République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

La théorie de Nevanlinna pour les équations différentielles

Présenté par :
Boughaba Houda

Devant le jury :

Président	: **D.Azzam-Laouir**	**Prof.** Université de Jijel
Encadreur	: **T.Zerzaihi**	**Prof.** Université de Jijel
Examinateur	: **R.Belhadef**	**Dr.** Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent du bonheur

Alain Proust

Tout d'abord je tiens à remercier ***ALLAH****, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force, l'intelligence et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

Je voudrais dans un premier temps remercier mon encadreur ***prof.Tahar Zerzaihi****, professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (jijel), pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

J'adresse mes sincères remerciements aux membres du jury, le président ***prof.Dalila Azzam-Laouir*** *et l'examinateur* ***Dr.Rafik Belhadef*** *qui ont accepté d'évaluer mon travail.*

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de jijel, en particulier les enseignants du département de mathématique qui m'ont suivi tout au long de mes cinq années d'études à l'université. Par ailleurs, je remercie tous mes collegues de la promotion 2020.

Un grand merci à ma mère et mon père, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien inconditionnel à la fois moral et matériel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Enfin, je ne manquerai pas cette occasion pour remercier mes amis qui m'ont toujours aidée et encouragée, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnée durant mon chemin d'études.

Houda

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna ou la théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe était fondée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna au début du $20^{ème}$ siècle. Cette théorie étudie la distribution des racines de l'équation $f(z) = a$ où f est une fonction entière ou méromorphe et a un nombre complexe.

La théorie de Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Beaucoup d'étude ont été faites sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes complexes. Elles concernent les problèmes de la répartition des zéros et les applications de la théorie de distribution des valeurs dans l'étude de comportement asymptotique des solutions des équations différentielles. Parmi les mathématiciens qui ont contribué au développement de cette théorie, on cite : R.Nevanlinna, G.Gunderson, C.C.Yang,...etc.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction et trois chapitres. Dans le premier chapitre, on commence par quelques rappels des notions fondamentales de l'analyse complexe $\Big($la formule intégrale de Cauchy, le développement de Laurent, principe de l'argument,...etc$\Big)$. Ces derniers sont utilisés dans la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre se compose de trois parties. Dans la première partie, on commence par la présentation de la formule de Jensen qui est la base de la théorie de Nevanlinna. Puis, on cite les définitions des fonctions $m(r, f)$, $N(r, f)$, $T(r, f)$ et quelques de leurs caractéristiques. Ensuite, on traite le premier théorème de Nevanlinna qui est une conséquence de la formule de Jensen.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, on aborde l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe et ses propriétés.

On définit aussi l'exposant de convergence des zéros d'une fonction et ses propriétés, l'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur d'une fonction méromorphe. Dans la dernière partie de ce chapitre, on expose l'estimation de $S(r, f)$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'application de la théorie de Nevanlinna aux équations différentielles à travers une publication de **Z-X Chen** et **C-C Yang** publié en 1997. En particulier nous étudions les équations différentielles de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0,$$

où les coefficients $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE DE L'ANALYSE COMPLEXE

Dans ce chapitre on va rappeler quelques concepts fondamentaux de l'analyse complexe. Considérons une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1.1 Fonctions analytiques

Définition 1.1. *On dit que f est une fonction analytique au point $z_0 \in \mathbb{C}$ si et seulement si f est différentiable sur un voisinage de z_0.*

Remarque 1.1. *On dit qu'une fonction f est entière, si elle est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Notation 1.1. *On note $\mathcal{A}(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur un ensemble D.*

Définition 1.2. *Soit f une fonction analytique au point z_0. On dit que z_0 est un zéro régulier de f si $f(z_0) = 0$.*

1.1.1 La formule intégrale de Cauchy

Théorème 1.1. *[1] Si f est une fonction analytique sur $D \cup \Gamma$ où Γ est la frontière de D et $z_0 \in D$ alors, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Cette expression est appelée la formule intégrale de Cauchy, qui admet sous les mêmes hypothèses la généralisation suivante :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{N}.$$

Formule de la moyenne

Si Γ est un cercle de centre z_0 et de rayon R_0, alors l'intégrale de Cauchy s'écrit sous la forme

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi.$$

1.1.2 Théorème de Liouville

Théorème 1.2. *[18] Si pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

(i) F est analytique.

(ii) F est bornée.

Alors F est constante sur $\mathbb{C}$.

Preuve. On a d'après la formule intégrale de Cauchy :

$$F^{'}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \tag{1.1}$$

où $\Gamma : |\xi - z| = R$ (R est très grand).
Comme F est bornée (i.e $\exists M > 0$ tel que $|F(z)| \leq M$), d'après (1.1), on a

$$\begin{aligned} |F^{'}(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(\xi)|}{R^2} d\xi \\ &\leq \frac{2\pi R M}{2\pi R^2} \\ &\leq \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand R tend vers $+\infty$, on obtient$|F^{'}(z)| = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Ce qui implique $F^{'}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. D'où F est constante. □

1.1.3 Principe de maximum

Théorème 1.3. *[7] Soit f une fonction analytique dans le domaine borné D et continue sur $\bar{D} = D \cup \partial D$. Alors, $|f|$ atteint son maximum uniquement sur la frontière ∂D.*

Preuve. On pose $f = u + iv$.
On a $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$.
Comme $|f|$ est continue sur $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $\bar{D}$ est compact, alors $|f|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in \bar{D}$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$.
On pose

$$M = |f(z_0)| = \underset{z\in\bar{D}}{max}|f(z)|. \tag{1.2}$$

Supposons que z_0 est un point intérieur à D (i.e. $z_0 \in \mathring{D}$).
Comme $\mathring{D}$ est un ensemble ouvert, alors

$$\exists R_0 > 0 \text{ } tel \text{ } que \text{ } \bar{K_0} : |z - z_0| < R_0 \subset D,$$

On pose $z = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$.
Alors d'après la formule de la moyenne, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{1.3}$$

Donc, à partir de (1.2) et (1.3), on a

$$\begin{aligned} 2\pi M &= 2\pi |f(z_0)| \\ &= |\int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + R_0 e^{i\varphi})| d\varphi \\ &\leq 2\pi M. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + R_0 e^{i\varphi})| d\varphi = 2\pi M. \tag{1.4}$$

Maintenant, montrons que $|f(\xi)| = M, \forall \xi \in \partial \bar{K_0} : |\xi - z_0| = R_0$
Si $|f(\xi)| = M$, on a $|f(\xi)| \leq M, \forall \xi \in \partial \bar{k_0}$
Par l'absurde, supposons que $\exists \xi_0 \in \partial \bar{K_0}$, tel que :$|f(\xi_0)| < M$
Comme $|f|$ est continue sur K_0, alors

$\exists\varepsilon > 0, \exists[\varphi_1, \varphi_2]$, tel que :$|f(\xi)| \leq M - \varepsilon$ pour $\xi = z_0 + R_0 e^{i\varphi}, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.
Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(\xi)|d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(\xi)|d\varphi + \int_0^{\varphi_1} |f(\xi)|d\varphi + \int_{\varphi_2}^{2\pi} |f(\xi)|d\varphi \\ &\leq (M-\varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + M(2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) \\ &= 2\pi M - \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1) \\ &< 2\pi M,\end{aligned}$$

Contradiction avec (1.4).
D'où $|f(\xi)| = M, \forall\xi \in \partial\bar{K}_0 : |\xi - z_0| = R_0$.
De même $|f(\xi)| = M, \forall\xi \in \partial\bar{K}_1 : |\xi - z_0| = R_1 (0 < R_1 < R_0)$.
D'où $|f(\xi)| = M, \forall\xi \in \partial\bar{K}_0 : |\xi - z_0| \leq R_0$.
Soit $z \in D$ et L la courbe qui relie z_0 à z.
On va montrer que $|f(z)| = M, \forall z \in \mathring{D}$.
On a $|f(z_1)| = M$ car
$\exists z_n \in \bar{K}_0$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_1$, alors

$$\begin{aligned}|f(z_1)| &= |f(\lim_{n\to+\infty} z_n)| = |\lim_{n\to+\infty} f(z_n)| \\ &= |\lim_{n\to+\infty} M| \\ &= M.\end{aligned}$$

D'où, on a

$$|f(\xi)| = M, \forall\xi \in \partial\bar{K}_1 : |\xi - z_1| \leq R_1,$$

après un nombre fini d'opérations, on obtient

$$|f(z)| = M, \forall\xi \in \partial\bar{K}_n : |\xi - z_n| \leq R_n,$$

Donc, $|f(\xi)| = M, \forall\xi \in D$. D'où $|f|$ est constante sur $D = \mathring{D}$, alors $|f|$ ne peut pas atteindre son maximum dans un point intérieur de D. Comme $|f|$ est continue sur $\bar{D}$ alors elle atteint son maximum sur $\bar{D}$. D'où le maximum est atteint sur ∂D.

$\square$

1.2 Fonctions méromorphes

1.2.1 Série de Laurent

Théorème 1.4. *[1] Si f est analytique sur la couronne $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$, alors f peut s'écrire sous la forme d'une série de Laurent en tout point z de cette couronne i.e. si $z \in D$ alors on a*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k \\ &= \sum_{-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k + \sum_{0}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

où $C_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$*,*
où Γ est un conteur fermé contenu dans D et contient z_0 dans son intérieur.

Remarque 1.2.

1. $\sum\limits_{-\infty}^{-1} C_k (z - z_0)^k$ *est dite la partie principale de la série de Laurent.*

2. $\sum\limits_{0}^{+\infty} C_k (z - z_0)^k$ *est dite la partie régulière de la série de Laurent.*

1.2.2 Points singuliers d'une fonction

Définition 1.3. *Si f n'est pas analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors z_0 est un point singulier de f.*

Définition 1.4. *Le point singulier $z_0 \in \mathbb{C}$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r)$ ne contient pas d'autres points singuliers.*

1.2.3 Classification des points singuliers (selon le développement de Laurent)

Définition 1.5. *Soit f une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R\}$ où z_0 est un point singulier de f.*
Si $C_k = 0, \forall -\infty < k < -1$, alors on dit que z_0 est un point singulier eliminable.

Définition 1.6. *On dit que le point singulier isolé z_0 de f est essentiel si la partie principale de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 contient un nombre infini de termes.*

Définition 1.7. *On dit que le point singulier isolé z_0 de f est un pôle de f si la partie principale de la série de Laurent contient un nombre fini de termes.*
$(i.e. f(z) = \sum\limits_{k=-n_0}^{+\infty} C_k(z-z_0)^k$ *où* $c_{-n_0} \neq 0)$.
On dit dans ce cas que z_0 est un pôle de $f(z)$ d'ordre n_0.

Théorème 1.5. *[6] Soit z_0 un point singulier isolé de f, on a l'équivalence entre*
i) z_0 est un pôle d'ordre n de $f(z)$.
ii) z_0 est un zéro d'ordre n de $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Remarque 1.3.

Si le point singulier isolé z_0 est un pôle d'ordre 1, alors on dit que z_0 est un pôle simple.

Exemple 1.1.

La fonction $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$.
On remarque que i et $-i$ sont des zéros de la fonction $h(z) = \frac{1}{g(z)}$, donc i et $-i$ sont des pôles de g.

Remarque 1.4.

Les fonctions analytiques qui ont uniquement des pôles comme points singuliers sont appelées fonctions méromorphes sur D et on a

$$f \text{ méromorphe sur} D \Leftrightarrow f = \frac{g}{h},$$

où $g, h \in \mathcal{A}(D)$.

1.3 Résidu des fonctions

Soit f une fonction analytique dans la couronne $K : 0 < |z-a| < \rho$, $a \in \mathbb{C}$. Dans K on a

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n,$$

où $C_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$.

Définition 1.8. *On appelle C_{-1} le résidu de f au point $z = a$. On le note $\underset{z=a}{Res} f$ ou $Res(f, a)$ (i.e. $\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(\xi) d\xi$).*
où Γ est fermé dans K.

1.3.1 Résidu dans le cas d'un pôle

a) Résidu de f dans le cas d'un pôle simple $z = a$

On a dans ce cas :

$$\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

b) Résidu de f dans le cas d'un pôle multiple $z = a$ d'ordre m

On a dans ce cas :

$$\underset{z=a}{Res} f = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)).$$

Remarque 1.5.

Si la fonction f peut être représentée dans le voisinage du point z_0 comme le quotient de deux fonctions analytiques

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

de plus, si $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, alors que $\psi'(z_0) \neq 0$, c'est-à-dire si z_0 est un pôle simple de la fonction f, alors

$$Res(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

1.3.2 Théorème des résidus de Cauchy

Théorème 1.6. *[13] Si une fonction f est analytique sur la frontière C d'un domaine D et partout à l'intérieur de ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, z_2, ..., z_n$, alors*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

Preuve. D'après le théorème de Cauchy dans le cas multi-connexe, on a

$$\int_{C \cup C_1^- \cup C_2^- \cup ... \cup C_n^-} f(z)dz = 0.$$

Ce qui implique

$$\int_C f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz + ... + \int_{C_n^-} f(z)dz = 0,$$

Donc

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i C_{-1,k}$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{Res} f(z).$$

□

Proposition 1.1. *[15] Soient $r > 0$ et f une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.*
Supposons que f n'a pas de zéros dans D, alors pour tout $z \in int(D)$, on a

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2)\log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi. \tag{1.5}$$

Preuve. On distingue deux cas :

1. Si z=0, d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} \log f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{\log f(\xi)}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |0|^2)\log f(\xi)}{(r^2 - \xi 0)(\xi - 0)} d\xi. \end{aligned}$$

2. Si $z \neq 0$, on pose

$$h(\xi) = \frac{(r^2 - |z|^2)\log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)},$$

On a $\xi_0 = z$ est un pôle simple de h car
$\frac{1}{h(\xi)} = 0 \Leftrightarrow r^2 - \xi\bar{z} = 0$ ou $\xi - z = 0$.
Mais, on remarque que si $\xi = \frac{r^2}{\bar{z}}$, alors $|\xi| = \frac{r^2}{|\bar{z}|} > r$, d'où $\xi \notin D$, donc $\xi_0 = z$ est le seul pôle simple de h.
Comme $\xi_0 = z$ est un pôle simple de h, d'après le théorème de Résidu, on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\xi|=r} h(\xi) d\xi &= 2\pi i \lim_{\xi \to z} (\xi - z) h(\xi) \\ &= 2\pi i \lim_{\xi \to z} \frac{(r^2 - z\bar{z})\log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})} \\ &= 2\pi i \log f(z), \end{aligned}$$

D'où

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{(r^2 - |z|^2)\log f(\xi)}{(r^2 - \xi\bar{z})(\xi - z)} d\xi.$$

□

Corollaire 1.1. *[15]*

1. *En utilisant la formule* (1.5) *et en posant*

$$\xi = re^{i\varphi} \quad et \quad z = \sigma e^{i\theta},$$

tel que $0 \leq \sigma < r$, *on obtient*

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - \sigma^2) \log f(re^{i\varphi})}{r^2 - 2r\sigma \cos(\varphi - \theta) + \sigma^2} d\varphi. \tag{1.6}$$

2. *En séparant la partie réelle dans la formule* (1.6), *on obtient*

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - \sigma^2) \log |f(re^{i\varphi})|}{r^2 - 2r\sigma \cos(\varphi - \theta) + \sigma^2} d\varphi. \tag{1.7}$$

1.3.3 Le résidu logarithmique

Théorème 1.7. *[13] Soient f une fonction analytique dans G à l'exception des pôles et D un sous ensemble borné tel que $D \cup \Gamma \subset G$, où Γ est la frontière de D.*
Si f ne possède ni pôles ni zéros sur Γ alors, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

où N est le nombre de zéros de f avec multiplicité et P est le nombre de pôles de f avec multiplicité dans D.

Exemple 1.2. *Soit $f(z) = z^2 - 2z + 1$ une fonction analytique*
On a $z = 1$ est un zéro d'ordre 2 de f, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2.$$

1.3.4 Principe de l'argument

Théorème 1.8. *[13] Soient f une fonction analytique dans G a l'exception des pôles et D un sous ensemble borné tel que $D \cup \Gamma \subset G$, où Γ est la frontière de D.*
Si f ne possède ni pôles ni zéros sur Γ alors, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma arg(f(z)) = N - P,$$

où Δ_Γ est la variation de l'argument de f quand z par court Γ^+.

Preuve. D'après les conditions du théorème, on a
f est analytique et $f(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$.
D'où, il existe un voisinage V de Γ où $f(z) \neq 0$, $\forall z \in V$.
Dans ce voisinage on a, $\log f(z)$ est analytique et $(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}, \forall z \in V$.
D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d(\log f(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Delta_{\Gamma}(\log f(z)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

D'autre part, on a

$$\log f(z) = \log |f(z)| + iarg(f(z)).$$

Ce qui implique

$$\Delta_{\Gamma} \log f(z) = \Delta_{\Gamma} \log |f(z)| + i\Delta_{\Gamma} arg(f(z)).$$

Comme Γ est fermé alors, on a $\Delta_{\Gamma} \log |f(z)| = 0$. Donc

$$\Delta_{\Gamma} \log f(z) = i\Delta_{\Gamma} arg(f(z)), \tag{1.9}$$

De (1.8) et (1.9), on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} arg(f(z)) = N - P.$$

□

1.3.5 Théorème de Rouché

Théorème 1.9. *[13] Soient f, g deux fonctions analytiques sur un domaine borné D Si $|f(z)| > |g(z)|, \forall z \in \Gamma$, où Γ est la frontière de D. Alors f et $F(z) = f(z) + g(z)$ possèdent le même nombre de zéros dans D.*

Preuve. Comme $|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \forall z \in \Gamma$, alors $f(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$.
De même $F(z) \neq 0, \forall z \in \Gamma$, car
$|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$, $\forall z \in \Gamma$.
Les conditions du principe de l'argument sont vérifiées pour F, alors

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} arg(F(z)) = N_F,$$

où N_F est le nombre des zéros de F dans D.
On a

$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z)\Big[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big].$$

Alors

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)) + \Delta_\Gamma arg(w(z)),$$

où $w(z) = \Big[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Big]$,
D'autre part, on a

$$|w(z) - 1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

Alors $w(z)$ ne fait aucune rotation autour de l'origine.
Alors $\Delta_\Gamma arg(w(z)) = 0$.
Donc

$$\Delta_\Gamma arg(F(z)) = \Delta_\Gamma arg(f(z)),$$

D'où

$$N_F = N_f,$$

où N_f est le nombre de zéros de f dans D. □

CHAPITRE 2

LA THÉORIE DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre, on va donner la formule de Jensen, définir les fonctions $N(r,f), m(r,f)$, $T(r,f)$ qui sont appelées respectivement : la fonction de comptage des pôles de f, la fonction de compensation et la fonction caractéristique de Nevanlinna et mentionner ses propriétés. Le but est d'obtenir la formule la plus simple de Jensen et de prouver le premier théorème fondamental de Nevanlinna qui est un résultat de cette formule. Puis, on va définir l'ordre de croissance des fonctions méromorphes, l'exposant de convergence des zéros d'une fonction, l'ordre inférieur et ses propriétés. Enfin, on expose l'estimation de $S(r,f)$.

2.1 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

2.1.1 Formule de Jensen

Théorème 2.1. *[10] Soit f une fonction méromorphe non constante dans K tel que*

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r \ et\ 0 < r < +\infty\},$$

Soient $\{a_j\}_{j=1}^{n}$ la suite des zéros de f dans K tel que $0 < |a_j| < |a_{j+1}|$ et $\{b_k\}_{k=1}^{p}$ la suite des pôles de f dans K tel que $0 < |b_k| < |b_{k+1}|$ alors si $f(0) \neq 0, +\infty$ on a

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{k=1}^{p} \log\frac{r}{|b_k|} - \sum_{j=1}^{n} \log\frac{r}{|a_j|}. \tag{2.1}$$

la formule (2.1) *est appelée formule de Jensen.*

Preuve. Supposons que f est une fonction méromorphe ne possédant ni zéros ni pôles sur $|z| = r$

On pose

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)} / \prod_{k=1}^{p} \frac{r^2 - \bar{b}_k z}{r(z - b_k)}.$$

Il est clair que $g \neq 0, +\infty$ sur $|z| = r$ et $\log |g(z)|$ est analytique.

Alors, d'après le corollaire (1.1), on a

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\varphi})| d\varphi, \tag{2.2}$$

D'autre part, on a

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{j=1}^{n} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{k=1}^{p} \frac{r}{|b_k|},$$

Ce qui implique

$$\log |g(0)| = \log |f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|} - \sum_{k=1}^{p} \log \frac{r}{|b_k|}. \tag{2.3}$$

Soit $z = re^{i\varphi}$,

on a

$$\left|\frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \bar{b}_k z}{r(z - b_k)}\right| = 1,$$

En effet,

on a $r^2 = |z|^2 = z\bar{z}$

Alors

$$\left|\frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)}\right| = \left|\frac{z}{r}\right| \left|\frac{\overline{z - a_j}}{z - a_j}\right| = 1,$$

et

$$\left|\frac{r^2 - \bar{b}_k z}{r(z - b_k)}\right| = \left|\frac{z}{r}\right| \left|\frac{\overline{z - b_k}}{z - b_k}\right| = 1,$$

Donc

$$|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})| \ sur \ |z| = r.$$

D'où de (2.2) et (2.3), on obtient

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{k=1}^{p} \log \frac{r}{|b_k|} - \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|}.$$

□

Lemme 2.1. *[14] Soit f une fonction méromorphe non constante dans K tel que*

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r \text{ et } 0 < r < +\infty\},$$

Soient $\{a_j\}_{j=1}^{n}$ la suite des zéros de f dans K tel que $0 < |a_j| < |a_{j+1}| \leq r$ et $\{b_k\}_{k=1}^{p}$ la suite des pôles de f dans K tel que $0 < |b_k| < |b_{k+1}| \leq r$ alors, on a

$$\sum_{k=1}^{p} \log \frac{r}{|b_k|} = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|} = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f}) - n(0,\frac{1}{f})}{t} dt,$$

avec $n(t,f)$ est le nombre des pôles de f dans $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq t \text{ et } t > 0\}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \log \frac{r}{|b_k|} &= \log \prod_{k=1}^{p} \frac{r}{|b_k|} \\
&= \log \frac{r^p}{|b_1||b_2|...|b_p|} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} k(\log|b_{k+1}| - \log|b_k|) + p(\log r - \log|b_p|) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|} \frac{k}{t} dt + \int_{|b_p|}^{r} \frac{p}{t} dt.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

Si $|b_k| < |b_{k+1}|$, on a

$\forall t \in]|b_k|, |b_{k+1}|[, n(t,f) = k + n(0,f)$, donc $k = n(t,f) - n(0,f)$

D'où

$$\int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|} \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt = \int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|} \frac{k}{t} dt,$$

et pour tout $t \in]|b_p|, r[, p = n(t,f) - n(0,f)$, donc

$$\int_{|b_p|}^{r} \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt = \int_{|b_p|}^{r} \frac{p}{t} dt,$$

D'autre part, si $|b_k| = |b_{k+1}|$, on a aussi

$$\int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|} \frac{k}{t} dt = \int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|} \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\log\frac{r}{|b_k|} &= \sum_{k=1}^{p-1}\int_{|b_k|}^{|b_{k+1}|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + \int_{|b_p|}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt \\ &= \int_{0}^{|b_1|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + \int_{|b_1|}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt \\ &= \int_{0}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt.\end{aligned}$$

Car

$$\int_{0}^{|b_1|}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt = 0.$$

De la même façon, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|a_j|} = \int_{0}^{r}\frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt.$$

□

Définition 2.1. *Soit f une fonction méromorphe et $r > 0$, la fonction définie par*

$$N(r,f) = \int_{0}^{r}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r.$$

*est appelée la **fonction de comptage** des **pôles** de f dans $|z| \leq r$.*

Définition 2.2. *Soit f une fonction méromorphe et $r > 0$, la fonction définie par*

$$N(r,\frac{1}{f}) = \int_{0}^{r}\frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt + n(0,\frac{1}{f})\log r.$$

*est appelée la **fonction de comptage** des **zéros** de f dans $|z| \leq r$,*
tel que $n(t,\frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leqslant r$.

2.1.2 Fonction caractéristique

Définition 2.3. *Soit $a \in \mathbb{R}$*

$$\log^{+} a = \max(\log a, 0) = \begin{cases}\log a & si\ a \geq 1\\ 0 & si\ 1 > a \geq 0\end{cases}$$

Proposition 2.1. *[19] Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a*

a) $\log a \leq \log^+ a \quad \forall a > 0.$

b) $a \leq b \Longrightarrow \log^+ a \leq \log^+ b.$

c) $\log a = \log^+ a - \log^+ \frac{1}{a} \quad \forall a > 0.$

d) $|\log a| = \log^+ a + \log^+ \frac{1}{a} \quad \forall a > 0.$

e) $\log^+ (\prod_{i=1}^{n} a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i$, *tel que* $\forall i = 1, ..., n$ *on a* $a_i \in \mathbb{R}_+$.

f) $\log^+ (\sum_{i=1}^{n} a_i) \leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i$, *tel que* $\forall i = 1, ..., n$ *on a* $a_i \in \mathbb{R}_+$.

Preuve.

Montrons (c)-(f).

c) On a

$$\begin{aligned}
\log^+ a - \log^+ \frac{1}{a} &= \max(\log a, 0) - \max(\log \frac{1}{a}, 0) \\
&= \max(\log a, 0) - \max(-\log a, 0) \\
&= \max(\log a, 0) + \min(\log a, 0) \\
&= \log a.
\end{aligned}$$

d) On a

$$\begin{aligned}
\log^+ a + \log^+ \frac{1}{a} &= \max(\log a, 0) + \max(\log \frac{1}{a}, 0) \\
&= \max(\log a, 0) + \max(-\log a, 0) \\
&= \max(\log a, 0) - \min(\log a, 0) \\
&= |\log a|.
\end{aligned}$$

e) • Si $0 \leq \prod_{i=1}^{n} a_i \leq 1$, on a

$\log^+ (\prod_{i=1}^{n} a_i) = max(0, \log(\prod_{i=1}^{n} a_i)) = 0$

Donc

$$\log^+ (\prod_{i=1}^{n} a_i) = 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i,$$

• Si $\prod_{i=1}^{n} a_i > 1$, d'après l'inégalité a), on a

$\log^+ \prod_{i=1}^{n} a_i = max(0, \log \prod_{i=1}^{n} a_i) = \log \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i.$

f) Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq n \underset{0\leq i\leq n}{max} a_i$, d'après l'inégalité e), on a

$$\begin{aligned}\log^+ \sum_{i=1}^{n} a_i &\leq \log^+(n \underset{0\leq i\leq n}{max} a_i)\\ &\leq \log^+ n + \log^+(\underset{0\leq i\leq n}{max} a_i)\\ &\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ a_i.\end{aligned}$$

□

Définition 2.4. *Soit f est une fonction méromorphe et $r > 0$, la fonction définie par*

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

est appelée la ***fonction de compensation****.*

Définition 2.5. *Soient f une fonction méromorphe et $r > 0$, on pose*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

La fonction $T(r,f)$ est appelée ***fonction caractéristique de Nevanlinna*** *de f.*

Exemple 2.1.

Soit $f(z) = e^z$
Supposons que $z = re^{i\theta}$, et on a $e^z = e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$
Comme f est analytique, alors $N(r,f) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}T(r,f) &= m(r,f)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}| d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{r\cos\theta} d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log e^{r\cos\theta} d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta d\theta\\ &= \frac{r}{\pi}.\end{aligned}$$

D'où $T(r,f) = \frac{r}{\pi}$.

Proposition 2.2. *[10],[14] Soient $f, f_1, f_2, ..., f_n$ des fonctions méromorphes, on a*

1) $N(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i), \forall r \geqslant 1.$

2) $N(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i), \forall r \geqslant 1.$

3) $m(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i), \forall r \geqslant 1.$

4) $m(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i), \forall r \geqslant 1.$

5) $T(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i).$

6) $T(r, f^k) = kT(r, f), \forall k \in \mathbb{N}.$

7) $T(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i) \leq \log n + \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i), \forall r \geqslant 1.$

8) $|T(r, f) - T(r, f-a)| \leq \log^+ |a| + \log 2, \quad$ *où* $\quad a = cte.$

9) $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1),$ *tel que* $f \not\equiv \frac{-d}{c}.$

Preuve. Montrons 5)-9).

5) On a

$$
\begin{aligned}
m(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) &= \int\limits_{0}^{2\pi} \log^+ |\prod_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).
\end{aligned}
$$

Si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors z_0 est un pôle de la fonction $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i$ de degré au plus $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. Donc

$$N(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m(r,f_i) + \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (m(r,f_i) + N(r,f_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i). \end{aligned}$$

6) On a $|f^k| = |f|^k \leq 1 \Longleftrightarrow |f| \leq 1$, alors
si $|f| \leq 1$, on a

$$m(r,f^k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f^k(re^{i\varphi})| d\varphi = 0.$$

$$N(r,f^k) = kN(r,f).$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,f^k) &= m(r,f^k) + N(r,f^k) \\ &= kN(r,f) \\ &= k(m(r,f) + N(r,f)) \\ &= kT(r,f). \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, alors

$$m(r,f^k) = km(r,f),$$

et

$$N(r,f^k) = kN(r,f),$$

Donc

$$T(r,f^k) = kT(r,f).$$

7) On a si z_0 est un pôle de degré λ_i pour la fonction f_i, alors il est de degré égale au plus $\underset{1\leq i\leq n}{max} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Donc

$$N(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r,f_i),$$

et

$$\begin{aligned}
m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= \int_0^{2\pi} \log^+ |\sum_{i=1}^{n} f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log n + \sum_{i=1}^{n} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_i(re^{i\varphi})| d\varphi \\
&= \log n + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
T(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) &= m(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) + N(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) \\
&\leq \log n + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \\
&= \log n + \sum_{i=1}^{n} (m(r, f_i) + N(r, f_i)) \\
&= \log n + \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).
\end{aligned}$$

8) D'après l'inégalité 7), on a

$$T(r,\sum_{i=1}^{2} f_i) \leq \log 2 + \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i),$$

•Pour $f_1 = f - a, f_2 = a$, on obtient

$$T(r, f_1 + f_2) = T(r, f) \leq \log 2 + T(r, f - a) + T(r, a).$$

D'autre part, on a

$$T(r, a) = m(r, a) = \log^+ |a| \quad (car \quad N(r, a) = 0).$$

D'où

$$T(r, f) \leq \log 2 + T(r, f - a) + \log^+ |a|. \tag{2.4}$$

• Pour $f_1 = f, f_2 = -a$, on trouve

$$T(r, f - a) \leq \log 2 + T(r, f) + T(r, -a).$$

Mais, on a

$$T(r, -a) = m(r, -a) = \log^+ |a| \quad (car \quad N(r, -a) = 0).$$

D'où

$$T(r, f-a) \leq \log 2 + T(r, f) + \log^+ |a|. \tag{2.5}$$

De (2.4) et (2.5), on obtient

$$|T(r, f) - T(r, f-a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

9) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, \frac{af+b}{d}) &= T(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}) \\ &= T(r, \frac{a}{d}f) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a(f+\frac{b}{a})}{c(f+\frac{d}{c})} \\ &= \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\Big(r, \frac{af+b}{cf+d}\Big) &= T\Big(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\Big) \\ &= T\Big(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\Big) \\ &= T\Big(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\Big) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.1. *En utilisant les nouvelles notations, le lemme 2.1 et l'inégalité c) de la proposition 2.1, on obtient*

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \sum_{k=1}^{p}\log\frac{r}{|b_k|} - \sum_{j=1}^{n}\log\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi + \Big(\int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r\Big) \\
&- \Big(\int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt + n(0,\frac{1}{f})\log r\Big) \\
&= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \Big(m(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f})\Big) \\
&= T(r,f) - T(r,\frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

Donc

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \log|f(0)|. \tag{2.6}$$

C'est la forme la plus simple de la formule de Jensen.

2.1.3 Premier théorème de Nevanlinna

Théorème 2.2. *[10] Soit f une fonction méromorphe dans $|z| \leq r$, $0 \leq r < +\infty$ et soit $a \in \mathbb{C}$, on pose*

$$f(z) - a = \sum_{i=\lambda}^{+\infty} c_i z^i,\ \lambda \in \mathbb{Z} \quad c_\lambda \neq 0,$$

alors

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T(r,f) - \log|f(0)-a| + \xi(r,a).$$

où $|\xi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{1}{f-a}) &= T(r,f-a) - \log|f(0)-a| \\
&= T(r,f) + T(r,f-a) - T(r,f) - \log|f(0)-a| \\
&= T(r,f) - \log|f(0)-a| + (T(r,f-a) - T(r,f)) \\
&= T(r,f) - \log|f(0)-a| + \xi(r,a),
\end{aligned}$$

où $|\xi(r,a)| = |T(r,f-a) - T(r,f)| \leq \log^+|a| + \log 2$ (d'après l'inégalité 8) de la proposition 2.1). □

Remarque 2.2.

Le théorème de Nevanlinna s'écrit sous la forme

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1).$$

Théorème 2.3. *[14] Soit f une fonction méromorphe non constante dans D tel que $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant R\}$, avec $R > 0$ et $\{a_j\}_{j=1}^{n}(resp.\{b_k\}_{k=1}^{p})$ la suite des zéros (resp, la suite des pôles) de f dans $int(D)$ où chaque zéro (resp, pôle) est compté avec sa multiplicité alors pour $z = re^{i\theta}$, avec $0 \leqslant r < R$, on a*

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} \log|f(Re^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z}\right| \\ - \sum_{k=1}^{p} \log\left|\frac{R(z-b_k)}{R^2 - \bar{b_k} z}\right|. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

avec, $f(z) = \sum_{i=\lambda}^{+\infty} c_i z^i, c_\lambda \neq 0$, *(la série de Laurent de f en zéro).*

Remarque 2.3. *La relation* (2.7) *est appelée la formule de* ***Poisson-Jensen****.*

Proposition 2.3. *[19] Soient g une fonction analytique, $r, R \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Si le module maximum vérifie*

$$M(r, g) = \max_{|z|=r} |g(z)| \geq 1,$$

Alors

$$T(r, g) \leq \log M(r, g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, g).$$

Preuve. On a g est analytique, alors la première inégalité est trivial

$$\begin{aligned}T(r, g) &= m(r, g) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\phi})| d\phi \\ &\leq \log^+ M(r, g) = \log M(r, g).\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que $\log M(r, g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, g)$.
Soient $z_0 = re^{i\theta}$ et $|g(z_0)| = M(r, g)$.
On a

$$\left|\frac{R(z_0 - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z_0}\right| < 1 \quad si \quad |z| \leq R,$$

D'après la relation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}\log M(r,g) &= \log|g(z_0)|\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|g(Re^{i\varphi})|d\varphi\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)^2+2Rr(1-\cos(\theta-\varphi))}\log^+|g(Re^{i\varphi})|d\varphi\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)^2}\log^+|g(Re^{i\varphi})|d\varphi\\ &= \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|g(Re^{i\varphi})|d\varphi\\ &= \frac{R+r}{R-r}m(R,g)\\ &= \frac{R+r}{R-r}T(R,g).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.4. *[14] Soit f une fonction méromorphe, alors f est une **fraction rationnelle** si et seulement si*

$$T(r,f) = O(\log r).$$

2.2 Ordre de croissance des fonctions méromorphes

Définition 2.6. *Soit f une fonction méromorphe, l'ordre de croissance de f est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre de f est défini par

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

où $M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$

Proposition 2.4. *[15] Soit g une fonction analytique telle que*

$$M(r,g) \ge 1,$$

Alors, on a : $\sigma(g) = \rho(g)$.

Preuve.

D'après la proposition 2.3, on a

$$T(r,g) \leq \log M(r,g).$$

En introduisant la fonction log et en divisant par $\log r$, on obtient

$$\frac{\log T(r,g)}{\log r} \leq \frac{\log \log M(r,g)}{\log r}.$$

Par passage à la limite supérieure, on trouve

$$\sigma(g) \leq \rho(g).$$

D'autre part, on a

$$\log M(r,g) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,g). \tag{2.8}$$

On prend $R = 2r$ dans (2.8), en introduisant la fonction log et en divisant par $\log r$, on obtient

$$\frac{\log \log M(r,g)}{\log r} \leq \frac{\log 3T(2r,g)}{\log r}.$$

Par passage à la limite supérieure, on trouve

$$\begin{aligned}
\rho(g) &\leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log 3 + \log T(2r,g)}{\log r} \\
&\leq \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log 3}{\log r} + \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \left(\frac{\log T(2r,g)}{\log 2r} . \frac{\log 2r}{\log r} \right) \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log 2r} . \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log 2r}{\log r} \\
&= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(2r,g)}{\log 2r} \\
&= \sigma(g).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Définition 2.7. *Soit f une fonction méromorphe, l'hyper-ordre de croissance de f est défini par*

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'hyper-ordre de f est défini par

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 2.2.

1) La fonction $f(z) = e^{e^z}$ *est d'ordre* $\sigma(f) = +\infty$ *et d'hyper ordre* $\sigma_2(f) = 1$.

2) La fonction $f(z) = e^z$ *est d'ordre* $\sigma(f) = 1$.

Remarque 2.4. *Si* f *est d'ordre fini alors l'hyper ordre de cette fonction est nul.*

Théorème 2.5. *[15] Soient* f, g *deux fonctions méromorphes et* $a \in \mathbb{C}$. *Supposons que* $f, g, (f-a), (f+g) \not\equiv 0$, *alors on a les propriétés suivantes :*

1) $\sigma(\frac{1}{f}) = \sigma(f)$.

2) $\sigma(\frac{1}{f-a}) = \sigma(f)$.

3) $\sigma(\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\eta}) = \sigma(f)$, *tels que* $f \not\equiv \frac{-\eta}{\gamma}$ *et* $\alpha\eta - \beta\gamma \neq 0$.

4) $\sigma(f^n) = \sigma(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5) $\sigma(f^{(n)}) \leq \sigma(f)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6) $\sigma(f(cz)) = \sigma(f)$.

7) $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

8) $\sigma(f.g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$.

Preuve.

1) D'après la remarque 2.2, on a

$$\begin{aligned} T\Big(r, \frac{1}{f}\Big) &= T(r,f) + O(1) \\ &= T(r,f)\left(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)}\right). \end{aligned}$$

En introduisant la fonction log, en divisant par $\log r$ et en passant à la limite supérieure, on trouve

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r, \frac{1}{f})}{\log r} = \limsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\log\Big(T(r,f)(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)})\Big)}{\log r}\right).$$

Ce qui implique

$$\sigma\Big(\frac{1}{f}\Big) = \limsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right).$$

On va montrer que $\sigma(f) = \limsup\limits_{r\to+\infty} \left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)$.

On a

$$\begin{aligned} \limsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right) &\leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} + \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r} \\ &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \\ &= \sigma(f). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r} - \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)\\
&\leq \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right) + \limsup_{r\to+\infty} - \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\\
&= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) D'après le théorème (2.2), on a

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T(r,f) - \log|f(0)-a| + \xi(r,a).$$

avec

$$|\xi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

Alors, on obtient

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T(r,f)\Big(1 - \frac{\log|c_\lambda|}{T(r,f)} + \frac{\xi(r,a)}{T(r,f)}\Big). \tag{2.9}$$

En introduisant la fonction log dans (2.9), et en divisant par $\log r$ puis en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma\Big(\frac{1}{f-a}\Big) &= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log\Big(1 - \frac{\log|c_\lambda|}{T(r,f)} + \frac{\xi(r,a)}{T(r,f)}\Big)}{\log r}\right)\\
&\leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\Big(1 - \frac{\log|c_\lambda|}{T(r,f)} + \frac{\xi(r,a)}{T(r,f)}\Big)}{\log r}\\
&= \sigma(f).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$T(r,f) = T(r, \frac{1}{f-a}) + \log|c_\lambda| - \xi(r,a),$$

avec les mêmes étapes précédentes, on obtient

$$\sigma(f) \leq \sigma(\frac{1}{f-a}).$$

D'où $\sigma(f) = \sigma(\frac{1}{f-a})$.

3) D'après l'égalité 9) de la proposition 2.2 , on a

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\eta}\right) &= T(r,f) + O(1)\\
&= T(r,f)\Big(1 + \frac{O(1)}{T(r,f)}\Big).
\end{aligned}$$

En introduisant la fonction log et en divisant par $\log r$, puis en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\eta}\right) &= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\right)\\
&\leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log(1+\frac{O(1)}{T(r,f)})}{\log r}\\
&= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}\\
&= \sigma(f).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$T(r,f)=T(r,\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\eta})-O(1).$$

De même étape, on obtient

$$\sigma(f)\leq\sigma(\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\eta}).$$

D'où le résultat.

4) D'après l'égalité 6) de proposition 2.2 , on a

$$T(r,f^n)=nT(r,f).$$

En introduisant la fonction log, en divisant par $\log r$ et en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f^n)}{\log r} &= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log n}{\log r}+\frac{\log T(r,f)}{\log r}\right)\\
&\leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log n}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\sigma(f^n)\leq\sigma(f).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}\\
&= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{T(r,f^n)}{n}\right)}{\log r}\\
&= \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f^n)}{\log r}-\frac{\log n}{\log r}\right)\\
&\leq \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r,f^n)}{\log r}+\limsup_{r\to+\infty}-\frac{\log n}{\log r}\\
&= \sigma(f^n).
\end{aligned}$$

Alors $\sigma(f^n) = \sigma(f)$.

5) On a
$$T(r, f^{(n)}) \leq (n+1)T(r,f) + o(T(r,f)).$$

En introduisant la fonction log et en divisant par $\log r$, on obtient
$$\begin{aligned}\frac{\log T(r, f^{(n)})}{\log r} &\leq \frac{\log\left(T(r,f)\Big((n+1) + \frac{o(T(r,f))}{T(r,f)}\Big)\right)}{\log r}\\ &= \frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log\Big((n+1) + \frac{o(T(r,f))}{T(r,f)}\Big)}{\log r}.\end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure, on obtient
$$\begin{aligned}\sigma(f^{(n)}) &\leq \limsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\log T(r,f)}{\log r} + \frac{\log\Big((n+1) + \frac{o(T(r,f))}{T(r,f)}\Big)}{\log r}\right)\\ &\leq \sigma(f) + \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log\Big((n+1) + \frac{o(T(r,f))}{T(r,f)}\Big)}{\log r}\\ &= \sigma(f).\end{aligned}$$

6) On a
$$T(r, f(cz)) = T(|c|r, f).$$

En introduisant la fonction log et en divisant par $\log r$, on obtient
$$\frac{\log T(r, f(cz))}{\log r} = \frac{\log T(|c|r, f)}{\log r}. \tag{2.10}$$

On passe à la limite supérieure dans (2.10), on trouve
$$\begin{aligned}\sigma(f(cz)) &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(r, f(cz))}{\log r}\\ &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(|c|r, f)}{\log r}\\ &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(|c|r, f)}{\log |c|r}.\frac{\log |c|r}{\log r}\\ &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(|c|r, f)}{\log |c|r}.\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log |c|r}{\log r}\\ &= \limsup_{r\to+\infty}\frac{\log T(|c|r, f)}{\log |c|r}\\ &= \sigma(f).\end{aligned}$$

7) Supposons que $\sigma(f) \leq \sigma(g) < +\infty$.
On a

$$\begin{cases} \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f)+\log 2)}{\log r} = \sigma(f) \leq \sigma(g), \\ \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,g)+\log 2)}{\log r} = \sigma(g), \end{cases}$$

Donc
$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0$, tels que : $\forall r > \mu$, on a

$$\frac{\log(2T(r,f)+\log 2)}{\log r} < (\sigma(g)+\varepsilon) \quad et \quad \frac{\log(2T(r,g)+\log 2)}{\log r} < (\sigma(g)+\varepsilon).$$

Ce qui implique

$$\log(2T(r,f)+\log 2) < (\sigma(g)+\varepsilon)\log r \quad et \quad \log(2T(r,g)+\log 2) < (\sigma(g)+\varepsilon)\log r.$$

En introduisant la fonction exp, on obtient

$$2T(r,f)+\log 2 < r^{\sigma(g)+\varepsilon} \quad et \quad 2T(r,g)+\log 2 < r^{\sigma(g)+\varepsilon}.$$

En divisant par deux, puis en faisant la somme, on trouve

$$T(r,f)+T(r,g)+\log 2 < r^{\sigma(g)+\varepsilon}. \tag{2.11}$$

D'autre part, on a d'après la proposition 2.2

$$T(r,f+g) < T(r,f)+T(r,g)+\log 2. \tag{2.12}$$

De (2.11) et (2.12), on obtient

$$T(r,f+g) < r^{\sigma(g)+\varepsilon}.$$

Ce qui implique

$$\sigma(f+g) \leq \sigma(g) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}.$$

8) Supposons que $\sigma(f) \leq \sigma(g) < +\infty$.
On a

$$\begin{cases} \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f))}{\log r} = \sigma(f) \leq \sigma(g), \\ \limsup\limits_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,g))}{\log r} = \sigma(g), \end{cases}$$

En effet, On a

$$\begin{aligned}
\sigma(f) &= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f) + \log 2 - \log 2}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\log(2T(r,f))}{\log r} - \frac{\log 2}{\log r} \right) \\
&\leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f))}{\log r} - \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log 2}{\log r} \\
&= \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f))}{\log r}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,f))}{\log r} &= \limsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\log 2}{\log r} + \frac{\log T(r,f)}{\log r} \right) \\
&\leq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log 2}{\log r} + \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \\
&= \sigma(f).
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(2T(r,g))}{\log r} = \sigma(g).$$

Donc
$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0$, tels que : $\forall r > \mu$, on a

$$\frac{\log(2T(r,f))}{\log r} < (\sigma(g) + \varepsilon) \quad et \quad \frac{\log(2T(r,g))}{\log r} < (\sigma(g) + \varepsilon).$$

Ce qui implique

$$\log(2T(r,f)) < (\sigma(g) + \varepsilon) \log r \quad et \quad \log(2T(r,g)) < (\sigma(g) + \varepsilon) \log r.$$

En introduisant la fonction exp, on obtient

$$2T(r,f) < r^{\sigma(g)+\varepsilon} \quad et \quad 2T(r,g) < r^{\sigma(g)+\varepsilon}.$$

En divisant par deux, puis en faisant la somme, on trouve

$$T(r,f) + T(r,g) < r^{\sigma(g)+\varepsilon}. \tag{2.13}$$

D'autre part, on a d'après la proposition 2.2

$$T(r,fg) \leq T(r,f) + T(r,g). \tag{2.14}$$

De (2.13) et (2.14), on obtient

$$T(r, fg) < r^{\sigma(g)+\varepsilon}.$$

Ce qui implique

$$\sigma(fg) \leq \sigma(g) = \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}.$$

$\square$

2.2.1 Exposant de convergence des zéros d'une fonction

Définition 2.8. *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f sont définis respectivement par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

$$\lambda_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

Définition 2.9. *Soit f une fonction méromorphe, l'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f sont définis respectivement par*

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

$$\overline{\lambda_2}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

où

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f})}{t} dt + \overline{n}(r, \frac{1}{f}) \log r,$$

tel que $\overline{n}(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leqslant t$.

Proposition 2.5. *[14] Soit f une fonction méromorphe, on a $\lambda(f) \leq \sigma(f)$.*

Preuve.

On a

$$T(r, \frac{1}{f}) = m(r, \frac{1}{f}) + N(r, \frac{1}{f}) \geq N(r, \frac{1}{f}),$$

car $m(r, \frac{1}{f}) \geq 0$

Donc $\sigma(\frac{1}{f}) \geq \lambda(f)$, et comme $\sigma(\frac{1}{f}) = \sigma(f)$, alors $\lambda(f) \leq \sigma(f)$. $\square$

Proposition 2.6. *[15] Soit $f(z) \neq 0$ une fonction méromorphe. Alors on a*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r, \frac{1}{f})}{\log r}.$$

Exemple 2.3.

1. *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^{e^z} + 2$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*
2. *L'exposant de convergence des zéros de la fonction $f(z) = e^z - b$, où $b \neq 0$ est égal à 1.*

Théorème 2.6. *[15] Soient f, g deux fonctions méromorphes et $a \in \mathbb{C}$. Supposons que $f, g, (f-a), (f+g) \not\equiv 0$, alors on a les propriétés suivantes :*

1) $\lambda(f-a) = \lambda(f)$.

2) $\lambda(f^n) = \lambda(f), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3) $\lambda(f^{(n)}) \leq \lambda(f), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4) $\lambda(f(cz)) = \lambda(f)$.

5) $\lambda(f+g) \leq max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$.

6) $\lambda(f.g) \leq max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$.

2.2.2 L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur d'une fonction

Définition 2.10. *Soit f une fonction entière. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de f sont définis respectivement par*

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r},$$

Si f est méromorphe, l'ordre inférieur $\mu(f)$ est défini par

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

et l'hyper-ordre inférieur de f est donné par

$$\mu_2(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

2.3 L'estimation de S(r,f)

Définition 2.11. *La mesure linéaire d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

où χ_E *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E.

Définition 2.12. *Soit* f *une fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe, on définit la quantité* $S(r, f)$ *par*

$$S(r, f) = o(T(r, f)),\ (r \longrightarrow \infty).$$

Si f *est d'ordre fini, et*

$$S(r, f) = o(T(r, f)),\ (r \longrightarrow \infty, r \notin E_0).$$

où E_0 *est un ensemble de mesure linéaire finie si* f *est d'ordre infini.*

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *(**La dérivée logarithmique**)[14] Soit* f *une fonction méromorphe transcendante non-constante. Si* f *est d'ordre fini, alors on a*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\log r), \forall k \in \mathbb{N}^* \ (r \longrightarrow \infty).$$

Si f *est d'ordre infini, alors on a*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = S(r, f) = O(\log(rT(r, f))), \forall k \in \mathbb{N}^* \ (r \longrightarrow \infty, r \notin E_0).$$

où E_0 *est un ensemble de mesure linéaire ne dépassant pas 2.*

Remarque 2.5.

- *Une fonction transcendante entière est une fonction entière non polynomial.*

- *Une fonction transcendante méromorphe est une fonction méromorphe non rationnelle.*

CHAPITRE 3

APPLICATION DE LA THÉORIE DE NEVANLINNA

Dans ce chapitre, on donne une application de la théorie de Nevanlinna pour étudier la croissance des solutions de l'équation différentielle de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0, \tag{3.1}$$

où $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières.

3.1 Équations différentielles

Théorème 3.1. *[10](**Tumura-Clunie**) Supposons que f est méromorphe et non constante dans le plan $\mathbb{C}$, tel que*

$$g(z) = f(z)^n + P_{n-1}(f),$$

où $P_{n-1}(f)$ est un polynôme différentiel de degré au plus $n-1$ en f et que

$$N(r, f) + N(r, \frac{1}{g}) = S(r, f),$$

Alors, on a

$$g(z) = h(z)^n,$$

$$h(z) = f(z) + \frac{1}{n}a(z),$$

et $h(z)^{n-1}a(z)$ est obtenu en substituant $h(z)$ à $f(z)$, $h^{'}(z)$ à $f^{'}(z)$, etc., en termes de degré $n-1$ dans $P_{n-1}(f)$.
Donc $g(z)$ est de la forme $(f+a/n)^n$, où a est déterminé par les termes de degré $n-1$ en $P_{n-1}(f)$ et par $g(z)$.

Remarque 3.1. *On note les cas particuliers suivants :*
-Si $P_{n-1}(f)=a_0(z)f^{n-1}(z)$+termes de degré au plus $n-2$, alors

$$h(z)^{n-1}a(z)=a_0(z)h^{n-1}(z),$$

$$a(z)=a_0(z),$$

et

$$g(z)=\left(f(z)+\frac{a_0(z)}{n}\right)^n,$$

-Si $P_{n-1}(f)=a_0(z)f'(z)f^{n-2}(z)$+termes de degré au plus $n-2$, alors

$$h(z)^{n-1}a(z)=a_0(z)h^{'}(z)h^{n-2}(z),$$

$$a(z)=a_0(z)\frac{h^{'}}{h}=\frac{a_0(z)}{n}\cdot\frac{g^{'}(z)}{g(z)},$$

et

$$g(z)=\left(f(z)+\frac{a_0(z)}{n^2}\frac{g^{'}(z)}{g(z)}\right)^n,$$

Théorème 3.2. *[3] Soient $A_0,...,A_{k-1}$ des fonctions entières telles que :*

$$\max\{\sigma(A_1),\sigma(A_2),...,\sigma(A_{k-1}),\lambda(A_0)\}<\sigma(A_0)=\sigma\quad(0<\sigma\leq\infty), \tag{3.2}$$

et A_0 a au moins un zéro dont la multiplicité n'est pas un multiple de k. Alors toute solution f de l'équation

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_0f=0. \tag{3.3}$$

satisfait $\bar{\lambda}(f)\geq\sigma$.
De plus, Si A_0 est transcendant avec $\sigma(A_0)=0$, a au moins un zéro dont la multiplicité n'est pas un multiple de k et $A_1,...,A_{k-1}$ sont des polynômes, alors toute solution f de (3.3) a une infinité de zéros.

Remarque 3.2. *Nous donnerons quelques estimations supplémentaires sur la croissance des solutions d'ordre infini de l'équation* (3.3). *Il est bien connu que toutes les solutions de* (3.3) *sont des fonctions entières et lorsque certains des coefficients de* (3.3) *sont transcendantes, l'équation* (3.3) *a au moins une solution f avec $\sigma(f)=\infty$.*

Preuve du théorème 3.2.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (3.3).
Comme les coefficients $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières, alors f est entière avec $\sigma(f) = \infty$.
Supposons que l'assertion du théorème 3.2 est fausse i.e.

$$\bar{\lambda}(f) < \sigma, \tag{3.4}$$

On pose $g = f'/f$.
Par récurrence, on obtient

$$f^{(j)}/f = g^j + \frac{1}{2}j(j-1)g^{j-2}g' + H_{j-2}(g), \tag{3.5}$$

où $H_{j-2}(g)$ est un polynôme différentiel en g et ses dérivées avec des coefficients constants, et le degré de $H_{j-2}(g)$ n'est pas supérieur à k.
En substituant la relation (3.5) dans l'équation (3.3), on trouve

$$f(g^k+\frac{1}{2}k(k-1)g^{k-2}g'+H_{k-2}(g))+A_{k-1}f(g^{k-1}+\frac{1}{2}(k-1(k-2)g^{k-3}g'+H_{k-3}(g))+...+A_0f = 0.$$

Ce qui implique

$$-A_0 = g^k + \frac{1}{2}k(k-1)g^{k-2}g' + A_{k-1}g^{k-1} + P_{k-2}(g), \tag{3.6}$$

où $P_{k-2}(g)$ est un polynôme différentiel en g et ses dérivées avec des coefficients qui sont des combinaisons linéaires de $A_1, ..., A_{k-2}$ avec coefficients constants et le degré de P_{k-2} n'est pas supérieur à k.
D'autre part,
il est clair que Les pôles de g sont les zéros de f et tous les pôles de g sont des pôles simples.
Alors, d'après (3.4), on a

$$\sigma(N(r,g)) = \bar{\lambda}(f) < \sigma, \tag{3.7}$$

D'après (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
T(r, A_0) &= T(r, g^k + \frac{1}{2}k(k-1)g^{k-2}g' + A_{k-1}g^{k-1} + P_{k-2}(g)) \\
&\leq \log 4 + T(r, g^k) + \frac{1}{2}k(k-1)T(r, g^{k-2}g') + T(r, A_{k-1}g^{k-1}) + T(r, P_{k-2}(g)) \\
&\leq M\Big(T(r,g) + T(r, A_1) + T(r, A_2) + ... + T(r, A_{k-1})\Big) + \sum_{j=1}^{k-1} o(T(r,g)) \\
&\leq M\Big(T(r,g) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, A_j)\Big) + S(r,g)
\end{aligned}$$

D'où

$$T(r, A_0) \leq M\Big(T(r,g) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, A_j)\Big) + S(r,g) \quad (r \notin E), \tag{3.8}$$

où $E \subset (0, +\infty)$ a une mesure linéaire finie et M est une constante strictement positive. D'autre part, On a

$$\max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), ..., \sigma(A_{k-1}), \lambda(A_0)\} < \sigma(A_0) = \sigma \quad (0 < \sigma \leq \infty),$$

et comme $\mu(A_0) = \sigma(A_0)$, alors

$$\sigma(A_j) < \mu(A_0) = \sigma \quad \forall j = 1, ..., k-1,$$

Donc

$$M \sum_{j=1}^{k-1} T(r, A_j) < \frac{1}{2} T(r, A_0), \tag{3.9}$$

pour $r \notin E$ suffisamment grand. D'après (3.8) et (3.9), on a

$$\begin{aligned} T(r, A_0) &\leq M\Big(T(r, g) + \sum_{j=1}^{k-1} T(r, A_j)\Big) + S(r, g) \\ &\leq T(r, g) + \frac{1}{2} T(r, A_0) + S(r, g). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} T(r, A_0) &\leq 2MT(r, g) + 2S(r, g) \\ &\leq 2MT(r, g) + o(1)T(r, g), \end{aligned}$$

D'où

$$T(r, A_0) \leq (2M + o(1))T(r, g), \tag{3.10}$$

pour $r \notin E$ suffisamment grand. Par conséquent, (voir [4]), d'après (3.7), (3.2) et (3.10), on obtient $\mu(g) = \sigma(g) \geq \sigma$,

$$T(r, A_j) = S(r, g) \quad (j = 1, ..., k),$$

et pour $r \notin E$, on a

$$N(r, g) = o(1)T(r, g) = S(r, g).$$

D'où, d'après (3.2) et $\mu(g) \geq \sigma$, on a $N(r, \frac{1}{A_0}) = S(r, g)$. De plus, comme (3.6) satisfait toutes les conditions du théorème **Tumura-Clunie**, il s'ensuit que

$$-A_0 = h^k(z), \qquad h(z) = g(z) + \frac{1}{k} a(z),$$

où h satisfait

$$h^{k-1} a = \frac{1}{2} k(k-1) h^{k-2} h' + A_{k-1} h^{k-1},$$

$$a = \frac{1}{2} k(k-1) \frac{h'}{h} + A_{k-1},$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{k} \frac{A_0'}{A_0},$$

Donc

$$-A_0 = \left(\frac{f'}{f} + \frac{k-1}{2k}\frac{A_0'}{A_0} + \frac{A_{k-1}}{k}\right)^k,$$

Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle A_0 a au moins un zéro dont la multiplicité n'est pas multiple de k. On doit donc avoir $\bar{\lambda}(f) \geq \sigma$. $\square$

Théorème 3.3. *[3] Supposons que $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières et il existe $A_s \quad (0 \leq s \leq k-1)$ qui satisfait*

$$\sigma(A_j) < \sigma(A_s).$$

Alors, l'équation (3.3) *a au moins une solution f qui satisfait*

$$\lambda(f) \geq \sigma(A_s) \quad ou \quad \sigma_2(f) = \sigma(A_s).$$

On a besoin des lemmes suivants pour la démonstration du théorème 3.3

Lemme 3.1. *[8] Si l'équation différentielle*

$$w^{(k)} + a_{k-1}w^{(k-1)} + ... + a_0 w = 0, \tag{3.11}$$

est satisfaite dans le plan complexe par des fonctions méromorphes linéairement indépendantes $f_1, ..., f_k$. Alors les coefficients $a_j (j = 0, ..., k-1)$ sont méromorphes dans le plan complexe et vérifient la propriété

$$m(r, a_j) = O\{\log[max(T(r, f_s) : s = 1, ..., k)]\}. \tag{3.12}$$

Lemme 3.2. *[3] Soit $g^{n+1} = P_n(g)$ où $P_n(g)$ est un polynôme différentiel de la fonction entière transcendante $g(z)$ et de degré au plus n, avec les coefficients $w'/w, ..., w^{(n)}/w$, et $A_0, ..., A_{k-1}$ où w est une fonction entière avec $\sigma(w) < \infty$ et $A_0, ..., A_{k-1}$ vérifient les hypothèses supplémentaires du théorème 3.3. Sous ces conditions on a*

$$\sigma(g) \leq \sigma(A_s).$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} m(r, g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_1} \log^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_2} \log^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi, \end{aligned} \tag{3.13}$$

Où $\varepsilon_1 = \{\varphi : |g(re^{i\varphi})| < 1\} \cap [0, 2\pi], \varepsilon_2 = [0, 2\pi] - \varepsilon_1$

Il est clair que

$$\int_{\varepsilon_1} \log^+ |g(re^{i\varphi})| d\varphi = 0.$$

et Sur ε_2, on a : $|g(re^{i\varphi})| \geq 1$,
D'autre part, on a $g = P_n(g)/g^n$, où $P_n(g)$ est la somme d'un nombre fini de termes du type

$$a(z)g^{l_0} \cdot (g^{'})^{l_1} \cdots (g^{(\nu)})^{l_\nu},$$

où $l_o, ..., l_\nu$ sont des entiers non négatifs et $\sum\limits_{t=0}^{\nu} l_t = n$, $a(z)$ est une combinaison des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication de $w^{'}/w, ..., w^{(n)}/w, A_0, ..., A_{k-1}$.
On trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon_2} \log^+ |g(re^{i\varphi})|d\varphi &\leq M\left(\sum m(r,a) + \sum_{t=1}^{\nu} m\left(\frac{r, g^{(t)}}{g}\right)\right) \\ &\leq M\left(\sum_{j=1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(j)}}{w}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} m(r, A_j) + S(r,g)\right), \qquad (3.14)\end{aligned}$$

pour $|z| = r$ en dehors d'un ensemble E de mesure linéaire finie et M est une constante positive.
On sait que $m\left(r, \frac{w^{(j)}}{w}\right) = O(\log r) \quad (j = 1, ..., n)$,
donc, d'après (3.13) et (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} m(r,g) &= \int\limits_{\varepsilon_2} \log^+ |g(re^{i\varphi})|d\varphi \\ &\leq M\left(\sum_{j=1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(j)}}{w}\right) + \sum_{j=1}^{n} m(r, A_j) + S(r,g)\right) \\ &\leq M\left(O(\log r) + \sum_{j=1}^{n} m(r, A_j) + S(r,g)\right) \\ &\leq M\left(\sum_{j=1}^{n} m(r, A_j) + S(r,g)\right). \qquad (3.15)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{r\to+\infty} S(r,g)/m(r,g) = 0.$$

D'après les hypothèses supplémentaires et (3.15), on trouve

$$\sigma(g) \leq \sigma(A_s).$$

□

Lemme 3.3. *[12] Soit h une fonction entière non constante avec $\sigma(h) = \sigma$.*
Si $f(z) = \exp(h(z))$, alors $\sigma_2(f)$ satisfait l'égalité $\sigma_2(f) = \sigma$.

Preuve du théorème 3.3.

On a $\sigma(A_j) < \sigma(A_s) \quad (j \neq s)$ et d'après le lemme 3.1, l'équation (3.3) admet au moins une solution f avec $\sigma(f) = +\infty$.

Supposons que $\lambda(f) < \sigma(A_s)$.
On pose $f = we^h$ avec $\sigma(w) < \sigma(A_s)$ et h une fonction entière transcendante.
Par récurrence, on obtient

$$f^{(n)}(z) = we^h(h^{'})^n + we^h P_{n-1}(h^{'}), \tag{3.16}$$

où $P_{n-1}(h^{'})$ est un polynôme différentiel en $h^{'}, ..., h^{(n)}$ de degré au plus $n-1$ avec des coefficients qui sont des polynômes en $w^{'}/w, ..., w^{(n)}/w$.
En substituant dans l'équation (3.3), on trouve

$$we^h(h^{'})^k + we^h P_{k-1}(h^{'}) + A_{k-1}(we^h(h^{'})^{k-1} + we^h P_{k-2}(h^{'})) + ... + A_0 we^h = 0.$$

Ce qui implique

$$(h^{'})^k + P_{k-1}(h^{'}) + A_{k-1}((h^{'})^{k-1} + P_{k-2}(h^{'})) + ... + A_0 = 0. \tag{3.17}$$

D'où

$$(h^{'})^k = P^*_{k-1}(h^{'}), \tag{3.18}$$

où $P^*_{k-1}(h^{'})$est un polynôme différentiel en $h^{'}, ..., h^{(k)}$ de degré au plus $k-1$ avec des coefficients qui sont des polynômes en $w^{'}/w, ..., w^{(k)}/w, A_0, ..., A_{k-1}$.
D'après (3.18) et le lemme 3.2, on obtient

$$\sigma(h) = \sigma(h^{'}) \leq \sigma(A_s),$$

d'autre part, on a

$$(h^{'})^s + P_{s-1}(h^{'}) = \frac{f^{(s)}}{f} \not\equiv 0. \tag{3.19}$$

Alors, d'après (3.17) et (3.19), on obtient

$$\sigma(h^{'}) \geq \sigma(A_s),$$

d'où

$$\sigma(h) = \sigma(h^{'}) = \sigma(A_s).$$

Comme $f = we^h$ avec $\sigma(w) < \infty$ et d'après le lemme 3.3, on trouve

$$\sigma_2(f) = \sigma(h) = \sigma(A_s).$$

□

Théorème 3.4. *[3] Supposons que $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des fonctions entières telles que*

$$\max\{\sigma(A_j) : j = 1, ..., k-1\} < \sigma(A_0), \tag{3.20}$$

alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.3) *satisfait $\sigma_2(f) \geq \sigma(A_0)$ et Si $\lambda(f) < +\infty$, alors $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.*

Preuve.

On pose
$$\max\{\sigma(A_j) : j = 1, ..., k-1\} = \rho < \sigma(A_0) = \sigma,$$
on a
$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0, \tag{3.21}$$
ce qui implique
$$-A_0 = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f}, \tag{3.22}$$
on a
$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log(rT(r, f))). \tag{3.23}$$
En effet,
D'après (3.22), on obtient
$$\begin{aligned}
m(r, A_0) &= m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f}\Big) \\
&\leq \log k + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f}\Big) + m\Big(r, A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}\Big) + ... + m\Big(r, A_1\frac{f'}{f}\Big) \\
&\leq \log k + m\Big(r, \frac{f^{(k)}}{f}\Big) + m(r, A_{k-1}) + m\Big(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\Big) + ... + m(r, A_1) + m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) \\
&\leq \log k + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{i=1}^{k} m\Big(r, \frac{f^{(i)}}{f}\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{i=1}^{k} m\Big(r, \frac{f^{(i)}}{f}\Big) + O(1) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log T(r, f) + \log r)
\end{aligned}$$
qui est valable pour tout r en dehors d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ avec mesure linéaire $mE = \sigma < +\infty$.
Comme $\sigma(A_0) = \alpha$, alors il existe un point $\{r_n'\}$ $(r_n' \longrightarrow \infty)$ tel que :
$$\lim_{r_n' \to \infty} \frac{\log m(r_n', A_0)}{\log r_n'} = \alpha, \tag{3.24}$$
puisque $mE = \sigma < +\infty$, il existe un point $r_n \in [r_n', r_n' + \sigma + 1] - E$
Donc, on a
$$\begin{aligned}
\frac{\log m(r_n, A_0)}{\log r_n} &\geq \frac{\log m(r_n', A_0)}{\log(r_n' + \sigma + 1)} \\
&= \frac{\log m(r_n', A_0)}{\log r_n' + \log(1 + \frac{\sigma+1}{r_n'})},
\end{aligned}$$

D'où

$$\liminf_{r_n \to +\infty} \frac{\log m(r_n, A_0)}{\log r_n} \geq \alpha. \tag{3.25}$$

D'autre part,

Pour tout $\varepsilon > 0 \quad (0 < 2\varepsilon < \alpha - \rho)$, on a

$$\frac{\log m(r_n, A_0)}{\log r_n} \geq \alpha - \varepsilon,$$

ce qui implique

$$m(r_n, A_0) \geq r_n^{\alpha - \varepsilon}.$$

Comme

$$\rho = max\{\sigma(A_j), j = \overline{1, k-1}\},$$

alors,

$$\sigma(A_j) \leq \rho \quad \forall j = \overline{1, k-1},$$

ce qui implique

$$\lim_{r_n \to +\infty} \frac{\log m(r_n, A_j)}{\log r_n} \leq \rho,$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \mu > 0$,$\forall r_n > \mu$ tel que

$$\frac{\log m(r_n, A_j)}{\log r_n} \leq \rho + \varepsilon,$$

ce qui implique

$$m(r_n, A_j) \leq r_n^{\rho + \varepsilon}.$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0 \quad (0 < 2\varepsilon < \alpha - \rho)$ et pour tout $j = \overline{1, k-1}$, on a

$$m(r_n, A_j) \leq r_n^{\rho + \varepsilon} \quad et \quad m(r_n, A_0) \geq r_n^{\alpha - \varepsilon}$$

Donc, on a

$$\sum_{j=1}^{k-1} m(r_n, A_j) \leq \frac{1}{2} m(r_n, A_0). \tag{3.26}$$

De (3.23) et (3.26), on obtient

$$\begin{aligned} m(r_n, A_0) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r_n, A_j) + O(\log T(r_n, f) + \log r_n) \\ &\leq \frac{1}{2} m(r_n, A_0) + O(\log T(r_n, f) + \log r_n) \\ &\leq 2O(\log T(r_n, f) + \log r_n) \\ &\leq M(\log T(r_n, f) + \log r_n) \end{aligned}$$

D'où

$$m(r_n, A_0) \leq M(\log T(r_n, f) + \log r_n). \tag{3.27}$$

D'après (3.25) et (3.27), on trouve

$$\sigma_2(f) \geq \sigma(A_0), \tag{3.28}$$

D'après (3.28) et le théorème 3.3, on obtient

$$\sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad si \quad \lambda(f) < +\infty.$$

Ce qui achevé la démonstration. □

CONCLUSION

Notre objectif à l'avenir est d'étudier la distribution des zéros des solutions méromorphes d'une équation différentielle linéaire. On va essayer de montrer sous certains conditions que les zéros sont localisés dans un domaine précis du plan complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bouanani.S et Boussalem.Y, Théorème de Picard, Mémoire de master, Université de Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel, $2010-2011$.

[2] Cartan.H, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, (1961).

[3] Chen.Z.X and Yang.C.C, On the zeros and hyper-order of meromorphic solutions of linear differential equations, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica,$215-224$, (1999).

[4] Edrei.A and Fuchs.W, On the growth of meromorphic functions with several deficient values. - Trans. Amer. Math. Soc. 93, (1959), 292–328.

[5] Elfarissi.A, Thèse de doctorat intitulé : Application de la théorie de Nevanlinna sur les équations différentielles, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaghanem .

[6] Escassut.A, Analytic Element in p-adic Analysis, Wordscientific publiching (1995).

[7] Eyssidieux.P, Analyse complexe, ENS Lyon, $2013-2014$.

[8] Frank.G and Helleestein.S, On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients. -Proc. London Math. Soc. $(3)53, (1986), 407-428$.

[9] Genet.J et Pupion.G, Analyse moderne, résumé de cour et exercices corrigés, librairie Vuibert, Boulevard Saint-Germain, 63, 75005 - PARIS.

[10] Hayman.W.K, Meromorphic functions, Calaredon press, Oxford (1964).

[11] Hayman.W, The local growth of power series : A survery of the Wiman-Valiron method, Canad, (1974).

[12] Hong-Xun.Y.I, and Yang.C.C, The Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing, 1995 (Chinese).

[13] Krasnov.M, Kisselev.A, Makarenko.C, Fonctions d'une variable complexe,calcul opérationnel, théorème de la stabilité, Mir.Moscou, (1981).

[14] Laine.I, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, W. de Gruyter, Berlin, (1993).

[15] Masbout.F, Thèse de doctorat intitulé : Sur les propriétés des solutions méromorphes de certaines classes d'équations différentielles et d'équations aux différences, université de jijel (2018).

[16] Pabion.J.F, Éléments D'analyse complexe, ellipses, (1995).

[17] Rubel.L.A, Croissance et Zéros des Fonctions Méromorphes. Espaces Duals de Fonctions Entières, Université de Paris (1966).

[18] Rudin.W, Real and complex analysis, Tata McGraw-hill education, (2006).

[19] Yong.C.C and Chuang.C.T, Fix-points and factorization of meromorphic functions-World Scientific Publishing Co., lnc., Teaneck, N.J., (1990).