RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Specialté : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Analyse d'un problème inverse par des techniques de contrôle optimal

Présenté par:
Bouabsa Aya

Devant le jury :

Président:	**S . Saïdi**	**MCA**	**Université de Jijel**
Encadreur:	**N . Arada**	**MCA**	**Université de Jijel**
Examinateur:	**F . Selamnia**	**MCB**	**Université de Jijel**

Promotion 2019-2020

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Nadir Arada d'avoir dirigé ce travail avec autant de compétence et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de le faire.

Je remercie Mmes Soumia Saïdi et Fatiha Selamnia d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens également à remercier ma famille, mes amis et toutes les personnes qui ont accompagné, de près ou de loin, la réalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

Notations générales

Ω	ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$\bar{\Omega}$	adhérence de Ω
$\lvert\Omega\rvert$	mesure de Lebesgue de Ω
T	temps fixé, $T > 0$
$I =]0, T[$	ouvert de $\mathbb{R}$
$Q = \Omega \times I$	cylindre espace-temps
$\Sigma = \partial\Omega \times I$	frontière latérale de Q
$\cdot$	produit scalaire de deux vecteurs; i.e. $y \cdot z = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i,\ y, z \in \mathbb{R}^n$
$\otimes$	produit tensoriel de deux fonctions i.e. $f \otimes g(x,t) = f(x)g(t)$
D^α	Dérivée d'ordre α; i.e. $D^\alpha y = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} y}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
∇	gradient; i.e. $\nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$
Δ	Laplacien; i.e. $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$
div	divergence d'un vecteur; i.e. div $\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$
$\vec{b} \cdot \nabla$	terme de convection; i.e. $\vec{b} \cdot \nabla y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial y}{\partial x_i},\ \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
$\vec{n}$	vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$
$\frac{\partial}{\partial n}$	dérivée normale extérieure; i.e. $\frac{\partial y}{\partial n} = \nabla y \cdot \vec{n}$
δ_{ij}	symbole de Kronecker
p.t.	presque tout

Espaces fonctionnels

$C(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω
$C^m(\Omega)$	espace des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω
$C^\infty(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur Ω
$C(\bar{\Omega})$	espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$
$C^m(\bar{\Omega})$	espace des fonctions $y \in C^m(\Omega)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n, \lvert\alpha\rvert \leq m$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha y(x)$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$
$C^\infty(\bar{\Omega})$	espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\bar{\Omega}$
$L^p(\Omega)$	espace des fonctions mesurables sur Ω dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue $(1 \leq p < +\infty)$
$L^\infty(\Omega)$	espace des fonctions mesurables sur Ω essentiellement bornées
$W^{1,p}(\Omega)$	espace des fonctions dans $L^p(\Omega)$ dont les dérivées distributionnelles appartiennent à $L^p(\Omega)$
$H^1(\Omega)$	espace des fonctions dans $L^2(\Omega)$ dont les dérivées distributionnelles appartiennent à $L^2(\Omega)$
E'	espace dual de E
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$	crochet de dualité
p'	exposant conjugué de p; i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$(\cdot, \cdot)$	crochet de dualité pour $E = L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ i.e. $(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \qquad f \in L^p(\Omega),\ g \in L^{p'}(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	crochet de dualité pour $E = H^1(\Omega)$
$\hookrightarrow$	injection continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	injection continue et compacte

Introduction

Soit Ω une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\gamma}$, et soit T une constante positive fixée. On notera I l'intervalle ouvert $]0, T[$, Q le cylindre $\Omega \times I$ et Σ la surface latérale $\partial\Omega \times I$. On considère l'équation de convection-diffusion suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = u & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où A est l'opérateur défini par

$$Ay = -\nu\Delta y + \vec{b} \cdot \nabla y + cy,$$

avec ν une constante positive, $\vec{b}$ une fonction dans $L^\infty(Q; \mathbb{R}^n)$, c une fonction dans $L^\infty(Q)$, f une fonction dans $L^2(Q)$ et où $\frac{\partial y}{\partial n}$ désigne la dérivée conormale de y par rapport à $-\Delta$. Dans toute la suite, cette équation sera désignée par équation d'état.

Dans ce mémoire, notre objectif principal est d'identifier un contrôle u d'après une observation y_d correspondant à l'état final $y_u(T)$ (y_u est la solution de l'équation d'état associée à u). Dans cette optique, nous considérons le problème suivant

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(u) = \frac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |y_u(T) - y_d|^2 \, dx \\ u \in U_{ad}, \end{cases}$$

où $y_d \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée et où l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} est un ensemble convexe fermé borné non vide dans $L^2(\Omega)$.

Deux grands axes seront étudiés :

- Existence et unicité d'un contrôle optimal
- Conditions nécessaires d'optimalité correspondantes.

Nous commençons l'étude systématique de l'équation d'état en donnant un sens naturel à la formulation faible. La méthode de Galerkin classique ne peut pas être appliquée directement car les conditions usuelles garantissant la coercivité de la forme bilinéaire associée à l'opérateur A font défaut. Afin de contourner cette difficulté, nous introduisons un changement de variable et montrons qu'une solution faible de notre problème est aussi solution faible d'un autre problème possédant les

propriétés de coercivité requises. La solvabilité de ce nouveau problème est alors établie suivant le schéma classique : existence de solution au problème approché, estimations *a priori* de la solution approchée dans des espaces adaptés, passage à la limite, existence, régularité et unicité de la solution. Des résultats de régularité hölderienne supplémentaires relatives à l'équation d'état, utiles pour la suite de notre étude, sont aussi rappelés. Le même type d'analyse est aussi menée pour l'équation adjointe.

L'existence d'un contrôle optimal est ensuite établie en utilisant des arguments de continuité et de compacité classiques. L'unicité du contrôle optimal est beaucoup plus délicate et nécessite l'utilisation de résultats assez fins liés à la régularité des solutions et à l'unicité rétrograde des équations paraboliques à coefficients non constants. Finalement, une formule de Green liant l'état final à l'état adjoint initial et un résultat de controllabilité approchée sont établies. Ces derniers permettent alors d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité. Utilisant ces dernières, nous caractérisons le contrôle optimal dans le cas où l'ensemble des contrôles admissibles est une boule.

Ce travail est principalement inspiré de [2] où le même problème est considéré dans le cas de contrôle mesure de Radon sur $\bar{\Omega}$. La différence est principalement liée au sens à donner à la solution de l'équation d'état et à celle de l'équation adjointe. Il a aussi fallu redémontrer et adapter un certain nombre de résultats (cf. l'équation d'état), en détailler d'autres (existence et unicité du contrôle optimal) et établir les conditions d'optimalité.

Chapitre 1

Cadre fonctionnel et résultats auxiliaires

1.1 Cadre classique

1.1.1 Espaces de fonctions régulières

Soit $n \geq 2$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ et notons $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'un n-uplet de la forme $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Si α est un multi-indice, on note D^α l'opérateur différentiel défini par

$$D^\alpha z(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} z(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

• Nous désignerons par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω. L'ensemble de toutes les fonctions m fois continûment différentiables sur Ω (i.e. l'espace de toutes les fonctions $z \in C(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles $D^\alpha z$, $|\alpha| \leqslant m$, sont continues dans Ω) sera noté $C^m(\Omega)$, avec

$$\|z\|_{C^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha z(x)| \quad \forall z \in C^m(\Omega).$$

Nous définissons alors

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m \geq 0} C^m(\Omega).$$

• Pour $z \in C(\Omega)$, le support de z est l'adhérence dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble $\{x \in \Omega \mid z(x) \neq 0\}$. Nous désignerons par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω et posons

$$\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

• De la même manière, nous désignerons par $C(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et par $C^m(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $z \in C^m(\Omega)$ tel que pour chaque multi-indice α, $|\alpha| \leqslant m$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha z(x)$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$. Nous définissons alors

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \cap_{m \geq 0} C^m(\bar{\Omega}).$$

• Nous considérons l'espace

$$C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ z \in C(\bar{\Omega}) \mid \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \tfrac{|z(x)-z(y)|}{|x-y|^\mu} < +\infty \right\} \text{ avec } 0 < \mu \leq 1,$$

où

$$\|z\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})} = \|z\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \tfrac{|z(x)-z(y)|}{|x-y|^\mu}.$$

Posons

$$C^{m,\mu}(\bar{\Omega}) = \left\{ z \in C^m(\bar{\Omega}) \mid D^\alpha z \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m \right\},$$

avec

$$\|z\|_{C^{m,\mu}(\bar{\Omega})} = \|z\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha z(x) - D^\alpha z(y)|}{|x-y|^\mu}.$$

• Finalement, soit $Q = \Omega\times]0,T[$. Nous définissons l'espace

$$C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q}) = \left\{ z \in C(\bar{Q}) \mid \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\bar{Q}} \frac{|z(x,t)-z(y,\tau)|}{|x-y|^{\mu}+|t-\tau|^{\frac{\mu}{2}}} < +\infty \right\},$$

avec

$$\|z\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{Q})} = \|z\|_{C(\bar{Q})} + \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\bar{Q}} \frac{|z(x,t)-z(y,\tau)|}{|x-y|^{\mu}+|t-\tau|^{\frac{\mu}{2}}}.$$

1.1.2 Caractérisation de la géométrie du domaine

On dira que Ω est de classe $C^{m,\alpha}$ si pour tout point x de la frontière $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1,\cdots,y_n)$, un hypercube $U^x = \Pi_{i=1}^n]-a_i,a_i[$ et une application

$$\Phi^x : \prod_{i=1}^{n-1}]-a_i,a_i[\quad \longrightarrow \quad \left]-\frac{a_n}{2},\frac{a_n}{2}\right[$$

de classe $C^{m,\alpha}$ tel que

$$\Omega\cap U^x = \{(y_1,\cdots,y_n)\in U^x \mid y_n > \Phi^x(y_1,\cdots,y_{n-1})\},$$
$$\Gamma\cap U^x = \{(y_1,\cdots,y_n)\in U^x \mid y_n = \Phi^x(y_1,\cdots,y_{n-1})\}.$$

1.1.3 Formules d'intégration par parties

Les intégrales sur Ω sont liées à celles sur $\partial\Omega$ par l'intermédiaire de quelques formules importantes, de type intégration par parties.

Lemme 1.1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et soient $\vec{f}\in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^n)$ et $g\in C^1(\bar{\Omega})$. Alors*

$$\int_\Omega \left(div\ \vec{f}(x)\right) g(x)\,dx + \int_\Omega \vec{f}\cdot\nabla g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)(s)g(s)\,ds.$$

La formule précédente est souvent rencontrée sous la forme de la première formule de Green, obtenue en prenant $\vec{f} = \nabla h$. Plus précisement, nous avons le résultat suivant.

Lemme 1.1.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et soient $h\in C^2(\bar{\Omega})$ et $g\in C^1(\bar{\Omega})$. Alors*

$$\int_\Omega \Delta h(x)g(x)\,dx + \int_\Omega \nabla h(x)\cdot\nabla g(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial h}{\partial n}(s)g(s)\,ds.$$

1.2 Espaces de Lebesgue

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent-être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnel (voir par exemple [1]) ; Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

Soit $1 \leq p < \infty$. Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega |v(x)|^p \, dx < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \ |v(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega \} < \infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |v(x)| \,,$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Vu que beaucoup de quantités qu'on utilisera sont des fonctions vectorielles, la notation sera simplifiée et on omettra la dimension n dans la notation de l'espace (le sens sera clair d'après le contexte). En particulier, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{aligned}
(z, \phi) &= \int_\Omega z(x) \, \phi(x) \, dx, \qquad z \in L^p(\Omega), \ \phi \in L^{p'}(\Omega), \\
(z, \phi) &= \int_\Omega z(x) \cdot \phi(x) \, dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega z_j(x) \, \phi_j(x) \, dx, \qquad z \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n), \ \phi \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

1.3 Espaces de Sobolev

Passons à présent à la définition de certains espaces de Sobolev et à l'énoncé de propriétés utiles qui y sont relatives.

Définition 1.3.1. *Soit $p \in [1, \infty]$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ z \in L^p(\Omega) \mid \nabla z \in L^p(\Omega) \} \,,$$

où le gradient est à prendre dans le sens faible.

Muni de la norme

$$\|z\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|z\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla z\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty,$$

on vérifie que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
On pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$; Muni du produit scalaire

$$(z, \phi)_{H^1} = (z, \phi) + (\nabla z, \nabla \phi) \,,$$

c'est un espace de Hilbert.

En plus des liens évidents avec les espaces de Lebesgue L^2, conséquence de leur propre définition, l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est lié à d'autres espaces de Lebesgue via les injections de Sobolev. Plus précisemment, on a

- Si $n = 2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$
- Si $n > 2$, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = \frac{2n}{n-2}$

Toutes ces injections sont continues et engendrent les inégalités de Sobolev

$$\|z\|_{L^q(\Omega)} \leq C_S \|z\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{pour tout } q \in [1, +\infty[, \quad \text{si } n = 2,$$
$$\|z\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C \|z\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{si } n > 2,$$

pour tout $z \in H^1(\Omega)$.

1.4 Espaces de Bochner

Nous considérons maintenant des espaces de fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach X (pour plus de détails sur ces espaces voir par exemple [10] ou [4]).

Définition 1.4.1. *a) On notera $L^p(]a, b[; X)$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace des fonctions f définies de $]a, b[$ dans X telles que*

i) f est mesurable pour la mesure de Lebesgue dt sur $]a, b[$,

ii) $\|f\|_{L^p(]a,b[;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$

b) On notera $L^\infty(I; X)$, l'espace des fonctions f définies de $]a, b[$ dans X satisfaisant i) et essentiellement bornée sur $]a, b[$; i.e.

$$\|f\|_{L^\infty(]a,b[;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in]a,b[} \|f(t)\|_X < +\infty.$$

c) On notera $C([a, b]; X)$, l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans X muni de la norme

$$\|f\|_{C([a,b];X)} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_X .$$

Muni de ces normes, ces espaces sont des espaces de Banach.

Nous finissons cette section par des espaces de type Bochner-Sobolev et présentons certaines de leurs propriétés les plus utiles. Soient H et V deux espaces de Hilbert séparables tels que H, V et V' forment un triplet de Gelfand

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

i.e. l'espace de Hilbert H est identifié avec son dual H', V étant dense dans H avec injection continue. Une conséquence des identifications précédentes est que

$$\langle z, \phi \rangle = (z, \phi), \qquad z \in H, \phi \in V. \tag{1.1}$$

L'espace que l'on va considérer à présent est d'une importance fondamentale dans le traitement des EDP instationnaires.

Définition 1.4.2. *Soient a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On note $W(]a,b[;V,V')$ l'espace*

$$W(]a,b[;V,V') = \left\{ z \in L^2(]a,b[;V) \mid \tfrac{\partial z}{\partial t} \in L^2(]a,b[;V') \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|z\|_{W(]a,b[)} = \left(\|z\|_{L^2(]a,b[;V)} + \left\| \tfrac{\partial z}{\partial t} \right\|_{L^2(]a,b[;V')} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$W((]a,b[;V,V')$ est un espace de Hilbert. De plus, il possède des propriétés de régularité qui nous seront très utiles pour la suite.

Lemme 1.4.3. *L'espace $W(]a,b[;V,V')$ s'injecte continûment dans $C([a,b];H)$ et on a la formule d'intégration par parties suivante*

$$\int_a^t \left\langle \tfrac{\partial z(s)}{\partial t}, \phi(s) \right\rangle ds + \int_0^t \left\langle \tfrac{\partial \phi(s)}{\partial t}, z(s) \right\rangle ds = (z(t), \phi(t)) - (z(a), \phi(a)) \tag{1.2}$$

pour tout $z, \phi \in W(]a,b[;V,V')$, $t \in [a,b]$. En particulier, on a

$$\int_a^t \left\langle \tfrac{\partial z(s)}{\partial t}, z(s) \right\rangle ds = \tfrac{1}{2} \left(\|z(t)\|_H^2 - \|z(a)\|_H^2 \right) = \tfrac{1}{2} \int_a^t \tfrac{d}{dt} \|z(s)\|_H^2 \, ds \tag{1.3}$$

pour tout $z \in W(]a,b[;V,V')$ et $t \in [a,b]$.

Démonstration. Voir le lemme 1.2, p. 261 dans [10]. □

De plus, nous avons le résultat suivant.

Lemme 1.4.4. *Soient u et g sont deux fonctions dans $L^1(]a,b[;V)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

- *Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, on a*

$$\int_a^b u(t)\psi'(t)\, dt = -\int_a^b g(t)\psi(t)\, dt.$$

- *Pour tout $w \in V'$, on a*

$$\tfrac{d}{dt} \langle u, w \rangle = \langle g, w \rangle$$

  dans le sens des distributions.

Démonstration. Voir le lemme 1.1, p. 250 dans [10]. □

1.5 Unicité rétrograde de l'équation de la chaleur

Lemme 1.5.1. *Soit $T \in]0,+\infty[$ et soient H et V deux espaces de Hilbert séparables tels que H, V et V' forment un triplet de Gelfand*

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'.$$

Soit $z \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(\Delta))$ tel que

$$\tfrac{dz(t)}{dt} - \nu \Delta z(t) \in H \qquad p.t.\, t,$$

et

$$\left\| \frac{dz(t)}{dt} - \nu \Delta z(t) \right\|_H \leq C \left\| z(t) \right\|_V \, p.t.t.$$

Alors

$$z(T) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Démonstration. Voir le théorème 1.1 dans [7]. □

1.6 Une conséquence du théorème de Hahn-Banach

Lemme 1.6.1. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\bar{F} \neq E$. Il existe alors $f \in E'$, $f \neq 0$, tel que*

$$\langle f, x \rangle_{E',E} = 0 \qquad \forall x \in F.$$

Démonstration. Voir le corollaire 1.8 dans [1]. □

Chapitre 2

Problème de contrôle dans une condition initiale L^2

2.1 Équation d'état

L'objectif de cette section est d'analyser la solvabilité de l'équation d'état donnée par

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \qquad \text{dans } Q, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{2.1b}$$

$$y(\cdot, 0) = u \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1c}$$

où A est l'opérateur défini par

$$Ay = -\nu\Delta y + \vec{b} \cdot \nabla y + cy,$$

avec ν une constante positive, $\vec{b}$ une fonction dans $L^\infty(Q; \mathbb{R}^n)$, c une fonction dans $L^\infty(Q)$, f une fonction dans $L^2(Q)$ et où $\frac{\partial y}{\partial n}$ désigne la dérivée conormale de y par rapport à $-\Delta$.

2.1.1 Formulation faible

Une étape importante pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles est liée au choix de l'espace dans lequel les éventuelles solutions vont être cherchées. Les notions de *s*olution forte et *s*olution faible peuvent inclure des concepts différents, dépendants du contexte (en particulier des opérateurs en jeu et de la régularité des données), et des définitions précises sont donc nécessaires.

Dans le cas du système (2.1), la solution y dépendrait de la variable espace x et de la variable temps t. Ces variables jouant des rôles distincts, nous allons considérer y (ainsi que les données $\vec{b}$, c et f) comme une fonction du temps à valeurs dans un espace de fonctions V définies sur Ω, i.e.

$$\begin{aligned} y : \quad & I \longrightarrow V \\ & t \longmapsto y(t) \end{aligned}$$

et nous continuerons à noter $y(x,t) = y(t)(x)$. L'espace V est généralement choisi comme étant l'espace approprié à la formulation variationnelle du problème stationnaire associé (donc $V = H^1(\Omega)$ dans notre cas).

Pour déterminer une formulation variationnelle adéquate, nous supposerons dans un premier temps que le problème (2.1) admet une solution classique suffisamment régulière (par exemple dans $C^1(\bar{I}; C^2(\bar{\Omega}))$). Naturellement, ceci suppose que les données $\vec{b}$, c, f et u sont aussi suffisamment régulières. Une simple intégration par parties montre que pour $\varphi \in C^1(\bar{Q})$, on a

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)\, \varphi(x,t)\, dxdt \quad &= -\int_Q y(x,t)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\, dxdt \\ &\quad + \int_\Omega y(x,T)\, \varphi(x,T)\, dx - \int_\Omega y(x,0)\, \varphi(x,0)\, dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_Q -\Delta y(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt &= \int_Q \nabla y(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)\,dxdt \\ &\quad - \int_\Sigma \tfrac{\partial y}{\partial n}(s,t)\,\varphi(s,t)\,dsdt.\end{aligned}$$

Multipliant alors (2.1a) par une fonction test φ, intégrant et prenant en compte les deux identités précédentes ainsi que la condition au bord (2.1b) et la condition initiale (2.1c), nous obtenons

$$\begin{aligned}&-\int_Q y(x,t)\,\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dxdt + \nu\int_Q \nabla y(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)\,dxdt \\ &+\int_Q \Big(\vec{b}(x,t)\cdot\nabla y(x,t) + c(x,t)y(x,t)\Big)\,\varphi(x,t)\,dxdt \\ &= \int_Q f(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt + \int_\Omega u(x)\,\varphi(x,0)\,dx - \int_\Omega y(x,T)\,\varphi(x,T)\,dx.\end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, les termes dans la partie de gauche de l'identité précédente font intervenir des opérateurs avec de "bonnes" propriétés (de continuité et de coercivité entre autres) et sont gérables. Dans la partie de droite, le dernier terme est délicat et pour "s'en débarasser", nous choisirons une fonction test qui s'annule sur $\Omega\times\{T\}$. Nous avons ainsi montré que si le problème (2.1) admet une solution classique y, alors cette solution satisfait la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}&-\int_I \Big(y(t),\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\Big)\,dt + \int_I a\left(t,y(t),\varphi(t)\right)dt \\ &= \int_I (f(t),\varphi(t))\,dt + (u,\varphi(0)) \quad \forall\varphi\in C^1(\bar{Q}) \text{ tel que } \varphi(T)=0 \text{ dans } \Omega, \qquad (2.2)\end{aligned}$$

où la forme bilinéaire a est définie par

$$a(t,w,v) = \nu\left(\nabla w,\nabla v\right) + \Big(\vec{b}(t)\cdot\nabla w, v\Big) + \left(c(t)w,v\right).$$

Remarquons finalement que si l'on choisit φ de la forme

$$\varphi = \psi\otimes\phi \qquad \text{avec } \psi\in\mathcal{D}\left(]-\infty,T[\right) \text{ et } \phi\in C^1(\bar{\Omega})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}&-\int_I (y(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I a\left(t,y(t),\phi\right)\psi(t)\,dt \\ &\qquad = \int_I (f(t),\phi)\,\psi(t)\,dt + (u,\phi)\,\psi(0).\end{aligned}$$

Revenons à présent à notre problème. Les données n'étant pas nécessairement régulières, l'existence d'une solution classique n'est pas garantie. Cependant, chercher une solution au problème variationnel précédent semble plus accessible et plus pertinent dans le sens où le problème est bien posé dans un cadre fonctionnel plus large et en présence de données moins régulières.

Nous allons analyser chaque terme pour déterminer l'espace correspondant et donner un sens rigoureux à nos calculs.

• Le premier point concerne la régularité de y par rapport à t et plus particulièrement le sens à donner à la dérivée en temps dans le premier terme. Choisissant $V = H^1(\Omega)$ et supposant que $y \in L^2(I; H^1(\Omega))$ et $\phi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$|(y(t), \phi)| \leq \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} .$$

La fonction $t \longmapsto (y(t), \phi)\, \psi'(t)$ appartient donc à $L^2(I) \subset L^1(I)$.

• De même, des arguments classiques montrent que pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
&|a(t, y(t), \phi)| \\
&= \left|\nu\, (\nabla y(t), \nabla \phi) + \left(\vec{b}(t) \cdot \nabla y(t), \phi\right) + (c(t)y(t), \phi)\right| \\
&\leq \nu\, |(\nabla y(t), \nabla \phi)| + \left|\left(\vec{b}(t) \cdot \nabla y(t), \phi\right)\right| + |(c(t)y(t), \phi)| \\
&\leq \nu \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{b}(t) \cdot \nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \|c(t)y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \nu \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{b}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \|c(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\nu + \|\vec{b}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\nu + \|\vec{b}\|_{L^\infty(Q)} + \|c\|_{L^\infty(Q)}\right) \|y(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} < +\infty. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Il vient que la fonction $t \longmapsto a\,(t, y(t), \phi)$ appartient à $L^2(I)$. Finalement, une fois que $f \in L^2(Q)$ et que

$$|(f(t), \phi)| \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} ,$$

nous concluons que $t \longmapsto (f(t), \phi)$ appartient à $L^2(I)$. En résumé, si $y \in L^2(I; H^1(\Omega))$ et $\phi \in H^1(\Omega)$, alors la formule variationnelle obtenue plus haut a un sens.

Toutes ces considérations nous amènent à la définition suivante.

Définition 2.1.1. *Soient $\vec{b} \in L^\infty(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ et $u \in L^2(\Omega)$. Une fonction $y \in L^2(I; H^1(\Omega))$ est une solution faible de* (2.1) *si*

$$\begin{aligned}
&-\int_I (y(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a\,(t, y(t), \phi)\, \psi(t)\, dt \\
&= \int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt + (u, \phi)\, \psi(0) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[) \ \text{ et } \forall \phi \in H^1(\Omega). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2. *De ce qui précède, nous savons que* $t \mapsto (y(t), \phi) \in L^2(I)$, $t \mapsto a(t, y(t), \phi) \in L^2(I)$ *et* $t \mapsto (f(t), \phi) \in L^2(I)$. *Ce sont donc des éléments de* $\mathcal{D}'(I)$, *avec*

$$\begin{aligned} -\int_I (y(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt &= -\langle (y(\cdot), \phi), \psi' \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \\ &= \left\langle \tfrac{d}{dt} (y(\cdot), \phi), \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I), \end{aligned}$$

$$\int_I a(t, y(t), \phi)\, \psi(t)\, dt = \langle a(\cdot, y(\cdot), \phi), \psi \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I),$$

et

$$\int_I (f(t), \phi)\, \psi(t)\, dt = \langle (f(\cdot), \phi), \psi \rangle_{\mathcal{D}'(I), \mathcal{D}(I)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(I).$$

Ces arguments montrent que si $y \in L^2(I; H^1(\Omega))$ *est une solution faible de* (2.1), *alors*

$$\tfrac{d}{dt} (y(\cdot), \phi) + a(\cdot, y(\cdot), \phi) = (f(\cdot), \phi) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(I),$$

pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$. *Cette formulation inspirera la définition du problème approché dans la méthode de Galerkin.*

Remarque 2.1.3. *La condition initiale* $(2.1)_3$ *apparaît de manière faible dans la formulation* (2.4) *car le fait que* y *appartienne à* $L^2(I; H^1(\Omega))$ *n'est pas suffisant pour donner un sens à* $y(0)$. *Mais nous montrerons plus loin que* $y \in L^2(I; H^1(\Omega)) \cap C(\bar{I}; L^2(\Omega))$, *impliquant ainsi que* $y(0)$ *existe et donnant un sens à la condition initiale* $y(0) = u$.

2.1.2 Solvabilité

Après avoir défini une formulation faible adéquate, nous allons construire la solution correspondente grâce à la méthode de Faedo-Galerkin, en utilisant un développement dans une base adéquate. Le plan général de l'étude est classique et peut-être résumé comme suit :

- (i) Formuler et résoudre le problème approché.
- (ii) Établir des estimations a priori appropriées pour la solution approchée.
- (iii) Utiliser des arguments de compacité classiques pour démontrer la convergence de la solution approchée vers une limite.
- (iv) Démontrer que la limite est une solution faible du problème continu d'origine.
- (v) Analyser l'unicité de la solution ainsi obtenue.

En général, les points (ii) et (v) requièrent des propriétés de coercivité de l'opérateur A (et donc de la forme bilinéaire a qui lui est associée). Dans notre cas, cela revient à garantir l'existence d'une constante $\gamma > 0$ tel que

$$a(t, \phi, \phi) \geq \gamma \|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

i.e. tel que

$$\nu \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\vec{b}(t) \cdot \nabla \phi, \phi\right) + (c(t)v, \phi) \geq \gamma \|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Il est facile de voir qu'en dehors des cas restreignant les coefficients $\vec{b}$ et c (comme par exemple avec $\vec{b} = 0$ et $c(t) \geq c_0 > 0$ p.p. sur I), il n'est pas évident de satisfaire ce type de condition. Pour contourner ces difficultés, il faut se rappeler que l'on a à faire à l'opérateur d'évolution $\frac{\partial}{\partial t} + A$ et utiliser des propriétés intéressantes de ce dernier. Plus précisément, et comme nous allons le voir de manière plus rigoureuse ci-dessous, nous pouvons montrer que y est une solution faible de (2.1) si, et seulement si, $z = e^{-kt}y$ est solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + Az + kz = e^{-kt}f & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(\cdot, 0) = u & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Plus précisément , nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.1.4. *Soit $k \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors, y est une solution faible de* (2.1) *si, et seulement si, $z = e^{-kt}y$ est solution du problème suivant*

$$\begin{aligned} -\int_I (z(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a_k\,(t, z(t), \phi)\, \psi(t)\, dt \\ = \int_I \left(e^{-kt} f(t), \phi\right) \psi(t)\, dt + (u, \phi)\, \psi(0) \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[)$ et tout $\phi \in H^1(\Omega)$, avec a_k défini par

$$a_k(t, w, \phi) = a(t, w, \phi) + k(w, \phi).$$

Démonstration. Soit y une solution faible de (2.1). Remarquant que si $\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[)$ alors $e^{-kt}\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[)$, nous déduisons de (2.4) que

$$\begin{aligned} -\int_I (y(t), \phi) \left(e^{-kt}\psi(t)\right)' dt + \int_I a\,(t, y(t), \phi)\, e^{-kt}\psi(t)\, dt \\ = \int_I (f(t), \phi)\, e^{-kt}\psi(t)\, dt + (u, \phi)\, e^0\psi(0) \end{aligned} \tag{2.7}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}\,(]-\infty, T[)$ et tout $\phi \in H^1(\Omega)$. De l'autre côté, on a

$$\begin{aligned} (y(t), \phi) \left(e^{-kt}\psi(t)\right)' &= (y(t), \phi) \left(e^{-kt}\psi'(t) - ke^{-kt}\psi(t)\right) \\ &= \left((z(t), \phi)\, \psi'(t) - k\,(z(t), \phi)\, \psi(t)\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$a\,(t, y(t), \phi)\, e^{-kt}\psi(t) = a\,(t, z(t), \phi)\, \psi(t). \tag{2.9}$$

Combinant (2.7)-(2.9), nous obtenons

$$-\int_I (z(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I \underbrace{\left(a\,(t, z(t), \phi) + k\,(z(t), \phi)\right)}_{a_k(t, z(t), \phi)} \psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \left(e^{-kt} f(t), \phi\right) \psi(t)\, dt + (u, \phi)\, \psi(0)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right)$ et tout $\phi \in H^1(\Omega)$. Autrement dit, $z = e^{-kt} y$ est solution de (2.6). La réciproque peut-être obtenue de la même manière en prenant $e^{kt}\psi$ ($\psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right)$) comme fonction test dans (2.6). □

L'idée est alors de choisir le paramètre k de sorte que la forme bilinéaire a_k soit coercive et que le problème (2.6) (et donc (2.4)) admette une solution.

Lemme 2.1.5. *On a*

$$a_k(t, \phi, \phi) \geq \tfrac{\nu}{2} \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(k - \|c\|_{L^\infty(Q)} - \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}\right) \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

pour presque tout $t \in I$ *et pour tout* $\phi \in H^1(\Omega)$.

Démonstration. Des calculs standard montrent que

$$\begin{aligned} a_k(t, \phi, \phi) &= \nu \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\vec{b}(t) \cdot \nabla \phi, \phi\right) + \left((c(t) + k)\, \phi, \phi\right) \\ &\geq \nu \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\|\vec{b}(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left(k - \|c(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \nu \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left(k - \|c\|_{L^\infty(Q)}\right) \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$. Grâce à l'inégalité de Young,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad xy \leq \varepsilon x^2 + \tfrac{1}{4\varepsilon} y^2, \tag{2.10}$$

on obtient

$$\left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{\nu}{2} \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu} \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Par conséquent

$$a_k(t, \phi, \phi) \geq \tfrac{\nu}{2} \|\nabla \phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(k - \|c\|_{L^\infty(Q)} - \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}\right) \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 2.1.6. *Une conséquence directe du lemme précédent est que si k est choisi de sorte que*

$$k - \|c\|_{L^\infty(Q)} - \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu} > 0,$$

alors

$$\begin{aligned} a_k(t,\phi,\phi) &\geq \tfrac{\nu}{2}\left\|\nabla\phi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(k - \|c\|_{L^\infty(Q)} - \frac{\left\|\vec{b}\right\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}\right)\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \underbrace{\min\left(\tfrac{\nu}{2}, k - \|c\|_{L^\infty(Q)} - \frac{\left\|\vec{b}\right\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}\right)}_{>0}\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Ceci implique que, pour presque tout $t \in I$, la forme bilinéaire $a_k(t,\cdot,\cdot)$ est coercive sur $H^1(\Omega)$.

La solution de (2.6) est construite grâce à la méthode de Faedo-Galerkin en utilisant un développement dans une base appropriée. Cette méthode classique est très utile pour l'étude théorique des problèmes non-stationnaires. L'existence de la base que nous utiliserons, et dont les propriétés sont énoncés dans le lemme suivant, a été établie dans [6], Lemme VII.2.1.

Lemme 2.1.7. *Il existe une famille dénombrable $(\omega_k)_k \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que*

(i) $(\omega_k)_k$ est une base dans $H^1(\Omega)$ et son enveloppe linéaire est dense dans $H^1(\Omega)$.

(ii) $(\omega_i,\omega_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i,j \in \mathbb{N}$.

(iii) Soit $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $c_1,\cdots,c_m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\|\phi - \sum_{i=1}^m c_i\omega_i\right\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

Le résultat d'existence et d'unicité d'une solution au problème (2.6) est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 2.1.8. *Soient $\vec{b} \in L^\infty(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ et $u \in L^2(\Omega)$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$k \geq \tfrac{\nu}{2} + \|c\|_{L^\infty(Q)} + \frac{\left\|\vec{b}\right\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}.$$

Le problème (2.6) admet une unique solution $z \in L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$. Cette solution satisfait les estimations suivantes

$$\|z\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{2}{\nu}\|f\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.11}$$

$$\|z\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \tfrac{2}{\nu}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{4}{\nu^2}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.12}$$

De plus, $z \in W(I;H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')$ et satisfait la formulation équivalente suivante

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial z(t)}{\partial t}, \phi\right\rangle + a_k\left(t, z(t), \phi\right) = \left(e^{-kt}f(t), \phi\right) & \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ z(0) = u. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous notons V_m l'espace vectoriel engendré par les m premiers éléments de la base $(\omega_j)_{1,\cdots,m}$ et P_m l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur V_m. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } z_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \text{ solution, pour } 1 \leq j \leq m, \text{ de} \\ (z_m'(t), \omega_j) + a_k\left(t, z_m(t), \omega_j\right) = \left(e^{-kt} f(t), \omega_j\right), \\ z_m(0) = u_m \end{cases} \tag{2.13}$$

où $u_m = P_m u$. Vu que

$$(u - P_m u, \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in V_m,$$

il vient que

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \omega_i,$$

où le vecteur ρ est la solution du système

$$(M\rho)_j = (u, \omega_j),$$

et où

$$M_{ij} = (\omega_i, \omega_j) \qquad 1 \leq i, j \leq m \tag{2.14}$$

est la matrice de masse. De plus

$$\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} = \|P_m u\|^2_{L^2(\Omega)} = (P_m u, u) \leq \|P_m u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

impliquant que

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement, nous savons que $(u_m)_m$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$.

Les fonctions g_{jm} sont des fonctions scalaires définies sur $\bar{I}$ et (2.13) est, relativement à ces fonctions, un système différentiel linéaire avec des coefficients non constants et avec une condition initiale en $t = 0$. En effet, pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} \left((\omega_i, \omega_j)\, g_{im}'(t) + a_k\left(t, \omega_i, \omega_j\right) g_{im}(t)\right) = \left(e^{-kt} f(t), \omega_j\right)$$

ce qui donne le système linéaire suivant

$$\begin{cases} M g_m'(t) + N(t) g_m(t) = F(t) \\ M g_m(0) = g_0 \end{cases}$$

où, pour tout $1 \leq i, j \leq m$

$$N_{ij}(t) = a_k\left(t, \omega_i, \omega_j\right), \quad F_j(t) = \left(e^{-kt} f(t), \omega_j\right) \quad (g_0)_i = (u, \omega_i). \tag{2.15}$$

Comme les éléments $\omega_1, \cdots, \omega_m$ sont linéairement indépendants, la matrice M est inversible et le système précédent est réduit à

$$\begin{cases} g_m'(t) + M^{-1}N(t)g_m(t) = M^{-1}F(t), \\ g_m(0) = M^{-1}g_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Le système différentiel (2.16) admet une solution unique $g_m \in C(\bar{I})$ et donc $g_m' \in L^2(I)$. Par conséquent, le problème approché (2.13) admet une solution unique z_m satisfaisant

$$z_m \in C(\bar{I}; V_m) \quad \text{et} \quad z_m' \in L^2(I; V_m).$$

Le reste de la preuve sera divisé en cinq parties. En premier lieu, nous établissons des estimations H^1 par rapport à la variable espace. Nous passons ensuite à la limite, et établissons les estimations a priori. Finalement, nous établissons le résultat de régularité, la formulation équivalente et terminons par le résultat d'unicité.

Étape 1. Estimation a priori dans $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H^1(\Omega))$. Multipliant (2.13) par g_{jm} et sommant, nous obtenons

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|z_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + a_k(t, z_m(t), z_m(t)) = e^{-kt}\left(f(t), z_m(t)\right).$$

Prenant en compte le Lemme 2.1.5 et la Remarque 2.1.6, il vient que si $k \in \mathbb{R}$ satisfait

$$k \geq \tfrac{\nu}{2} + \|c\|_{L^\infty(Q)} + \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu},$$

alors

$$a_k(t, \phi, \phi) \geq \tfrac{\nu}{2}\|\phi\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour p. t. } t \in I \text{ et tout } \phi \in H^1(\Omega). \tag{2.17}$$

De l'autre côté, utilisant l'inégalité de Young (2.10), on a

$$\begin{aligned} e^{-kt}\left(f(t), z_m(t)\right) &\leq e^{-kt}\|f(t)\|_{(L^2(\Omega)}\|z_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|z_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \tfrac{\nu}{4}\|z_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Combinant ces inégalités, il vient que

$$\tfrac{d}{dt}\left(\|z_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \tfrac{\nu}{2}\|z_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tfrac{2}{\nu}\|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et s $(0 < s < T)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|z_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|z_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{2}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &\leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{2}{\nu}\|f\|^2_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{s\in\bar{I}}\|z_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{2}{\nu}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.18}$$

De manière similaire, en intégrant entre 0 et T, on obtient

$$\|z_m(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\nu}{2}\|z_m\|^2_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{2}{\nu}\|f\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.19}$$

La suite $(z_m)_m$ est, par conséquent, uniformément bornée dans l'espace $L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$.

Étape 2. Passage à la limite. D'après les étapes précédentes, la suite $(z_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, une fonction $z \in L^\infty(I;L^2(\Omega))$ et une fonction $z^* \in L^2(I;H^1(\Omega))$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} z_m = z \qquad \text{faible}^* \text{ dans } L^\infty(I;L^2(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$\lim_{m\to\infty} z_m = z^* \qquad \text{faiblement dans } L^2(I;H^1(\Omega)). \tag{2.21}$$

De (2.20) et (2.21), nous déduisons en particulier que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (z_m(t), \varphi(t))\, dt = \int_I (z(t), \varphi(t))\, dt$$

et

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I (z_m(t), \varphi(t))\, dt = \int_I (z^*(t), \varphi(t))\, dt$$

pour tout $\varphi \in L^2(I;L^2(\Omega))$ et donc $z \equiv z^* \in L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$.

Des arguments classiques montrent alors que pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(]-\infty, T[)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I \left(a_k\left(t, z_m(t), \phi\right) - a_k\left(t, z(t), \phi\right)\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&\leq \left|\nu \int_I \left(\nabla\left(z_m(t) - z(t)\right), \nabla\phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&+ \left|\int_I \left(\vec{b}(t)\cdot\nabla\left(z_m(t) - z(t)\right), \phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&+ \left|\int_I \left(c(t)\left(z_m(t) - z(t)\right), \phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&= \left|\nu \int_I \left(\nabla\left(z_m(t) - z(t)\right), \nabla\phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&+ \left|\int_I \left(\nabla\left(z_m(t) - z(t)\right), \vec{b}(t)\phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&+ \left|\int_I \left(z_m(t) - z(t), c(t)\phi\right)\psi(t)\, dt\right| \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{quand } m \to +\infty.
\end{aligned}$$

Remarquant que (2.13) implique que

$$-\int_I (z_m(t), \omega_j)\,\psi'(t)\, dt + \int_I a_k(t, z_m(t), \omega_j)\psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \left(e^{-kt} f(t), \omega_j\right) \psi(t)\, dt + (z_{0m}, \omega_j)\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right),$$

et prenant en compte les résultats de convergence précédents, nous obtenons par passage à la limite

$$-\int_I (z(t), \omega_j)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a_k(t, z(t), \omega_j)\psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \left(e^{-kt} f(t), \omega_j\right) \psi(t)\, dt + (u, \omega_j)\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right).$$

Arguant par densité, il vient que

$$-\int_I (z(t), \phi)\, \psi'(t)\, dt + \int_I a_k(t, z(t), \phi)\psi(t)\, dt$$

$$= \int_I \left(e^{-kt} f(t), \phi\right) \psi(t)\, dt + (u, \phi)\, \psi(0) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right) \quad \text{et} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \tag{2.22}$$

Autrement dit, z satisfait la formulation variationnelle (2.6).

Étape 3. Estimations a priori. Les estimations (2.11) et (2.12) sont une conséquence directe de (2.18) et (2.19).

Étape 4. Régularité et formulation équivalente. Prouvons maintenant que $\frac{\partial z}{\partial t} \in L^2(I; (H^1(\Omega))')$. Soit $\mathcal{A}_k(\cdot)z$ la forme linéaire définie par

$$\langle \mathcal{A}_k(t)z(t), \phi\rangle = a_k(t, z(t), \phi) \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Des arguments similaires à ceux utilisés pour établir (2.3) montrent que

$$|a_k\left(t, z(t), \phi\right)| \leq \left(\nu + \left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} + \|c + k\|_{L^\infty(Q)}\right) \|z(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$$

pour presque tout $t \in I$ et pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$. Donc, pour tout $\varphi \in L^2(I; H^1(\Omega))$ on a

$$\left|\int_I \langle \mathcal{A}_k(t)z(t), \varphi(t)\rangle\, dt\right| = \left|\int_I a_k\left(t, z(t), \varphi(t)\right)\right|$$

$$\leq \left(\nu + \left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} + \|c + k\|_{L^\infty(Q)}\right) \int_I \|z(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi(t)\|_{H^1(\Omega)}\, dt$$

$$\leq \left(\nu + \left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} + \|c + k\|_{L^\infty(Q)}\right) \|z\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \|\varphi\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_k(\cdot)z\|_{L^2(I;H^1(\Omega)')} &= \sup_{\substack{\varphi \in L^2(I;H^1(\Omega)) \\ \|\varphi\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq 1}} \left|\int_I \langle \mathcal{A}_k(t)z(t), \varphi(t)\rangle\, dt\right| \\
&\leq \left(\nu + \left\|\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} + \|c + k\|_{L^\infty(Q)}\right) \|z\|_{L^2(I;H^1(\Omega))}
\end{aligned}$$

montrant ainsi que $\mathcal{A}_k(\cdot)z \in L^2(I; H^1(\Omega)')$. De l'autre côté, prenant en compte la Remarque 2.1.2, nous savons que z satisfait

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(z,\phi) &= \left(e^{-kt}f,\phi\right) - a_k(\cdot, z(\cdot), \phi) \\ &= \left\langle e^{-kt}f - \mathcal{A}_k(\cdot)z, \phi\right\rangle \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(I), \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Utilisant (1.1), on obtient $\langle z, \phi\rangle = (z,\phi)$ et donc

$$\tfrac{d}{dt}\langle z,\phi\rangle = \left\langle e^{-kt}f - \mathcal{A}_k(\cdot)z, \phi\right\rangle \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega), \tag{2.23}$$

et comme $e^{-kt}f - \mathcal{A}_k(\cdot)z \in L^2(I; (H^1(\Omega))')$, d'après le Lemme 1.4.4, on déduit que $\frac{\partial z}{\partial t} \in L^2(I; (H^1(\Omega))')$.

• Reste à prouver que $z(0) = u$. D'après ce qui précède, $z \in W(I; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \hookrightarrow C(\bar{I}; L^2(\Omega))$. Multipliant l'identité (2.23) par $\psi \in \mathcal{D}(]-\infty, T[)$ et utilisant la formule d'intégration par parties (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} -\int_I (z(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I a_k(t, z(t), \phi)\psi(t)\,dt \\ = \int_I \left(e^{-kt}f(t), \phi\right)\psi(t)\,dt + (z(0),\phi)\,. \end{aligned}$$

Comparant avec (2.22), on obtient

$$(z(0) - u, \phi)\,\psi(0) = 0.$$

Choisissant ψ telle que $\psi(0) = 1$, il vient que $z(0) = u$. Ainsi, et prenant en compte la Remarque 2.1.2, nous concluons que z satisfait

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial z(t)}{\partial t}, \phi\right\rangle + a_k(t, z(t), \phi) = \left(e^{-kt}f(t), \phi\right) \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ z(0) = u. \end{cases}$$

Étape 5. Unicité. Soient z_1 et z_2 deux solutions de (2.6). Utilisant la formulation précédente, nous pouvons facilement voir que $\chi = z_1 - z_2$ satisfait

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \chi(t)}{\partial t}, \phi\right\rangle + a_k(t, \chi(t), \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ \chi(0) = 0. \end{cases}$$

En posant $\phi = \chi(t)$ et prenant en compte (1.3), on obtient

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a_k(t, \chi(t), \chi(t)) = 0.$$

Intégrant alors entre 0 et t, nous déduisons que

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t a(s, \chi(s), \chi(s))\,ds = 0$$

et grâce à (2.17), il vient que

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu \int_0^t \|\chi(s)\|^2_{H^1(\Omega)}\,ds \le 0.$$

Ainsi

$$\|\chi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in \bar{I}$$

autrement dit

$$\chi(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \bar{I}.$$

Ceci montre l'unicité de la solution et termine la preuve. □

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité relatif à l'équation d'état.

Théorème 2.1.9. *Soient $\vec{b} \in L^\infty(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ et $u \in L^2(\Omega)$. Alors, le problème* (2.1) *admet une unique solution faible y_u. Cette solution satisfait les estimations suivantes*

$$\|y_u\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \leq e^{kT}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\,\|f\|_{L^2(Q)}\right),$$

$$\|y_u\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq e^{kT}\sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\,\|f\|_{L^2(Q)}\right),$$

où k est défini comme dans la Proposition 2.1.8. *De plus, y_u appartient à $W(I;H^1(\Omega),(H^1(\Omega))')$ et satisfait la formulation équivalente suivante*

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial y_u(t)}{\partial t}, \phi \right\rangle + a\left(t, y_u(t), \phi\right) = (f(t), \phi) & \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ y_u(0) = u. \end{cases}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité d'une solution sont une conséquence directe de la Proposition 2.1.4 et de la Proposition 2.1.8. Les estimations viennent de (2.11) et (2.12), en remarquant que $y_u = e^{kt}z$. □

Nous terminons cette section par des résultats de régularité qui nous seront utiles pour la suite.

Proposition 2.1.10. *Soient $u \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$. Alors, la solution faible y_u du problème* (2.1) *appartient à $C([\varepsilon,T];H^1(\Omega)) \cap L^2(]\varepsilon,T[;D(\Delta))$ pour tout $\varepsilon \in I$, où*

$$D(\Delta) = \left\{\phi \in H^1(\Omega) \mid \Delta\phi \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0\right\}.$$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ arbitraire, $\psi \in \mathcal{D}(]t_0,T[)$ et $\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(I)$ son prolongement continu dans I. Prenant la fonction $(t-t_0)\tilde{\psi} \in \mathcal{D}(I)$ dans la formulation variationnelle correspondant à y_u, nous obtenons

$$-\int_{t_0}^T (y_u(t),\phi)\left(\psi(t) + (t-t_0)\psi'(t)\right)\,dt + \int_{t_0}^T a\left(t, y_u(t), \phi\right)(t-t_0)\psi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^T (f(t),\phi)\,(t-t_0)\psi(t)\,dt, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(]t_0,T[) \text{ et } \forall\phi \in H^1(\Omega),$$

ce qui montre que la fonction $\chi = (t-t_0)y_u$ satisfait

$$-\int_{t_0}^T (\chi(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_{t_0}^T a\left(t,\chi(t),\phi\right)\psi(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} ((t-t_0)f(t) + y_u(t), \phi)\, \psi(t)\, dt, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(]t_0, T[) \text{ et } \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Autrement dit χ est une solution faible de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial t} + A\chi = y_u + (t-t_0)f & \text{dans } \Omega \times]t_0, T[, \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]t_0, T[, \\ \chi(\cdot, t_0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Prenant en compte le Théorème 2.1.9, nous savons que $y_u \in L^\infty(I; L^2(\Omega))$ et donc $y_u + (t-t_0)f \in L^2(I; L^2(\Omega))$. Appliquant encore une fois cette proposition (mais au système précédent), nous concluons que $\chi \in L^2(I; H^1(\Omega))$ et satisfait donc

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \nu\Delta\chi = y_u + (t-t_0)f - \vec{b} \cdot \nabla\chi - c\chi & \text{dans } \Omega \times]t_0, T[, \\ \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]t_0, T[, \\ \chi(\cdot, t_0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $y_u + (t-t_0)f - \vec{b} \cdot \nabla\chi - c\chi \in L^2(I; L^2(\Omega))$. Des résultats classiques relatifs à l'équation de la chaleur (voir par exemple [9] p.113-114) montrent que $\chi \in C([t_0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(]t_0, T[; D(\Delta))$. Il vient alors que $y_u = \frac{1}{t-t_0}\chi \in C([\varepsilon, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(]\varepsilon, T[; D(\Delta))$ pour tout $\varepsilon \in]t_0, T[$. Vu que t_0 est arbitraire dans I, nous déduisons que cette régularité est valable pour tout $\varepsilon \in I$. □

Finalement, nous considérons les conditions garantissant que la solution faible de (2.1) est bornée dans le cylindre Q.

Proposition 2.1.11. *i) Soient $u \in L^2(\Omega)$ et $f \equiv 0$. Alors, la solution faible y_u du problème* (2.1) *associée appartient à $C(]0, T] \times \bar{\Omega})$ et satisfait l'estimation suivante*

$$\|y_u\|_{C(\bar{\Omega} \times]0,T])} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de u.

ii) Soient $u \equiv 0$ et $f \in L^\delta(I; L^d(\Omega))$ avec

$$\delta > 1, \quad d > 1, \quad \tfrac{1}{d} + \tfrac{n}{2\delta} \leq \tfrac{1}{2}. \tag{2.24}$$

Alors, la solution faible y_u du problème (2.1) *est continue sur $\bar{Q}$ et satisfait l'estimation suivante*

$$\|y_u\|_{C(\bar{Q})} \leq C_1\|f\|_{L^\delta(I; L^d(\Omega))},$$

où C_1 est une constante positive indépendante de f. De plus, il existe une constante $\mu \in]0, 1[$, indépendante de f, telle que $y_u \in C^{\mu, \frac{\mu}{2}}(\bar{Q})$ et

$$\|y_u\|_{C^{\mu, \frac{\mu}{2}}(\bar{Q})} \leq C_2\|y\|_{C(\bar{Q})},$$

où C_2 est une constante positive indépendante de f.

Démonstration. La preuve de l'assertion *i*), ainsi que celle de la continuité dans *ii*), peut-être trouvée dans [8], chapitre 3, section 7-section 10. Pour la continuité hölderienne, voir le chapitre 3 dans [5]. □

Remarque 2.1.12. *La formulation faible dans le cas ii) est la même que celle considérée dans la Proposition* 2.1.9*. Grâce aux injections de Sobolev, nous savons que*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \quad \text{où } 2^* = \tfrac{2n}{n-2}.$$

De l'autre côté, nous savons par hypothèse que $f(t) \in L^d(\Omega)$ et, grâce à (2.24)*, que $d \geq 2$. Il vient alors que*

$$\tfrac{1}{d} + \tfrac{1}{2^*} \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^*} = \tfrac{n-1}{n} < 1,$$

ce qui montre que le produit scalaire $(f(t), \phi)$ est bien défini.

2.2 Équation adjointe

Dans cette section, nous considérons la solvabilité des systèmes de la forme

$$-\tfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p = h \qquad \text{dans } Q, \tag{2.25a}$$

$$\tfrac{\partial p}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma, \tag{2.25b}$$

$$p(\cdot, T) = g \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.25c}$$

où l'opérateur A^* est défini par

$$A^* p = -\nu \Delta p - \operatorname{div}\big(\vec{b} p\big) + cp.$$

Pour obtenir une formulation variationnelle adéquate, nous allons raisonner comme dans la section 2.1.1. Supposant que les données $\vec{b}$, c, h et g soient suffisamment régulières et que le problème (2.25) admette une solution classique suffisamment régulière, pour tout $\varphi \in C^1(\bar{Q})$, on a

$$\begin{aligned}\int_Q -\tfrac{\partial p}{\partial t}(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt &= \int_Q p(x,t)\,\tfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\,dxdt \\ &\quad - \int_\Omega p(x,T)\,\varphi(x,T)\,dx + \int_\Omega p(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_Q -\Delta p(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt &= \int_Q \nabla p(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)\,dxdt \\ &\quad - \int_\Sigma \tfrac{\partial p}{\partial n}(s,t)\,\varphi(s,t)\,dsdt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_Q \operatorname{div}\Big(\vec{b}(x,t)p(x,t)\Big)\,\varphi(x,t)\,dxdt &= \int_Q \vec{b}(x,t)\cdot\nabla p(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt \\ &\quad + \int_Q \operatorname{div}\vec{b}(x,t)\,p(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt\end{aligned}$$

Multipliant alors (2.25a) par une fonction test φ, intégrant et prenant en compte les trois identités précédentes ainsi que la condition au bord (2.25b) et la condition terminale (2.25c), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_Q p(x,t)\,\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dxdt + \nu\int_Q \nabla p(x,t)\cdot\nabla\varphi(x,t)\,dxdt \\
&+\int_Q \Big(-\vec{b}(x,t)\cdot\nabla p(x,t) + c(x,t)y(x,t) - \operatorname{div}\vec{b}(x,t)\,p(x,t)\Big)\,\varphi(x,t)\,dxdt \\
&= \int_Q h(x,t)\,\varphi(x,t)\,dxdt + \int_\Omega g(x)\,\varphi(x,T)\,dx - \int_\Omega p(x,0)\,\varphi(x,0)\,dx.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que si le problème (2.25) admet une solution classique p, alors cette solution satisfait la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned}
&\int_I \Big(p(t), \tfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\Big)\,dt + \int_I a^*\left(t, p(t), \varphi(t)\right)dt \\
&= \int_I (h(t),\varphi(t)) + (g,\varphi(T)) \quad \forall\varphi\in C^1(\bar{Q}) \text{ tel que } \varphi(0)=0 \text{ dans } \Omega, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

où la forme bilinéaire a^* est définie par

$$a^*(t,w,v) = \nu\left(\nabla w,\nabla v\right) - \Big(\vec{b}(t)\cdot\nabla w, v\Big) + \Big(\Big(c(t) - \operatorname{div}\vec{b}(t)\Big)\,w, v\Big).$$

La forme bilinéaire a^* possède des propriétés similaires à celles de la forme a, la seule différence significative (en plus du signe moins devant le terme convectif) est liée au terme supplémentaire faisant intervenir $\operatorname{div}\vec{b}$. Si l'on n'impose pas que ce terme soit nul (i.e. $\operatorname{div}\vec{b}=0$), il nous faudra une hypothèse de régularité plus forte sur $\vec{b}$. Choisissant φ de la forme

$$\varphi = \psi\otimes\phi \qquad \text{avec } \psi\in\mathcal{D}\left(]0,+\infty[\right) \text{ et } \phi\in C^1(\bar{\Omega})$$

nous obtenons la formulation suivante.

Définition 2.2.1. *Soient $\vec{b}\in L^\infty(I;W^{1,\infty}(\Omega))$, $c\in L^\infty(Q)$, $h\in L^2(Q)$ et $g\in L^2(\Omega)$. Une fonction $p\in L^2(I;H^1(\Omega))$ est une solution faible de* (2.25) *si*

$$\begin{aligned}
&\int_I (p(t),\phi)\,\psi'(t)\,dt + \int_I a^*\left(t,p(t),\phi\right)\psi(t)\,dt \\
&= \int_I (h(t),\phi)\,\psi(t)\,dt + (g,\phi)\,\psi(T) \quad \forall\psi\in\mathcal{D}\left(]0,+\infty[\right) \text{ et } \forall\phi\in H^1(\Omega). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

La solvabilité de ce problème peut-être établie en utilisant les mêmes arguments que pour le Théorème 2.1.9.

Théorème 2.2.2. *Soient $\vec{b}\in L^\infty(I;W^{1,\infty}(\Omega))$, $c\in L^\infty(Q)$, $h\in L^2(Q)$ et $g\in L^2(\Omega)$. Alors, le problème* (2.25) *admet une unique solution faible p. Cette solution*

$$\|p\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega))} \le e^{k^*T}\left(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\,\|h\|_{L^2(Q)}\right),$$

$$\|p\|_{L^2(I;H^1(\Omega))} \leq e^{k^*T}\sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\left(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\tfrac{2}{\nu}}\,\|h\|_{L^2(Q)}\right),$$

où $k^* \in \mathbb{R}$ *est tel que*

$$k^* \geq \tfrac{\nu}{2} + \left\|c - div\vec{b}\right\|_{L^\infty(Q)} + \frac{\|\vec{b}\|^2_{L^\infty(Q)}}{2\nu}.$$

De plus, p *appartient à* $W(I; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$ *et satisfait la formulation équivalente suivante*

$$\begin{cases} -\left\langle \frac{\partial p(t)}{\partial t}, \phi \right\rangle + a^*\left(t, p(t), \phi\right) = (h(t), \phi) & \forall \phi \in H^1(\Omega), \\ p(T) = g. \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$\widetilde{\vec{b}}(t) = \vec{b}(T-t), \quad \widetilde{c}(t) = c(T-t), \quad \widetilde{h}(t) = h(T-t) \qquad \widetilde{p}(t) = p(T-t).$$

Alors un simple changement de variable montre que p est solution faible de (2.25) si et seulement si $\widetilde{p}$ satisfait

$$\int_I (\widetilde{p}(t), \phi)\,\tilde{\psi}'(t)\,dt + \int_I a^*\left(t-T, \widetilde{p}(t), \phi\right)\widetilde{\psi}(t)\,dt$$

$$= \int_I \left(\widetilde{h}(t), \phi\right)\widetilde{\psi}(t)\,dt + (g, \phi)\,\widetilde{\psi}(0) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}\left(]-\infty, T[\right) \text{ et } \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Le résultat suit en utilisant exactement les mêmes arguments que pour le problème (2.1). □

De la même manière que dans le cas de l'équation d'état, nous avons le résultat suivant pour l'équation adjointe.

Proposition 2.2.3. *i) Soient* $g \in L^2(\Omega)$ *et* $h \equiv 0$*. Alors, la solution faible* p *du problème* (2.25) *associée appartient à* $C(]0,T] \times \bar{\Omega})$ *et satisfait l'estimation suivante*

$$\|p\|_{C(\bar{\Omega}\times[0,T[)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C *est une constante positive indépendante de* g*.*

ii) Soient $g \equiv 0$ *et* $h \in L^\delta(I; L^d(\Omega))$ *avec* d *et* δ *satisfaisant* (2.24)*. Alors, la solution faible* p *du problème* (2.25) *associée est continue sur* $\bar{Q}$ *et satisfait l'estimation suivante*

$$\|p\|_{C(\bar{Q})} \leq C_1\|h\|_{L^\delta(I;L^d(\Omega))},$$

où C_1 *est une constante positive indépendante de* h*.*

2.3 Existence et unicité du contrôle optimal

Pour établir l'existence d'un contrôle optimal, nous devons analyser les propriétés de continuité de l'application qui au contrôle associe l'état. Plus précisément, avons besoin du résultat suivant.

Proposition 2.3.1. *Soit $(u_m)_m$ une suite convergeant faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$ et soient $(y_{u_m})_m$ et y_u les états associés respectifs. Alors $(y_{u_m})_m$ converge vers y_u faiblement dans $L^2(I;H^1(\Omega))$ et faible* dans $L^\infty(I;L^2(\Omega))$. De plus, nous avons*

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_{u_m}(t) - y_u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall t \in]0,T]. \tag{2.28}$$

Démonstration. La suite $(u_m)_m$ étant faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$ est bornée dans cet espace. Grâce à la Théorème 2.1.9, la suite $(y_{u_m})_m$ est bornée dans $L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$. Il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, une fonction $y \in L^\infty(I;L^2(\Omega)) \cap L^2(I;H^1(\Omega))$ tel que

$$\lim_{m\to\infty} y_{u_m} = y \qquad \text{faible}^* \text{ dans } L^\infty(I;L^2(\Omega)),$$

$$\lim_{m\to\infty} y_{u_m} = y \qquad \text{faiblement dans } L^2(I;H^1(\Omega)).$$

Utilisant exactement les mêmes arguments que dans l'étape 2 de la preuve de la Proposition 2.1.8, nous déduisons que la limite y est la solution faible de l'équation d'état correspondant à u (i.e. $y \equiv y_u$).

Posons $z_m = (t-t_0)y_{u_m}$ et $z = (t-t_0)y_u$ avec $t_0 \in I$. Arguant comme dans la première partie de la preuve de la proposition 2.1.10, il vient que

$$\begin{cases} \frac{\partial z_m}{\partial t} + Az_m = y_{u_m} + (t-t_0)f & \text{dans } \Omega\times]t_0,T[, \\ \frac{\partial z_m}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]t_0,T[, \\ z_m(\cdot,t_0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + Az = y_u + (t-t_0)f & \text{dans } \Omega\times]t_0,T[, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]t_0,T[, \\ z(\cdot,t_0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Ainsi $z_m - z$ satisfait l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial e_m}{\partial t} + Ae_m = y_{u_m} - y_u & \text{dans } \Omega\times]t_0,T[, \\ \frac{\partial e_m}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]t_0,T[, \\ e_m(\cdot,t_0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous savons que $y_{u_m} - y_u$ est bornée dans $L^\infty(]t_0,T[;L^2(\Omega))$ et qu'elle y converge vers 0 pour la topologie faible-*. Il vient alors que $z_m - z$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(I;H^1(\Omega))$. De plus, grâce à la Proposition 2.1.11, nous avons

$$\|z_m - z\|_{C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar\Omega\times[t_0,T])} \le C\,\|y_m - y_u\|_{L^\infty(]t_0,T[;L^2(\Omega))}\,,$$

et $z_m - z$ est donc bornée dans $C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega} \times [t_0, T])$. Prenant en compte le fait que l'injection de $C^{\mu,\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega} \times [t_0, T])$ dans $C(\bar{\Omega} \times [t_0, T])$ soit compacte, nous déduisons que

$$\lim_{m\to\infty} \|z_m - z\|_{C(\bar{\Omega}\times[t_0,T])} = 0 \qquad \forall t_0 \in I.$$

Soit $t_{\max} \in]t_0, T]$ tel que

$$\|y_{u_m}(t_{\max}) - y_u(t_{\max})\|_{L^2(\Omega)} = \|y_{u_m} - y_u\|_{C([t_0,T];L^2(\Omega))}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&(t_{\max} - t_0)\|y_{u_m} - y_u\|_{C([t_0,T];L^2(\Omega))} \\
&= (t_{\max} - t_0)\|y_{u_m}(t_{\max}) - y_u(t_{\max})\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|(t_{\max} - t_0)(y_{u_m}(t_{\max}) - y_u(t_{\max}))\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max_{t\in[t_0,T]} \|(t - t_0)(y_{u_m}(t) - y_u(t))\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|z_m - z\|_{C([t_0,T];L^2(\Omega))} \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|z_m - z\|_{C(\bar{\Omega}\times[t_0,T])} \\
&\longrightarrow 0 \qquad \forall t_0 \in I,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème 2.3.2. *Soit le problème*

$$(P) \quad \begin{cases} \textit{Minimiser} \quad J(u) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |y_u(T) - y_d|^2 \, dx \\ u \in U_{ad}, \end{cases}$$

où $y_d \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée et où l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} est un ensemble convexe fermé borné non vide dans $L^2(\Omega)$.

Alors (P) admet une unique solution $\bar{u}$.

Démonstration. La preuve est divisée en deux parties.

Partie 1. Existence. Soit $(u_m)_m \subset U_{ad}$ une suite minimisante de (P). Elle est uniformément bornée dans U_{ad} et il existe alors une sous-suite, encore indexée par m, et $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ tel que

$$u_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{u} \qquad \text{faiblement dans } L^2(\Omega).$$

De plus, U_{ad} étant un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ est faiblement fermé et donc $\bar{u} \in U_{ad}$. De l'autre côté, grâce à la proposition 2.3.1 , on a

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_{u_m}(T) - \bar{y}(T)\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

où $\bar{y}$ est l'état associé à $\bar{u}$. Ainsi, il est facile de voir que

$$\inf(P) = \lim_{m\to+\infty} J(u_m) = J(\bar{u}),$$

montrant ainsi que $\bar{u}$ est un contrôle optimal.

Partie 2. Unicité. Supposons que (P) admet deux solutions $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$ et notons $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ les états associés respectifs. L'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} étant convexe, il vient que

$$\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2 \in U_{ad} \qquad \forall\lambda \in]0,1[.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} J(\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2) \geq \min(P) &= \lambda\min(P) + (1-\lambda)\min(P) \\ &= \lambda J(\bar{u}_1) + (1-\lambda)J(\bar{u}_2). \end{aligned} \tag{2.29}$$

De l'autre côté, utilisant des calculs standard et le fait que l'équation soit linéaire nous obtenons

$$\begin{aligned} J(\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2) &= J(\bar{u}_1 + (1-\lambda)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)) \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|y_{\bar{u}_1+(1-\lambda)(\bar{u}_2-\bar{u}_1)}(T) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\bar{y}_1(T) + (1-\lambda)(\bar{y}_2(T) - \bar{y}_1(T)) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\bar{y}_1(T) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{(1-\lambda)^2}{2}\left\|\bar{y}_2(T) - \bar{y}_1(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +\lambda\left(\bar{y}_2(T) - y_d, \bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right) \\ &= J(\bar{u}_1) + \tfrac{(1-\lambda)^2}{2}\left\|\bar{y}_2(T) - \bar{y}_1(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +(1-\lambda)\left(\bar{y}_1(T) - y_d, \bar{y}_2(T) - \bar{y}_1(T)\right), \end{aligned}$$

et de manière similaire

$$\begin{aligned} J(\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2) &= J(\bar{u}_2 + \lambda(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)) \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|y_{\bar{u}_2+\lambda(\bar{u}_1-\bar{u}_2)}(T) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\bar{y}_2(T) + \lambda(\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\bar{y}_2(T) - y_d\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\lambda^2}{2}\left\|\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +\lambda\left(\bar{y}_2(T) - y_d, \bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right) \\ &= J(\bar{u}_2) + \tfrac{\lambda^2}{2}\left\|\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad +\lambda\left(\bar{y}_2(T) - y_d, \bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right), \end{aligned}$$

Multipliant ces identités par λ et $1-\lambda$ respectivement et sommant, il vient que

$$\begin{aligned} J(\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2) &= \lambda J(\bar{u}_1) + (1-\lambda)J(\bar{u}_2) \\ &\quad -\tfrac{(1-\lambda)\lambda}{2}\left\|\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Combinant (2.29) et (2.30), nous déduisons que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a

$$\begin{aligned} \lambda J(\bar{u}_1) + (1-\lambda)J(\bar{u}_2) &\leq J(\lambda\bar{u}_1 + (1-\lambda)\bar{u}_2) \\ &= \lambda J(\bar{u}_1) + (1-\lambda)J(\bar{u}_2) \\ &\quad -\tfrac{(1-\lambda)\lambda}{2}\left\|\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\|\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ et par conséquent $\bar{y}_1(T) - \bar{y}_2(T) = 0$. Pour montrer que $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, observons que la fonction $\bar{y} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ satisfait l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + A\bar{y} = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \bar{y}(0) = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Prenant en compte la Proposition 2.1.10, nous déduisons que $\bar{y} \in C([\varepsilon, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(]\varepsilon, T[; D(\Delta))$ pour tout $\varepsilon \in I$. De plus, pour tout $t \in]\varepsilon, T[$, on a

$$\left\| \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(t) - \nu \Delta \bar{y}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| -\vec{b}(t) \cdot \nabla \bar{y}(t) - c(t)\bar{y}(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \bar{y}(t) \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Vu que $\bar{y}(T) = 0$, et grâce à l'unicité rétrograde de l'équation de la chaleur (cf. Lemme 1.5.1), nous déduisons que

$$\bar{y}(t) = 0 \qquad \text{pour tout } t \in [\varepsilon, T]$$

et comme ε est arbitraire, nous concluons que

$$\bar{y}(t) = 0 \qquad \text{pour tout } t \in]0, T].$$

La fonction $\bar{y}$ appartenant à $C(\bar{I}; L^2(\Omega))$, il vient que

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{y}(0) = \lim_{t \to 0} \bar{y}(t) = 0.$$

Ceci termine la preuve. □

2.4 Conditions d'optimalité

Nous nous intéressons à présent aux conditions nécessaires d'optimalité. Nous commencerons par rappeler le résultat suivant.

Lemme 2.4.1. *Soient $\phi, z \in H^1(\Omega)$ et $\vec{\omega} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tel que*

$$\textit{div } \vec{\omega} = 0 \textit{ dans } \Omega \quad \textit{et} \quad \vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0 \textit{ sur } \partial\Omega.$$

Alors

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla \phi, \phi) = 0, \tag{2.31}$$

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla \phi, z) = -(\vec{\omega} \cdot \nabla z, \phi). \tag{2.32}$$

Démonstration. Pour prouver (2.31), il suffit de remarquer que

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla \phi, \phi) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega \vec{\omega}(x) \cdot \nabla \left(|\phi(x)|^2 \right) dx,$$

d'appliquer la formule de Green pour obtenir

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla \phi, \phi) = \tfrac{1}{2} \left(-\int_\Omega (\operatorname{div} \vec{\omega}(x)) \, |\phi(x)|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{\omega}(s) \cdot \vec{n}(s) \, |\phi(s)|^2 \, ds \right) = 0.$$

La propriété (2.32) est alors une conséquence de la propriété (2.31). En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{\omega}\cdot\nabla(\phi+z),\phi+z) \\ &= (\vec{\omega}\cdot\nabla\phi,\phi)+(\vec{\omega}\cdot\nabla z,z)+(\vec{\omega}\cdot\nabla\phi,z)+(\vec{\omega}\cdot\nabla z,\phi) \\ &= (\vec{\omega}\cdot\nabla\phi,z)+(\vec{\omega}\cdot\nabla z,\phi) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

Lemme 2.4.2. *Soient $c\in L^\infty(Q)$ et $\vec{b}\in L^\infty(I;W^{1,\infty}(\Omega))$ tel que*

$$div\,\vec{b}=0 \text{ dans } Q \quad \text{et} \quad \vec{b}\cdot\vec{n}=0 \text{ sur } \Sigma.$$

Soient $u,g\in L^2(\Omega)$. Soit z la solution faible du problème avec condition initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}+Az=0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial z}{\partial n}=0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(\cdot,0)=u & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

et soit χ la solution faible du problème avec condition terminale

$$\begin{cases} -\frac{\partial \chi}{\partial t}+A^*\chi=0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial \chi}{\partial n}=0 & \text{sur } \Sigma, \\ \chi(\cdot,T)=g & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

Alors

$$(g,z(T))=(u,\chi(0))$$

Démonstration. Posant $\phi=\chi(t)$ dans la formulation variationnelle correspondant à z, on obtient

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial z(t)}{\partial t},\chi(t)\right\rangle + a\left(t,z(t),\chi(t)\right)=0, \\ z(0)=u. \end{cases}$$

Choisissant alors $\phi=z(t)$ dans la formulation variationnelle correspondant à χ, on obtient

$$\begin{cases} -\left\langle \frac{\partial \chi(t)}{\partial t},z(t)\right\rangle + a^*\left(t,\chi(t),z(t)\right)=0, \\ \chi(T)=g. \end{cases}$$

Prenant en compte le Lemme 2.4.1 et combinant ces deux identités, nous déduisons que

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial z(t))}{\partial t},\chi(t)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \chi(t)}{\partial t},z(t)\right\rangle=0, \\ z(0)=u, \\ \chi(T)=g. \end{cases}$$

Intégrant entre 0 et T et prenant en compte la formule 1.2, il vient que

$$\begin{cases} (z(T),\chi(T))-(z(0),\chi(0))=0, \\ z(0)=u, \\ \chi(T)=g, \end{cases}$$

ce qui donne le résultat. □

Le lemme suivant montre la controllabilité approchée de l'équation d'état.

Lemme 2.4.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in L^2(\Omega)$ tel que*

$$\|y_u(T) - y_d\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon,$$

où y_u est la solution de (2.1) *correspondant à u.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que notre énoncé est faux. Ceci implique en particulier que l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{y_u(T) \mid u \in L^2(\Omega)\}$$

n'est pas dense dans $L^2(\Omega)$. Une conséquence du théorème de Hahn-Banach (voir le Lemme 1.6.1) implique qu'il existe un élément $g \in L^2(\Omega)$, $g \neq 0$, tel que

$$(g, R) = 0 \qquad \forall R \in \mathcal{R},$$

autrement dit

$$(g, y_u(T)) = 0 \qquad \forall u \in L^2(\Omega). \tag{2.35}$$

Notons y_0 la solution de (2.1) associée au contrôle 0 et soit z_u la solution de (2.33) associée à u. L'équation étant linéaire, il est clair que $y_u = z_u + y_0$. De plus, prenant $u = 0$ dans (2.35), nous déduisons que

$$(g, y_0(T)) = 0.$$

Grâce à (2.35), il est alors évident que

$$(g, z_u(T)) = 0 \qquad \forall u \in L^2(\Omega). \tag{2.36}$$

Soit χ la solution de (2.34). Grâce à (2.36) et au Lemme 2.4.2, on obtient

$$0 = (g, z_u(T)) = (\chi(T), z_u(T)) = (\chi(0), u) \qquad \forall u \in L^2(\Omega),$$

et par conséquent $\chi(0) = 0$. Utilisant à nouveau la régularité rétrograde de l'équation de la chaleur (comme dans la preuve du Théorème 2.3.2), nous déduisons que

$$\chi(t) = 0 \qquad \forall t \in \bar{I}$$

et donc $\chi(T) = g = 0$. Il y a une contradiction. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.4.4. *Soient $f \in L^2(Q)$, $c \in L^\infty(Q)$ et $\vec{b} \in L^\infty(I; W^{1,\infty}(\Omega))$ tel que*

$$div\, \vec{b} = 0 \quad et \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0.$$

Soit $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ un contrôle optimal et soit $\bar{y}$ l'état correspondant. Il existe $\bar{p} \in W(I; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$, solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + A^* \bar{p} = 0 & dans\ Q, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0 & sur\ \Sigma, \\ \bar{p}(T) = \bar{y}(T) - y_d & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

tel que

$$(\bar{p}(0), v - \bar{u}) \geq 0 \qquad pour\ tout\ v \in U_{ad}. \tag{2.38}$$

Démonstration. Pour $\rho \in]0,1[$ et $v \in U_{ad}$, soit $u_\rho = \bar{u} + \rho\,(v - \bar{u}) \in U_{ad}$. Il est clair que par définition, on a

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.39}$$

De l'autre côté, de simples calculs montrent que

$$\begin{aligned} J(u_\rho) - J(\bar{u}) &= \tfrac{1}{2} \left\| y_{u_\rho}(T) - y_d \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2} \left\| \bar{y}(T) - y_d \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \tfrac{1}{2} \left\| \bar{y}(T) - y_d + \rho(y_v(T) - \bar{y}(T)) \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2} \left\| \bar{y}(T) - y_d \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \rho\,(\bar{y}(T) - y_d, y_v(T) - \bar{y}(T)) + \tfrac{\rho^2}{2} \left\| y_v(T) - \bar{y}(T) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{J(u_\rho) - J(\bar{u})}{\rho} &= (\bar{y}(T) - y_d, y_v(T) - \bar{y}(T)) + \tfrac{\rho}{2} \left\| y_v(T) - \bar{y}(T) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\longrightarrow (\bar{y}(T) - y_d, y_v(T) - \bar{y}(T)) \qquad \text{quand } \rho \to 0^+. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Combinant (2.39) et (2.40), nous obtenons

$$(\bar{y}(T) - y_d, y_v(T) - \bar{y}(T)) \geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad}. \tag{2.41}$$

Considérons maintenant l'équation adjointe (2.37). D'après le Théorème 2.2.2, ce problème admet une solution faible unique $\bar{p} \in W(I; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$. Remarquant que $\bar{y} - y_v$ est la solution de (2.33) correspondant à $\bar{u} - v$, grâce au Lemme 2.4.2, nous déduisons que

$$(\bar{y}(T) - y_d, y_v(T) - \bar{y}(T)) = (\bar{u} - v, \bar{p}(0))\,. \tag{2.42}$$

Le résultat est alors une conséquence de (2.41) et (2.42). □

Dans la cas particulier où $U_{ad} = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \right\}$, nous avons la caractérisation suivante.

Corollaire 2.4.5. *Supposons que les hypothèses du Théorème* 2.4.4 *soient vérifiées. Soit $\bar{u}$ le contrôle optimal, $\bar{y}$ et $\bar{p}$ l'état et l'état adjoint associés. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites*

i) Si $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < \alpha$, alors $\bar{y}(T) = y_d$ et $\bar{p} = 0$ dans Q.

ii) Si $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ et $\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, alors $\bar{y}(T) = y_d$ dans Ω et $\bar{p} = 0$ dans Q.

iii) Si $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ et $\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)} > 0$ alors $\bar{u} = \frac{-\alpha\,\bar{p}(0)}{\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}}$ dans Ω.

Démonstration. i) Supposons que $\bar{y}(T) \neq y_d$. Donc $J(\bar{u}) > 0$ et d'après le Lemme 2.4.3, il existe $u \in L^2(\Omega)$ tel que

$$J(u) < J(\bar{u}).$$

Vu que $\bar{u}$ est le contrôle optimal, il vient que $u \notin U_{ad}$ et donc

$$\alpha < \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit alors

$$\lambda = \frac{\alpha - \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}},$$

et

$$v = \bar{u} + \lambda(u - \bar{u}) = \bar{u} + \left(\alpha - \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}\right) \frac{u-\bar{u}}{\|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}.$$

D'après ce qui précède, $\lambda \in]0,1[$. De plus

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \left(\alpha - \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}\right) \frac{\|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u-\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}} = \alpha,$$

et donc $v \in U_{ad}$ et

$$J(v) = J(\lambda u + (1-\lambda)\bar{u}) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda) J(\bar{u}) < J(\bar{u}).$$

Ceci contredit l'optimalité de $\bar{u}$. Par conséquent $\bar{y}(T) = y_d$ et, grâce au Théorème 2.2.2, nous déduisons que

$$\|\bar{p}\|_{C(\bar{I};L^2(\Omega))} \leq e^{k^*T} \|\bar{y}(T) - y_d\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

impliquant que $\bar{p} = 0$.

ii) Supposons maintenant que $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ et $\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$. La régularité rétrograde de l'équation de la chaleur implique que $\bar{p} = 0$ dans Q et par conséquent que $\bar{y}(T) - y_d = \bar{p}(T) = 0$.

iii) Supposons finalement que $\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \alpha$ et $\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)} > 0$.

D'après (2.38), nous avons

$$-(\bar{p}(0), v) \leq -(\bar{p}(0), \bar{u}) \qquad \forall v \in U_{ad},$$

et donc

$$\begin{aligned} -(\bar{p}(0), \bar{u}) &= \sup_{v \in U_{ad}} (-(\bar{p}(0), v)) = \sup_{\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha} (-(\bar{p}(0), v)) \\ &= \alpha \sup_{\|\frac{v}{\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \leq 1} \left(-\left(\bar{p}(0), \tfrac{v}{\alpha}\right)\right) \\ &= \alpha \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$-(\bar{p}(0), \bar{u}) = \alpha \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où nous déduisons que

$$\left\| \frac{\bar{u}}{\alpha} + \frac{\bar{p}(0)}{\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = 2 + 2\left(\frac{\bar{u}}{\alpha}, \frac{\bar{p}(0)}{\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}}\right) = 0.$$

Ainsi

$$\frac{\bar{u}}{\alpha} + \frac{\bar{p}(0)}{\|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}} = 0,$$

ce qui prouve le résultat énoncé. □

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[2] E. Casas, K. Kunisch, Using sparse control methods to identify sources in linear diffusion-convection equations, Inverse problems 35 (2019), 1-17.

[3] E. Casas, C. Clason, K. Kunisch, Parabolic control problems in measure spaces with sparse solutions, SIAM Journal on Control and Optimization 51 (2013), 28-63.

[4] R. Dautrey, J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for Science and Technology*, Vol. 5, Springer, 2000.

[5] E. Di Benedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations*, Vol. I and II, Springer Tracts in Natural Philosophy 38, 39, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[7] J.-M. Ghidaglia, Some backward uniqueness results, Nonlinear Analysis 10 (1986), 777-790.

[8] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968.

[9] R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, vol. 49 of Math. Surv. and Monogr. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[10] R. Temam, *Navier-Stokes equations* , North-Holland, Amsterdam, 1977.