République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité **:** *Mathématiques.*

Option **:** *Analyse fonctionnelle.*

Thème

Existence de Solution pour Quelques Equations Différentielles Itératives

Présenté par : Bouladab Sid ali

Devant le jury :

Président	: Nora Fetouci	MCB Université de Jijel
Encadreur	: Doria Affane	MCA Université de Jijel
Examinateur	: Bilel Saoudi	MAA Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre Créateur, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité d'étudier, la volonté, le courage et la patience afin d'accomplir et de mener à bien ce travail.

Je remercie particulièrement mon superviseur. madame **Doria Affane** *pour avoir dirigé ce travail et pour son aide, ses encouragements, sa présence, ses précieux conseils et sa patience qu'elle m'a fournis tout en faisant ce travail.*

Un grand merci également aux membres du jury, le président madame **N. Fetouci** , *l'examinateur M* **B. Saoudi**, *pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer notre travail.*

Mes sincères remerciements à tous les professeurs du Département de Mathématiques de l'Université de Jijel qui m'ont suivi pendant mes années d'études à l'université, à tous nos collègues de la promotion 2020.

Je remercie beaucoup ma famille et mes amis pour leur patience et leur attention..

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

Sid ali Bouladab

Dédicace

Je dédie cet humble travail à :

En commémoration de mon père pour son sacrifice, et en commémoration de mon grand-père et de ma grand-mère, que Dieu leur fasse miséricorde dans son vaste paradis.

À ma chère mère, que Dieu la protège pour sa tendresse et son dévouement.

À mes frères ... à mes sœurs, à la femme de mon frère et à toute ma famille

Tous mes professeurs.

Et enfin pour tous ceux qui m'aiment

♡ .... **Sid ali** ♡

Table des matières

Introduction Générale

Les équations différentielles avec retards dépendant de l'état attirent l'intérêt des spécialistes car elles proviennent largement de modèles d'application, tels que le problème à deux corps de l'électrodynamique classique [11, 12], le contrôle de position [6, 7], les modèles mécaniques [17], transmission de maladies infectieuses [30], modèles de population [4, 23], la dynamique des systèmes économiques [5], etc. En tant que type spécial d'équations différentielles avec retard dépendant de l'état, les équations différentielles itératives ont des caractéristiques distinctives et ont été étudiées ces dernières années, par ex. lissage [11, 25], équivariance [31], analyticité [27, 32, 33], monotonicité ([16, 28]), convexité [26] ainsi que solution numérique [22]. Dans la théorie des équations différentielles, l'un des problèmes fondamentaux et importants est le problème de la valeur initiale, il existe de nombreux résultats d'existence [1, 2, 8, 13, 15, 16, 17, 19, 29] sur les équations différentielles itératives spéciales. En 1984, Eder [8] a prouvé l'existence de la solution monotone unique pour la 2-ème équation différentielle itérative

$$\begin{cases} y'(x) = y(y(x)), \\ y(x_0) = x_0,\ x_0 \in [-1, 1], \end{cases} \tag{1}$$

par principe de contraction. Plus tard, M. Fečkan ([15]) a étudié l'équation différentielle général 2-ème itérative

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(y(x))), \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

et obtenu la solution locale appliquant le principe de contraction. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, Wang [29] a obtenu les solutions de l'équation (2) associées à $y(a) = a$, où a est un point final d'un intervalle bien défini. Par conséquent, Ge et Mo [17] ont fourni les conditions suffisantes pour le problème de valeur initiale de (2) associé à

$$y(x_0) = y_0,$$

sur un intervalle compact donné, où les extrémités de l'intervalle sont deux points nuls adjacents de f. La 2-ème équation non autonome

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(y(x))), \\ y(0) = c, \ c > 0, \end{cases} \tag{3}$$

a été étudié par P. Andrzej ([1]) en utilisant l'approximation successive de Picard, où 0 est l'extrémité gauche du domaine.

Dans notre mémoire, nous nous intéressons à l'article de *Vasile Berinde* ([8]) où il a appliqué des opérateurs non expansivs pour étudier

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(y(x))), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

L'idée principale est d'utiliser la technique puissante et plus fiable des opérateurs non expansifs et d'adapter et d'utiliser plusieurs théorèmes de convergence issus de la théorie de l'itération approximation des points fixes des fonctions non expansives.

Le mémoire est organisé comme suit : dans le chapitre 1, nous présentons des notations préliminaires, quelques résultats de la théorie du point fixe, des applications non expansives. Dans le chapitre 2, nous présentons les principaux résultats du mémoire concernant l'existence et l'approximation des solutions de certaines équations différentielles itératives. Le document se termine par quelques exemples illustratifs.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

1.1 Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

K	:	Un corps.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemple des entiers naturales.
$\mathbb{N}^*$	:	L'ensemple des entiers naturales non nuls.
$\mathbb{C}$	:	L'ensemple nombres complexes .
$\mathbb{R}$	:	L'ensemple des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	:	L'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
[a,b]	:	Un intervalle de $\mathbb{R}$.
$\mathbf{C}([a,b],[a,b])$	:	Espace des fonctions continues de [a,b] dans [a,b].
(X,d)	:	Un espace métrique.
E	:	L'espace vectoriel normé muni de la norme $\|\|.\|\|_E$.
$\langle \cdot ; \cdot \rangle$	:	Produite de dualité .

max : Fonction maximum .

min : Fonction minimum .

sup : Fonction supremum .

$|.|$: La valeur absolue sur un corps K.

d : La distance sur un corps K.

1.2 Quelques définitions

Définition 1.2.1. ***(Espace vectoriel normé)*** *Un espace* $(E, ||.||)$ *est dit espace vectoriel normé sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *s'il est muni d'une application* $||.|| : E \to \mathbb{R}$ *qui vérifie*

1. $\forall x \in E, ||x|| \geq 0$ *et* $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in E,$
$$||\lambda x|| = |\lambda|||x||$$
où $|\lambda|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou le module si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
3. $\forall x, y \in E,\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.2.1. *Si* $(E, ||.||)$ *est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une nome par :*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$*, on peut définir plusieurs normes*
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
la norme euclidienne ;
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
2. *L'espace vectoriel* $\mathbf{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, T \text{ continue}\}$*. Peut être muni des normes :*
$$||T||_1 = \int_0^1 |Tx|dx.$$
$$||T||_2 = \sqrt{\int_0^1 (Tx)^2 dx};$$
$$||T||_\infty = \max_{x \in [0,1]} |Tx|;$$

3. *Sur l'espace des suites numériques bornées (à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on peut définir la norme*

$$||u|| = \sup_{n\geq 0} |u_n|.$$

Définition 1.2.2. ***(Espace métrique)*** *Un espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation) ;*
2. $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie) ;*
3. $\forall x, y, z \in X : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.3. ***(Suite de Cauchy)*** *On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X, d) est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon > 0 \ \ \textit{tel que}\, n, m > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

ou écrire

$$d(x_n, x_m) \to 0, \ \textit{quand}\, n, m \to +\infty$$

Définition 1.2.4. ***(Espace métrique complet)*** *L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ une suite de X. On dit que cette suite converge vers $a \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \ \textit{tel que}\, n \geq N_\varepsilon, \ \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ou encore $x_n \to a$ quand $n \to \infty$.
Notons que si cette limite existe, alors elle est unique. En effet. Si on a l et l' dans X tels que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \text{ tel que } n > N'_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, l') < \varepsilon.$$

Alors, pour :

$$n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$$

on a

$$d(l, l') \leq d(l, x_n) + d(x_n, l') < 2\varepsilon,$$

et donc $d(l, l') < 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. D'où $d(l, l') = 0$ et il en suit que $l = l'$.

Définition 1.2.5. ***(Espace de Banach)*** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme* $||.||$.

Définition 1.2.6. ***(Limite d'une application)*** *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \longrightarrow X$ *une application, et* $a, b \in X$, *On dit que* Tx *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon \ \textit{tel que}\ \ d(x, a) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d(Tx, b) < \varepsilon,$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} Tx = b$, *ou encore* $Tx \longrightarrow b$ *si* $x \longrightarrow a$.

Définition 1.2.7. ***(Application continue)*** *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *une application et* $a \in X$, *On dit que* T *est continue au point* a *ssi*

$$\lim_{x \to a} Tx = Ta.$$

C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, d(x, a) \leq \delta \Longrightarrow d(Tx, Ta) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.8. ***(La convexité d'un espace)***

1. *On dit que l'espace de Banach* $(E, ||.||)$ *est strictement convexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

   (a) $||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$, $x \neq y$ *et* $0 < t < 1$ *implique que* $||(1-t)x + ty|| < 1$,

   (b) $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ *implique l'existence de deux scalaire* $\alpha \geq 0$ *et* $\beta \geq 0$ *tels que*

   $$\alpha + \beta > 0 \ \textit{et}\ \alpha x = \beta y.$$

2. *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x, y \in E, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \text{ et } ||x - y|| > \epsilon$$

alors

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1 - \delta.$$

1.3 Théorème du point fixe de Banach Picard

Le Théorème du Point Fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Définition 1.3.1. ***(Point fixe)*** *Soient $(E, ||.||_E)$ un espace de Banach, et $T : E \to E$ une application. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ tel que*

$$Tx = x.$$

Ce qui est équivalent à dire que l'équation :

$$Tx - x = 0$$

possède une solution.

Définition 1.3.2. *Soit (X, D) deux espaces métriques, une application $T : X \to D$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$\forall (x, y) \in (X \times D),\ \ d_D(Tx, Ty) \leq \alpha d_X(x, y) \tag{1.1}$$

Remarque :

1. Tout application α lipschitzienne est uniformément continue sur son domaine de définitions.
2. Avec les hypothèses précédentes, on dit que T est contractante si T est α lipschitzienne avec une constante $\alpha \in]0, 1[$.

Théorème 1.3.1. *(Schauder)([9]) : Soient E un espace de Banach et $Q \subset E$ un convexe et compact. Alors toute application continue $T : Q \to Q$ possède un point fixe.*

Théorème 1.3.2. *([9]) Soient X un espace métrique complet et T une applications contractante de X, alors : il existe dans X un unique point fixe x, c'est-à-dire*

$$Tx = x.$$

Si x_0 est un point quelconque de X, pour tout entier n on a la suite

$$x_{n+1} = Tx_n \tag{1.2}$$

est appellée la suite itérative de Picard.

Proposition 1.3.1. *La suite récurente (x_n) est une suite de Cauchy convergeant vers l'unique point fixe x de T.*

Démonstration. Examinons d'abord l'unicité en cas d'existence. Supposons que x et y sont deux points fixes distincts pour T, c'est-à-dire

$$Tx = x \text{ et } Ty = y,$$

on aurait alors

$$d(Tx, Ty) = d(x, y); \tag{1.3}$$

et comme T est un application contractante on a

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \text{ avec } \alpha < 1, \tag{1.4}$$

de (1.3) et (1.4) nous avons

$$d(x, y) \leq \alpha d(x, y),$$

et comme $\alpha < 1$, nous obtenons

$$d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Soit maintenant la suite récurrente $(x_n)_n$ construite à partir de x_0 , il résulte de la définition de cette suite que :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}).$$

On voit donc tout de suite par récurrence que :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Par application de l'inégalité triangulaire généralisée on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

et donc :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + .. + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la suite (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente puisque X est supposé complet. Si x est la limite de la suite (x_n), la relation de récurrence, jointe à la continuité de T entraîne que $Tx = x$, donc x est le point fixe de T. ■

Exemple 1.3.1. *Soit $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que*

$$Tx = \sqrt{1 + x}.$$

Donc T pocéde un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+$.

Tel que :

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1.4 Existence et approximation de solutions pour des applications non expansives

Définition 1.4.1. *Une application non expansive d'un espace normé est une applications α lipschitzienne tell que $\alpha = 1$.*

Définition 1.4.2. *Soit K un sous-ensemble non vide d'un espace linéaire normalisé réel E et soit $T : K \to K$ une application. T est non expansive si*

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y|| \tag{1.5}$$

Remarque : Bien que les applications non expansive sont des généralisations de contractions, ils sont des applications contractive. Plus précisément, si K est un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach E et $T : K \to K$ une application non expansive qui n'est pas une contraction, alors, comme le montre l'exemple suivant, T peut ne pas avoir un point fixe.

Exemple 1.4.1. *:*

1. *Considérons l'intervalle unitaire $[0, 1]$ avec la norme habituelle. La fonction T donné par la formule $Tx = 1 - x$ pour tout x a un point fixe unique, $x^* = \frac{1}{2}$ mais, sauf pour le cas trivial $x_0 = \frac{1}{2}$, l'itération Picard commençant à partir de x_0 donne une suite d'oscillation.*

2. *Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, 1]$. X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus*

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1,$$

alors

$$\sup_{x \in X} |f'(x)| < 1.$$

Donc f est contractante. Mais f n'a pas de point fixe.

Théorème 1.4.1. *Si K est un sous-ensemble convexe fermé non vide et borné d'un espace de Banach uniformément convexe E, alors toutes les applications non expansives*

$$T : K \to K$$

admet un point fixe.

Remarque : Le théorème (1.4.1) ne fournit aucune information sur l'approximation d'un point fixe de T. De l'exemple 1, nous voyons que l'itération Picard ne résout pas cette situation, en général. De ce fait, plusieurs autres procédures d'itération en point fixe ont été envisagées. Les plus courantes seront définies dans la suite en fonction de leur utilisation.

Définition 1.4.3. *:*

Soit K un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E et soit $T : K \to K$ une application. Étant donné un $x_0 \in K$ et un nombre réel $\lambda \in [0, 1]$; $x_0 \in K$, la suite x_n définie par la formule :

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.6}$$

est généralement appelée itération Krasnoselskij, ou itération Krasnoselskij–Mann. Clairement, (1.6) *se réduit à l'itération de Picard* (1.2) *pour $\lambda = 1$.*

Pour un $x_0 \in K$, la suite x_n définie par la formule

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.7}$$

où $\{\lambda_n\}_n \subset [0, 1]$ est une suite de nombres réels satisfaisant à certaines conditions appropriées, est appelée une itération de Mann.

Remarque : Il a été démontré par Krasnoselskij [20] dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$, et plus tard par Schaefer [24] pour un arbitraire $\lambda \in]0, 1[$, que si E est un espace de Banach uniformément convexe et K est un sous-ensemble convexe et compact de E (et donc, par le théorème (1.4.1), T a des points fixes), alors l'itération de Krasnoselskij converge vers un point fixe de T.

De plus, Edelstein [14] a prouvé qu'une stricte convexité de E suffit pour la même conclusion. La question de savoir si l'hypothèse de convexité stricte peut être supprimée a été répondu par l'affirmative par Ishikawa [18] par le résultat suivant.

Théorème 1.4.2. *Soit K un sous-ensemble d'un espace de Banach E et soit $T : K \to K$ une application non expansive où a et b sont des nombres réels tels que $0 \leq a \leq b < 1$. Pour un $x_0 \in K$ arbitraire, considérons le processus d'itération de Mann, $\{x_n\}_n$ donné par (1.7) sous les hypothèses suivantes :*

(a) $x_n \in K$ pour tous les entiers positifs n ;

(b) $0 \leq \lambda_n \leq b < 1$ pour tous les entiers n ;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$;

si $\{x_n\}$ est borné, alors

$$x_n - Tx_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Théorème 1.4.3. *([9]) Soit K un sous-ensemble d'un espace linéaire normé réel X et soit T une application non expansive de K vers X. Supposons que pour $x_0 \in K$, il existe une suite $\{x_n\}_n \subseteq K$ qui est bornée. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0.$$

De plus, si K est un sous-ensemble borné de X, alors la limite ci-dessus est uniforme.

Théorème 1.4.4. *([9]) Sous les hypothèses du théorème 1.4.3 et $x_0 \in K$, supposons qu'il existe une suite $\{\lambda_n\}_n \subseteq K$ qui est bornée et qui est en fait une suite non croissante, vérifie également $0 < a < \lambda_n < 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0$$

Remarque : Les théorèmes ci-dessus sont des conséquences directes du théorème plus technique suivant.

Théorème 1.4.5. *(9) Soit K un sous-ensemble d'un espace linéaire normé réel X et soit T une application non expansive de K vers X, supposons qu'il existe un ensemble*

$A \subseteq K$ tel que pour chaque $x_0 \in A$ il existe une suite $\{x_n\}_n \subseteq A$, et supposons en outre qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour chaque entier positif N, et pour chaque suite $\{x_n\}_n \subseteq A$,

$$\sup_{k \geq N} ||x_{k+1} - x_k|| > \delta \tag{1.8}$$

Donc, A est non bornée,

Démonstration. Supposons par contraction que A est borné et soit $||x_n|| \leq \rho$ pour chaque n. Soit M un entier positif fixe tel que

$$(M-1)\delta > 2\rho + 1.$$

Choisissons N, avec :

$$N > \max\{M, [(2\rho - \delta)\frac{M}{(1-\lambda_1)^M \lambda_1}]\}$$

(où ici [.] désigne la plus grande fonction entière) telle que pour certains $\delta > 0$ et $x_0 \in A$, la suite correspondante $(x_n)_n$ dans A satisfaite

$$||x_{N+1} - x_N|| > \delta.$$

En utilisant la non expansivité de T, nous obtenons facilement ce qui suit :

$$||x_{n+1} - x_n|| = \lambda_n||(1-\lambda_{n-1})(x_{n-1} - Tx_{n-1}) + Tx_{n-1} - Tx_n||$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda_n(1-\lambda_{n-1})||x_{n-1} - Tx_{n-1}|| + ||x_{n-1} - [(1-\lambda_{n-1})x_{n-1} + \lambda_{n-1}Tx_{n-1}]|| \\
&= \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}||x_n - x_{n-1}|| \\
&\leq ||x_n - x_{n-1}||.
\end{aligned}$$

Utilisant l'égalité (1.7) avec n remplacé par (n-1) tandis que la dernière suite $(\lambda_n)_n$ est une suite décroissante. Il s'ensuit donc que

$$||x_{i+1} - x_i|| > \delta$$

pour tout $i \leq N$, et de plus on obtient ce qui suit :

$$\delta < ||x_N - x_{N-1}|| \leq ... \leq ||x_2 - x_1|| \leq 2\rho; \tag{1.9}$$

$$||Tx_{i+1} - Tx_i|| \leq ||x_{i+1} - x_i||$$

pour tous $i = 0, 1, .., N$; et

$$x_{i+1} = (1 - \lambda_i)x_i + \lambda_i Tx_i$$

donc

$$Tx_i = \frac{x_{i+1}}{\lambda_i} - \left(\frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}\right) x_i,\ i = 1, 2, ..., N; \tag{1.10}$$

ce qui implique,

$$\left\| \frac{1}{\lambda_i}\{x_{i+1} - (1-\lambda_i)x_i\} - \frac{1}{\lambda_{i-1}}\{x_i - (1-\lambda_{i-1})x_{i-1}\} \right\| = \|Tx_i - Tx_{i-1}\|$$
$$\leq ||x_i - x_{i-1}||,$$

donc

$$\left\| \frac{1}{\lambda_i}[x_{i+1} - x_i] - \left(\frac{1-\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\right)[x_i - x_{i-1}] \right\| \leq ||x_i - x_{i-1}|| \tag{1.11}$$

pour tout $i = 1, 2, ..., N$. Maintenant, fixons

$$i = [\frac{(2\rho - \delta)}{(1-\lambda_1)^M \lambda_1}]$$

et considérons la collection d'intervalles $I = [s_k, s_{k+1}]$ on a

$$s_k = \begin{cases} \delta + k(1-\lambda_1)^M \lambda_1;\ k = 0, 1, ..., I-1, \\ 2\rho,\ k = I. \end{cases}$$

Nous affirmons que l'un de ces intervalles doit contenir au moins M des nombres

$$(||x_i - x_{i+1}||)_i \subseteq [\delta, 2\rho].$$

Si ce n'est pas le cas, alors

$$N < MI = M[\frac{2\rho - \delta}{(1-\lambda_1)^M \lambda_1}]$$

contredisant notre choix de N. Ainsi pour certains r, et certains $s = s_K \in [\delta, 2\rho]$,

$$||x_{r+i+1} - x_{r+i}|| \in [s, s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1].$$

Pour $i = 0, 1, .., (M-1)$. Considérons

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, .., N.$$

Remplaçons i dans (1.10) par $r+M-j-1, (j=0,1,..,M-1)$ on voit que (1.10) et (1.11) implique

$$\left\|\frac{1}{\lambda_{r+M-j-1}}\Delta x_{r+M-j}-\left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}}\right)\Delta x_{r+M-j-1}\right\|\leq s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1. \qquad (1.12)$$

Choisissons $T^*\in X^*$ (le dual de X) avec

$$||T^*||=1$$

et

$$T^*(\Delta x_{r+M})=||\Delta x_{r+M}||.$$

Puis en utilisant (1.12) on obtient,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\lambda_{r+M-j}}T^*(\Delta x_{r+M-j})-\left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}}\right)T^*(\Delta x_{r+M-j-1})\right|\\ \leq\ & ||T^*||.\left\|\frac{1}{\lambda_{r+M-j}}\Delta x_{r+M-j}-\left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}}\right)\Delta x_{r+M-j-1}\right\|\\ \leq\ & s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}T^*(\Delta x_{r+M-j-1})\geq&\left(\frac{\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-1}}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-j-2}}\right)T^*(\Delta x_{r+M-j})-\\&\left(\frac{\lambda_{r+M-j-2}}{1-\lambda_{r+M-j-2}}\right)(s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1). \qquad (1.13)\end{aligned}$$

Notons que puisque $(\lambda_i)_i$ est non croissante, pour tout $i\geq 1$,

$$(1-\lambda_i)^{-1}\leq(1-\lambda_1)^{-1}$$

et

$$(1-\lambda_i)^{-1}\leq\lambda_1(1-\lambda_1)^{-1}.$$

Maintenant, pour $j=0$, en utilisant

$$T^*(\Delta x_{r+M})=||\Delta x_{r+M}||\in[s,s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1],$$

nous obtenons de (1.13),

$$\begin{aligned}T^*(\Delta x_{r+M-1})\geq&\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-2}}\right)s-\left(\frac{\lambda_{r+M-2}}{1-\lambda_{r+M-2}}\right)\{s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\}\\ \geq\ & s-\lambda_1^2(1-\lambda_1)^{M-1}. \qquad (1.14)\end{aligned}$$

Nous allons montrer que (1.14) implique

$$T^*(\Delta x_{r+M-j-1} \geq s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2 \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t. \tag{1.15}$$

pour $j = 1,2,..,M-1$. Nous établissons cela par induction. Pour $j = 0$,(1.15) réduit à (1.14). Supposons maintenant (1.15) pour $j \leq k$, pour certains $k \in \{1,2,3,..,M-2\}$. Puis à partir de (1.13) et l'hypothése inductive nous obtenir,

$$\begin{aligned}
T^*(\Delta x_{r+M-(k+1)-1}) &= T^*(\Delta x_{r+M-k-2})\\
&\geq \left(\frac{\lambda_{r+m-k-3}}{\lambda_{r+M-k-2}}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)T^*(\Delta x_{r+M-k-1})\\
&-\left(\frac{\lambda_{r+M-k-3}}{1-\lambda_{1-\lambda_{r+M-k-3}}}\right)s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)\\
&\left[s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t\right]\\
&-\left(\frac{\lambda_{r+M-k-3}}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\\
&\geq s-\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t-\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)(1-\lambda_1)^M\lambda_1\\
&= s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k+1}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t,
\end{aligned}$$

Qui termine l'induction. Notant que T^* est linéaire résumée (1.15) par imagerie de $j = 0$ à $(M-2)$, elle produit :

$$T^*(x_{r+M-1}-x_r) = T^*(x_{r+M-1})-T^*(x_r) \geq (M-1)s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2$$
$$\left[1+\left(1+\frac{1}{1-\lambda_1}\right)+...+\left(1+\frac{1}{1-\lambda_1}+...+\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^{M-2}\right)\right].$$

Supposons que $C = 1-\lambda_1$ pour que,

$$\begin{aligned}
T^*(x_{r+M-1}-x_r) &= (M-1)s-\lambda^{M-1}(1-\lambda)^2\left[1+\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)+...+\left(\frac{\lambda^{M-2}+...+\lambda+1}{\lambda^{M-2}}\right)\right]\\
&= (M-1)s-\lambda(1-\lambda)\left[\lambda^{M-1}\left\{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)+...+\left(\frac{1-\lambda^{M-1}}{\lambda^{M-1}}\right)\right\}\right]\\
&\geq (M-1)s-1,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité donne

$$\lambda(1-\lambda)\left[\lambda^{M-1}\left\{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)+..+\left(\frac{1-\lambda^{M-1}}{\lambda^{M-1}}\right)\right\}\right|$$
$$< \lambda(1-\lambda)(\lambda^{M-2}+...+\lambda+1)$$
$$\leq 1$$

Mais $s > \delta$ signifie

$$(M-1)s > (M-1)\delta > 2\rho+1$$

avec

$$T^*(x_{r+M-1}-x_r) > \rho.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} T^*(x_{r+M-1}-x_r) &\leq |T^*(x_{r+M-1}-x_r) \\ &\leq ||T^*||.||x_{r+M-1}-x_r|| \\ &= ||x_{r+M-1}-x_r||. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$||x_{r+M-1}-x_r|| > 2\rho$$

contradiction avec l'hypothèse

$$||x_n|| \leq \rho$$

pour chaque n, et en complétant la preuve du Théorème.

■

Démonstration. (Théorème (1.4.3)) Les deux parties découlent immédiatement du théorème (1.4.5) ; le premier en posant $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$ dans le théorème et le second en posant $K = A$.

■

Démonstration. (Théorème 1.4.4) : Puisque T est non expansive on obtient,

$$\begin{aligned}
||x_{n+1} - Tx_{n+1}|| &= ||(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_n + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||x_n - \lambda_n x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_n + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||(1-\lambda_n)(x_n - Tx_n) + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&\leq (1-\lambda_n)||x_n - Tx_n|| + ||x_n - ((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n)|| \\
&= ||x_n - Tx_n||.
\end{aligned}$$

Ainsi la suitr $\{||x_n - Tx_n||\}_{n=0}^{\infty}$ est non croissante et bornée. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n - Tx_n||$ existe, mais à partire de

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n,$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0,
\end{aligned}$$

(Par le théorème 1.4.5 puisque la suite $\{x_n\})_{n=0}^{\infty}$ est bornée), d'où le théorème 1.4.4.

■

Remarque : Les corollaires suivants seront particulièrement importants pour la partie application de notre mémoire.

Corollaire 1.4.1. *Soit K un sous-ensemble convexe et compact d'un espace de Banach E et soit $T : K \to K$ une application non expansive. Si le processus d'itération de Mann $\{x_n\}$ donné par* (1.7) *est satisfait aux hypothèses* $(a)-(c)$ *du théorème* 1.4.2*, alors $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T.*

Démonstration. On a q est un point d'accumulation de $\{T^n q\}$ et que

$$||T^{n+1}q - T^n q|| = ||Tq - q||$$

pour tout n. Ainsi si

$$T^i q = x_i$$

et

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2....$$

alors $||\Delta x_{i+1}|| = ||\Delta x_i||$ pour tout i. Comme dans la démonstration du Théorème (1.4.5), on a,

$$||\Delta x_{i+1}|| = ||x_{i+1} - x_i|| \leq \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} ||x_i - x_{i-1}|| \leq ||x_i - x_{i-1}|| = ||\Delta x_i||.$$

Et cela implique $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ pour tout i puisque $||\Delta x_{i-1}|| = ||\Delta x_i||$. Par conséquent, et à partir de

$$x_{i+1} - x_i = (1 - \lambda_i)x_i + \lambda_i T x_i - (1 - \lambda_{i-1})x_{i-1} - \lambda_{i-1} T x_{i-1}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} ||\Delta x_{i+1}|| &\leq (1 - \lambda_i)||\Delta x_i|| + \lambda_i ||\Delta T x_i|| \\ &\leq (1 - \lambda_i)||\Delta x_i|| + \lambda_i ||\Delta x_i|| = ||\Delta x_i|| \end{aligned}$$

et cela implique, $||\Delta x_i|| = ||\Delta T x_i||$. Supposons par contradiction que,

$$||\Delta x_i|| = ||\Delta T x_i|| = \beta > 0, \ i = 1, 2, ., .. \tag{1.16}$$

Choisissez $N, k \in \mathbb{N}^+$ assez grand. De(1.16) nous avons, à $i = N + k$,

$$||\Delta x_{N+k}|| = ||\Delta T x_{N+k}|| = \beta > 0 \tag{1.17}$$

Soit $T^* \in X^*$ tel que $||T^*|| = 1$ et $T^* \Delta x_{N+k} = ||\Delta x_{N+k}||$. Pour $j = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} T^*(\Delta T x_{N+k-j}) &\leq ||T^*||.||\Delta T x_{N+k-j}|| \\ &= ||\Delta T x_{N+k-j}|| = s. \end{aligned} \tag{1.18}$$

A partir de

$$x_{N+k-j+1} = (1 - \lambda_{N+k-j})x_{N+k-j} T x_{N+k-j}$$

en utilisant $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ pour tout i, on obtient

$$\Delta x_{N+k-j+1} = (1-\lambda_{N+k-j})\Delta x_{N+k-j} + \lambda_{N+k-j}\Delta T x_{N+k-j} \tag{1.19}$$

Nous montrerons que l'application de T^* à cette équation donne :

$$T^*\Delta x_{N+k-j} \geq \beta \ \text{ pour } j = 0, 1, .. \tag{1.20}$$

On établit (1.20) par induction. Observons que

$$T^*\Delta x_{N+k} = ||\Delta x_{N+k}|| = \beta$$

satisfait (1.20) avec $j = 0$, maintenant pour $j = 1$, en appliquant T^* à (1.19) et en utilisant (1.18) on aura :

$$\begin{aligned} T^*\Delta x_{N+k-1} &= \left(\frac{1}{1-\lambda_{N+k-j}}\right) T^*\Delta x_{N+k} - \left(\frac{\lambda_{N+k-1}}{1-\lambda_{N+k-1}}\right) \times T^*(\Delta T(x_{N+k-1})) \\ &\geq \left(\frac{1}{1-\lambda_{N+k-1}}\right)\beta - \left(\frac{\lambda_{N+k-1}}{1-\lambda_{N+k-1}}\right)\beta = \beta, \end{aligned}$$

et (1.20) est juste pour $j = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour $j = 0, 1, ...t$. Puis en utilisant (1.18),(1.19) et l'hypothése inductive que nous avons,

$$\begin{aligned} T^*(\Delta x_{N+k-t-1}) &= \left(\frac{1}{1-\lambda_{N+k-t-1}}\right) T^*(\Delta x_{N+k-t}) - (\frac{\lambda_{N+k-t-1}}{1-\lambda_{N+k-t-1}}) T^*(\Delta T(x_{N+k-t-1})) \\ &\geq \left(\frac{1}{\lambda_{N+k-t-1}}\right)\beta - \left(\frac{\lambda_{N+k-t-1}}{1-\lambda_{N+k-t-1}}\right)\beta = \beta, \end{aligned}$$

qui complète l'induction. L'utilisation de la technique de la preuve du théorème (1.4.5) et la somme (1.20) de $j = 0$ à $k-1$ donne :

$$||x_{N+k} - x_N|| \geq T^*(x_{N+k} - x_N) \geq k\beta, \tag{1.21}$$

et cela implique que la suite $\{x_i\}_{n=0}^{\infty}$ ne peut pas avoir de sous-séquence convergente, une contradiction du fait que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a un point d'accumulation. D'où $\beta = 0$ et $Tq = q$, et que $x_n \to q$ découle maintenant facilement de la non-expansivité de T. ■

Corollaire 1.4.2. *Soit E un espace normé réel, K un sous-ensemble convexe borné fermé de E et soit $T : K \to K$ une application non expansive. Si $I - T$ attribue des sous-ensembles fermés bornés de E en sous-ensembles fermés de E et x_n est l'itération de Mann définie par (1.7) avec $\{\lambda_n\}$ satisfaisant les hypothèses $(a) - (c)$ du théorème* 1.4.2, *alors $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T en K.*

Démonstration. (i) De

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n$$

on obtient

$$x_n - T x_n = \frac{1}{\lambda_n}\{x_n - x_{n-1}\}.$$

Puisque λ, $\{x_n\}_n$ est une suite bornée et aussi $\{\lambda_n\}_n$ borné loin de 0, ce qui implique (par le théorème 1.4.4) que $\{x_n - Tx_n\}$ est convergent vers 0 de sorte que par la demi-compacité de T à 0, $\{x_n\}_n$ a un point d'accumulation en λ. Le résultat est obtenu par le Corollaire 1.4.1.

(ii) si q est un point fixe de T, $\{||x_n - q||\}_{n=0}^{\infty}$ n'augmente pas avec n. Il suffit donc de montrer qu'il existe une sous-suite de $\{x_n\}_n$ qui converge fortement vers un point fixe de T . pour $x_0 \in \lambda$, soit K la forte fermeture de l'ensemble $\{x_n\}_n$. D'après le théorème (1.4.4), $\{(I - T)(x_n)\}$ converge fortement vers 0 car $n \to \infty$, Par conséquent, 0 réside dans la fort fermeture de $(I - T)(K)$ et puisque cette dernière est fermée par hypotése (puisque K est fermé et borné), 0 réside dans $(I - T)(K)$. Il y a une sous-suite $\{x_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ telle que $x_{n_j} \to \mu \in \lambda$, où μ est un point tel que $(I - T)\mu = 0$. D'où $x_n \to \mu$. ∎

Chapitre 2

Existence et approximation de solutions pour les équations différentielles itératives

Considérez le problème de valeur initiale suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(x, y(y(x))),\ x \in [a, b], \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x_0, y_o \in [a, b]$ et $f \in \mathbf{C}([a, b] \times [a, b])$ sont donnés. Supposons

$$\mathcal{C}_x = \max\{x - a, b - x\},\ x \in [a, b]$$

et

$$\Phi_L = \{y \in \mathbf{C}([a, b], [a, b]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [a, b]\} \tag{2.2}$$

où $L > 0$ est donné. Et pour un $\lambda \in [0, 1]$ fixe, nous avons.

$$\Phi_{L,\lambda} = \{y \in \Phi_L : y(x) \leq \lambda x, \forall x \in [a, b]\}.$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$$||y||_C = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|, \forall y \in \mathbf{C}[a, b];$$

$$\tau > 0, x_0 \in [a, b];$$

$$||y||_B = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| e^{-\tau(x-x_0)}, \forall y \in \mathbf{C}[a, b];$$

$$d_C(y, z) = ||y - z||_C,$$

$$d_B(y, z) = ||y - z||_B,$$

2.1 Théorèmes d'existence de solution pour des équations différentielles itératives

Avant de donner les démonstrations de notre théorèmes on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.1.1. *([2])*
Soit $||.|| \in \{||.||_C; ||.||_B\}$*, Alors* Φ_L *et* $\Phi_{L,\lambda}$ *sont convexes et compact dans l'espace de Banach* $(\mathbf{C}[a, b], ||.||)$ *respectivement* $(\mathbf{C}[a - h, b], ||.||)$.

Le théorème suivant montre que, pour tout $L > 0$ donné, et sous des conditions données, alors le problème de valeur initiale (2.1) a une solution dans Φ_L.

Théorème 2.1.1. *([2]) . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites pour le problème de valeur initiale (2.1) :*

(1) $f \in \mathbf{C}([a, b] \times [a, b])$ *;*

(2) $\exists L_1 > 0 : |f(s, u) - f(s, v)| \leq L_1 |u - v|$ *pour tous* $s, u, v \in [a, b]$ *;*

(3) si L *est la constante de Lipschitz définie dans* (2.2)*, alors*

$$\mathbf{M} = \max\{|f(s, u)| : (s, u) \in [a, b] \times [a, b]\} \leq L;$$

(4) Une des conditions suivantes satisfaits :

(a) $\mathbf{M}\mathcal{C}_{x_0} \leq \mathcal{C}_{y_0}$ *;*

(b) $x_0 = a, \mathbf{M}(b - a) \leq b - y_0, f(s, u) \geq 0$ *pour tous* $s, u \in [a, b]$ *;*

(c) $x_0 = b, \mathbf{M}(b-a) \leq y_0 - a, f(s,u) \geq 0$ *pour touss*$, u \in [a,b]$.

Le problème (2.1) *admet une solution* $y^* \in \Phi_L$.

Démonstration. Nous fixons

$$T : \Phi_L \to \mathbf{C}([a,b],[a,b])$$

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds, \forall t \in [a,b], \forall y \in \Phi_L$$

Prouver qu'il existe une solution y^* de (2.1) équivaut a prouver que l'application T a un point fixe $y^* \in \Phi_L$.

Pour cela, nous avons l'intention d'appliquer le théorème du Shauder. Nous avons Φ_L est un sous-ensemble convexe et compact de l'espace de Banach $(\mathbf{C}[a,b], ||.||)$. Donc, nous devons vérifier si Φ_L est un ensemble invariant pour T, et T est un application continue.

Pour $y \in \Phi_L$ et $x \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
(Ty)(t) &\leq y_0 + \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&\leq y_0 + M|t - x_0| \\
&\leq y_0 + M\mathcal{C}_{x_0} \\
&\leq y_0 + \mathcal{C}_{y_0} \\
&\leq b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Ty)(t) &\geq y_0 - \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&\geq y_0 - M|t - x_0| \\
&\geq y_0 - M\mathcal{C}_{x_0} \\
&\geq y_0 - \mathcal{C}_{y_0} \\
&\geq a
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé la condition $(4a)$, il est facile de prouver la même chose en utilisant la condition $(4b)$ ou $(4c)$.

Soit $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |(Ty)(x_1) - (Ty)(x_2)| &= \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds \right| \\ &\leq M|x_1 - x_2| \\ &\leq L|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Alors $Ty \in \Phi_L$, $\forall y \in \Phi_L$.

Soit $y, z \in \Phi_L, x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |(Ty)(t) - (Tz)(t)| &\leq \left| \int_{x_0}^{t} |f(s, y(y(s)))ds - f(s, z(z(s)))|ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{t} L_1 |y(y(s)) - z(z(s))|ds \right| \\ &\leq L_1 \left| \int_{x_0}^{t} [|y(y(s)) - y(z(s))| + |y(z(s)) - z(z(s))|]ds \right| \\ &\leq L_1 \left| \int_{x_0}^{t} [L|y(s) - z(s)| + |y(z(s)) - z(z(s))|]ds \right| \\ &\leq L_1(L+1)\ ||y - z||_C\ |t - x_0| \\ &\leq L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1)||y - z||_C \end{aligned}$$

Donc :

$$||Ty - Tz||_C \leq L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1)||y - z||_C$$

Pour l'unicité de solution on a le théorème suivant. ■

Théorème 2.1.2. *Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.1.1 sont satisfaites et*

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) < 1. \tag{2.3}$$

Alors le problème de valeur initiale (2.1) *admet une solution unique* y^* *dans* Φ.

Démonstration. l'application $T : \Phi_L \to \Phi_L$ est une contraction et (Φ_L, d_C) est un espace métrique complet(d'après le lemme(2.1.1)). En appliquant le principe de contraction, nous avons cette solution unique de (2.1).

Maintenant nous énonçons et prouvons les résultats correspondant aux théorèmes précédant, pour un $\lambda \in]0;1]$ fixé, nous mettons l'existe d'une solution unique dans $\Phi_{L,\lambda}$ du notre problème. ■

Théorème 2.1.3. *Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites*

(i) $y_0 \leq \lambda x_0$;

(ii) $\exists L > 0 : \ |f(s,u) - f(s,v)| \leq L|u-v|, \forall s,u,v \in [a,b]$;

(iii) $M \leq \min\{\lambda, L\}$

$$(iv) \begin{cases} a) \quad M \leq \frac{\mathcal{C}_{y_0}}{\mathcal{C}_{x_0}}; \\ b) \quad x_0 = a, M \leq \frac{b-y_0}{b-a}, f(s,u) \geq 0 \ \forall s,u \in [a,b]; \\ c) \quad x_0 = b, M \leq \frac{y_0}{b-a}, f(s,u) \geq 0 \ \forall s,u \in [a,b]; \end{cases}$$

(v) $M(x_0 - a) \geq y_0 - \lambda a$;

et, de plus, nous avons :

$$(vi) \quad \max\left\{(\lambda-1)b, (\lambda-1)a, \frac{x_0-a}{\ln 2}, \frac{\lambda(x_0-a)}{\ln 2}\right\} L_1 \left(L + \frac{e}{\lambda}\right) < 1.$$

Il existe alors une solution unique $y^* \in \Phi_{L,\lambda}$

Démonstration. d'après le lemme(2.1.1) $(\Phi_{L,\lambda}, d_B)$ est un espace métrique complet et $T : \Phi_{L,\lambda} \to \Phi_{L,\lambda}$ est un lipschitz avec constante L_T.

Nous avons l'intention d'appliquer le principe de contraction.

Nous prouverons que la condition (vi) assure T est une contraction. Pour tout $x \in [a,b]$,

$$L_T(x) \leq \frac{L_1 L}{\tau} \max\left\{e^{-\tau(a-x_0)} - 1, e^{-\tau(b-x_0)}\right\} + \\ \frac{L_1}{\tau\lambda} e^{\tau \max\{(\lambda-1)a, (\lambda-1)b, 0\}} \max\left\{e^{-\tau\lambda(a-x_0)} 1, 1 - e^{-\tau\lambda(b-x_0)}\right\};$$

de l'hypothèse (vi) on aura

$$\frac{\max\{1,\lambda\}(x_0-a)}{\ln 2} < \frac{1}{L_1[l + \frac{e}{\lambda}]}$$

et

$$\max\{(\lambda-1)a, (\lambda-1)b, 0\} < \frac{1}{L_1[L + \frac{e}{\lambda}]}$$

Nous choisisson τ tel que :

$$\frac{\max\{1,\lambda\}(x_0-a)}{\ln 2} \leq \frac{1}{\tau} < \frac{1}{L_1[L+\frac{e}{\lambda}]}$$

et

$$\max\{(\lambda-1)a,(\lambda-1)b,0\} \leq \frac{1}{\tau}$$

Si $x_0 = a$ il est facile de remarquer que

$$L_T(x) \leq \frac{L_1 L}{\tau} + \frac{L_1}{\tau\lambda} e^{\tau \max\{(\lambda-1)a,(\lambda-1)b,0\}} \tag{2.4}$$

Si $x_0 = a$ on obtient

$$\tau \leq \frac{\ln 2}{\max\{1,\lambda\}(x_0-a)} \Longrightarrow e^{-\tau(a-x_0)} - 1 < 1$$

et

$$e^{-\tau\lambda(a-x_0)} - 1 < 1.$$

On obtient à nouveau la relation (2.4).

$$\tau \max\{(\lambda-1)a,(\lambda-1)b,0\} \leq 1$$

$$\Longrightarrow L_T(x) \leq \frac{L_1 L}{\tau} + \frac{L_1 e}{\tau} = \frac{L_1}{\tau}[L+\frac{e}{\lambda}] < 1.$$

Donc

$$T : (\Phi_{L,\lambda}, d_B) \to (\Phi_{L,\lambda}, d_B)$$

est une contraction avec

$$L_T = \frac{L_1}{\tau}[L+\frac{e}{\lambda}].$$

∎

2.2 Théorème d'approximation de solution pour des équations différentielles itératives

Sous les hypothèses du théorème 2.1.2, on sait que la solution unique y^* du problème de valeur initiale (2.1) peut être approximée au moyen de l'itération de Picard y_n définie par $y_1 \in \Phi_L$ arbitraire et

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds, \ \forall t \in [a,b], n \geq 1. \tag{2.5}$$

Compte tenu des considérations présentées dans la section précédente, il est clair que si la condition (2.3) est affaiblie

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) \leq 1, \tag{2.6}$$

puis, d'une part, l'affirmation sur l'existence d'une solution unique du problème (2.1) n'est plus vraie et, d'autre part, l'itération de Picard (2.5) ne converge pas généralement vers la solution.

Le but de cette section est donc de montrer que si (2.3) est remplacé par (2.6), alors nous pouvons encore approximer une solution (non unique) du problème de valeur initiale (2.1) au moyen d'un Krasnoselski– Procédure d'itération de Mann. Le théorème suivant énonce le résultat principal de cet travail.

Théorème 2.2.1. *Supposons que toutes les conditions du théorème 2.1.1 sont satisfaits et*

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) \leq 1$$

Alors le problème de valeur initiale (2.1) a au moins une solution y^* dans Φ qui peut être approximée par l'itération de Krasnoselskij

$$y_{n+1}(t) = (1-u)y_n(t) + uy_0 + u\int_{x_0}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds, \ t \in [a,b]; \ n \geq 1, \tag{2.7}$$

où $u \in (0,1)$ et $y_1 \in \Phi_L$ est arbitraire.

Démonstration. On se limite au cas où $L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) = 1$, (car pour $L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) < 1$ la preuve est le même).

D'après le Lemme (2.1.1) Φ_L est un sous-ensemble convexe et compact non vide de l'espace de Banach $(\mathbf{C}([a,b]), ||.||)$. Considérons l'opérateur intégral $T : \Phi_L \to \mathbf{C}([a,b])$,

$$Ty(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds, \ t \in [a,b], \ y \in \Phi_L. \tag{2.8}$$

Il est clair que $y \in \Phi_L$ est une solution du problème de valeur initiale (2.1) si et seulement si y est un point fixe de T, i. e.,

$$y = Ty$$

En effet. On

$$\begin{aligned}
|y(t_1) - y(t_2)| &= |Ty(t_1) - Ty(t_2)| \\
&= \left| y_0 + \int_{x_0}^{t_1} f(s, y(y(s)))ds - y_0 + \int_{x_0}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{t_1} f(s, y(y(s)))ds - \int_{x_0}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds \right|
\end{aligned}$$

de la lipschitzité de f, nous aurons

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq L|t_1 - t_2|.$$

Maintenaint, on va montrer que Φ_L est un ensemble fixe par rapport à T, i. e., nous avons $T(\Phi_L) \subset \Phi_L$ Si la condition $(4a)$ est vérifiée, alors pour tout $y \in \Phi_L$ et $t \in [a, b]$ nous avons

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t)| &\leq |y_0| + \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&\leq |y_0| + \mathbf{M}|t - x_0| \\
&\leq |y_0| + \mathbf{M}|\mathcal{C}_{X_0}| \\
&\leq |y_0| + \mathcal{C}_{y_0} \leq b,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t)| &\geq |y_0| - \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(y(s)))ds \right| \\
&\geq |y_0| - \mathbf{M}|t - x_0| \\
&\geq |y_0| - \mathbf{M}|\mathcal{C}_{X_0}| \\
&\geq |y_0| - \mathcal{C}_{y_0} \geq a,
\end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout $y \in \Phi_L$, on a $(Ty)(t) \in [a, b]$.

Maintenant, pour tout $t_1, t_2 \in [a, b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t_1) - (Ty)(t_2)| &= \left|(y_0 + \int_{x_0}^{t_1} f(s, y(y(s)))ds) - (y_0 + \int_{x_0}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds)\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^{t_1} f(s, y(y(s)))ds + \int_{x_0}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds\right| \\
&= \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, y(y(s)))ds\right| \\
&\leq \mathbf{M}|t_1 - t_2| \leq L|t_1 - t_2|
\end{aligned}$$

Ainsi, $Ty \in \Phi_L$ pour tout $y \in \Phi_L$. De façon similaire, nous traitons les cas $(4b)$ et $(4c)$.

Par conséquent, $T : \Phi_L \to \Phi_L$ (c'est-à-dire que T est un auto-opérateur de Φ_L).

Soit $y, z \in \Phi_L$ et $t \in [a, b]$, alors

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t) - (Tz)(t)| &\leq \left|\int_{x_0}^{t} |f(s, y(y(s))) - f(s, z(z(s)))|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{x_0}^{t} L_1|y(y(s)) - z(z(s))|ds\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^{t} L_1|y(y(s)) - z(z(s)) - y(z(s)) + y(z(s))|ds\right| \\
&\leq L_1\left|\int_{x_0}^{t} (|y(y(s)) - y(z(s))| + |y(z(s)) - z(z(s))|)ds\right| \\
&\leq L_1\left|\int_{x_0}^{t} (L|y(s) - z(s)| + \max_{w\in[a,b]} |y(w) - z(w)|)ds\right| \qquad (2.9) \\
&= L_1\left|\int_{x_0}^{t} (L|y(s) - z(s)| + ||y - z||)ds\right| \\
&\leq L_1\left|\int_{x_0}^{t} (L \max_{w\in[a,b]} |y(w) - z(w)| + ||y - z||)ds\right| \\
&= L_1\left|\int_{x_0}^{t} (L + 1)||y - z||\right| ds \\
&= L_1(L + 1)||y - z|| \; |t - x_0| \\
&\leq L_1\mathcal{C}_{x_0}(L + 1)||y - z||_C.
\end{aligned}$$

Maintenant, en prenant le maximum sur (2.9), on obtient

$$||Ty - Tz|| \leq L_1\mathcal{C}_{x_0}(L + 1)||y - z||$$

D'après $L_1\mathcal{C}_{x_0}(L + 1) \leq 1$, alors T est non expansive et donc continue.

Utilisant le théorème du point fixe de Schauder on aura la première partie de la conclusion, et le corollaire (1.4.1) ou (1.4.2) pour obtenir la seconde.

■

Remarque : En pratique, on peut considérer $u = \frac{1}{2}$ dans (2.7).

Théorème 2.2.2. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaits :*

(i) $y_0 \leq \lambda x_0$ *;*

(ii) $\forall L_1 > 0 : |f(s,u) - f(s,v)| \leq L_1|u-v|$ *pour tous* $s, u, v \in [a,b]$ *;*

(iii) $\mathbf{M} \leq \min\{\lambda, L\}$ *;*

(iv) L'une des conditions suivantes est satisfaite :

(a) $\mathbf{M}\mathcal{C}_{x_0} \leq \mathcal{C}_{y_0}$ *;*

(b) $x_0 = a, \mathbf{M}(b-a) \leq b - y_0, est\, f(s,u) \geq 0$ *pour tous* $s, u \in [a,b]$ *;*

(c) $x_0 = b, \mathbf{M}(b-a) \leq y_0 - a, est\, f(s,u) \geq 0$ *pour tous* $s, u \in [a,b]$ *;*

(v) $\mathbf{M}(x_0 - a) \geq y_0 - \lambda a$ *;*

(vi) Il existe un $\bar{\tau} > 0$ *tel que* $\bar{\tau} > -\frac{\ln(1-\lambda)}{\lambda(b-x_0)}$ *(si* $x_0 \neq b$ *et* $\lambda \neq 1$*) et*

$$\frac{L_1}{\bar{\tau}}(L + \frac{1}{\lambda}) \max\{e^{\bar{\tau}(x_0-a)} - 1, 1 - e^{\bar{\tau}(x_0-b)}\} \leq 1.$$

Alors :

(1) Le problème de valeur initiale (2.1) a au moins une solution dans $\Phi_{L\lambda}$ *;*

(2) Pour tout $y_1 \in \Phi_{L\lambda}$ *; l'itération Krasnoselskij*

$$y_{n+1} = (1-u)y_n(t) + uy_0 + u\int_{x_0}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds,\ t \in [a,b], n \geq 1,$$

où $u \in (0,1)$*, converge vers une solution du problème (2.1) quand* $n \to \infty$*.*

Démonstration. D'après le lemme(2.1.1), l'ensemble $\Phi_{L,\lambda}$ est un sous-ensemble convexe et compact de l'espace de Banach $\mathbf{C}[a,b]$ muni de la norme de Bielecki donnée par la formule

$$||y||_B = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| e^{-\tau(x-x_0)}$$

pour tout $y \in \mathbf{C}[a,b]$ ou $x_0 \in [a,b]$ et $\tau > 0$ sont fixes. Soit T défini comme dans la démonstraction du théorème (2.2.1). Par les hypothéses (ii),(iii) et (iv), il s'ensuit que

$$T(\Phi_{L,\lambda}) \subset \Phi_L.$$

Prouvons que $\Phi_{L,\lambda}$ est un ensemble constant par rapport à l'opérateur T. En effet, si $y \in \Phi_{L,\lambda}$ et $x \in [a,b]$,on a

$$\begin{aligned}(Ty)(x) &\leq y_0 + M(x-x_0)\\ &= y_0 + M(x-a) - M(x_0-a)\\ &\leq y_0 + \lambda(x-a) - (y_0 - \lambda a) = \lambda x.\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $Ty \in \Phi_{L,\lambda}$, ou nous avons utilisé (iii) et (v) .

Pour $y, z \in \Phi_{L,\lambda}$ et $x \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}|(Ty)(x) - (Tz)(x)| &\leq L_1 \left| \int_{x_0}^{x} (L|y(s) - z(s)| + |y(z(s)) - z(z(s))|) ds \right|\\ &\leq L_1 \left(\left| \int_{x_0}^{x} L e^{\tau(s-x_0)} ds \right| + \left| \int_{x_0}^{x} e^{\tau(\lambda s - x_0)} ds \right| \right) ||y-z||_B\\ &= L_1 \left(\frac{L}{\tau} \left| e^{\tau(x-x_0)} - 1 \right| + \frac{1}{\tau\lambda} \left| e^{\tau(\lambda x - x_0)} - e^{\tau(\lambda x_0 - x_0)} \right| \right) ||y-z||_B.\end{aligned}$$

Cet montre que

$$|(Ty)(x) - (Tz)(x)| e^{-\tau(x-x_0)} \leq L_1 \left(\frac{L}{\tau} \left| 1 - e^{-\tau(x-x_0)} \right| + \frac{1}{\tau\lambda} \left\| e^{\tau(\lambda x - x)} - e^{\tau(\lambda x_0 - x)} \right| \right) ||y-z||_B \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{L_1}{\tau} \left(L \left| 1 - e^{-\tau(x-x_0)} \right| + \frac{1}{\lambda} \left| e^{\tau(\lambda-1)x} - e^{\tau(\lambda x_0 - x)} \right| \right) ||y-z||_B\\ &= L_T(x) ||y-z||_B\end{aligned}$$

où $L_T : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Il existe alors une constante $\tilde{L}_T > 0$ telle que

$$\max_{x \in [a,b]} L_T(x) \leq \tilde{L}_T.$$

Ainsi de (2.10) nous otenons

$$||Ty - Tz||_B \leq \tilde{L}_T ||y-z||_B$$

Ce qui montre que T est lipschitzien, et donc continu, par la théorème du point fixe de Schauder, il s'ensuit que T a au moins un point fixe $y^* \in \Phi_L$, qui est en fait une solution au problème de la valeur initiale (2.1).

Pour prouver la deuxième partie du théorème, nous évaluons le maximum de $LT(x)$.

Il est facile de prouver que $g(x) = 1 - e^{-\tau(x-x_0)}$ est strictement croissante sur $[a, b]$ et $g(x_0) = 0$,

Donc

$$\max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \max\left\{e^{\tau(x_0-a)} - 1, 1 - e^{\tau(x_0-b)}\right\}$$

De même, si nous fixons $h(x) = e^{\tau(\lambda-1)x} - e^{\tau(\lambda x_0-x)}$, alors

$$h'(x) = \tau e^{\tau(\lambda-1)x}\left(\lambda - 1 + e^{-\tau\lambda(x-x_0)}\right).$$

Il est clair que la fonction $h_1(x) = \lambda - 1 + e^{-\tau\lambda(x-x_0)}$ est strictement décroissante sur $[a, b]$ et donc $h_1(x) \geq h_1(b) = \lambda - 1 + e^{-\tau\lambda(b-x_0)}$

Si $x_0 = b$, alors $h_1(b) = \lambda - 1 \geq 0$, ce qui montre que h diminue sur $[a, b]$, si $\lambda = 1$, alors $h_1(b) > 0$ et donc h est strictement croissante $[a, b]$. Enfin, si $\lambda \neq 1$ et $x_0 \neq b$, alors, par l'hypothèse (vi), on peut choisir $\bar{\tau} > 0$ tel que

$$\bar{\tau} > -\frac{\ln(1-\lambda)}{\lambda(b-x_0)}$$

ce qui implique que $h_1(b) > 0$ et donc h est strictement croissant sur $[a, b]$. Nous posons $\tau = \bar{\tau}$. Ensuite et dans chacun des trois cas,

$$\max_{x\in[a,b]} |h(x)| = \max\left\{\left|e^{\tau(\lambda-1)a} - e^{\tau(\lambda x_0-a)}\right|, \left|e^{\tau(\lambda-1)b} - e^{\tau(\lambda x_0-b)}\right|\right\}.$$

En utilisant le fait que $\lambda \geq 1$, nous aurons

$$\begin{aligned}\left|e^{\tau(\lambda-1)a} - e^{\tau(\lambda x_0-a)}\right| &= e^{\tau(\lambda-1)a}\left|1 - e^{\tau\lambda(x_0-a)}\right| \\ &= e^{\tau(\lambda-1)a}\left(e^{\tau\lambda(x_0-a)} - 1\right) \\ &\leq e^{\tau\lambda(x_0-a)} - 1.\end{aligned}$$

De même.

$$\begin{aligned}\left|e^{\tau(\lambda-1)b} - e^{\tau(\lambda x_0-b)}\right| &= e^{\tau(\lambda-1)b}\left|1 - e^{\tau\lambda(x_0-b)}\right| \\ &= e^{\tau(\lambda-1)b}\left(1 - e^{\tau\lambda(x_0-b)}\right) \\ &\leq 1 - e^{\tau\lambda(x_0-b)}.\end{aligned}$$

Par conséquant nous aurons

$$L_T(x) \leq \max\left\{e^{\tau(x_0-a)} - 1, 1 - e^{\tau(x_0-b)}\right\}\frac{L_1}{\tau}\left(L + \frac{1}{\lambda}\right)$$

pour tout $x \in [a,b]$, ce qui montre par (2.10) que T est non expansif. Maintenant, on peut utiliser les corollaires (1.4.1) et (1.4.2) on obtient la deuxième partie du théorème.

■

2.3 Remarques finales et exemples

Remarque : Notons que si l'on peut trouver un $\tau > 0$ tel que

$$\max\left\{e^{\tau(x_0-a)} - 1, 1 - e^{\tau(x_0-b)}\right\} \frac{L_1}{\tau}\left(L + \frac{1}{\lambda}\right) < 1$$

Puis, au lieu de considérer le principe de l'application non-expansive dans théorème (2.2.2), nous pouvons utiliser le principe de l'application de contraction de la même manière que.

Nous Terminons notre memoire avec des exemples qui illustrent la généralité et l'efficacité de nos résultats.

Exemple 2.3.1. *: Considérons le probléme de valeur initiale suivant associé à une équation différentielle itérative à celles étudiées dans [9.13],*

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{1}{2} + y(y(x)),\ x \in [0,1], \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $y \in \mathbf{C^1}([0,1],[0,1])$.

Nous intéressons aux solutions $y \in \mathbf{C^1}([0.1],[0.1])$ *appartenant à l'ensemble*

$$\Phi_1 = \{y \in \mathbf{C^1}([0,1],[0,1]) :\ |y(t_1) - y(t_2)| \le |t_1 - t_2|,\ \forall t_1, t_2 \in [0,1]\},$$

ce qui, compte tenu de notre notation, signifie que $L = 1$*. Nous avons également*

$$a = 0, b = 1 \text{ et } x_0 = \frac{1}{2},$$

donc

$$\mathcal{C}_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{1}{2}.$$

La fonction

$$f(x,u) = -\frac{1}{2} + u$$

est lipschitzienne avec la constante de lipschitz $L_1 = 1$ *(c'est-à-dire que* f *est non expansive).Cela montre que*

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) = 1$$

donc la condition (2.6) est satisfaite mais la condition (2.3) ne l'est pas. Par conséquent, et par le théorème (2.2.1)(mais pas par le théorème(2.1.2)), Nous obtenons des informations sur l'existence et l'approximation des solutions du problème de la valeur initiale(2.11).

Exemple 2.3.2. *: Pour l'équation différentielle itérative*

$$y'(x) = \frac{1}{10} y(y(x)), \;\; x \in [-1, 1] \tag{2.12}$$

qui a été étudié dans [31] en ce qui concerne les solutions d'équivariance, considérons le problème avec la condition initiale

$$y(0) = 1. \tag{2.13}$$

Nous intéressons ici aux solutions $y \in \mathbf{C^1}([-1,1],[-1,1])$ *appartenant à la classe.*

$$\Phi_4 = \{y \in \mathbf{C}([0,1],[0,1]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq 4|t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0,1]\}$$

Dans ce cas ; nous avons

$$L = 4, \; a = -1, \; b = 1, \; x_0 = 0,$$

et donc

$$\mathcal{C}_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = 1.$$

La fonction

$$f(x,u) = \frac{1}{10} u$$

est lipschitizian avec la constante de lipschitz $L_1 = \frac{1}{10}$. *Par conséquent, nous avons*

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) = 1,$$

donc la condition (2.6) est satisfaite mais la conditions (2.3) ne l'est pas. Par conséquent,et par le Théorème (2.2.1), il s'ensuit que le problème de valeur initiale (2.12) et (2.13) a au moins une solution en Φ_4 qui peut être approchée par la méthode itérative

$$y_{n+1}(t) = (1-u)y_n(t) + uy_0 + \frac{u}{10}\int_{x_0}^{t} (y_n(y_n(s)))^2 ds,\ t \in [-1,1],\ n \geq 1,$$

où $u \in (0,1)$ et $y_1 \in \Phi_4$ sont arbitraires.

Exemple 2.3.3. *Considérons le probléme de valeur initiale défini par l'équation différentielle itérative de l'exemple 2.3.1 sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ et la condition initiale*

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

Nous intéressons ici à l'étude des soluitions $y \in \mathbf{C^1}([\frac{1}{2},1],[\frac{1}{2},1])$ appartenant à la classe $\Phi_{1,1}$. Dans ce cas, nous avons

$$L = 1, a = \frac{1}{2}, b = 1, x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2} \text{ et } L_1 = 1.$$

Pour avoir (i) satisfait, nous avons besoin de $\lambda = 1$ et donc, par (iii), $M = 1$. Le conditions (iv) et (v) sont également satisfaits, tandis que les deux conditions en (vi) se réduisent à $\bar{\tau} > 0$ et respectivement à

$$\frac{1 - e^{-\frac{\bar{\tau}}{2}}}{\bar{\tau}} \leq \frac{1}{2},$$

qui ont toujours des solutions. Cela devient évident si nous réécrivons la deuxième inégalité de manière équivalente comme

$$2e^{-\frac{\bar{\tau}}{2}} + \bar{\tau} \geq 2.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème(2.2.2) sont remplies. Une solution du problème initial en $\Phi_{1,1}$ est $y(x) = \frac{1}{2}, x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Notons que les conditions du théorème (2.2.2) ne sont pas remplies sur tout l'intervalle $[0,1]$, comme $\Phi_{1,1}$ une sous-classe appropriée de Φ_1.

Exemple 2.3.4. *: Nous considérons le problème de la valeur initial*

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y(y(x)) \\ y(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{2.15}$$

où $x \in [0,1], y \in \mathbf{C}^1([0,1],[0,1])$. *Nous montrons que le problème* (2.15) *a au moins une solution dans*

$$\Phi_1 = y \in \mathbf{C}([0,1],[0,1]) : |y(t_1) - y(t-2)| \leq |t_1 - t_2|, \ \forall t_1, t_2 \in [0,1]$$

Nous avons

$$L = 1, \ a = 0, \ b = 1, \ x_0 = \frac{1}{3} \ et \ \mathcal{C}_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{2}{3}.$$

La fonction

$$f(x,u) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}u$$

est lipschitzienne avec la constante de Lipschitz $L_1 = \frac{1}{2}$. *Dans ces conditions, nous avons :*

$$L_1 \mathcal{C}_{x_0}(L+1) = \frac{1}{2}(1+1)\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

donc la conditions (2.3) *est satisfait. Par conséquent, par le théorème* (2.1.2) *il existe alors une solution unique* y^* *du problème* (2.15) *eu* Φ_L.

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} + \int_{\frac{1}{3}}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds, \ \forall t \in [0.1], n \leq 1.$$

Bibliographie

[1] P. Andrzej ; On some iterative differential equations I, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellonskiego, Prace Matematyczne. 12 (1968), 53-56.

[2] A. Buica ; Existence and continuous dependence of solutions of some functional di erential equations, Seminar of Fixed Point Theory, 3(1995), 1-14.

[3] C.Bacţiu, *"Volterra-Fredholm nonlinear systems with modified argument via weakly Picard operators theory"*, Carpathian j, Math. 24(2)(2008), 01-09.

[4] J. Bèlair ; Population models with state-dependent delays, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Dekker, New York, 1991, pp. 165-176.

[5] J. Bèlair, C. Mackey ; Consumer memory and price uctuations on commodity markets : an integro-differential model, J. Dyn. Dif. Eqs., 1(1989), 299-325.

[6] M. Büger, M. R. W. Martin ; Stabilizing control for an unbounded state-dependent delay differential equation, Dynamical Systems and Differential Equations, Kennesaw, GA, 2000, Discrete and Continuous Dynamical Systems (Added Volume), (2001), 56-65.

[7] M. Büger, M. R. W. Martin ; The escaping disaster : A problem related to state-dependent delays, Z. Angew. Math. Phys., 55(2004), 547-574.

[8] V. Berinde ; Existence and approximation of solutions of some first order iterativeential equations, Miskolc Math. Notes, 11(1)(2010), 13-26.

[9] C.Chidume, Geometric properties of Banach space and nonlinear iterations, ser. Lecture Notes in Mathematics. london : Springer-Verlag London Ltd, 2009,vol. 1965.

[10] S. Cheng, J. Si, X. Wang An existence theorem for iterative functional-differential equations, Acta Math. Hungar., 94(1-2)(2002), 1-17.

[11] R. Driver ; A two-body problem of classical electrodynamics : the one-dimensional case, Ann.Phys., 21(1963), 122-142.

[12] R. Driver ; A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, in : Proceedings of International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 1963, pp. 474-484.

[13] E. Eder ; The functional differential equation x0(t) = x(x(t)), J. Diff. Equa., 54(1984), 390- 400.

[14] M. Edelstein,*"A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski,"* Amer. Math. Monthly, vol. 73, pp. 509-510, 1966.

[15] M. Fečkan ; On a certain type of functional differential equations, Math. Slovaca. 43(1993), 39-43.

[16] L. J. Grimm, K. Schmitt ; Boundary value problem for differential equations with deviating arguments, Aequationes Math., 4(1970), 176-190.

[17] W. Ge and Y. Mo ; Existence of solutions to differential-iterative equation, Journal of Beijing Institute of Technology, 6(3)(1997), 192-200.

[18] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a non expansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 59, no. 1, pp. 56-71, 1976.

[19] R. Johnson ; Functional equations, approximations, and dynamic response of systems with variable time-delay, IEEE Trans. Automatic Control, 17(1972), 398-401.

[20] M. A. Krasnoselskii, *"Twe remarks on the method of successive approximations"*, Vspehi Mat. Nauk (N.S.), vol,10,no, 1(63), pp.123-127,1955.

[21] M. Lauran, Existence results for some differential equations with deviating argument, Filomat, 25(2)(2011), 21-31.

[22] O. Nicola ; Numerical solutions of first order iterative functional-differential equations by spline functions of even degree, Scientific Bulletin of the Petru Maior University of Tirgu Mures, 6(2009), 34-37.

[23] R. M. Nisbet, W. S. C. Gurney ; The systematic formulation of population models for insects with dynamically varying instar duration, Theoret. Population Biol., 23(1983), 114-135.

[24] H. Schaefer, *"Uber die Methode sukzessiver Approximationen",* Jber. Deutsch. Math. Verein., vol. 59, no. Abt.1,pp.131-140,1957.

[25] J. Si, X. Wang ; Smooth solutions of a nonhomogeneous iterative functional differential equa- tion with variable coefficients, J. Math. Anal. Appl., 226(1998), 377-392.

[26] J. Si, X. Wang, S. Cheng, Nondecreasing and convex C2-solutions of an iterative functional- differential equation, Aequ. Math., 60(2000), 38-56.

[27] J. Si and W. Zhang, Analytic solutions of a class of iterative functional differential equations, J. Comp. Appl. Math., 162(2004), 467-481.

[28] S. Staněk ; On global properties of solutions of functional differential equation x0(t) = x(x(t)) + x(t), Dynamic Systems Appl., 4(1995), 263-278.

[29] K. Wang ; On the equation x0(t) = f(x(x(t))), Funk. Ekva., 33(3)(1990), 405-425.

[30] P. Waltman ; Deterministic threshold models in the theory of epidemics, Lecture Notes in Biomath., Vol. 1, Springer, New York (1974).

[31] D. Yang and W. Zhang ; Solutions of equivariance for iterative differential equations, Appl. Math. Lett., 17(2004), 759-765.

[32] P. Zhang, Analytic solutions for iterative functional differential equations, Electron. J. Diff. Equ., 2012(180)(2012), 1-7.

[33] P. Zhang, L. Mi ; Analytic solutions of a second order iterative functional differential equation, Appl. Math. Comp., 210(2009), 277-283.