par rapport à r, puis en définissant

$$r = r_1.$$

Un ensemble complet de solutions à la forme

$$y = x^{r_1}, x^{r_1}lnx, x^{r_1}(lnx)^2, ..., \tag{1.18}$$

lorsque r_1 est une racine répétée de p(r). Les racines de p(r) sont appelées exposants indicatifs.

Exemple 1.1.5. *Équation équidimensionnelle. Si nous substituons*

$$y = x^r$$

dans l'équation équidimensionnelle

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = 0,$$

nous obtenons l'équation polynomiale

$$(r - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}lnx.$$

Équations exactes

Une équation exacte est une dérivée d'une équation d'ordre inférieur :

$$Ly = (d/dx)(My) = 0.$$

Cette équation est simplifiée en intégrant par rapport à x :

$$My = c_1.$$

(L'équation résultat n'est plus homogène.)

Exemple 1.1.6. *Équation exacte. L'équation*

$$y'' + xy' + y = 0$$

peut être récrite comme

$$(\frac{d}{dx})(y' + xy) = 0.$$

Ainsi,

$$y' + xy = c_1,$$

qui est facilement résolu :

$$y = (c_1 \int_0^x e^{t^2/2}dt + c_2)e^{-x^2/2}.$$

Un facteur d'intégration est une fonction de x et y qui, en multipliant une équation différentielle, la rend exacte.

Exemple 1.1.7. *Facteur d'intégration. L'équation différentielle*

$$y'' + y'\frac{1+x}{x} + y\frac{x-1}{x^2} = 0$$

n'est pas exacte, mais elle devient exacte lorsqu'elle est multipliée par le facteur d'intégration e^x *:*

$$e^x y'' + (\frac{1+x}{x})(e^x y') + (\frac{x-1}{x^2})(e^x y) = \frac{d}{dx}(e^x y' + (\frac{e^x}{x})y).$$

Ainsi,

$$y' + y_x = c_1 e^{-x},$$

qui est facilement résolu :

$$y(x) = -c_1\frac{(1+x)e^{-x}}{x} + c_2\frac{1}{x}.$$

Réduction de commande

La réduction d'ordre est une technique pour simplifier une équation différentielle linéaire à une équation d'ordre inférieur en factorisant une solution que l'on a eu la chance de trouver. Soit $y_1(x)$ une solution de

$$Ly = 0.$$

On cherche alors d'autres solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y(x) = u(x)y_1(x). \tag{1.19}$$

Clairement, substituer cette expression à $y(x)$ dans

$$Ly = 0$$

donne une nouvelle équation pour $u(x)$ de la forme

$$Mu = 0.$$

Le but de cette substitution est que Mu n'a pas de terme de la forme $p_0(x)u$. Ainsi,

$$Mu = 0$$

est une équation linéaire homogène d'ordre $(n-1)$ pour

$$\upsilon(x) = u(x).$$

Exemple 1.1.8. *Réduction de commande. On observe que la somme des coefficients de l'équation différentielle*

$$y'' - y'\frac{1+x}{x} + \frac{y}{x} = 0$$

est égale à 0. *Il s'ensuite qu'une solution est*

$$y_1(x) = e^x.$$

La substitution de

$$y(x) = u(x)e^x$$

donne

$$u'' + u'\frac{x-1}{x} = 0,$$

qui est une équation du premier ordre pour u'(x). La solution générale pour y(x) est donnée dans l'exemple (1.1.2).

1.2 Séries de puissances

Nous donnons un bref résumé sur les résultats pertinents sur les séries de puissances dont nous avons besoin.

1. Une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ est dite convergente en un point x si

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

   existe pour ce x. La série converge certainement pour $x = x_0$: elle peut converger pour tout x, ou elle peut converger pour certaines valeurs de x et pas pour d'autre.

2. On dit que la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument en un point x si la série de puissance associée

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||(x-x_0)|^n$$

   converge.

3. L'un des testes les plus utiles pour la convergence absolue d'une série de puissance est le test de rapport si $a_n \neq 0$, et si pour une valeur fixée de x

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}| = |x-x_0| \lim_{n\longrightarrow\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x-x_0|L$$

   alors la série de puissance converge absolument à cette valeur de x si $|x-x_0|L < 1$ et diverge si $|x-x_0|L > 1$. si $|x-x_0|L = 1$ le rapport de test n'est pas concluant.

4. Si la série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x = x_0$. Elle converge absolument pour $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ et si elle diverge en $x = x_1$, elle diverge pour $|x-x_0| > |x_1-x_0|$

5. Pour une série de puissance typique, il existe un nombre positif p appelé rayon de convergence, tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument pour $|x-x_0| < p$, et diverge pour $|x-x_0| > p$. L'intervalle $|x-x_0| < p$ est appelé intervalle de convergence. La série peut soit converge, soit diverge lorsque $|x-x_0| = p$. De nombreuses séries de puissance importantes convergent pour toutes les valeurs de x. Dans ce cas, il est habituel de dire que p est infini et que l'intervalle de convergence est toute la ligne réelle. Chaque série de puissance a un rayon de convergence non négatif p, et si $p > 0$ alors il y a un intervalle (fini ou infini) de convergence centré en x_0.

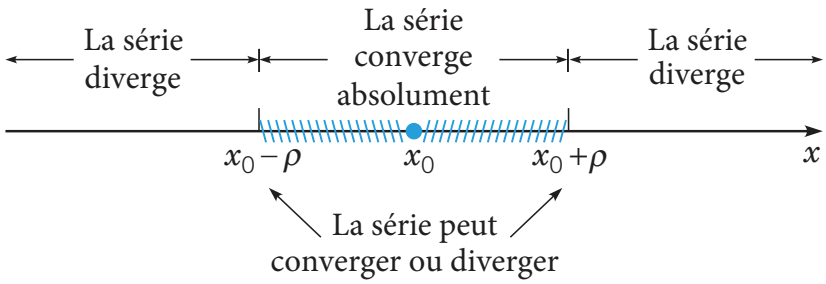

Figure 1.1 – Intervalle de convergence d'une série de puissance.

Supposons que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ convergent vers $f(x)$ et $g(x)$ respectivement pour $|x-x_0| < p$, $p > 0$.

1. Les deux séries puissances de peuvent être ajouté ou soustrait par terme, et

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

la série résultante converge au moins pour $|x-x_0| < p$.

2. Les deux séries peuvent être formellement multipliées, et

$$f(x)g(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

où $c_n = a_0b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. La série résultante converge au moins pour $|x-x_0| < p$, de plus, si $b_0 \neq 0$ alors $g(x_0) \neq 0$ et la série pour $f(x)$ peut être formellement

divisée par la série pour $g(x)$, et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

Dans la plupart des cas, les coefficients d_n peuvent être obtenus le plus facilement en égalisant les coefficients dans la relation équivalente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= \Big[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n\Big]\Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\Big)(x - x_0)^n\end{aligned}$$

Dans le cas de la division, le rayon de convergence de la série de puissance résultante peut être inférieur à p.

3. La fonction f est continue a des dérivées de tous les ordres pour $|x - x_0| < p$. $f', f'', ...$ peut être calculé en différenciant la série par terme, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ... \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},\end{aligned}$$

et ainsi de suite, et chacune des séries converge absolument pour $|x - x_0| < p$.

4. La valeur a_n est donnée par

$$a_n = \frac{f^n(x)}{n!}$$

la série s'appelle la série Taylor pour la fonction f à propos de $x = x_0$.

5. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ pour chaque x dans certains intervalles ouverts de centre x_0, puis $a_n = b_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, ...$ en particulier, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ pour chacun x puis $a_0 = a_1 = ... = a_n = ... = 0$, Alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n = 0$.

Une fonction qui a une extension en série Taylor ou point $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

avec un rayon de convergence $p > 0$, est dite analytique en $x = x_0$. Les fonctions de calcul sont analytiques sauf peut être en certains points facilement reconnaissables. Par exemple, $sinx$ et e^x sont analytiques sauf en $x = 0$, et $tanx$ est est analytique sauf en multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$. Selon les déclaration 1 et 2, si f et g sont analytiques en x_0, alors $f \pm g, f.g$ (à condition que $g(x_0) \neq 0$) sont également analytiques en x_0.

1.3 Notions d'analyse asymptotique

1.3.1 Relations de comparaisons

On considère une parti D de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) d'intérieur non vide et $x_0 \in \overline{D}$. Soit f, g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. *On dit que f est négligeable devant g, ou bien petit o au voisinage de x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists$ V un voisinage de x_0 tels que $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$, $\forall x \in V \cap D$,et on écrit $f(x) \ll g(x)$.*

Définition équivalente : f petit o de g s'il existe un voisinage V et un fonction

$\delta : V \cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \delta(x)g(x).\forall x \in V \cap D$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \delta(x) = 0$.

S'il existe un voisinage V telle que $g(x) \neq 0, \forall x \in V$.Alors f est petit o de g si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On écrit $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

Exemple 1.3.2.

1. *$x^p = o(x^q)$ au $V(0)$ si $p > q$.*
2. *$x^p = o(x^q)$ au $V(\infty)$ si $p < q$.*
3. *$x^n = o(e^x)$ au $V(\infty)$. $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Définition 1.3.3. *On dit que f est dominée par g ou bien grand O au voisinage de x_0, et on écrit $f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x))$ si il existe $M > 0$ et un voisinage V de x_0 tels que $|f(x)| \leq M|g(x)|$, $\forall x \in V \cap D$. Si g ne s'annule pas sur V , alors : $f(x) \underset{x_0}{=} O(g(x)) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de x_0.*

Exemple 1.3.4.

1. $sinx = O(1).\forall x.$

2. $sh(x) = O(e^x)$ *au* $V(\infty)$.

3. $ax^n = O(x^n)$ *au* $V(\infty), a \neq 0.$

Définition 1.3.5. *On dit que* $f(x)$ *est asymptotiquement équivalente à* $g(x)$ *au voisinage de* x_0*, et on écrit* $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow \infty$ *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* $\delta : V \cap D \longrightarrow R$ *tels que* $f(x) = \delta(x)g(x)\forall x \in V$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \delta(x) = 1$

Si g *ne s'annule pas sur* V*. Alors* $f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Par exemple : 1. $sinx \sim x$ *quand* $x \longrightarrow 0$*, puisque*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

Aussi, $x + 1 \sim x$ *quand* $x \longrightarrow \infty$*,puisque*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

2. Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *avec* $a_1 \neq 0$ *alors* $p(x) \sim a_n x^n$ *au V(0)*

Proposition 1.3.6. *La relation* $\sim$ *quand* $x \longrightarrow x_0$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes les fonctions qui sont nulles près de* x_0*. Autrement dit,*

$f(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

La propriété symétrique :

Si $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, alors* $g(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

et la propriété transitive :

Si $f(x) \sim g(x)$ *et* $g(x) \sim h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*, alors*

$f(x) \sim h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$

Proposition 1.3.7. *Si* $f(x) \ll g(x)$ *et* $g(x) \ll h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$*,alors* $f(x) \ll h(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$.

Proposition 1.3.8. *Si* $f(x) \sim g(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$ *alors l'erreur relative entre les fonctions tend vers zéro, c'est-à-dire*

$$f(x) - g(x) \ll g(x)$$

quand $x \longrightarrow x_0$.

De même, si $h(x) \ll f(x)$ quand $x \longrightarrow x_0$, alors l'ajout de $h(x)$ à $f(x)$ produira une fonction asymptotique équivalente à $f(x)$. Autrement dit,

$f(x) \pm h(x) \sim f(x)$ *quand* $x \longrightarrow x_0$.

1.3.2 Séries asymptotiques

Définition 1.3.9. *Soit $(\delta_n(x))$ une suite asymptotique et (a_n) une suite numérique. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n\delta_n(x)$ est asymptotique si et seulement si*

$\sum_{n\geq 0} a_n\delta_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k(x) + o\delta_m(x), \forall m \geq 0.$

Exemple 1.3.10.

1) Toute série entière est une série asymptotique.

2) $\sum \frac{1}{n!x^n}$ est asymptotique au voisinage de ∞.

3) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n sinx$ est asymptotique au voisinage de 0.

Définition 1.3.11. *Soit $\sum a_n\delta_n(x)$ et $\sum b_n\sigma_n(x)$ deux séries asymptotiques au voisinage de x_0. Soit α, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Alors $\alpha \sum a_n\delta_n(x)+\beta \sum b_n\sigma_n(x) = \sum(\alpha a_n\delta_n(x)+\beta b_n\sigma_n(x))$ est asymptotique au voisinage de x_0.*

1.3.3 Développement asymptotique des fonctions

Un développement asymptotique est un "développement limite généralisé" dans lequel la partie principale n'est pas nécessairement polynomiale. Il permet d'étudier le comportement d'une suite au voisinage de ∞ ou d'une courbe au voisinage d'un point. On les obtient en utilisant les développements limités en 0 usuels en effectuant éventuellement un changement de variable. Ils permettent : 1. De déterminer un équivalant d'une fonction au voisinage d'un point (éventuellement ∞) ou d'une suite. 2. D'étudier les branches infinies d'une courbe : asymptote éventuelle et position de la courbe par rapport à celle-ci.

Définition 1.3.12. *Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in D$, soit $(\delta_n(x))_{n\in N}$ une suite asymptotique au $V(x_0)$. On appelle développement asymptotique de f suivant la suite $(\delta_n(x))$ au $V(x_0)$ à l'ordre m, tout développement de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k(x) + o(\delta_m(x))$$

où $(a_n)_{n\in N}$ *une suite métrique. Si* f *est développable pour tout ordre* n*, on écrit :*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_k(x)$$

Exemple 1.3.13. *On a :*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$$

posant $x = sint$*, on obtient*

$$\frac{1}{1+sint} = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n sin^n t$$

c'est un développement asymptotique de la fonction

$$g(t) = \frac{1}{1+sint}$$

au $V(0)$*.*

1.3.4 Méthode de l'équilibre dominant

Pour trouver la série asymptotique pour la solution d'une équation, nous devons d'abord déterminer son comportement de premier plan. Parfois, c'est facile mais il s'agit généralement d'un problème non trivial. Dans ces situation une stratégie très efficace est la méthode de l'équilibre dominant. Le principe de l'équilibre dominant est assez simple. S'il y a trois termes ou plus dans une équation, deux des termes seront généralement asymptotique plus grand que les autres, c'est à dire qu'ils domineront les autres termes. De plus, ces termes s'équilibreront, afin que nous puissions former une équation asymptotique avec seulement deux termes. De telles équations sont généralement très facile à résoudre.

Définition 1.3.14. *La méthode de l'équilibre dominant est utilisée pour déterminer le comportement asymptotique des solutions à une équation différentielle ordinaire sans résoudre complètement l'équation.*

Exemple 1.3.15. *Trouver le comportement de la fonction définie implicitement par*

$x^2 + xy - y^3 = 0$ *quand* $x \longrightarrow \infty$*.*

Solution : Puisqu'il y a a trois termes non nuls, il ya trois choix pour une paire de termes. Si nous supposons y^3 *est petit quand* $x \longrightarrow \infty$*, alors nous aurons* $x^2 \sim -xy$*.*

Cela conduit rapidement à $y \sim x$ *quand* $x \longrightarrow \infty$. *Mais alors* $y^3 \sim -x^3$, *qui n'est pas petit par rapport à un terme que nous avons gardé* x^2, *quand* $x \sim \infty$. *Au lieu de cela, nous supposons* $x^2 \ll xy$, *puis* $xy \sim y^3$ *et* $y \sim \pm\sqrt{x}$. *Mais alors* $xy \sim \pm x^{\frac{3}{2}}$, *donc* x^2 *est plus grand que* $x \longrightarrow \infty$. *Cette possibilité est donc exclue.*

Le dernier cas à essayer est de supposer que xy *est le plus petit terme, puis* $x^2 \sim y^3$, *ce qui nous dit que* $y \sim x^{\frac{2}{3}}$. *Pour vérifier si cela est cohérent, nous devons vérifier que* $xy \ll x^2$. *En effet,* $xy \sim x^{\frac{5}{3}}$ *qui est plus petit que* x^2 *quand* $x \longrightarrow \infty$. *nous avons montré que* $y \sim x^{\frac{2}{3}}$ *est cohérent mais cela ne prouve pas à lui seul que le comportement dominant est bien* $x^{\frac{2}{3}}$. *Afin de montrer que c'est le comportement principal correct, nous devons trouver le terme suivant dans la série, et montre qu'il est plus petit que* $x^{\frac{2}{3}}$.

Laisser $y = x^{\frac{2}{3}} + g(x)$ *nous donne*

$$x^2 + x(x^{\frac{2}{3}} + g(x)) = (x^{\frac{2}{3}} + g(x))^3$$

$$x^2 + x^{\frac{5}{3}} + xg(x) \sim x^2 + 3g(x)x^{\frac{4}{3}} + O(x^{\frac{2}{3}}g(x)^2)$$

L'annulation du x, *et en gardant les termes d'ordre supérieur, nous obtenons* $x^{\frac{5}{3}} \sim 3g(x)x^{\frac{4}{3}}$ *qui simplifie en* $g(x) \sim \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$. *Ceci est en effet inférieur à* $x^{\frac{2}{3}}$ *quand* $x \longrightarrow \infty$, *nous avons donc confirmé le comportement dominant, ainsi que le terme suivant* $y \sim x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}$.

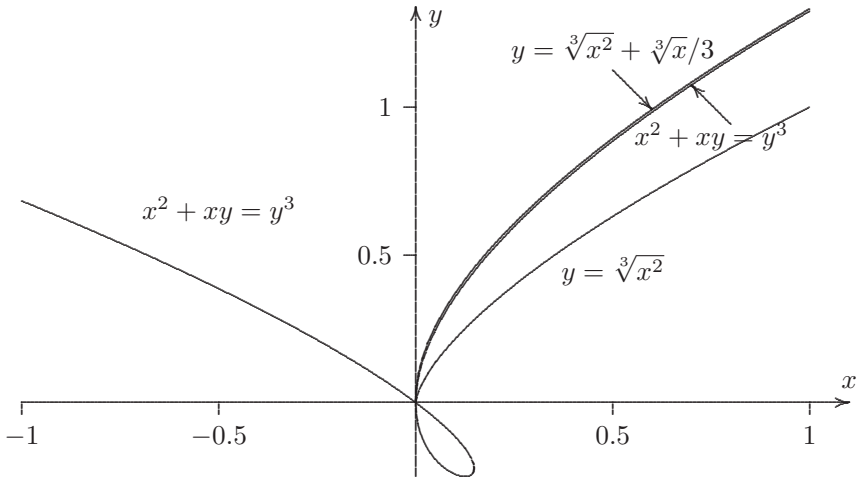

Figure 1.2 – comparaisons de la fonction définie implicitement par $x^2 + xy = y^3$ avec son approximation de second ordre $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3}$. Les deux graphiques sont presque indiscernable. L'erreur à $x = 1$ n'est que de 0.6%.

Un résumé des étapes utilisées dans la méthode de l'équilibre dominant :

1) Essayez de deviner quels termes peuvent être négligeables dans la limite.

2) Déposez ces termes pour former une équation plus simple. Résolvez cette équation exactement.

3) Vérifiez que la solution est cohérente avec l'étape 1.

4) Trouvez le terme suivant pour vérifier que le comportement de tête est bien correct. Si cela ressemble à un raisonnement circulaire, c'est parce que ça l'est ! C'est pourquoi l'étape 4 est importante. Ce n'est pas parce que nous trouvons une approximation qui est cohérente avec l'équation qu'il y a une vraie solution à l'équation qui est asymptotique à notre approximation.

Chapitre 2

Comportement local aux points singuliers réguliers des équations linéaires homogènes

2.1 Classification des points singuliers des équations linéaires homogènes

Dans cette section, nous commençons le processus d'analyse locale par classer un point x_0, qui peut être complexe, comme un point ordinaire, un point singulier régulier, ou un point singulier irrégulier d'une équation différentielle linéaire homogène. Cette classification donne la première indication de la nature des solutions à proximité de x_0 et suggère la voie appropriée pour une analyse systématique plus approfondie.

Considérons les équations différentielles linéaires homogènes de la forme suivante :

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = 0, \tag{2.1}$$

où

$$y^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}y(x).$$

Le schéma de classification que nous allons décrire suppose que p_0, p_1,...,p_{n-1} ont été définis pour les valeurs complexes aussi bien que pour les valeurs réelles de leurs variables.

Définition 2.1.1. *Le point x_0 ($x_0 \neq \infty$) est appelé un point ordinaire de l'équation* (2.1) *si les fonctions de coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... , $p_{n-1}(x)$ sont toutes analytiques au voisinage de x_0.*

Exemple 2.1.2.

1. *$y''(x) = e^x y(x)$. Tout point $x_0 \neq \infty$ est un point ordinaire.*
2. *$x^5 y^{(3)}(x) = y(x)$. Tout point x_0 sauf pour $x_0 = 0$ et ∞ est un point ordinaire.*
3. *$y'(x) = |x| y(x)$. Il n'y a pas de points ordinaires dans le plan complexe parce que $|x|$ est nulle part analytique.*

Fuchs[1] a prouvé en 1866 que toutes les n solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.1) sont analytiques au voisinage d'un point ordinaire. De plus, il a prouvé que si une solution est développée en une série de Taylor au point ordinaire x_0, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, alors le rayon de convergence de cette série est au moins aussi grand que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient dans le plan complexe.

L'emplacement d'une singularité d'une solution doit coïncider avec l'emplacement d'une singularité d'une fonction de coefficient. La solution d'une équation linéaire ne peut avoir de singularités en aucun autre point.

Exemple 2.1.3. *L'équation $(x^2 + 1)y'(x) + 2xy(x) = 0$ a un point ordinaire en 0. La solution $y(x) = c(1 + x^2)^{-1}$ peut être développé en une série de Taylor dont le rayon de convergence est 1 ; c'est la distance aux singularités des coefficients en $x = \pm i$ lorsque l'équation différentielle s'écrit sous la forme de* (2.1).

Définition 2.1.4. *Le point x_0 ($x_0 \neq \infty$) est appelé un point singulier régulier de l'équation* (2.1) *si les fonctions de coefficients $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$ ne sont pas toutes analytiques au voisinage de x_0 mais les fonctions $(x - x_0)p_{n-1}(x)$, $(x - x_0)^2 p_{n-2}(x)$, ..., $(x - x_0)^{n-1} p_1(x)$, $(x - x_0)^n p_0(x)$ sont analytiques au voisinage de x_0.*

Tout point singulier de l'équation (2.1) *qui n'est pas un point singulier régulier est appelé un point singulier irrégulier de l'équation* (2.1).

Remarque 2.1.5. *Dans le cas où les fonctions de coefficients sont des polynômes, la condition d'analyticité des fonctions $(x - x_0)^k p_{n-k}(x)$, est équivalente à les limites*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^k p_{n-k}(x),$$

sont finies.

1. **Lazarus Immanuel Fuchs** (1833–1902), mathématicien allemand.

Exemple 2.1.6. *Déterminer les points singuliers de l'équation différentielle*

$$2x(x-2)^2y''(x) + 3xy'(x) + (x-2)y(x) = 0, \tag{2.2}$$

et les classer comme réguliers ou irréguliers.

Solution :

En divisant l'équation (2.2) *par* $2x(x-2)^2$, *nous avons*

$$y''(x) + \frac{3}{2(x-2)^2}y'(x) + \frac{1}{2x(x-2)}y(x) = 0,$$

alors

$$p_1(x) = \frac{3}{2(x-2)^2} \quad \text{et} \quad p_0(x) = \frac{1}{2x(x-2)}.$$

Les points singuliers sont $x = 0$ *et* $x = 2$.

Pour $x = 0$ *on a*

$$\lim_{x\to 0} xp_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{2(x-2)^2} = 0,$$

et

$$\lim_{x\to 0} x^2p_0(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2(x-2)^2} = 0.$$

Puisque ces limites sont finies, $x = 0$ *est un point singulier régulier.*

Pour $x = 2$ *on a*

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p_1(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3}{2(x-2)} = \infty.$$

La limite n'est pas finie donc, $x = 2$ *est un point singulier irrégulier.*

Exemple 2.1.7. *Déterminer les points singuliers de l'équation différentielle*

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y''(x) + (\cos x)y'(x) + (\sin x)y(x) = 0,$$

et les classer comme réguliers ou irréguliers.

Solution :

Le seul point singulier est $x = \frac{\pi}{2}$. *Pour l'étudier, on considère les fonctions*

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)p_1(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2},$$

et

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 p_0(x) = \sin x.$$

A partir de la série de Taylor pour $\cos x$ *au voisinage de* $x = \frac{\pi}{2}$*, on constate que*

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \frac{(x - \pi/2)^2}{3!} + \frac{(x - \pi/2)^4}{5!} + \cdots ,$$

qui converge pour tout x*. De même,* $\sin x$ *est analytique en* $x = \frac{\pi}{2}$*. Par conséquent, nous concluons que* $\frac{\pi}{2}$ *est un point singulier régulier pour cette équation.*

Fuchs a montré qu'il y a toujours au moins une solution de la forme

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x), \tag{2.3}$$

où α est un nombre appelé exposant indicatif, et $A(x)$ est une fonction qui est analytique en x_0 et qui a une série Taylor dont le rayon de convergence est au moins grand que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient dans le plan complexe.

Si (2.1) est d'ordre $n \geqslant 2$, alors il existe une deuxième solution linéairement indépendante ayant l'une des deux formes possibles :

$$y(x) = (x - x_0)^\beta B(x), \tag{2.4}$$

où

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) \ln(x - x_0) + C(x)(x - x_0)^\beta. \tag{2.5}$$

$B(x)$ et $C(x)$ sont de nouvelles fonctions qui sont également analytiques en x_0 et qui ont des rayons de convergence au moins aussi grands que la distance à la singularité la plus proche des fonctions de coefficient. $A(x)$ est la même fonction qui apparaît dans (2.3).

En général, pour chaque nouvelle solution linéairement indépendante, il existe une nouvelle fonction analytique de x et soit un nouvel exposant indicatif, soit une autre puissance de $\ln(x - x_0)$. Ainsi, la forme de la n^{ième} solution est au pire

$$y(x) = (x - x_0)^\gamma \sum_{i=0}^{n-1} \big(\ln(x - x_0)\big)^i A_i(x),$$

où toutes les fonctions $A_i(x)$ sont analytiques en x_0.

Classification du point $x = \infty$:

Nous avons terminé la classification des points x_0 dans le plan complexe fini, mais il est également utile de classer le point $x_0 = \infty$. Nous faisons cela en transformant

analytiquement le point infini à l'origine à l'aide de la transformation d'inversion

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}, \\ \frac{d}{dx} &= -t^2\frac{d^2}{dt}, \\ \frac{d^2}{x^2} &= t^4\frac{d^2}{dt^2} + 2t^3\frac{d}{dt}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, puis classer le point $t = 0$. Le point $x_0 = \infty$ est appelé un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier si le point $t = 0$ est classé en conséquence.

Exemple 2.1.8. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$(x^3 - 2x^2)y''(x) + (x+3)y'(x) + (x-2)y = 0. \tag{2.6}$$

En remplaçant

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}, \\ y(x) &= y(t), \\ y'(x) &= -t^2y'(t), \\ y''(x) &= t^4y''(t) + 2t^3y'(t), \end{aligned}$$

dans l'équation (2.6) *on obtient*

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2}\Big)\big(t^4y''(t) + 2t^3y'(t)\big) + \Big(\frac{1}{t} + 3\Big) - t^2y'(t) + \Big(\frac{1}{t} - 2\Big)y(t) = 0 \\ \Longrightarrow\ &(t - 2t^2)y''(t) + (2 - 5t - 3t^2)y'(t) + \Big(\frac{1-2t}{t}\Big)y(t) = 0. \end{aligned}$$

Si nous mettons la dernière équation sous la forme standard (2.1)*, nous avons*

$$y''(t) + \frac{2 - 5t - 3t^2}{t(1-2t)}y'(t) + \frac{1}{t^2}y(t) = 0. \tag{2.7}$$

Donc

$$p_1(t) = \frac{2 - 5t - 3t^2}{t(1-2t)} \quad \textit{et} \quad p_0(t) = \frac{1}{t^2}y(t) = 0.$$

Les points singuliers de l'équation (2.7) *sont* $t = 0$ *et* $t = \frac{1}{2}$*, mais nous ne nous intéresserons que du point* $t = 0$*. On a*

$$\lim_{t\to 0} t^2p_0(x) = \lim_{t\to 0} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{t\to 0} tp_1(x) = \lim_{t\to 0} \frac{2-5t-3t^2}{1-2t} = 2.$$

$t = 0$ est un point singulier régulier de l'équation (2.7) *alors, $x = \infty$ est un point singulier régulier de l'équation* (2.6).

2.2 Comportement local au voisinage d'un point ordinaire

Dans cette section, nous montrons comment représenter le comportement local en termes d'expansions de séries infinies lorsque les solutions exactes sous forme fermée ne sont pas connus. La procédure générale consiste à classer d'abord le point x_0 comme un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier, puis de sélectionner une forme appropriée pour la série basée sur cette classification.

En général, il est très utile de savoir comment obtenir des réponses à des problèmes difficiles en termes de séries infinies. Ce mode d'attaque peut réduire une analyse autrement difficile à une séquence d'opérations simples pour générer les termes de la série. Les premiers termes de la série sont généralement suffisants pour donner une approximation très précise du comportement local de la solution d'une équation différentielle.

Pour obtenir une solution en série au voisinage d'un point ordinaire, nous substituons la série de Taylor

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

dans l'équation différentielle et déterminons les coefficients a_n, en résolvant une relation de récurrence.

Exemple 2.2.1. *Trouver une série en puissances de x solution de l'équation d'Airy*[2] *:*

$$y''(x) - xy(x) = 0, \tag{2.8}$$

au voisinage de $x_0 = 0$.

Solution :

Pour cette équation $p_1(x) = 0$, $p_0(x) = -x$. Donc le point $x_0 = 0$ est un point ordinaire.

2. **Sir George Biddell Airy** (1801-1892), astronome et mathématicien anglais.

On cherche une solution sous la forme d'une série de puissances au voisinage de $x_0 = 0$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2.9}$$

et supposons que la série converge dans un certain intervalle $|x| < \rho$.

En différenciant l'équation (2.9) *terme par terme, on obtient*

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

et

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \tag{2.10}$$

En substituant les séries (2.9) *et* (2.10) *pour* $y(x)$ *et* $y''(x)$ *dans le côté gauche de l'équation* (2.8), *on obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Ensuite, nous décalons l'indice de sommation dans la deuxième série du côté droit de l'équation précédente en remplaçant n *par* $n-1$ *et en commençant la sommation à* 1 *plutôt qu'à zéro. Ainsi, nous écrivons l'équation* (2.8) *comme*

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour tout x *dans un certain intervalle, les coefficients de puissances similaires de* x *doivent être nuls ; d'où* $a_2 = 0$, *et on obtient la relation de récurrence*

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \quad \textit{pour } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.11}$$

Puisque a_{n+2} *est donné en termes de* a_{n-1}, *les* a_n *sont déterminés par pas de trois. Ainsi* a_0 *détermine* a_3, *qui à son tour détermine* $a_6, \ldots$; *et* a_2 *détermine* a_5, *qui à son tour détermine* $a_8, \ldots$. *Puisque* $a_2 = 0$, *nous concluons immédiatement que* $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

Pour la séquence $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$ *on pose* $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ *dans la relation de récurrence* (2.11),

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{2 \cdot 3}\,, \\ a_6 &= \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}\,, \\ a_9 &= \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}\,. \end{aligned}$$

Ces résultats suggèrent la formule générale

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)} \\ &= \frac{a_0}{3^{2n}\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} \cdot 2 \cdots (n - \frac{1}{3})n} \\ &= \frac{a_0}{3^{2n} n! \frac{2}{3}(1 + \frac{2}{3}) \cdots (n - 1 + \frac{2}{3})} \\ &= \frac{a_0 \Gamma(\frac{2}{3})}{3^{2n} n! \Gamma(n + \frac{2}{3})}\,, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

car, d'après une propriété élémentaire de la fonction Gamma :

$$\Gamma(\nu + n + 1) = (\nu + n)(\nu + n - 1) \cdots (\nu + 1)\Gamma(\nu + 1).$$

Pour la séquence $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$ *on pose* $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ *dans la relation de récurrence* (2.11),

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_1}{3 \cdot 4}\,, \\ a_7 &= \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}\,, \\ a_{10} &= \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}\,. \end{aligned}$$

En général, nous avons

$$\begin{aligned} a_{3n+1} &= \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)} \\ &= \frac{a_1}{3^{2n} n! \frac{4}{3}(1 + \frac{4}{3}) \cdots (n - 1 + \frac{4}{3})} \\ &= \frac{a_1 \Gamma(\frac{4}{3})}{3^{2n} n! \Gamma(n + \frac{4}{3})}\,, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation d'Airy est

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} + a_1\Gamma\Big(\frac{4}{3}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})} \\ &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont la première et la deuxième série dans l'équation (2.12).

Ayant obtenu ces deux solutions en série, nous pouvons maintenant étudier leur convergence. Il est facile d'utiliser le test de rapport pour montrer que ces deux séries convergent pour tout x. D'autre part leur Wronskien au point $x = 0$ est

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

et par conséquent y_1 et y_2 sont un ensemble fondamental de solutions.

Dans les Figures 2.1 et 2.2, respectivement, nous montrons les graphiques des solutions y_1 et y_2 de l'équation d'Airy ainsi que les graphiques de plusieurs sommes partielles des deux séries de l'équation (2.12).

Il est classique de définir deux solutions spéciales linéairement indépendantes de l'équation Airy par

$$A_i(x) = 3^{-2/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} - 3^{-4/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}, \tag{2.13}$$

$$B_i(x) = 3^{-1/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} + 3^{-5/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}. \tag{2.14}$$

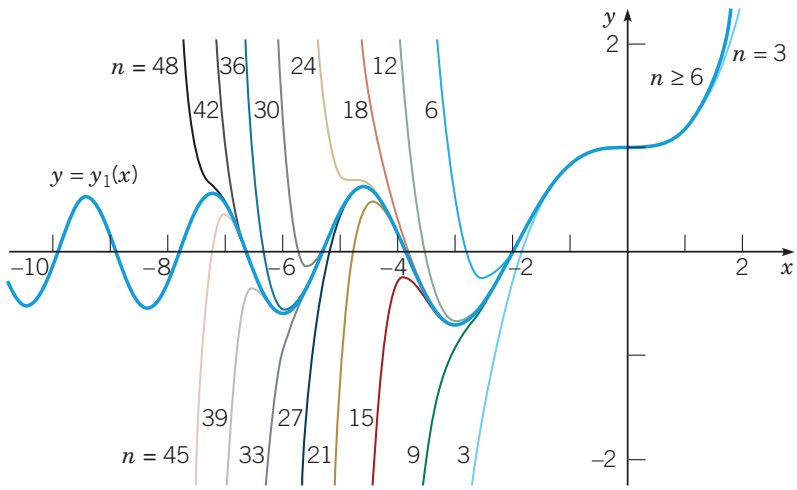

Figure 2.1 – Approximations polynomiales de la solution $y(x) = y_1(x)$ de l'équation d'Airy. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

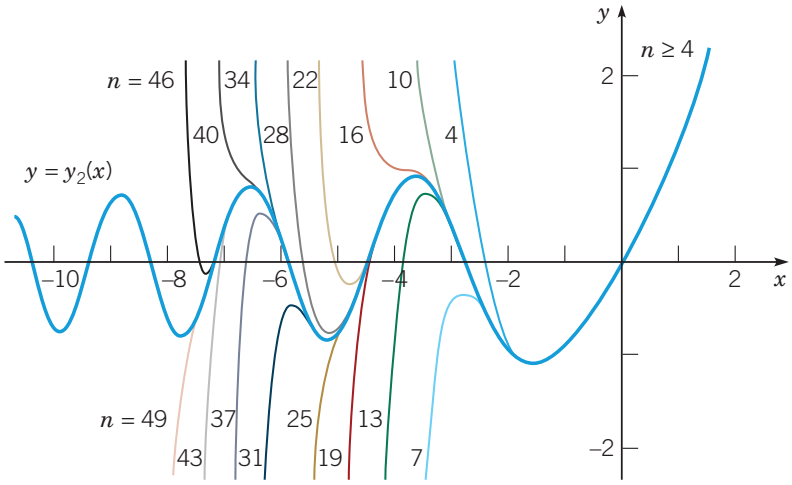

Figure 2.2 – Approximations polynomiales de la solution $y(x) = y_2(x)$ de l'équation d'Airy. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

2.3 Comportement local au voisinage d'un point singulier régulier

Nous avons vu que les séries de Taylor sont un bon moyen de représenter le comportement local d'une solution d'une équation différentielle au voisinage d'un point ordinaire. Que se passe-t-il si nous essayons de représenter le comportement local d'une solution au voisinage d'un point singulier régulier par une série de Taylor ? Nous discuterons cette question à travers deux exemples.

Exemple 2.3.1. *Si nous cherchons une solution de l'équation*

$$y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0, \tag{2.15}$$

sous la forme d'une série de Taylor au voisinage du point $x_0 = 0$, qui est un point singulier régulier, la procédure d'expansion formelle qui fonctionne pour les points ordinaires n'est pas fructueuse ici. Autrement dit, si nous substituons la série de Taylor $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans cette équation et différencions terme par terme, nous obtenons la suite d'équations suivante pour a_n :

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La solution de ces équations est $a_n = 0$ pour tout n. Ainsi, nous n'obtenons que la solution triviale $y(x) = 0$. Ce n'est pas un progrès.

L'expansion des séries de Taylor a échoué dans l'exemple précédent parce que les séries de Taylor ne sont pas assez générales pour décrire le comportement local des solutions au voisinage de points singuliers réguliers.

Heureusement, le résultat de Fuchs énoncé dans la Section 2.1 suggère une structure plus générale que la série de Taylor. En particulier, nous avons appris que si x_0 est un point singulier régulier d'une équation différentielle linéaire homogène, au moins une solution doit avoir la forme (2.3) :

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x),$$

où $A(x)$ est analytique ou point x_0.

Puisque $A(x)$ est analytique, il peut être développé en une série de Taylor :

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.16}$$

Nous appelons le côté droit de (2.16) une série de Frobenius[3] et nous appelons le nombre α un exposant indicatif. Il est classique de supposer que $a_0 \neq 0$ dans une série de Frobenius, ce qui est assuré par un bon choix de α. Une série de Taylor est un cas particulier d'une série de Frobenius.

Exemple 2.3.2. *Si nous essayons une série de Frobenius de la forme* (2.16) *avec* $x_0 = 0$ *dans l'équation différentielle* (2.15)

$$y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0,$$

nous trouvons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n-2} = 0, \tag{2.17}$$

donc

$$\left[(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + \frac{1}{4}\right] a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Puisque nous supposons que $a_0 \neq 0$*, alors pour* $n = 0$ *on a :* $\alpha(\alpha - 1) + \frac{1}{4} = 0$*, donc* $\alpha = \frac{1}{2}$*. Les équations restantes pour* a_n *donnent* $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$*.*

Ainsi, la série de Frobenius prend la forme simple $y(x) = a_0\sqrt{x}$*, où* a_0 *est arbitraire. Cette série de Frobenius à un terme est une solution exacte de l'équation différentielle* $y''(x) + \frac{y(x)}{4x^2} = 0$*.*

3. **Ferdinand Georg Frobenius** (1849–1917) est un mathématicien allemand.

La théorie générale garantit seulement qu'il y ait une solution sous la forme d'une série de Frobenius. Les autres solutions peuvent être légèrement plus compliquées.

2.3.1 Méthode de Frobenius pour les équations du seconde ordre

Si l'équation différentielle

$$y''(x) + \frac{p(x)}{x - x_0} y'(x) + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y(x) = 0, \tag{2.18}$$

a un point singulier régulier à x_0, alors $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques à x_0. Ainsi, nous pouvons développer $p(x)$ et $q(x)$ en série de Taylor à x_0 :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n. \tag{2.19}$$

En dérivant la série de Frobenius (2.16) terme par terme on obtient :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}, \tag{2.20a}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-1}, \tag{2.20b}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2}. \tag{2.20c}$$

En substituant ces développements ainsi les développements (2.19) dans le côté gauche de (2.18) on obtient :

$$\begin{aligned} y''(x) + \frac{p(x)}{x - x_0} y'(x) + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2} \\ &\quad + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^{n-1} \Big) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-1} \\ &\quad + \Big(\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^{n-2} \Big) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha} = 0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}.
\end{aligned}
$$

Alors (2.18) devient

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}(k+\alpha)a_k p_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k}\Big)(x-x_0)^{n+\alpha-2}=0.
$$

En égalisant les coefficients de $(x-x_0)^{n+\alpha-2}$ pour $n=0,1,2,\ldots$ on trouve :

$$
(x-x_0)^{\alpha-2} \quad : \quad \big[\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0\big]a_0=0 \tag{2.21a}
$$

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)^{n+\alpha-2} : \quad & \big[(n+\alpha)^2+(p_0-1)(n+\alpha)+q_0\big]a_n\\
&=-\sum_{k=0}^{n-1}\big[(k+\alpha)p_{n-k}+q_{n-k}\big]a_k, \quad n=1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{2.21b}
$$

Par hypothèse a_0 est différent de zéro, donc (2.21a) exige que α soit une racine du polynôme indicatif $P(\alpha)$, où

$$
P(\alpha)=\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0. \tag{2.22}
$$

Étant donner ces valeurs de α, nous devons alors résoudre la relation de récurrence (2.21b) pour a_n en termes de a_0. La constante a_0 est arbitraire et apparaîtra finalement comme un facteur multiplicatif dans la solution $y(x)$. Cependant, la relation de récurrence (2.21b) ne peut être résolue pour a_n en terme de a_k pour $k<n$ seulement si $P(n+\alpha)\neq 0$ car le côté gauche de (2.21b) est précisément $P(n+\alpha)a_n$. Si cette condition est vraie pour tous les entiers positifs n, alors il peut être démontré que la série (2.16) converge dans un cercle dont le rayon est au moins aussi grand que la distance à la singularité la plus proche de $p(x)$ ou $q(x)$.

Soit α_1 et α_2 les deux racines du polynôme indicatif $P(\alpha)$ qui sont ordonnées de telle sorte que $\Re(\alpha_1)\geqslant\Re(\alpha_2)$. Alors $P(n+\alpha_1)\neq 0$ pour $n=1,2,\ldots$ parce que α_2 est la seule autre racine de $P(\alpha)$. Ainsi, la relation de récurrence (2.21b) peut être résolue

pour a_n en termes de a_0 pour tout n. Ceci explique pourquoi il y a toujours au moins une solution sous la forme d'une série de Frobenius.

En général, on peut toujours construire une paire de solutions linéairement indépendantes de (2.18) en résolvant la relation de récurrence (2.21b) avec $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_2$, à condition que $\alpha_1 - \alpha_2$ ne soit pas un entier.

Exemple 2.3.3. *Équation de Bessel*[4] *d'ordre* ν.

L'équation de Bessel

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y(x) = 0, \tag{2.23}$$

a un point singulier régulier à $x = 0$.

Ici, $p(x) = 1$ *et* $q(x) = x^2 - \nu^2$ *donc,* $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$, $q_2 = 1$ *et tous les autres* p_n *et* q_n *sont nuls. Alors, d'après* (2.22) *le polynôme indicatif est*

$$P(\alpha) = \alpha^2 - \nu^2.$$

Par conséquent, $\alpha = \pm\nu$. *On peut supposer que* $\Re(\nu) > 0$ *et noter* $\alpha_1 = +\nu$ *et* $\alpha_2 = -\nu$.

Les relations de récurrence (2.21a) *et* (2.21b) *deviennent*

$$\left.\begin{array}{lll} x^{\alpha-2} & : & (\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0, \\ x^{\alpha-1} & : & \big[(\alpha+1)^2 - \nu^2\big]a_1 = 0, \\ x^{\alpha+n-2} & : & \big[(\alpha+n)^2 - \nu^2\big]a_n = -a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{2.24}$$

Comme $P(\alpha_1 + n) \neq 0$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *peuvent être facilement déterminés à partir de* (2.24). *Les résultats sont* $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ *et*

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{2^2 n(\nu+n)} \\ &= \frac{a_{2n-4}}{2^4 n(n-1)(\nu+n)(\nu+n-1)} \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n(n-1)\cdots 2\cdot 1(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)} \\ &= \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2n} n!\Gamma(\nu+n+1)}, \end{aligned}$$

4. **Friedrich Wilhelm Bessel** (1784-1846), astronome, mathématicien, géodésien et physicien allemand

Donc

$$y_1(x) = a_0\Gamma(\nu+1)x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.25}$$

Habituellement, la constante a_0 reçoit la valeur

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)},$$

le résultat définit une fonction qui est appelée la fonction de Bessel du premier type d'ordre ν et d'argument x

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.26}$$

Si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu$ est également non entier alors $P(-\nu+n) \neq 0$ pour tous les entiers positifs n, donc une deuxième solution de l'équation de Bessel peut être obtenue en choisissant $\alpha = -\nu$:

$$y_2(x) = a_0\Gamma(1-\nu)x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.27}$$

Habituellement, la constante a_0 reçoit la valeur

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)},$$

le résultat définit une fonction qui est appelée la fonction de Bessel du premier type d'ordre négatif $-\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{2.28}$$

La solution $J_{-\nu}(x)$ est clairement linéairement indépendante de $J_\nu(x)$ lorsque ν est non entier car leurs séries commencent par des puissances différentes de x. Ainsi la solution de l'équation de Bessel (2.23) *est*

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, la solution obtenue en choisissant $\alpha = \alpha_2$ est identique à la première solution obtenue avec $\alpha = \alpha_1$, à l'exception d'un facteur multiplicatif a_0. Ainsi, pour trouver une deuxième solution nécessite plus d'analyse.

Si $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ un entier positif, alors la relation de récurrence (2.21b) avec $\alpha = \alpha_2$ et $n = N$ lit :

$$0a_N = -\sum_{k=0}^{N-1}[(k+\alpha_2)p_{N-k} + q_{N-k}]a_k. \tag{2.29}$$

Il y a maintenant deux possibilités :

1. Si le côte droit de (2.29) est différent de zéro, alors a_N n'existe pas ; donc pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante nécessite une analyse plus approfondie.

2. Si le coté droit de (2.29) égale zéro, alors (2.29) se réduit à l'identité $0 = 0$ et ne détermine pas a_N. Il s'ensuite que a_N est une constante arbitraire. La relation de récurrence a réussi a sauté l'obstacle à $n = N$. Nous pouvons maintenant calculer le reste des coefficients $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$ en tant que fonctions des deux constantes arbitraires a_0 et a_N et déterminer ainsi une seconde solution linéairement indépendante de l'équation différentielle.

Nous pouvons résumer la discussion ci-dessus comme suit :

Cas I : $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$; $\alpha_1 - \alpha_2 \neq$ entier. Il existe deux solutions linéairement indépendantes sous forme de Frobenius.

Cas II : $\alpha_1 - \alpha_2 = N = 0, 1, 2, \ldots$ Ce cas doit être subdivisé en deux :

a) $\alpha_1 = \alpha_2$. Il n'y a qu'une seule solution sous forme de Frobenius. Nous expliquons brièvement comment construire une deuxième solution.

b) $\alpha_1 - \alpha_2 = 1, 2, 3, \ldots$ Ce cas doit être subdivisé en deux :

i) Le coté droite de (2.29) est différent de zéro. Il n'y a q'une seule solution sous forme de Frobenius. Nous expliquons brièvement comment construire une deuxième solution.

ii) Le coté droit de (2.29) est zéro. Il existe deux solutions linéairement indépendantes sous forme de Frobenius.

Discussions du cas II b) ii) : Ce cas est caractérisé par la disparition du côté droit de (2.29). Cela garantit qu'une série de Frobenius avec un exposant indicatif α_2 peut être trouvée.

Exemple 2.3.4. *Équation de Bessel d'ordre* $\nu = \frac{1}{2}$.

Si nous choisissons $\nu = \frac{1}{2}$ *dans l'équation de Bessel* (2.23), *alors les indices* α_1 *et* α_2 *diffèrent par un entier :* $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$.

Pour $\alpha = \nu = \frac{1}{2}$, *la solution est donnée par* (2.26) *:*

$$y_1(x) = J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Or

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).$$

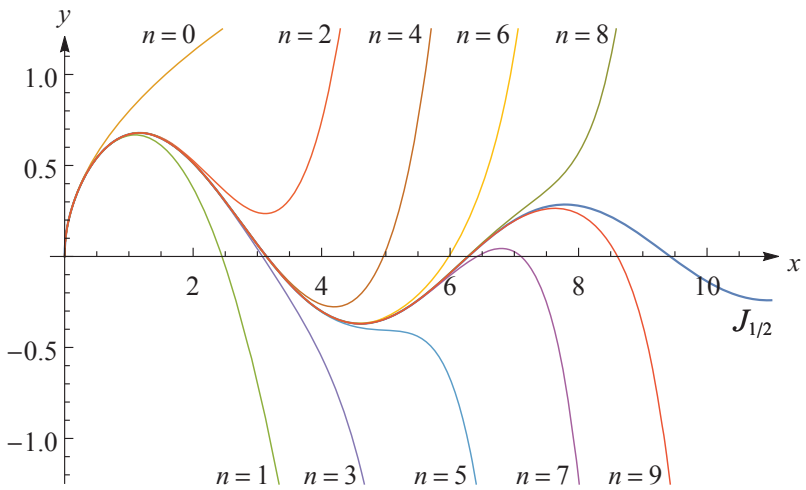

Figure 2.3 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel $J_{1/2}$. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Pour $\alpha = -\nu = -\frac{1}{2}$, *le coté droit de* (2.29) *est* $-q_1 a_0 = 0$. *Ainsi, la deuxième solution a la forme d'une série de Frobenius. La résolution des relations de récurrence*

(2.24) *pour* $\alpha = -1/2$ *nous donne :* $a_0,\ a_1$ *arbitraires,*

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n-1)} \\ &= \frac{a_{2n-4}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{-a_{2n-1}}{(2n+1)(2n)} \\ &= \frac{a_{2n-3}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)} \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2} \\ &= \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{x}} \cos(x) + \frac{a_1}{\sqrt{x}} \sin(x). \end{aligned}$$

La constante a_1 *introduit simplement un multiple de* $y_1(x)$*. La seconde solution de l'équation de Bessel d'ordre un demi est généralement considérée comme la solution pour laquelle* $a_0 = \sqrt{2/\pi}$ *et* $a_1 = 0$*. Elle est notée* $J_{-1/2}$*. Alors*

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

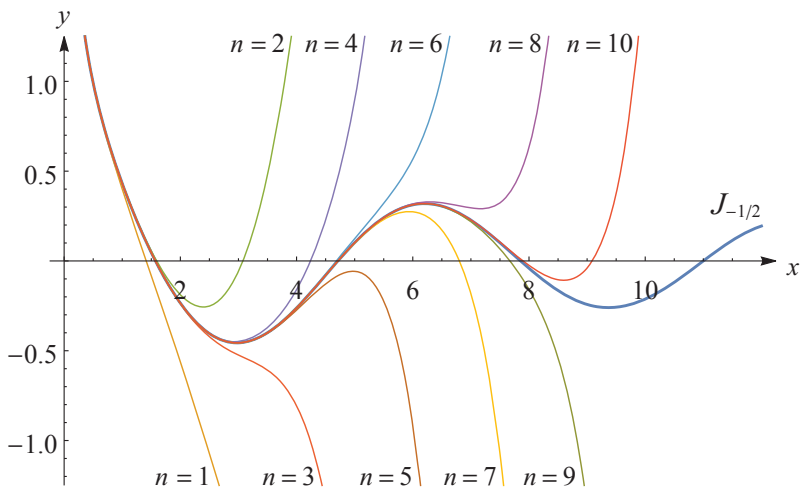

Figure 2.4 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel $J_{-1/2}$. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Finalement, la solution de l'équation de Bessel (2.23) *d'ordre* $\nu = \frac{1}{2}$ *est :*

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\big(c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)\big), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans les cas II a) et II b) i), la deuxième solution n'a pas la forme d'une série de Frobenius, un développement local de la deuxième solution implique la fonction $\ln(x - x_0)$.

Discussions du cas II a) :

Nous trouvons une deuxième solution linéairement indépendante de (2.18) quand $\alpha_1 = \alpha_2$ en différenciant la série de Frobenius (2.16) par rapport à l'exposant indicatif α. Pour préparer la différenciation par rapport à α, nous laissons α arbitraire pour le moment en ignorant (2.21a) et résolvons la relation de récurrence (2.21b) pour a_n en fonction de a_0 et α. Nous désignons la série de Frobenius résultante par $y(x, \alpha)$:

$$y(x, \alpha) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n. \tag{2.30}$$

Bien sur $y(x, \alpha)$ n'est pas une solution de (2.18) sauf si $\alpha = \alpha_1$. Il convient de définir la notation

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{p(x)}{x - x_0}\frac{d}{dx} + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}.$$

Toute solution $y(x)$ de (2.18) vérifie l'équation $Ly(x) = 0$.

Puisque $a_n(\alpha)$ par construction satisfait la relation de récurrence (2.21b), $y(x, \alpha)$ dans (2.30) est presque, mais pas tout à fait, une solution de l'équation différentielle (2.18) lorsque $\alpha \neq \alpha_1$. Au lieu de satisfaire $Ly(x) = 0$, $y(x, \alpha)$ satisfait

$$Ly(x, \alpha) = a_0(x - x_0)^{\alpha-2}P(\alpha). \tag{2.31}$$

Si nous choisissons $\alpha = \alpha_1$ alors le côté droite de (2.31) disparaît ; cela montre que $y(x, \alpha_1)$ n'est que la série de Frobenius solution de $Ly(x) = 0$.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2$, $P(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) = (\alpha - \alpha_1)^2$. Donc, si nous différencions les deux côtés de (2.31) par rapport à α et prenons $\alpha = \alpha_1$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} Ly(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial\alpha} a_0\big[(x - x_0)^{\alpha-2}P(\alpha)\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha} a_0\big[(x - x_0)^{\alpha-2}(\alpha - \alpha_1)^2\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= a_0\big[2(\alpha - \alpha_1)(x - x_0)^{\alpha-2} + (x - x_0)^{\alpha-2}(\alpha - \alpha_1)^2 \ln(x - x_0)\big]\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$ est une nouvelle solution de (2.18) parce que

$$L\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha} Ly(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0.$$

Si nous différencions (2.30) par rapport à α, on voit que la forme de cette nouvelle solution est celle donnée dans (2.5) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big((x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big)\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= \ln(x - x_0)(x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&\quad + (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} a_n(\alpha)(x - x_0)^n\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\
&= y(x, \alpha_1) \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^{\alpha_1+n},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

où

$$b_n = \frac{\partial}{\partial\alpha} a_n(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1}. \tag{2.33}$$

Nous avons maintenant obtenu des développements en série pour deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.18) au voisinage d'un point singulier régulier.

Exemple 2.3.5. *Équation de Bessel d'ordre $\nu = 0$.*

Lorsque $\nu = 0$, le polynôme indicatif $P(\alpha) = \alpha^2$ a une racine double en $\alpha = 0$. Une solution est donnée par (2.26) *:*

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

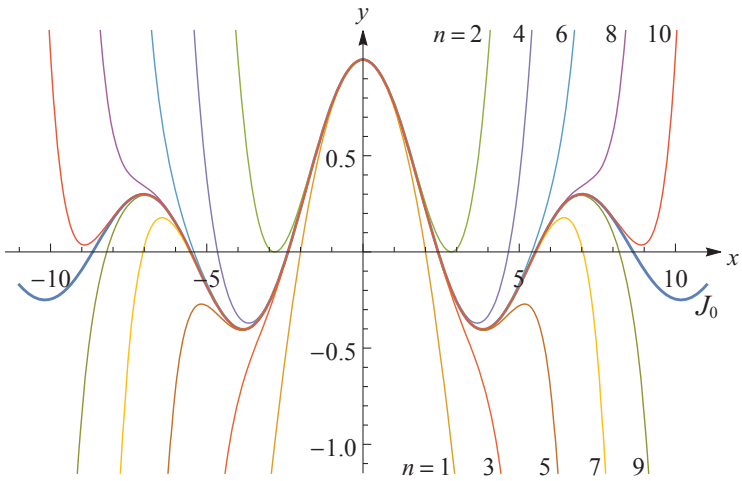

Figure 2.5 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel J_0. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Une solution linéairement indépendante doit avoir la forme (2.32)*. Ainsi, il est nécessaire d'évaluer les coefficients b_n à partir de* (2.33) *en effectuant la différenciation indiquée. À partir des équations* (2.24) *avec $\nu = 0$ on trouve $a_0(\alpha) = a_0$, $a_{2n+1}(\alpha) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, et*

$$\begin{aligned} a_{2n}(\alpha) &= \frac{-a_{2n-2}(\alpha)}{(\alpha+2n)^2} \\ &= \frac{a_{2n-4}(\alpha)}{(\alpha+2n)^2(\alpha+2n-2)^2} \\ &= \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{(\alpha+2n)^2(\alpha+2n-2)^2\cdots(\alpha+2)^2}, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Donc

$$b_0 = \frac{\partial}{\partial\alpha} a_0 \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad b_{2n+1} = 0; \quad n \geqslant 0, \tag{2.34}$$

et

$$\begin{aligned}
b_{2n} = \frac{\partial}{\partial\alpha} a_{2n}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} &= -2\frac{(-1)^n a_0}{(\alpha+2n)^2(\alpha+2n-2)^2\cdots(\alpha+2)^2}\times \\
&\quad \Big(\frac{1}{\alpha+2n}+\frac{1}{\alpha+2n-2}+\cdots+\frac{1}{\alpha+2}\Big)\Big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}2a_0}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots 2^2}\Big(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}\Big) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}a_0}{2^{2n}(n!)^2}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1\Big) \\
&= -H_n\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}a_0, \quad n \geqslant 1, \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

où

$$H_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1,$$

est le $n^{\text{ième}}$ *nombre harmonique.*

La substitution de ce résultat dans (2.32) *en prenant* $a_0 = 1$ *donne une solution qui est linéairement indépendante de* $J_0(x)$ *:*

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = J_0(x)\ln x - \sum_{n=1}^{\infty} H_n\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}.$$

Au lieu de y_2*, la deuxième solution est généralement considérée comme une certaine combinaison linéaire de* J_0 *et* y_2*. Elle est connue sous le nom de fonction de Bessel du deuxième type d'ordre zéro et est notée* Y_0 *:*

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\big(y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\big), \qquad (2.36)$$

où γ *est une constante connue sous le nom de constante Euler-Máscheroni ; il est défini par :*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772.$$

En remplaçant $y_2(x)$ *dans l'équation* (2.36)*, on obtient*

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\Big(\gamma + \ln\frac{x}{2}\Big)J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} H_n\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}, \quad x > 0.$$

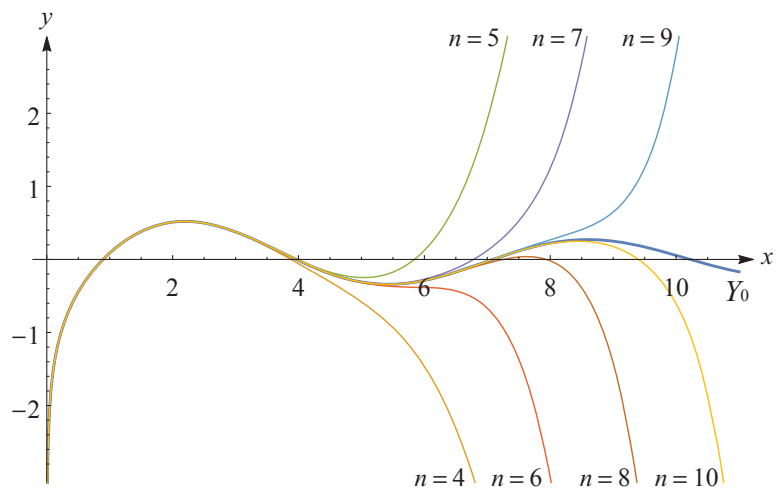

Figure 2.6 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel Y_0. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

La solution générale de l'équation de Bessel d'ordre zéro pour $x > 0$ est

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Discussion du cas II b) i) :

Pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante de (2.18) lorsque $\alpha_1 - \alpha_2 = N$, un entier positif, et le coté droit de (2.29) est différent de zéro nous essayons de suivre la même procédure que dans le cas II a).

Différencions l'équation (2.31) par rapport à α et voyons quelle équation différentielle $\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha))|_{\alpha=\alpha_1}$ satisfait. Cette fois, nous n'avons pas cette chance : $\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha))|_{\alpha=\alpha_1}$ est une solution particulière de l'équation non homogène

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1}\right] &= a_0(x-x_0)^{\alpha-2}P(\alpha)\ln(x-x_0)\Big|_{\alpha=\alpha_1} + a_0(x-x_0)^{\alpha-2}P'(\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} \\ &= a_0 P'(\alpha_1)(x-x_0)^{\alpha_1-2} \\ &= a_0 P'(\alpha_1)(x-x_0)^{\alpha_2+N-2}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Le coté droit de cette équation ne disparaît pas comme dans le cas II a) parce que $P(\alpha) = (\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)$ n'a pas de racine double en $\alpha = \alpha_1$.

Nous voulons vraiment construire une solution à la partie homogène de (2.37).

Une façon de faire cela est de construire une deuxième solution particulière de l'équation non homogène (2.37) et de la soustraire de la première. La différence sera

une solution de l'équation homogène associée (2.18). Il est agréable de découvrir que la deuxième solution particulière a un développement de Frobenius ordinaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{\alpha_2 + n}. \tag{2.38}$$

Substitution de cette série en (2.37) et égalisation des coefficients de $(x - x_0)^{\alpha_2+n-2}$ donne

$$(x - x_0)^{\alpha_2 - 2} \quad : \; P(\alpha_2) c_0 = 0, \tag{2.39a}$$

$$(x - x_0)^{\alpha_2+n-2} \; : \; P(\alpha_2 + n) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} \big[(\alpha_2 + k) p_{n-k} + q_{n-k}\big] c_k = 0, \quad n \neq 0, N, \tag{2.39b}$$

$$(x - x_0)^{\alpha_2+N-2} : \; P(\alpha_2 + N) c_N + \sum_{k=0}^{N-1} \big[(\alpha_2 + k) p_{N-k} + q_{N-k}\big] c_k = a_0 P'(\alpha_1). \tag{2.39c}$$

Puisque $P(\alpha_2 + N) = 0$, la relation (2.39c) ne détermine pas c_N, il relie plutôt la valeur de a_0 aux coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$:

$$a_0 = \frac{1}{P'(\alpha_1)} \sum_{k=0}^{N-1} \big[(\alpha_2 + k) p_{N-k} + q_{N-k}\big] c_k. \tag{2.40}$$

Notez que a_0 ne disparaît pas car le coté droit de (2.29) n'est pas nul.

Nous pouvons maintenant construire une deuxième solution $y(x)$ de l'équation homogène (2.18) en soustrayant les deux solutions de l'équation non homogène (2.37) :

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{\alpha_2 + n}. \tag{2.41}$$

Les coefficients c_n dans (2.41) satisfont la relations de récurrence (2.39b) ; c_0 et c_N sont arbitraires, et la contrainte (2.40) déterminer a_0. Les solution avec différentes valeurs de c_N diffèrent par multiples constants de $y(x, \alpha_1)$.

Exemple 2.3.6. *Équation de Bessel d'ordre $\nu = 1$.*

Lorsque $\nu = 1$ le polynôme indicatif $P(\alpha) = \alpha^2 - 1$ a deux racine $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$. Dans ce cas $\alpha_1 - \alpha_2 = 2 = N \in \mathbb{Z}$. Une solution de l'équation de Bessel (2.23) *pour α_1 est $y_1(x)$ qui est donnée par* (2.26) *:*

$$y_1(x) = J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+2)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+1}.$$

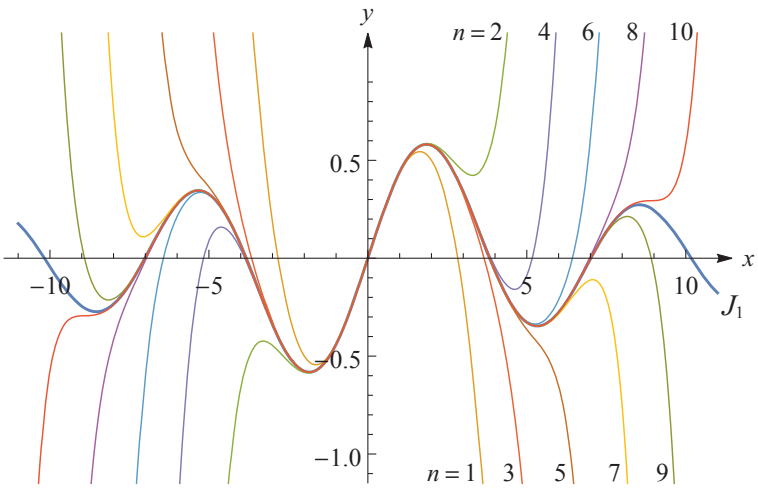

Figure 2.7 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel J_1. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Une solution linéairement indépendante doit avoir la forme (2.41) *:*

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{\alpha_2+n}.$$

D'après (2.32),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha)\Big|_{\alpha=\alpha_1} &= y(x,\alpha_1)\ln(x-x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{\alpha_1+n} \\ &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}.\end{aligned}$$

Donc

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} = J_1(x)\ln(x) - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1}.$$

Le calcul de $y_2'(x)$ *et* $y_2''(x)$ *donne*

$$\begin{aligned}y_2'(x) &= J_1'(x)\ln(x) + \frac{1}{x}J_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)d_n x^{n-2}, \\ y_2''(x) &= J_1''(x)\ln(x) + \frac{2}{x}J_1'(x) - \frac{1}{x^2}J_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)d_n x^{n-3}.\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (2.23) *avec* $\nu = 1$, *et en utilisant le fait que* J_1 *est une solution de l'équation* (2.23), *on obtient*

$$\begin{aligned} J_1''(x)\ln(x) + \frac{2}{x}J_1'(x) - \frac{1}{x^2}J_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)d_n x^{n-3} \\ + \frac{1}{x}J_1'(x)\ln(x) + \frac{1}{x^2}J_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)d_n x^{n-3} \\ + J_1(x)\ln(x) - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1} - \frac{1}{x^2}J_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-3} = 0. \end{aligned}$$

En simplifiant on trouve

$$\frac{2}{x}J_1'(x) - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-2)d_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1} = 0. \tag{2.42}$$

Mais

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n+1},$$

donc

$$J_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{2n}. \tag{2.43}$$

En remplaçant (2.43) *dans* (2.42) *on obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-2)d_n x^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}n!(n+1)!}x^{2n-1},$$

ou

$$-d_1 x^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n+2)d_{n+2} + d_n\big)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}n!(n+1)!}x^{2n-1}.$$

En égalisant les coefficients de x^{n-1} *on trouve* $d_1 = d_3 = d_5 = \cdots = 0$, *et*

$$\big(2^2 n(n+1)\big)d_{2n+2} + d_{2n} = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}n!(n+1)!}, \quad n \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Lorsque nous posons $n = 0$ *dans l'équation* (2.44), *nous obtenons* $d_0 = 1$, *et si on met* $n = 1$ *on obtient*

$$2^2 2 d_4 + d_2 = -\frac{3}{2^2 2!}.$$

Notez que d_2 *peut être sélectionné arbitrairement, et alors cette équation détermine* d_4. *Conformément à la pratique habituelle, nous choisissons* $d_2 = 1/2^2$. *Alors, nous*

obtenons

$$\begin{aligned} d_4 &= -\frac{1}{2^3}\Big(\frac{3}{2^2 2!}+\frac{1}{2^2}\Big) = -\frac{1}{2^4 2!}\Big(\frac{3}{2}+1\Big) \\ &= -\frac{1}{2^4 2!}\Big(\Big(1+\frac{1}{2}\Big)+1\Big) = -\frac{H_2+H_1}{2^4 2!}. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$ *on obtient*

$$(2^2 2\cdot 3)d_6 + d_4 = \frac{5}{2^4 2!3!},$$

donc

$$d_6 = \frac{1}{2^3 3}\Big(\frac{5}{2^4 2!3!}+\frac{H_2+H_1}{2^4 2!}\Big) = \frac{1}{2^6 2!3!}(H_3+H_2).$$

Par récurrence on montrer que la solution de la relation de récurrence (2.44) *est*

$$d_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(H_n+H_{n-1})}{2^{2n}n!(n-1)!}, \quad n \geqslant 1,$$

avec la convention que $H_0 = 0$. *Donc*

$$y_2(x) = J_1(x)\ln(x) - \frac{1}{x} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n(H_n+H_{n-1})}{2^{2n}n!(n-1)!}x^{2n-1}.$$

La deuxième solution de l'équation de Bessel d'ordre $\nu = 1$, *la fonction de Bessel du second type d'ordre un,* Y_1, *est généralement considérée comme une certaine combinaison linéaire de* J_1 *et* y_2. *D'après Copson*[5], Y_1 *est définie par*

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}(y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)),$$

où γ *est défini dans l'équation* (2.3.5). *La solution générale de l'équation (23) pour* $x > 0$ *est*

$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

5. **Edward Thomas Copson** (1901-1980), mathématicien britannique.

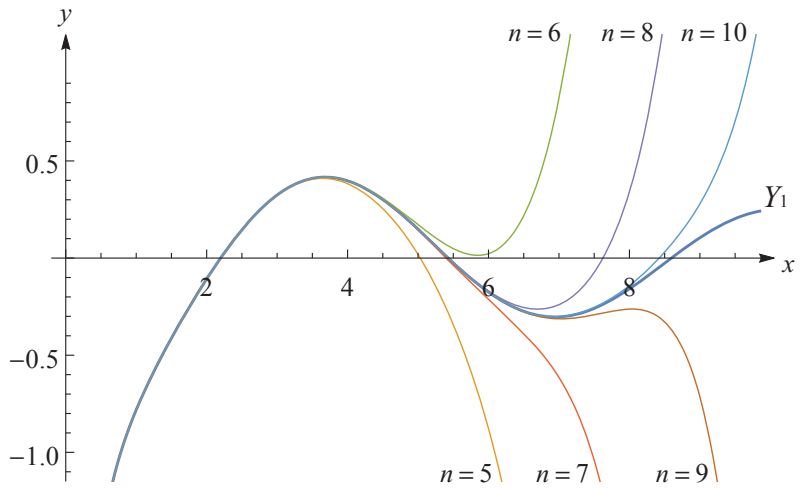

Figure 2.8 – Approximations polynomiales de la fonction de Bessel Y_1. La valeur de n est le degré du polynôme approximatif.

Chapitre 3

Comportement local aux points singuliers irréguliers des équations linéaires homogènes

Jusqu'à présent, nous avons appris deux façons de trouver une solution en série d'une équation différentielle. Si x_0 est un point ordinaire, nous pouvons trouver une solution en série de Taylor de l'équation différentielle qui convergera avec un rayon de convergence positif. Si x_0 est un point singulier régulier, nous pouvons toujours utiliser la méthode de Frobenius pour trouver les solutions exprimées sous forme de séries avec un terme légèrement différent. Il y a un cas que nous devons encore explorer, et c'est le comportement d'une solution d'une équation différentielle en un point singulier irrégulier. Si nous considérons le point à ∞, c'est en fait le cas le plus courant qui se produit.

Bien qu'une variété de comportements liés aux solutions puisse se produire en un point singulier irrégulier, le comportement le plus courant ne peut être exprimé que sous la forme d'une série asymptotique. La série ne convergera pas, mais nous avons plusieurs manières de donner un sens à une série asymptotique qui diverge. Dans ce chapitre, nous trouverons des moyens de déterminer les séries asymptotiques pour différents types d'équations différentielles. Dans tous les cas, notre outil principale sera la méthode de l'équilibre dominant.

Méthode de l'équilibre dominant

Pour trouver la série asymptotique pour la solution d'une équation, nous devons d'abord déterminer son comportement principal. Parfois, c'est facile mais il s'agit généralement d'un problème non trivial. Dans ces situations, une stratégie très efficace est la méthode de l'équilibre dominant. Le principe de l'équilibre dominant est assez simple.

S'il ya trois termes ou plus dans une équation, généralement deux des termes seront asymptotiquement plus grands que les autres, c'est à dire qu'ils domineront les autres termes. De plus, ces termes s'équilibreront, afin que nous puissions former une équation asymptotique avec seulement deux termes. De telles équations sont généralement très facile à résoudre.

3.1 Comportement pour les points singuliers irréguliers

La première étape consiste à déterminer le comportement typique d'une solution à une équation différentielle près d'un point singulier irrégulier. Notez que cela implique de remplacer une équation différentielle exacte par une équation asymptotique et de déterminer quelles fonctions résolvent cette relation asymptotique. Cependant, il peut y avoir de nombreux comportements qui résolvent la relation asymptotique, même si ce ne sont pas les comportements d'aucune solution exacte.

Par exemple, considérons l'équation $y'(x) = y(x)$, pour laquelle il existe un point singulier irrégulier en ∞. Si nous convertissons l'équation en une relation asymptotique, $y'(x) \sim y(x)$, alors bien sûr la solution de l'équation exacte, $y(x) = ce^x$, satisfera la relation asymptotique. Mais xe^x et $\frac{e^x}{x^2}$ satisfont également la relation asymptotique, même si celles-ci ne satisfont évidemment pas l'équation différentielle d'origine. Ainsi, nous voyons qu'il ne suffit pas de trouver un comportement cohérent avec l'équation, mais il faut aussi trouver le terme suivant dans la série asymptotique avant d'avoir vérifié le comportement de la solution exacte.

Mais comment commencer à trouver un éventuel comportement asymptotique pour la solution de l'équation différentielle ? L'examen de quelques exemples où nous connaissons la solution nous donnera un indice. Nous avons déjà vu que $y'(x) = y(x)$ a une solution exponentielle, et on sait que $\sin(x)$ et $\cos(x)$ étaient des solutions de $y''(x)+y(x) = 0$, qui a également un point singulier irrégulier en ∞. Bien que les fonctions trigonométriques

semblent être un comportement radicalement différent de la solution exponentielle, rappelons que les fonctions trigonométriques peuvent en fait être exprimées sous forme d'exponentielles.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ainsi dans les deux cas, les solutions peuvent être exprimées sous la forme $e^{S(x)}$ pour certains $S(x)$.

Ceci motive la substitution suivante pour une équation différentielle linéaire homogène.

$$y(x) = e^{S(x)}, \quad y'(x) = S'(x)e^{S(x)}, \quad y''(x) = (S''(x) + (S'(x))^2)e^{S(x)}, \quad \text{etc.}$$

Cette substitution réduira en fait l'ordre de l'équation, puisque les $e^{S(x)}$ s'annuleront, et la nouvelle équation n'impliquera que $S'(x)$ et les dérivés supérieurs. Cependant, cela produira généralement une équation non linéaire, qui est plus difficile à résoudre qu'une équation linéaire. Mais comme notre objectif est de trouver le comportement asymptotique, au lieu de la solution exacte, les équations non linéaires ont un avantage sur les équations linéaires. Il sera plus facile d'utiliser la méthode de l'équilibre dominant, puisque nous aurons une idée des termes qui seront plus petits par rapport aux autres termes. Si $S(x)$ croît algébriquement, alors nous pouvons généralement supposer que $S''(x) \ll (S'(x))^2$ quand $x \to \infty$. Par conséquent, nous pouvons remplacer l'équation différentielle exacte par une équation asymptotique.

Gardez à l'esprit qu'il ne sera pas suffisant de trouver uniquement le comportement principal de la fonction $S(x)$, puisque cette fonction doit être exponentiée pour déterminer le comportement principal de $y(x)$. Par exemple, les trois premiers termes de la série asymptotique pour $S(x)$ pourraient être $x + \ln(x) + \ln(3)$, mais l'exponentielle sera

$$y(x) = e^{S(x)} = e^x e^{\ln(x)} e^{\ln(3)} = 3xe^x.$$

Ainsi, de nombreux termes de $S(x)$ peuvent contribuer uniquement au comportement principal de $e^{S(x)}$. En fait, tout terme de $S(x)$ qui est soit en croissance asymptotique, soit constant, sera participé dans la détermination du comportement principal de $y(x)$.

Exemple 3.1.1. *Déterminer les comportements dominants possibles pour les solutions de l'équation Airy*

$$y''(x) = xy(x), \quad x \to \infty.$$

Solution :

Nous ne pouvons pas appliquer la méthode de l'équilibre dominant directement à cette équation, car il n'y a que deux termes dans l'équation, donc aucun des deux ne peut être considéré comme petit. Nous allons donc appliquer la substitution $y(x) = e^{S(x)}$, $y''(x) = (S''(x) + (S'(x))^2)e^{S(x)}$ *pour obtenir*

$$S''(x) + [S'(x)]^2 = x.$$

Puisque nous avons maintenant trois termes, nous pouvons utiliser la méthode de l'équilibre dominant, et en fait nous devrions commencer par supposer que $S''(x) \ll (S'(x))^2$ *quand* $x \to \infty$. *La relation asymptotique qui en résulte est*

$$(S'(x))^2 \sim x,$$

ce qui est trivial à résoudre, $S'(x) \sim \pm\sqrt{x}$, *donc* $S(x) \sim \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ *quand* $x \to \infty$.

Ensuite, nous devons tester si cela est cohérent avec nos hypothèses. Si $S'(x) \sim \pm\sqrt{x}$, *alors* $S''(x) \sim \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ *quand* $x \to \infty$, *qui est en effet plus petit que* $(S'(x))^2$. *Nous avons donc montré que notre hypothèse est cohérente, mais pour vérifier le premier terme, nous devons calculer la correction suivante pour* $S(x)$.

Si nous faisons la substitution $S(x) = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + g(x)$ *où* $g(x) \ll x^{\frac{3}{2}}$ *quand* $x \to \infty$, *puis en remplaçant dans l'équation* $S''(x) + [S'(x)]^2 = x$ *donne l'équation suivante pour* $g(x)$ *:*

$$\pm\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + g''(x) \pm 2\sqrt{x}g'(x) + (g'(x))^2 = 0. \tag{3.1}$$

Puisque $g'(x) \ll \sqrt{x}$ *et* $g''(x) \ll x^{\frac{1}{2}}$ *quand* $x \to \infty$, *on peut supposer que le deuxième terme est plus petit que le premier et que le quatrième terme est plus petit que le troisième. Cela nous laisse avec* $\pm x^{\frac{-1}{2}} \sim \pm 2\sqrt{x}g'(x)$, *ce qui signifie dans les deux cas* $g'(x) \sim \frac{-1}{4x}$. *Alors* $g(x) \sim \frac{-ln(x)}{4} + C$, *qui est plus petit que* $x^{\frac{3}{2}}$ *quand* $x \to \infty$. *Nous avons donc les deux premiers termes pour* $S(x)$ *:*

$$S(x) \sim \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\ln(x).$$

Cependant, sachant que

$$S(x) \sim \pm\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\ln(x)}{4} + h(x),$$

où $h(x) \ll \ln(x)$ *quand* $x \to \infty$ *n'est pas assez d'informations pour déterminer le terme principal pour* $y(x)$*. Puisque* $y(x) = e^{S(x)}$*, on a*

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\ln(x) + h(x)} \\ &= e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4}\ln x} e^{h(x)x} \\ &= x^{-\frac{1}{4}} e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} e^{h(x)}. \end{aligned}$$

Notez que les deux termes connus pour $S(x)$ *contribueront au premier terme de* $y(x)$*. En fait, si* $h(x)$ *croît quand* $x \to \infty$*, alors cela contribuera également au premier terme de* $y(x)$*. Cependant, si* $h(x)$ *diminue à* 0 *ou s'approche d'une constante quand* $x \to \infty$*, alors* $e^{h(x)}$ *se rapprochera d'une constante, et nous aurons le premier terme de* $y(x)$*. Ainsi, nous avons le principe suivant.*

Afin d'obtenir le terme principal de $y(x) = e^{S(x)}$*, nous devons trouver la série pour* $S(x)$ *jusqu'à ce que nous atteignions le premier terme qui n'augmente pas.*

Cela signifie que nous devons encore trouver le prochain terme de la série pour $S(x)$*. En substituant* $g(x) = -\frac{ln(x)}{4} + h(x)$ *dans l'équation* (3.1)*, on obtient*

$$\frac{1}{4x^2} + h''(x) \pm 2\sqrt{x}h'(x) + \frac{1}{16x^2} - \frac{h'(x)}{2x} + (h'(x))^2 = 0.$$

Clairement $\frac{h'(x)}{2x} \ll \sqrt{x}h'(x)$*, et de puis* $h'(x) \ll \frac{1}{x}$*,* $(h'(x))^2 \ll \frac{h'(x)}{x}$ *quand* $x \to \infty$*. Nous avons donc l'équation asymptotique*

$$\frac{5}{16x^2} \sim \pm 2\sqrt{x}h'(x).$$

Cela produit $h'(x) \sim \pm\frac{5}{32}x^{\frac{-5}{2}}$*, d'où* $h(x) \sim \pm\frac{5}{48}x^{\frac{-3}{2}} + C$*. Cette fois, la constante arbitraire est conservée, car il est plus grand que l'autre terme quand* $x \to \infty$*. Puisque nous avons montré que* $h(x)$ *s'approche d'une constante, nous avons le premier terme de* $y(x)$ *à être*

$$y(x) \sim Kx^{-\frac{1}{4}} e^{\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} e^{\pm\frac{5}{48}x^{-\frac{3}{2}}}.$$

Dans le processus de recherche du premier terme, nous avons en fait trouvé les deux premiers termes pour deux solutions différentes. Nous pouvons combiner ces informations dans le formulaire

$$y(x) \sim c_1 \frac{e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{1}{4}}}\Big(1 + \frac{5}{48x^{\frac{3}{2}}} + \cdots\Big) + c_2 \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{x^{\frac{1}{4}}}\Big(1 - \frac{5}{48x^{\frac{3}{2}}} + \cdots\Big). \tag{3.2}$$

La fonction Airy du premier type, $Ai(x)$, est définie comme étant la solution de l'équation Airy pour laquelle $c_1 = 0$ et $c_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. La fonction Airy du second type, notée $Bi(x)$, a $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Dans l'exemple 2.2.1, nous avons trouvé la série de Maclaurin pour $Ai(x)$ et $Bi(x)$:

$$Ai(x) = 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{2}{3})} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{4}{3})},$$

$$Bi(x) = 3^{-1/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{2}{3})} + 3^{-5/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n! \Gamma(n + \frac{4}{3})}.$$

La figure 3.1 compare les graphiques de $Ai(x)$ et $Bi(x)$ à l'approximation asymptotique à deux termes donnée dans l'équation 5.4.

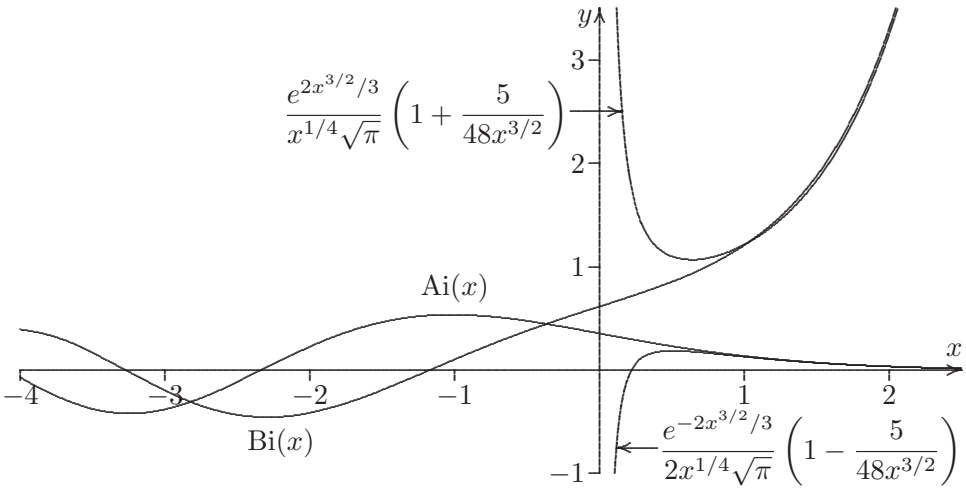

Figure 3.1 – Cela montre les fonctions Airy $Ai(x)$ et $Bi(x)$, ainsi que les deux premiers termes de leur série asymptotique quand $x \to \infty$. Notez que seulement deux termes donnent une précision impressionnante pour $x > 1$.

Exemple 3.1.2. *L'équation du cylindre parabolique est donnée par :*

$$y''(x) + \Big(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big) y(x) = 0, \tag{3.3}$$

où ν est une constante. Trouvez le terme principal de la série asymptotique quand $x \to \infty$.

Solution :

Nous recommençons par la substitution $y(x) = e^{S(x)}$, $y''(x) = (S''(x) + (S(x))^2)e^{S(x)}$, qui nous donne l'équation non linéaire

$$S''(x) + (S'(x))^2 + \nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} = 0.$$

Clairement $\nu + \frac{1}{2} \ll x^2$ *quand* $x \to \infty$, *et nous supposerons d'abord que* $S''(x) \ll (S'(x))^2$. *Cette hypothèse nous donne la relation asymptotique*

$$(S'(x))^2 \sim \frac{x^2}{4},$$

qui produit $S'(x) \sim \pm\frac{x}{2}$, *donc* $S(x) \sim \pm\frac{x^2}{4}$. *Alors* $S''(x) \sim \frac{1}{2}$, *qui est en effet plus petit que* $(S'(x))^2$ *quand* $x \to \infty$, *donc nous avons de la cohérence.*

Cependant, nous avons besoin des quelques premiers terme de $S(x)$, *jusqu'à ce que nous atteignions un terme qui va vers* 0 *quand* $x \to \infty$, *avant d'avoir le comportement principal de* $y(x)$. *Nous substituons* $S(x) = \pm\frac{x^2}{4} + g(x)$, *ce qui crée l'équation suivante pour* $g(x)$ *:*

$$g''(x) \pm xg'(x) + (g'(x))^2 + \nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = 0. \tag{3.4}$$

On peut supposer que $g'(x) \ll \frac{x}{2}$ *et* $g''(x) \leq \frac{1}{2}$. *Si les terme constants s'annulent, c'est à dire que* $\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = 0$, *alors* $g = 0$ *est une solution exacte. En fait,* $e^{-\frac{x^2}{4}}$ *résout l'équation du cylindre parabolique pour* $\nu = 0$, *et* $e^{\frac{x^2}{4}}$ *résout l'équation pour* $\nu = -1$. *Pour tous les autres cas, nous pouvons supposer que* $\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \neq 0$, *donc* $g''(x)$ *sera petit par rapport à une constante. Aussi,* $(g'(x))^2 \ll xg'(x)$, *nous obtenons donc l'équation asymptotique pour* $g(x)$

$$\pm xg'(x) \sim -\nu - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Ce ci est rapidement résolu pour obtenir $g(x) \sim (-\frac{1}{2} \pm \nu \pm \frac{1}{2})\ln(x)$,*qui est en effet plus petit que* $\frac{x^2}{4}$ *lorsque* $x \to \infty$. *Mais il ne va pas à* 0, *nous avons donc besoin d'un autre terme. La substitution de* $g(x) \sim (-\frac{1}{2} \pm \nu \pm \frac{1}{2})\ln(x) + h(x)$ *dans l'équation* (3.4) *nous donne l'équation suivante pour* $h(x)$ *:*

$$\frac{(\frac{1}{2} \pm \nu \pm \frac{1}{2})}{x^2} + h''(x) \pm xh'(x) + \frac{(\frac{1}{2} \pm \nu \pm \frac{1}{2})^2}{x^2} - \frac{(1 \pm 2\nu \pm 1)h'(x)}{x} + (h'(x))^2 = 0.$$

Clairement, $h''(x) \ll \frac{1}{x^2}$, *et* $(h'(x))^2 \leq \frac{h'(x)}{x} \leq xh'(x)$. *Nous avons donc la relation asymptotique*

$$\frac{(1 + \nu + \nu^2 \pm 1 \pm 2\nu)}{x^2} \sim \mp xh'(x),$$

qui est résolue par

$$h(x) \sim \frac{(1 + 2\nu \pm 1 \pm \nu\nu^2)}{(2x^2)} + C.$$

Comme $h(x)$ *s'approche d'une constante, cela n'affectera que le deuxième terme de la relation asymptotique pour* $y(x)$. *Ainsi, les termes principaux possibles pour la solution*

de l'équation du cylindre parabolique sont

$$y(x) \sim c_1 e^{-\frac{x^2}{4}} x^{\nu} + c_2 e^{\frac{x^2}{4}} x^{-1-\nu}.$$

La solution qui est asymptotique à $x^{\nu} e^{\frac{-x^2}{4}}$ *est appelée la fonction du cylindre parabolique, notée* $D_{\nu}(x)$*. Il s'avère que* $D_{-1-\nu}(ix)$ *résoudra également la fonction du cylindre parabolique d'ordre* ν*. par conséquent, la solution générale de l'équation du cylindre parabolique peut être exprimée par*

$$y(x) = c_1 D_{\nu}(x) + c_2 D_{-1-\nu}(ix).$$

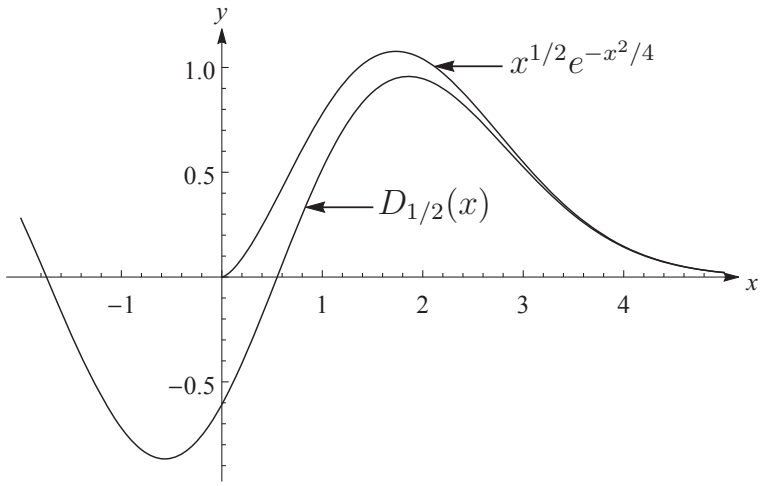

Figure 3.2 – Cela montre la fonctions du cylindre parabolique $D_{1/2}(x)$ et le premier terme de leur série asymptotique quand $x \to \infty$.

3.2 Expansion asymptotique complète

Bien que nous ayons trouvé un moyen de trouver les premiers termes de la série asymptotique, ce dont nous avons besoin est une technique pour trouver tous les termes de la série. Pour ce faire, nous devons décoller le comportement principal des solution de l'équation. Autrement dit, si le premier terme de la série asymptotique est $y_1(x)$, nous substituons $y(x) = y_1(x)u(x)$, et obtenons une équation linéaire pour $u(x)$. Il existe en fait un moyen simple de le faire qui tire parti du travail déjà effectué pour trouver le comportement principal.

Notre stratégie pour trouver le comportement principal était de substituer $y(x) = e^{S(x)}$, puis de trouver les premiers termes de la série asymptotique pour $S(x)$. Si on note

$f(x)$ les termes de la série asymptotique de $S(x)$ qui ne se rapprochent pas de 0 quand $x \to \infty$, alors nous pouvons écrire $S(x) = f(x) + h(x)$, où $h(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. Alors $y(x) = e^{S(x)} = e^{f(x)}e^{h(x)} \sim e^{f(x)}$, puisque $e^{h(x)} \to 1$. Donc le premier terme de la série asymptotique pour $y(x)$ est $e^{f(x)}$, et nous pouvons remplacer $y(x) = e^{f(x)}u(x)$ pour décoller le comportement principal. Notez que ces équations impliquent que $u(x) = e^{h(x)}$.

Dans le processus de recherche du comportement principal, nous avons trouvé une équation pour laquelle $h(x)$ satisfait, et en fait nous avons utilisé cette équation pour montrer que $h(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. L'utilisation de cette équation pour trouver d'autres termes est inefficace, car il s'agit généralement d'une équation non linaire, et la série pour $h(x)$ devrait être exponentielle pour produire la série pour $y(x)$. Mais si nous faisons la substitution $h(x) = \ln(u(x))$, alors l'équation non linéaire deviendra une équation linéaire pour $u(x)$, puisque $u(x) = e^{h(x)}$. Les substitutions requises sont les suivantes, si $h(x) = \ln u(x)$:

$$\left.\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)}, \\ h''(x) &= \frac{u(x)u''(x) - (u'(x))^2}{u(x)^2}, \\ h''(x) + (h'(x))^2 &= \frac{u''(x)}{u(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Cette substitution réinitialisera l'équation, ce qui donnera une équation linaire en $u(x)$, pour laquelle certaines solutions approcheront une constante quand $x \to \infty$.

Exemple 3.2.1. *Trouver la série asymptotique complète quand $x \to \infty$ pour la solution de l'équation Airy $y''(x) = xy(x)$.*

Solution :

Nous avons déjà trouvé le comportement principal des solutions dans l'exemple 3.1.1. Nous avons posé $y(x) = e^{S(x)}$ et nous avons trouvé $S(x) = \pm 2\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{\ln(x)}{4} + h(x)$, où $h(x)$ satisfait l'équation

$$h''(x) \pm 2\sqrt{x}h'(x) + \frac{5}{16x^2} - \frac{h'(x)}{2x} + (h'(x))^2 = 0.$$

Ainsi, Le terme principal est $y(x) \sim x^{-1/4}e^{\pm 2x^{3/2}/3}$, et si on pose $h(x) = \ln(u(x))$, alors $y(x) = x^{-1/4}e^{\pm 2x^{3/2}/3}u(x)$. En utilisant la substitution donné dans les équations (3.5)*, nous obtenons l'équation*

$$\frac{u''(x)}{u(x)} \pm 2\sqrt{x}\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{1}{2x}\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{5}{16x^2} = 0,$$

qui après multiplication par $x^2u(x)$ nous donne l'équation linéaire

$$x^2u''(x) - \frac{1}{2}xu'(x) \pm 2x^{5/2}u'(x) + \frac{5}{16}u(x) = 0. \tag{3.6}$$

Nous avons également un indice quant à la nature de la série pour $u(x)$ en observant le comportement principal que nous avons trouvé pour $h(x)$ dans l'exemple 3.1.1. Nous avons $h(x) \sim C \pm \frac{5x^{-3/2}}{48}$. Cela signifie que $e^{h(x)}$ aurait une série comme

$$e^{h(x)} \sim K\Big(1 \pm \frac{5x^{-3/2}}{48} + a_2x^{-3} + a_3x^{-9/2} + \cdots\Big),$$

où $a_2, a_3, \ldots$ serait déterminé en exponentielle la série. Il est donc naturel de supposer que la série asymptotique pour $u(x)$ quand $x \to \infty$ est de la forme

$$u(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}, \quad \text{avec } k = -3/2. \tag{3.7}$$

Notez que ce n'est pas tout à fait sous la forme d'une série de Frobenius, car il y a des puissances fractionnaires de x intégrées dans la série. Cela diffère de la série Frobenius à un autre égard, car la série asymptotique autour d'un point singulier irrégulier convergera rarement.

Laissez-nous remplacer la série de l'équation (3.7) *dans l'équation (3.6). Tout d'abord, nous devons prendre deux dérivées de $u(x)$, fait terme par terme.*

$$u'(x) \sim \sum_n a_n \frac{-3n}{2} x^{-3n/2-1}, \quad u''(x) \sim \sum_n a_n \frac{9n^2+6n}{4} x^{-3n/2-2},$$

donc nous avons

$$\sum_n a_n \frac{(9n^2+6n)}{4} x^{-3n/2} - \frac{1}{2}\sum_n a_n \frac{-3n}{2} x^{-3n/2} \pm 2\sum_n a_n \frac{-3n}{2} x^{-3n/2+3/2} \sim -\frac{5}{16}\sum_n a_n x^{-3n/2}.$$

Notez que nous mettons un terme sur l'autre coté de l'équation, car techniquement, nous ne pouvons pas avoir une relation asymptotique avec 0 *d'un coté. Puisque $x^{-3n/2+3/2} = x^{-3(n-1)/2}$, il faut décaler ce terme par un pour que la somme implique $x^{-3n/2}$ comme les autres termes. Malgré les puissances fractionnaires dans les sommes, nous ne pouvons déplacer l'indice que d'un montant intégral. La nouvelle équation devient que nous devons augmenter ce terme, nous devons décaler ce terme d'un pour que la somme implique $x^{\frac{-3n}{2}}$ comme les autres termes. Malgré les puissances fractionnaires*

dans les sommes, nous ne pouvons déplacer l'indice que d'une valeur entière. La nouvelle équation devient

$$\sum_n a_n \frac{9n^2+6n}{4} x^{-3n/2} + \sum_n a_n \frac{3n}{4} x^{-3n/2} \pm 2 \sum_n a_{n+1} \frac{-3(n+1)}{2} x^{-3n/2} \sim -\frac{5}{16} \sum_n a_n x^{-3n/2}.$$

Puisque toutes les séries impliquent maintenant $x^{-3n/2}$, nous pouvons fixer les coefficients égaux pour obtenir la relation de récurrence.

$$a_n \frac{9n^2+6n}{4} + a_n \frac{3n}{4} \mp 3(n+1)a_{n+1} = -\frac{5}{16} a_n.$$

Puisque l'indice le plus élevé de a est a_{n+1}, nous résolvons pour a_{n+1} pour obtenir

$$a_{n+1} = \pm \frac{36n^2+36n+5}{48(n+1)} a_n = \pm \frac{3}{4} \frac{(n+\frac{1}{6})(n+\frac{5}{6})}{n+1} a_n.$$

Si nous supposons que $a_0 = 1$, alors

$$a_1 = \pm \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{1}, \quad a_2 = \frac{3^2}{4^2} \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{7}{6}\frac{11}{6}}{1.2}, \quad a_3 = \pm \frac{3^3}{4^3} \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{7}{6}\frac{11}{6}\frac{13}{6}\frac{17}{6}}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

Pour obtenir une expression de forme fermée pour a_n, nous pouvons utiliser les propriétés de la fonction Gamma. Si on multiplie le haut et le bas des fractions par $\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})$, on obtient

$$a_3 = \pm \frac{3^3}{4^3} \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{7}{6}\frac{11}{6}\frac{13}{6}\frac{17}{6}}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})1 \cdot 2 \cdot 3} = \pm \frac{3^3}{4^3} \frac{\Gamma(\frac{19}{6})\Gamma(\frac{23}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})3!}.$$

Ici, nous avons utilisé la propriété $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$. Nous avons maintenant un modèle pour a_n

$$a_n = (\pm 1)^n \frac{3^n}{4^n} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{6})\Gamma(n+\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})n!}.$$

Nous pouvons encore simplifier cela en utilisant la propriété réfléchissante de la fonction Gamma, puisque $\Gamma(1/6)\Gamma(5/6) = \pi/\sin(\pi/6) = 2\pi$. Cela nous donne le résulta final :

$$y(x) \sim c_1 x^{-1/4} e^{2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \Gamma(n+\frac{1}{6})\Gamma(n+\frac{5}{6}) x^{-3n/2}}{4^n 2\pi n!} + c_2 x^{-1/4} e^{-2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \Gamma(n+\frac{1}{6})\Gamma(n+\frac{5}{6}) x^{-3n/2}}{4^n 2\pi n!}. \tag{3.8}$$

Exemple 3.2.2. *Trouver l'expansion asymptotique complète de la fonction de cylindre parabolique $D_\nu(x)$ pour ν arbitraire.*

Solution : Nous avons vu dans l'exemple 3.1.2 que la fonction de cylindre parabolique satisfait l'équation

$$y''(x) + \Big(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big)y(x) = 0.$$

Nous avons également trouver que $D_\nu(x) = e^{S(x)}$, où $S(x) = -x^2/4 + \nu \ln(x) + h(x)$, où $h(x) \sim \frac{\nu-\nu^2}{2x^2}$ et satisfait l'équation

$$-\frac{\nu}{x^2} + h''(x) - xh'(x) + \frac{\nu^2}{x^2} - \frac{2\nu h'(x)}{x} + (h'(x))^2 = 0.$$

Mais en faisant la substitution dans les équation (3.5), nous avons $u(x) = e^{h(x)}$, où $u(x)$ satisfait

$$x^2u''(x) + (2\nu x - x^3)u'(x) + (\nu^2 - \nu)u(x) = 0.$$

Pour déterminer la série pour $u(x)$, nous pouvons utiliser l'indication que $h(x)$ est d'ordre x^{-2} quand $x \to \infty$. Donc $e^{h(x)}$ a la forme

$$u(x) = \sum_n a_n x^{-2n}.$$

Alors

$$u'(x) = \sum_n -2na_n x^{-2n-1}, \quad u''(x) = \sum_n -2n(-2n-1)a_n x^{-2n-2},$$

donc la substitution de ces sommes dans l'équation de $u(x)$ produit

$$\sum_n (4n^2 + 2n)a_n x^{-2n} - \sum_n 4\nu n a_n x^{-2n} + \sum_n 2na_n x^{-2n+2} \sim \sum_n (\nu - \nu^2)a_n x^{-2n}.$$

En décalant la troisième somme par un, toutes les sommes impliquent x^{-2n}, nous pouvons donc assimiler les coefficients pour produire l'équation

$$(4n^2 + 2n)a_n - 4\nu n a_n + 2(n+1)a_{n+1} = (\nu - \nu^2)a_n.$$

Cela peut être résolu pour que a_{n+1} produise

$$a_{n+1} = -\frac{(2n-\nu)(2n+1-\nu)}{2(n+1)}.$$

Si $a_0 = 1$, *alors*

$$a_1 = -\frac{(-\nu)(1-\nu)}{2 \cdot 1}, \quad a_2 = \frac{(-\nu)(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2},$$
$$a_3 = \frac{(-\nu)(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)(4-\nu)(5-\nu)}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

Si ν *est un entier non négatif, alors la série tronque, et nous avons une solution exacte pour* $D_\nu(x)$. *Sinon, nous pouvons multiplier les numérateurs et les dénominateurs par* $\Gamma(-\nu)$, *et utiliser une propriété de la fonction Gamma pour obtenir la solution de forme fermée*

$$a_n = (-1)^n \frac{\Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(-\nu)2^2 n!}.$$

Nous avons donc l'expansion asymptotique complète pour $D_\nu(x)$ *:*

$$D_\nu(x) \sim e^{-x^2/4} x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(-\nu)2^n n! x^{2n}}.$$

Bibliographie

[1] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9th ed., John Wiley and Sons, Hoboken, 2017.

[3] W. Paulsen, *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2014.

[4] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[5] A. Gray and G. B. Mathews, *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*, FB &c Ltd, London, 2016.