République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse et Applications.

Thème

Solution viable d'une inclusion différentielle du premier ordre

Présenté par :

- Kenioua Chahinez.
- Boussadia Meryem.

Devant le jury :

Président	: Yarou Mustapha	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	: Fetouci Nora	M.C.B.	Université de Jijel
Examinateur	: Slamnia Fatiha	M.C.B.	Université de Jijel

Promotion **2019/2020**

Remerciements

Nous tenons à remercier en pemier lieu ***Allah*** le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance et notre plus vive gratitude à notre encadreur : M^{lle} ***Fetouci Nora*** qui a assuré avec beaucoup d'intérêt l'évolution de ce mémoire, et nous la remercions également pour ses remarques admirables et ses conseils précieux.

Nous remercions également les membres du jury : Mr ***Yarou Mustapha*** et M^{me} ***Slamnia Fatiha*** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger ce travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements à tous les enseignants du département de mathématiques.

En fin, c'est avec beaucoup de plaisir que nous pouvons remercier profondément nos familles pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de nos études.

Chahinez & ***Meryem***

Dédicace

Je dédie ce mémoire

*À mes chères parents ma mère **Razika** et mon père **Moussa**.*
Pour leur confiance, leur patience et leur soutien...
À mes frères **Badis** & **Imad**.
À mes sœurs.

À toute ma famille et mes chères amies.

À toute qui m'aiment et que j'aime.

♡ **Chahinez** ♡

Dédicace

Je dédie ce mémoire

*À mes très chères parents ma mère **Noura** et mon père **Salah**.*

Pour leur confiance, leur patience et leur soutien...

*À mes frères **Saad eddine**, **Ilyas***

Amir** & **Yahia.

*À mon fiancé **Hicham.***

*À mes sœurs **Ahlam**, **Amani** & **Selsabil**.*

À toute ma famille et mes chères amies.

À toute qui m'aiment et que j'aime.

♡ ***Meryem*** ♡

Table des matières

Notations principales

• $\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
• $\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
• $\mathbb{R}^n$	Ensemble des vecteurs de dimension $n(n \in \mathbb{N})$ à coordonnées réelles.
• $\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty, +\infty]$.
• E	Espace métrique.
• X	Espace vectoriel.
• H	Espace de Hilbert.
• Y	Espace de Banach.
• A	Un ensemble quelconque.
• I	Un intervalle de $\mathbb{R}$.
• B	La boule unité ouverte de H.
• $\overline{B}$	La boule unité fermée de H.
• $\mathcal{F}(X, Y)$	L'espace des applications définies de X à Y.
• $C(X, Y)$	L'ensemble des applications continues définies de X à Y.
• $< .,. >$	Croché de dualité.
• $L^p(I, A)$	$\{f : I \to A,\ f\ mesurable\ sur\ I\ et \int\limits_I \|f(x)\|^p dx < +\infty$ où $1 \leq p < +\infty\}$.
• $L^1(I, A)$	L'espace des applications intégrables sur I à valeurs dans A.
• $L^2(I, A)$	L'espace de Hilbert des applications de carré intégrable sur I à valeurs dans A.
• $L^\infty(I, A)$	L'espace des applications essentiellement bornée sur I à valeurs dans A.

- $W^{1,2}(I,H)$ L'espace des fonctions x absolument continues définies sur I à valeurs dans H telles que $\frac{dx}{dt} \in L^2(I,H)$.
- $gph(F)$ Le graphe de la multi-application F.
- $d(x,A)$ La distance entre le point x et l'ensemble A.
- $co(A)$ L'enveloppe convexe de l'ensemble A.
- $\overline{co}(A)$ L'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A.
- $\sigma(Y,Y')$ Topologie faible sur Y.
- $\sigma(Y',Y)$ Topologie faible* sur Y'.
- $x_n \to x$ $(x_n)_n$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$ $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.
- $x_n \rightharpoonup^* x$ $(x_n)_n$ converge faiblement* vers x.
- $\mathcal{V}_A(x)$ L'ensemble des voisinages de x dans A.
- $I_A(.)$ La fonction indicatrice de A.
- I_d La fonction identité.

Introduction

L'objectif de ce travail est l'étude de la viabilité des solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre. Depuis les années 80, s'est développée à partir de l'analyse multivoque, la théorie de viabilité, elle occupe une place importante grâce à son champ d'application à diverses disciplines : (l'économie mathématiques, la théorie des jeux, théorie de contrôle, l'optimisation, ...). Pour obtenir une solution viable, celle qui vérifie $x(t) \in K$ où K est un sous ensemble fermé, on doit ajouter aux conditions assurant l'existence de solutions, une hypothèse supplémentaire dite condition de tangence ou condition tangentielle. Le problème de viabilité pour des équations différentielles a été résolu pour la première fois par "Nagumo" [13] en 1942, et depuis il a connu une très large extension. Ce résultat a été étendu au cas multivoque qui est l'objet de notre travail.

Notre mémoire est structuré en trois chapitres comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux définitions, notions et résultats qui nous serviront tout au long de ce travail, citons entre autres : quelques concepts d'analyse convexe, topologie faible et faible* et des généralités sur les multi-applications.

Nous présentons dans le deuxième chapitre un travail de J. P. Aubin et A. Cellina [2]. Ces derniers ont prouvé l'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle du premier ordre de la forme suivante

$$(PV) \quad \begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \ p.p. & \forall t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, & \\ x(t) \in K & \forall t \in [0, T[, \end{cases}$$

où $F : K \rightrightarrows H$ est semi continue supérieurement à valeurs compactes convexes (K un fermé de H).

Dans la plupart des travaux concernant les inclusions différentielles, dont le second membre est une multi-application seulement semi-continue supérieurement, la convexité et la compacité s'avèrent des conditions incontournables. Dans la littérature, si F est une multi-application définie de K à valeurs compactes convexes non vides dans H, alors d'une manière abstraite, une solution viable est obtenue en ajoutant aux conditions entraînant l'existence de solutions, une hypothèse sur la direction du champ multivoque dite condition tangentielle de type

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset$$

tel que

$$T_K(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\alpha > 0} \bigcup_{0 < h < \alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon \overline{B} \right)$$

$T_K(x)$: désigne le cône contingent de Bouligand à K en x.

Les techniques de démonstration reposent sur la méthode d'Euler : on construit une suite de solutions approchées et via le théorème d'Ascoli-Arzèla, on montre qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une solution de notre problème.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions viables en l'absence, en général de la convexité du second membre.

Le problème étudié est de la forme

$$(PV1) \quad \begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \; p.p. & \forall t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, & \\ x(t) \in K & \forall t \in [0,T[, \end{cases}$$

tel que F est une multi-application semi continue supérieurement de K à valeurs dans un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et il existe une fonction V propre convexe semi continue inférieurement, $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $F(x) \subset \partial V(x), \ \forall x \in K$, où ∂V est le sous-différentiel de V.

Chapitre 1

Préliminaires et résultats auxiliaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions, notions et résultats fondamentaux qui seront très utiles dans notre travail.
Nous commençons par des définitions de quelques espaces utiles, ensuite on définit la topologie faible et faible étoile, puis on donne quelques concepts d'analyse convexe et on termine par une partie sur des notions d'analyse multivoque et quelques résultats classiques.

1.1 Quelques espaces

Pour plus de détails voir [7],[9] et [14].

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1. (***Distance***) *On considère un ensemble E, on appelle distance sur E une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, vérifiant les trois propriétés suivantes*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in E$

2. $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in E$

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in E.$

Définition 1.2. (***Espace métrique***) *Soit E un ensemble muni de la distance d, alors (E,d) s'appelle un espace métrique.*

Définition 1.3. *Soit (E,d) un espace métrique. Si x est un point de E et A une partie de E alors on a*

$$d(x,A) = inf\{d(x,y),\ y \in A\}.$$

1.1.2 Ensemble compact-Espace compact-localement compact

Définition 1.4. *Soit $\mathcal{T}$ un espace topologique.*

▶ *Un recouvrement de $\mathcal{T}$ est une famille $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de parties de $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$.*
Si de plus $\mathcal{I}$ est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est un recouvrement fini de $\mathcal{T}$.

▶ *Soit $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ un recouvrement de $\mathcal{T}$, si $J \subset \mathcal{I}$ tel que $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, on dit que $(A_j)_{j\in\mathcal{I}}$ est un sous-recouvrement de $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$.*

▶ *Un recouvrement ouvert de $\mathcal{T}$ est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ telle que $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$.*

Définition 1.5. *Soient (E,d) un espace métrique, $A \subset E$. On dit que A est compact si de tout recouvrement ouverts de A on peut extraire un sous recouvrement fini c'est à dire, si $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille d'ouverts de A telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} U_i$, alors il existe un sous ensemble fini $J \subset \mathcal{I}$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.*

Définition 1.6. *Soient (E,d) un espace métrique, $A \subset E$.*
-On dit que A est compact si toute suite d'éléments de A admet une sous suite convergente dans A.
-On dit que A est relativement compact si $\overline{A}$ est compact dans E.

Théorème 1.1.1. *Un espace $\mathcal{T}$ est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède une base de voisinage.*

Exemple 1.1.1. *Dans $\mathbb{R}^n$, les parties relativement compactes sont les parties bornées.*

Remarque 1.1.1. $\triangleright$ *Une partie relativement compacte d'un espace $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble M de $\mathcal{T}$ inclus dans une partie compacte de $\mathcal{T}$.*

Remarque 1.1.2. $\triangleright$ *Dans un espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.*
$\triangleright$ *Dans un espace vectoriel topologique séparé, les parties relativement compactes restent bornées, mais la réciproque est fausse.*

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.7. *Soit X un espace vectoriel. Un produit scalaire $< u, v >$ est une forme bilinéaire de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive (i.e. $< u, v > \geq 0,\ \forall u \in X$ et $< u, u >> 0$ si $u \neq 0$).*

Définition 1.8. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $< u, v >$ et qui est complet pour la norme $< u, u >^{\frac{1}{2}}$.*

Exemple 1.1.2. *$\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert.*

1.2 Topologie faible-faible*

Pour plus de détails sur cette section voir [7].

1.2.1 Topologie faible

Soient Y un espace de Banach et $f \in Y'$, Y' est le dual de Y.
On désigne par $\varphi_f : Y \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) =< f, x >$. Lorsque f décrit Y', on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in Y'}$ de Y dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.9. *La topologie faible $\sigma(Y, Y')$ est la topologie la moins fine sur Y rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in Y'}$.*

Définition 1.10. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\underset{n\to\infty}{liminf}\ x_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{sup}(\underset{k\geq n}{inf}\ x_k)$$

$$\underset{n\to\infty}{limsup}\ x_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{inf}(\underset{k\geq n}{sup}\ x_k).$$

Proposition 1.2.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Y. On a*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(Y, Y') \iff < f, x_n > \to < f, x >, \forall f \in Y'$.*
2. *Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(Y, Y')$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(Y, Y')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(Y, Y')$ et si $f_n \to f$ dans Y', alors $< f_n, x_n > \to < f, x >$.*

1.2.2 Topologie faible*

On va définir maintenant la topologie faible* que l'on note $\sigma(Y', Y)$. Pour chaque $x \in Y$ on considère l'application $\varphi_x : Y' \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = < f, x >$. Lorsque x parcourt Y on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in Y}$ de Y' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.11. *La topologie faible* désignée aussi $\sigma(Y', Y)$ est la topologie la moins fine sur Y' rendant les applications $(\varphi_x)_{x\in Y}$.*

Proposition 1.2.2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* Y'. *On a*

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(Y',Y) \iff < f_n, x > \to < f, x >, \forall x \in Y.$
2. *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(Y',Y)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|$.
3. *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(Y',Y)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* Y, *alors* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

1.3 Quelques concepts d'analyse convexe

Dans cette section nous présentons quelques notions et résultats élémentaires d'analyse convexe.
Pour plus de détails pour cette section voir [2], [4], [7] et [16].

1.3.1 Ensembles convexes

Soit X un espace vectoriel.

Définition 1.12. *Un sous ensemble* $M \subset X$ *est dit convexe si pour tout* $x, y \in M$, $\forall \lambda \in [0,1]$ *on a*

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in M$$

c'est à dire le segment reliant x *à* y *reste dans l'ensemble* M.

Définition 1.13. (***Enveloppe convexe***) *Soit* $A \subset X$. *On appelle enveloppe convexe de* A *qu'on note* $co(A)$ *l'intersection de tous les sous ensembles convexes contenant* A, *c'est le plus petit convexe contenant* A.

Définition 1.14. (***Enveloppe convexe fermée***) *L'enveloppe convexe fermée de* $A \subset X$ *qu'on la note* $\overline{co}(A)$ *est le plus petit convexe fermée de* X *contenant* A. *Donc c'est l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de* X *contenant* A.

1.3.2 Fonctions convexes

Définition 1.15. (***Domaine effectif***) *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par*

$$Dom(f) = \{x \in X : \ f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.16. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe si pour tout $x, y \in Dom(f)$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 1.17. (***Fonction propre***) *La fonction f est dite propre si et seulement si $f(x) \neq -\infty$, $\forall x \in X$ et $f \not\equiv +\infty$ (i.e., il existe $x_0 \in X$, $f(x_0) \neq +\infty$).*

Définition 1.18. (***Fonction indicatrice***) *Soit A un sous ensemble de X, la fonction indicatrice notée I_A et définie par*

$$\begin{aligned} I_A : X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto I_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ +\infty & x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1. *La fonction indicatrice I_A est une fonction convexe si et seulement si A est un ensemble convexe.*

1.3.3 Autres concepts

Définition 1.19. (***Fonction conjuguée***) *Soit X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique et f une fonction définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la conjuguée de f par*

$$f^*(x) = sup[< x', x > -f(x); \ x \in X], \ pour \ tout \ x' \in X'.$$

Définition 1.20. (***Fonction support***) *Soient X un espace vectoriel, $A \subset X$, on appelle fonction support de A notée par $I_A^*(.)$ la fonction définie sur X' par*

$$\begin{aligned} I_A^* &: X' \to \overline{\mathbb{R}} \\ & x' \to I_A^*(x') = \sup_{x \in A} < x', x >, \end{aligned}$$

c'est la fonction conjuguée de la fonction indicatrice I_A.

• Continuité- Semi-continuité inférieure-supérieure d'une fonction

Définition 1.21. (***Fonction absolument continue***) *Soient Y un espace de Banach, $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to Y$ est dite absolument continue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle I par des intervalles disjoints $[\alpha_k, \beta_k]$ vérifiant $\sum_k (\beta_k - \alpha_k) < \delta$ on a*

$$\sum_k \|f(\beta_k) - f(\alpha_k)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3.1. *Une fonction $f : I \to Y$ est dite absolument continue si et seulement si elle est l'intégrable de sa dérivé, c'est à dire*

$$f(\beta) - f(\alpha) = \int_\alpha^\beta f'(s)\, ds.$$

De plus une fonction absolument continue est dérivable presque partout.

Remarque 1.3.1. $\triangleright$ *Une fonction absolument continue est continue.*

Définition 1.22. (***Fonction lipschitzienne***) *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique (E, d) est dite lipschitzienne (continue lipschitzienne) de rapport k s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k\ d(x_1, x_2),\ \forall x_1, x_2 \in E.$$

Remarque 1.3.2. $\triangleright$ *Une fonction lipschitzienne est absolument continue.*

Définition 1.23. *Soient $\mathcal{T}$ un espace topologique, $f : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$.*

• *On dit que f est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $f(x_0) > \alpha$, l'ensemble*

$$\{x \in \mathcal{T} / f(x) > \alpha\}$$

est un ouvert de $\mathcal{T}$.

$*$ *f est dite s.c.i. sur $\mathcal{T}$ si elle est s.c.i. en tout point de $\mathcal{T}$.*

• *On dit que f est semi-continue supérieurement au point $x_0 \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $f(x_0) < \alpha$, l'ensemble*

$$\{x \in \mathcal{T} / f(x) < \alpha\}$$

est un ouvert de $\mathcal{T}$.

$*$ *f est dite s.c.s. sur $\mathcal{T}$ si elle est s.c.s. en tout point de $\mathcal{T}$.*

Remarque 1.3.3. $\triangleright$ *On dit que la fonction f est s.c.s. si et seulement si la fonction $(-f)$ est s.c.i..*

Proposition 1.3.2. *Soit $\mathcal{T}$ espace topologique, une fonction $f : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite s.c.i. au point $t_0 \in \mathcal{T}$ si est seulement si $\liminf\limits_{t \to t_0} f(t) \geq f(t_0)$.*

Proposition 1.3.3. *Soit $\mathcal{T}$ espace topologique, une fonction $f : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite s.c.s. au point $t_0 \in \mathcal{T}$ si est seulement si $\limsup\limits_{t \to t_0} f(t) \leq f(t_0)$.*

Proposition 1.3.4. *Soit $A \subset X$ un sous ensemble non vide convexe. La fonction indicatrice $I_A(.)$ est une fonction propre convexe s.c.i. sur X si et seulement si A fermé dans X.*

Remarque 1.3.4. $\triangleright$ *Toute fonction continue est s.c.i..*

$\triangleright$ *Une fonction f est continue si et seulement si les fonctions (f) et $(-f)$ sont s.c.i..*

1.4 Quelques notions d'analyse multivoque

L'analyse multivoque est une branche très importante en mathématique, dans cette section on donne quelques définitions et notions élémentaires sur l'analyse multivoque.
Pour plus de détails sur cette partie voir [2] et [10].

1.4.1 Multi-applications

• **Définitions générales**

Définition 1.24. *Soient X_1, X_2 deux ensembles non vides. On dit que F est une multi-application de X_1 dans X_2 si pour tout $x \in X_1$ elle associe un ensemble $F(x)$ de X_2. Et on note*

$$F : X_1 \rightrightarrows X_2$$
$$x \mapsto F(x)$$

Définition 1.25. *Soit $F : X_1 \rightrightarrows X_2$ une multi-application, on définit*
▶ ***Le domaine effectif*** *: est noté $D(F)$ et définie par*

$$D(F) = \{x \in X_1 : F(x) \neq \emptyset\}.$$

▶***L'image :*** *est notée $Im(F)$ et définie par*

$$Im(F) = \bigcup_{x\in D(F)} F(x) = \{y \in X_2,\ \exists x \in D(F),\ y \in F(x)\}.$$

▶ *Soit $A \subset X_1$. On appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de X_2 défini par*

$$F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x) = \{y \in X_2,\ \exists\ x \in A,\ y \in F(A)\}.$$

▶***Le graphe :*** *est noté gph(F) et défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 : \ x \in D(F), \ y \in F(x)\}.$$

▶***La norme :*** *est notée $\|F\|$ et donnée par*

$$\|F\| = \sup_{y \in F(x)} \|y\|.$$

Définition 1.26. *La multi-application inverse est notée F^{-1} et définie par*

$$\begin{aligned} F^{-1} : X_2 &\rightrightarrows X_1 \\ y &\mapsto F^{-1}(y) \end{aligned}$$

avec

$$y \in F(x) \Leftrightarrow x \in F^{-1}(y)$$

Remarque 1.4.1. *Il est facile de voir que*

▷ $D(F^{-1}) = Im(F)$.

▷ $Im(F^{-1}) = D(F)$.

- **Quelques opérations sur les multi-applications**

Définition 1.27. *Soient X_1, X_2 deux ensembles non vides, F et G deux multi-applications $(F, G : X_1 \rightrightarrows X_2)$.*
On définit les opérations suivantes

▶ ***L'union :***

$$\begin{aligned} F \cup G : X_1 &\rightrightarrows X_2 \\ x &\mapsto (F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x). \end{aligned}$$

▶ ***L'intersection :***

$$\begin{aligned} F \cap G : X_1 &\rightrightarrows X_2 \\ x &\mapsto (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x). \end{aligned}$$

▶ ***Le produit cartésien :***

$$\begin{aligned} F \times G : X_1 &\rightrightarrows X_2 \times X_2 \\ x &\mapsto (F \times G)(x) = F(x) \times G(x). \end{aligned}$$

▶ ***La composition :*** *Soit A un autre ensemble tel que $F : A \rightrightarrows X_1$ et $G : X_1 \rightrightarrows X_2$.*

$$\begin{aligned} GoF : A &\rightrightarrows X_2 \\ t &\mapsto (G \circ F)(t) = G(F(t)) = \bigcup_{x \in F(t)} G(x). \end{aligned}$$

1.4.2 Continuité des multi-applications

- **Semi-continuité supérieure (s.c.s.)**

Définition 1.28. *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux espaces topologiques et soit $F : \mathcal{T}_1 \rightrightarrows \mathcal{T}_2$ une multi-application.*
On dit que F est s.c.s. au point $t_0 \in \mathcal{T}_1$, si pour tout ouvert V de $\mathcal{T}_2$ tel que $F(t_0) \subset V$, il existe un voisinage Ω de t_0, (i.e. $\Omega \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_1}(t_0)$) tel que

$$F(t) \subset V, \ \forall t \in \Omega.$$

$*$ *On dit que F est s.c.s. sur $\mathcal{T}_1$ si elle est s.c.s. en tout point de $\mathcal{T}_1$.*

Proposition 1.4.1. *Soient (E_1, d), (E_2, d') deux espaces métriques, $F : E_1 \rightrightarrows E_2$ une multi-application à valeurs fermées, ($F(x)$ fermé de E_2, $\forall x \in E_1$).*
$*$ *Si F est s.c.s. sur E_1 alors le graphe de F est fermé.*

Proposition 1.4.2. *Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux espaces topologiques, tel que $\mathcal{T}_2$ est compact et soit $F : \mathcal{T}_1 \rightrightarrows \mathcal{T}_2$ une multi-application.*
$*$ *Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s. sur $\mathcal{T}_1$.*

Proposition 1.4.3. *Soient* (E_1, d), (E_2, d') *deux espaces métriques,* $F : E_1 \rightrightarrows E_2$ *une multi-application s.c.s. à valeurs compactes.*

$*$ *Si* E_1 *est un espace compact, alors* $F(E_1)$ *est compact.*

• Semi-continuité inférieure (s.c.i.)

Définition 1.29. *Soient* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *deux espaces topologiques,* $F : \mathcal{T}_1 \rightrightarrows \mathcal{T}_2$ *une multi-application.*

On dit que F *est s.c.i. au point* $t_0 \in \mathcal{T}_1$, *si pour tout ouvert* V *de* $\mathcal{T}_2$ *tel que* $F(t_0) \cap V \neq \emptyset$, *il existe un voisinage* Ω *de* $t_0, (i.e.\ \Omega \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_1}(t_0))$ *tel que*

$$F(t) \cap V \neq \emptyset,\ \forall t \in \mathcal{T}_1.$$

$*$ *On dit que* F *est s.c.i. sur* $\mathcal{T}_1$ *si elle est s.c.i. en tout point de* $\mathcal{T}_1$.

Proposition 1.4.4. *Soient* (E_1, d), (E_2, d') *deux espaces métriques,* $F : E_1 \rightrightarrows E_2$ *une multi-application.*

F *est s.c.i. au point* $x_0 \in E_1$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n \subset E_1$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *et pour tout* $y_0 \in F(x_0)$, *il existe une suite* $(y_n)_n \subset E_2$ *tel que* $y_n \in F(x_n)$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Proposition 1.4.5. *Soient* $(E_1, d), (E_2, d')$ *deux espaces métriques,* $F : E_1 \rightrightarrows E_2$ *une multi-application. Si* F *est s.c.i., alors la fonction*

$$f : (E_1 \times E_2) \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = d(F(x), y)$$

est s.c.s..

Remarque 1.4.2. ▷ *Une multi-application est continue en un point si elle est s.c.s. et s.c.i. en ce point.*

▷ *Une multi-application est continue sur un ensemble* A *si elle est continue en tout point de* A.

- **Hémi-continuité supérieure (h.c.s.)**

Définition 1.30. *Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux espaces topologiques muni de la topologie faible et $F : \mathcal{T}_1 \rightrightarrows \mathcal{T}_2$ une multi-application.*

On dit que F est h.c.s. en x_0 si pour tout $(t,t') \in (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2^{'})$, ($\mathcal{T}_2^{'}$ est le dual de $\mathcal{T}_2$) la fonction $I^*_{F(t)}(t')$ est semi-continue supérieurement en x_0.

Proposition 1.4.6. *Tout multi-application semi-continue supérieurement définie de $\mathcal{T}_1$ à valeurs dans $\mathcal{T}_2$ qui est muni de la topologie faible est hémi-continue supérieurement.*

1.4.3 Théorème de convergence

Théorème 1.4.1. *[2] Soit F une multi-application définie de W à U tels que W est un espace de Hausdorff (séparé) localement convexe et U un ensemble fermé convexe contenant dans un espace de Banach.*
Soient F h.c.s., I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_k(.)$ et $y_k(.)$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des fonctions mesurables définies de I à W, U respectivement satisfairont

- *pour tout $t \in I$, $\forall\ V$ un voisinage de 0 dans $(W \times U)$, il existe $k_0 = k_0(t, V)$ tel que*

$$\forall k \geq k_0\ ,\ (x_k(t),\ y_k(t)) \in gph(F) + V,$$

si on a

$$\begin{cases} i.\ x_k(.) \text{ converge vers } x(.) \text{ avec } x \text{ définie de } I \text{ à valeurs dans } W, \\ ii.\ y_k(.) \text{ varie dans } L^1(I,U) \text{ et converge faiblement vers } y(.) \in L^1(I,U). \end{cases}$$

Alors on a pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in gph(F)$.
C'est à dire

$$y(t) \in F(x(t)).$$

1.4.4 Sous différentiel d'une fonction

Les fonctions convexes ne sont pas nécessairement différentiables sur leurs domaines.
Dans cette partie, on parle d'un nouveau concept qui permet de généraliser la notion de différentiabilité : sous-différentiel.
Pour plus de détails sur cette partie voir [4].

Définition 1.31. *Soient X un e.v.n., X' son dual, f est une fonction propre convexe ($f : X \to \overline{\mathbb{R}}$). Le sous-différentiel de f en x est une multi-application de X à valeurs dans X' définie par*

$$\partial f : X \rightrightarrows X'$$
$$x \mapsto \partial f(x) = \{x' \in X',\ f(x) - f(y) \leq < x - y, x' >,\ \forall y \in X\},$$

et donc le sous-différentiel est donné par l'ensemble

$$\partial f(x) = \{x' \in X',\ f(x) - f(y) \leq\ < x - y, x' >,\ \forall y \in X\}. \tag{1.1}$$

Un élément x' du sous différentiel ($x' \in \partial f(x)$) est appelé sous gradient de f en x.

Remarque 1.4.3. $\triangleright$ *D'après la relation* (1.1), *il est clair que ∂f est un sous ensemble convexe fermé de X'.*
$\triangleright$ *Si $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = +\infty$ et $f \not\equiv +\infty$ alors $\partial f(x) \neq \emptyset$.*

Définition 1.32. (***Cône normal***) *Soit K un sous ensemble fermé convexe de X, le cône normal de K en x, noté $N_K(x)$ et défini par*

$$N_K(x) = \{x' \in X',\ < x', x - u \geq 0,\ \forall u \in K\}.$$

Remarque 1.4.4. $\triangleright$ *On écrit ce cône en terme d'une fonction indicatrice comme suit*

$$N_K(x) = \partial I_K(x),\ \forall x \in K.$$

Où : $I_K(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble K en x.

1.5 Quelques résultats classiques

Définition 1.33. *Soient* $(E_1, d), (E_2, d')$ *deux espaces métriques,* $\mathcal{F}(E_1, E_2)$ *l'espace de toutes les applications* $f : E_1 \to E_2$ *et* S *un sous ensemble de* $\mathcal{F}(E_1, E_2)$*. On dit que* S *est équi-continu au point* $x \in E_1$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E_1,\ d(x, y) < \delta \Longrightarrow \forall f \in S,\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.1. (***Théorème d'Ascoli-Arzelà***)[2] *Soient* (E_1, d) *un espace métrique compact,* (E_2, d') *un espace métrique complet et* S *un sous ensemble de* $C(E_1, E_2)$*, l'espace des applications continues définies sur* E_1 *à valeurs dans* E_2*, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors* S *est relativement compact si et seulement si*

$$\begin{cases} 1.\ S \text{ est équi-continu,} \\ 2.\ \text{pour tout } x \in E_1,\ S(x) = \{f(x)/f \in S\} \text{ est relativement compact.} \end{cases}$$

Théorème 1.5.2. (***Conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà***) [2]

Soit $(x_k)_k$ *une suite de fonctions absolument continues définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans un espace* $\mathcal{Y}$ *de dimension finie telle que*

$$\begin{cases} 1.\ \forall t \in I,\ \{x_k(t)\}_k \text{ est relativement compact de } \mathcal{Y}, \\ 2.\ \text{il existe une fonction positive } c \in L^1(I, \mathbb{R}_+),\ \| x_k'(t) \| \leq c(t),\ \text{p.p. sur } I. \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite (notée encore $(x_k)_k$*) et une fonction absolument continue* $x : I \to \mathcal{Y}$ *telles que*

$$\begin{cases} (i)\ (x_k)_k \text{ converge uniformément vers } x \text{ sur un ensemble compact de } I, \\ (ii)\ (x_k')_k \text{ converge faiblement vers } x' \text{ dans } L^1(I, \mathcal{Y}). \end{cases}$$

Démonstration.

$*$**Montrons (i)** : On a la suite $(x_k)_k$ est équi-continue c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t_1, t_2 \in I :\ |t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow \|x_k(t_1) - x_k(t_2)\| \leq \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

En effet, par hypothèse les fonctions $(x_k)_k$ sont absolument continues, par suite on a

$$\begin{aligned}
\|x_k(t-\delta) - x_k(t+\delta)\| &= \left\| \int_{t-\delta}^{t+\delta} x_k'(s)\ ds \right\| \\
&\leq \int_{t-\delta}^{t+\delta} \|x_k'(s)\|\ ds \\
&\leq \int_{t-\delta}^{t+\delta} c(s)\ ds \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Car

$$c \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$$

$\left(c \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in I,\ \exists \delta > 0 :\ \int_{t-\delta}^{t+\delta} c(s)ds \leq \varepsilon\right)$.

Il suffit de prendre $\eta = \delta$, $t_1 = t - \delta$ et $t_2 = t + \delta$, donc la suite $(x_k)_k$ est équi-continue.

Comme pour tout $t \in I$, $(x_k(t))_k$ est relativement compacte, via le théorème **d'Ascoli-Arzelà** on a $(x_k)_k$ est relativement compacte dans $C(I, \mathcal{Y})$, muni de la topologie de la convergence uniforme, on peut alors lui extraire une sous-suite qu'on note aussi $(x_k)_k$ converge uniformément vers $x \in C(I, \mathcal{Y})$.

$*$**Montrons (ii)** : On pose pour tout $t \in I$: $w_k(t) = \frac{x_k'(t)}{c(t)}$, par conséquent $\|w_k(t)\| \leq 1$ alors w_k appartient à la boule unité fermée de $L^\infty(I, \mathcal{Y})$ qui est faiblement* compact, donc on peut extraire une sous-suite qu'on notera aussi $(w_k)_k$ qui converge faiblement* vers une fonction $w \in L^\infty(I, \mathcal{Y})$.

- La convergence de $(w_k)_k$ vers w nous permet d'écrire pour $z \in L^1(I, \mathcal{Y})$ que

$$< w_k, z > \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} < w, z > .$$

Soit $\phi \in L^\infty(I, \mathcal{Y})$

$$\begin{aligned}
< x_k', \phi > &= < c w_k, \phi > \\
&= < w_k, c\phi >,
\end{aligned}$$

nous avons

$$\phi \in L^{\infty}(I, \mathcal{Y}) \text{ et } c \in L^1(I, \mathbb{R}_+),$$

donc

$$c\phi \in L^1(I, \mathcal{Y}),$$

et alors

$$\begin{aligned} < x'_k, \phi > = < w_k, c\phi > &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} < w, c\phi > \\ &= < cw, \phi > . \end{aligned}$$

C'est à dire (x'_k) converge faiblement dans $L^1(I, \mathcal{Y})$ vers la fonction $cw = v$, et par suite, pour tout $t_1, t_2, s \in I$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} < x'_k, \phi > = < v, \phi > \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} x'_k(s)\phi(s)\ ds \\ = \int_{t_1}^{t_2} v(s)\phi(s)\ ds. \end{aligned}$$

En particulier pour $\phi(s) = 1,\ \forall s \in I$, vu que x_k est absolument continue alors

$$\lim_{k\to\infty} (x_k(t_2) - x_k(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} v(s)\ ds$$

donc

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(s)\ ds.$$

On conclut que x est absolument continue et

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)\ ds.$$

D'où, $x' = v$, p.p. alors $(x'_k)_k$ converge faiblement vers x'. ■

Théorème 1.5.3. (***Théorème d'intégration***) [7] *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(f_n)_n$ une suite de L^p et $f \in L^p$ tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_k$, telle que*

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p. sur U,*
2. $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur U, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec $g \in L^p$.*

Chapitre 2

Résultat de viabilité d'une inclusion différentielle du premier ordre dans le cas convexe

Un problème de viabilité est de prouver l'existence d'une solution viable pour le problème de Cauchy suivant

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \; p.p. \quad sur \; [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

C'est à dire : on cherche des solutions pour le problème (PC) appartenant à un ensemble K avec la valeur initiale x_0 est aussi dans K, tel que K est un sous ensemble d'un espace de Hilbert H.
Ce chapitre est consacré à l'étude du problème suivant

$$(PV) \quad \begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \; p.p. \quad sur \; [0,T], \\ x(0) = x_0 \in K, \\ x(t) \in K \qquad\qquad \forall t \in [0,T[, \end{cases}$$

avec F est une multi-application $h.c.s.$ définie de K à valeurs convexes, compactes dans H.

Nous présentons le résultat d'existence des solutions viables pour cette inclusion différentielle du premier ordre obtenus par : J. P. Aubin et A. Cellina.

2.1 Le cône contingent de Bouligand

Différents cônes contingents, comme le cône contingent de Bouligand, le cône contingent de Clarke ..., jouent un rôle important dans l'analyse non lisse, la théorie du contrôle, la théorie de la viabilité ....

Dans le cas d'ensembles convexes, ces cônes coïncident et sont appelés les cônes contingents.

Dans tout ce qui suit, K est un sous ensemble non vide fermé de H.

Pour plus de détails pour cette section voir [5] et [16].

Définition 2.1. (***Cône***) *Soient H un espace de Hilbert, L un sous ensemble non vide de H. On dit que L est un cône si*

$$\forall x \in L,\ \forall \alpha \geq 0,\ \alpha x \in L.$$

Définition 2.2. *Le cône contingent de Bouligand à K en x noté par $T_K(x)$ et défini par*

$$T_K(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{0<h<\alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon \overline{B} \right).$$

Définition 2.3. *D'une manière équivalente, on dit que $v \in T_K(x)$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists u \in v + \varepsilon \overline{B},\ \exists h \in]0, \alpha]$ tel que*

$$x + hu \in K.$$

Remarque 2.1.1. *Il est clair que*

$\triangleright T_H(x) = H$ *et* $T_\emptyset(x) = \emptyset$.

$\triangleright T_K(x)$ *est un cône fermé .*

$\triangleright$ *Si $x \in Int(K)$, alors $T_K(x) = H$.*

$\triangleright \forall x \in K$ *on a* $T_K(x) = T_{\overline{K}}(x)$, *donc on peut parler de* $T_K(x)$ *même si* $(x \in \overline{K}$ *et* $x \notin K)$.

Proposition 2.1.1. (***Caractérisation par la fonction distance***)
On dit que $v \in T_K(x)$ *si et seulement si* $\liminf\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{h} d(x+hv, K) = 0$.

Démonstration.

$\Rightarrow$)

Soit $v \in T_K(x)$, donc $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0 :\ \exists u \in v + \varepsilon \overline{B},\ \exists h \in]0, \alpha]$ tel que $x + hu \in K$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d(x+hv, K)}{h} &\leq \frac{1}{h}\|x + hv - (x+hu)\| \\ &= \|u - v\| \\ &\leq \varepsilon \ldots \text{car } (u-v) \in \varepsilon \overline{B}. \end{aligned}$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq \sup_{\alpha > 0} \inf_{h \leq \alpha} \frac{d(x+hv, K)}{h} \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand ε tend vers 0, on obtient

$$\liminf_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} d(x+hv, K) = 0.$$

$\Leftarrow$) On a d'une part,

$$\liminf_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} d(x+hv, K) = \sup_{\alpha > 0} \inf_{h \leq \alpha} \frac{d(x+hv, K)}{h} = 0$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists h \leq \alpha \text{ tel que } \frac{d(x+hv, K)}{h} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $y_\varepsilon \in K$ tel que

$$\frac{d(x+hv, y_\varepsilon)}{h} < \frac{d(x+hv, K)}{h} + \frac{\varepsilon}{2},$$

il vient que

$$\frac{d(x+hv, y_\varepsilon)}{h} < \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\exists u = \frac{y_\varepsilon - x}{h} \in v + \varepsilon\overline{B} \ \text{ tel que } x + hu = y_\varepsilon \in K.$$

$\blacksquare$

Proposition 2.1.2. (***Caractérisation par des suites***)

On dit que $v \in T_K(x)$ si et seulement s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes positifs et il existe une suite $(u_n)_n \in H$, vérifiant

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
3. $\forall n \geq 0,\ x + h_n u_n \in K$.

Proposition 2.1.3. *Soit K un sous ensemble fermé de H, pour tout $y, v \in H$ on a*

$$\boxed{\liminf_{h\to 0^+} \tfrac{1}{h}(d(y+hv, K) - d(y, K)) \leq d(v, T_K(\pi_K(y)))}$$

avec $\pi_K(y)$ est la projection de y en K donnée par

$$\pi_K(y) = \{x \in K,\ d(y, x) = d(y, K)\}.$$

Démonstration.

***/ Étape 01** : Soit $y \in K$, pour tout $v' \in T_K(y)$ on a

$$d(y+hv, K) \leq hd(v, v') + d(y+hv', K),$$

en effet

$$\begin{aligned} d(y+hv,K) &= \inf_{z\in K} \|y+hv-z\| \\ &= \inf_{z\in K} \|y+hv+hv'-hv'-z\| \\ &\le \inf_{z\in K} \|y+hv'-z\| + \|hv-hv'\| \\ &= d(y+hv',K)+hd(v,v'). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h} d(y+hv,K) \le d(v,v') & \\ &= inf\{d(v,v')/v' \in T_K(y)\} \\ &= d(v,T_K(y)). \end{aligned}$$

*/ **Étape 02** : Pour tout $y \in H$ et soit $x \in \pi_K(y)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(d(y+hv,K)-d(y,K)) &\le \frac{1}{h}(\|y+hv-(x+hv)\| + d(x+hv,K) - d(y,K)) \\ &= \frac{1}{h}(\cancel{d(x,y)} + d(x+hv,K) - \cancel{d(y,K)}) \\ &= \frac{1}{h} d(x+hv,K) \ldots \text{car } x \in \pi_K(y). \end{aligned}$$

D'après l'étape 01, en particulier pour $y = x \in \pi_K(y) \subset K$ on a

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(d(y+hv,K)-d(y,K)) \le d(v,T_K(x)).$$

En fin comme x est varié dans $\pi_K(y)$, on obtient l'estimation suivante

$$\boxed{\liminf_{h\to 0^+} \tfrac{1}{h}\big(d(y+hv,K)-d(y,K)\big) \le d(v,T_K(\pi_K(y))).}$$

■

2.2 Trajectoire viable

Définition 2.4. *Soit K un sous ensemble de H. S'il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T[$, $x(t) \in K$ alors on dit que $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire* *viable sur* $[0, T[$.

2.3 Caractérisation d'une relation d'ordre par une multi-application

Définition 2.5. *Soit* K *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$. *Une relation d'ordre notée* $\geqslant$, *est une relation réflexive et transitive, se caractérise par la multi-application* P, $P : K \rightrightarrows K$ *définie par*

$$\boxed{\forall x \in K, P(x) = \{y \in K : y \leqslant x\}}$$

Proposition 2.3.1. *Soit* K *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$. *La multi-application* P *satisfait*

1. $\forall x \in K,\ x \in P(x)$ (*réflexive*).
2. $\forall x \in K,\ \forall y \in P(x),\ P(y) \subset P(x)$ (*transitive*).

Inversement, si P *est une multi-application de* K *à* K *satisfait* 1. *et* 2., *alors la relation* $y \leqslant x$ *définie par* $y \in P(x)$ *est une relation d'ordre sur* K.

2.4 Condition tangentielle

Soient H un espace de Hilbert, $K \subset H$.

Définition 2.6. *Soit* $F : K \rightrightarrows H$ *est une multi-application, la condition tangentielle est donnée par*

$$\boxed{F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset,\ \forall x \in K}.$$

Définition 2.7. *En terme équivalent, la condition tangentielle peut s'écrit comme suit*

$$\forall x \in K,\ \exists v \in F(x) \text{ tel que } \liminf_{h \to 0^+} \frac{1}{h} d(x + hv, K) = 0.$$

Proposition 2.4.1. *Soit F une multi-application s.c.s. de $K \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs compactes convexes dans $\mathbb{R}^n$.*
Si pour tout $x_0 \in K$, il existe $T > 0$ et une trajectoire viable sur $[0, T[$ pour l'inclusion différentielle $x' \in F(x)$ avec la valeur initiale x_0, alors la condition tangentielle

$$\boxed{\forall x \in K,\ \ F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset}$$

est satisfaite.

2.5 Résultats de viabilité

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions viables pour le problème (PV). Nous présentons un résultat fondamental de J. P. Aubin et A. Cellina [2] dans lequel la condition tangentielle représente une condition suffisante.

Théorème 2.5.1. (***Théorème général de viabilité***) *Soient $K \subset H$, F une multi-application h.c.s. de K dans H, à valeurs compactes convexes vérifiant la condition tangentielle donnée par*

$$\forall x \in K,\ \ F(x) \cap T_{P(x)}(x) \neq \emptyset,$$

où $P : K \rightrightarrows K$ est une multi-application s.c.i. de graphe fermé. On a donc

1. *Si K est localement compact, alors $\forall x_0 \in K,\ \exists T > 0$ tel que le problème (PV) admet une solution viable sur $[0, T[$. De plus*

$$\forall t,\ \forall s \geq t,\ \ x(s) \in P(x(t)).$$

2. *Si K est compact ou dim $H < \infty$ et $F(K)$ est borné, alors il existe une solution viable du problème (PV) définie sur $[0, +\infty[$.*

Théorème 2.5.2. (***Théorème de viabilité***) *Soient H un espace de Hilbert, $K \subset H$ et $F : K \rightrightarrows H$ une multi-application h.c.s., à valeurs compactes convexes. Supposons que F satisfait la condition tangentielle, alors on a*

1. *Si K est localement compact alors $\forall x_0 \in K$, $\exists T > 0$ tel que l'inclusion différentielle (PV) admet une trajectoire viable (une solution viable) définie sur $[0, T[$.*
2. *Si K est compact ou dim $H < \infty$ et $F(K)$ borné alors $\forall x_0 \in K$, il existe une trajectoire viable du problème (PV) définie sur $[0, +\infty[$.*

Maintenant on donne la démonstration du théorème 2.5.1.

Démonstration. La preuve se fait en 06 parties :

*/ **Partie 01 :** Soient $K \subset H,\ x_0 \in K$ on a

(1) Si K est localement compact, alors il existe $r > 0$ tel que $K_0 = K \cap (x_0 + r\overline{B})$ est compact. On pose $T = \frac{r}{\|F(K_0)\|+1}$.

(2) Si K est compact, $K_0 = K$ et $T = \infty$.

(3) Si $F(K)$ est borné et $dim\ H < \infty$, nous prenons $T > 0$ arbitrairement et on pose $K_0 = K \cap (\overline{x_0 + \overline{B} + TF(K)})$.

*/ **Partie 02 :** Posons $C = F(K_0) + \overline{B}$, qui est un ensemble borné. $\forall y \in K$, on peut trouver $h_y < \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}$ et $v_y \in F(y)$ qui vérifient en vertu de la condition tangentielle

$$d(y + h_y v_y, P(y)) \leq \frac{h_y}{2k}.$$

Considérons le sous ensemble

$$N(y) = \{x \in H, d(x + h_y v_y, P(x)) < \frac{h_y}{2k}\}.$$

Comme la multi-application P est *s.c.i.*, on sait d'après la proposition 1.4.5 page 19 que la fonction $x \mapsto d(x + h_y v_y, P(x))$ est *s.c.s.*, ce qui implique que $N(y)$ est un ouvert.

De plus comme y appartient à $N(y)$, il existe une boule $B(y, \eta_y)$ de rayon $\eta_y < \frac{1}{k}$ contenue dans $N(y)$. Ce qui implique que le sous ensemble compact K_0 admet un recouvrement par un nombre finie q de boules notés par

$$B(y_j, \eta_{y_j}),\ j = 1, ..., q.$$

Pour simplifier les notations on pose

$\eta_j = \eta_{y_j},\ h_j = h_{y_j},\ v_j = v_{y_j},\ j = 1, ..., q$ et $h_0(k) = \min\limits_{j=1,\dots,q} h_j > 0$.

***/ Partie 03 :** Maintenant, soit $x \in K_0$, on a $x \in B(y_j, \eta_j) \subset N(y_j)$ pour un certain j.

Par conséquent, on peut trouver $x_j \in P(x)$ tel que

$$\|v_j - (x_j - x)/h_j\| \leq \frac{1}{h_j} d(x + h_j v_j, P(x)) + \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{k}.$$

On pose $u_j = \frac{1}{h_j}(x_j - x)$. En supprimant l'indice j, on a ainsi prouver que $\forall x \in K_0$, il existe $h \in [h_0(k), \frac{1}{k}]$ et $u \in H$ tels que

$$\begin{cases} a)\ x + hu \in P(x), \qquad u \in C \\ b)\ \exists y \in K, v \in F(y): \quad \|x - y\| \leq \frac{1}{k} \text{ et } \|u - v\| \leq \frac{1}{k} \end{cases}$$

Notre approche repose sur la méthode d'Euler : on construit une suite de solutions approchées, via le théorème d'Ascoli-Arzelà, on montre qu'on peut extraire une sous-suite qui converge vers une solution de notre problème.

***/ Partie 04 : Construction de solutions approchées**

Soit $x_0 \in K$ fixé, on peut trouver $h_0 \in [h_0(k),\ \frac{1}{k}]$, $k \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in C$ tels que

$$x_1 = x_0 + h_0 u_0 \in P(x_0)$$

et

$$(x_0, u_0) \in gph(F) + \frac{1}{k}(B \times B).$$

De plus

$$x_1 - x_0 = h_0 u_0 \in h_0 C,$$

par conséquent

$$\|x_1 - x_0\| \leq h_0 \ (\|F(K_0)\| + 1).$$

Alors dans le cas (1) et (3), si $h_0 \leq T$ alors $\|x_1 - x_0\| \leq r$ et on a $x_1 \in K_0$.
Et on a dans le cas (2), $x_1 \in K_0$.
D'où, il existe $h_1 \in [h_0(k), \ \frac{1}{k}]$ et $u_1 \in C$ tels que

$$x_2 = x_1 + h_1 u_1 \in P(x_1)$$

et

$$(x_1, u_1) \in gph(F) + \frac{1}{k}(B \times B).$$

De plus

$$x_2 - x_0 \in (h_0 + h_1) \ C,$$

par conséquent

$$\|x_2 - x_0\| \leq (h_0 + h_1) \ (\|F(K_0)\| + 1).$$

Alors dans le cas (1) et (3), si $h_0 + h_1 \leq T$ alors $\|x_2 - x_0\| \leq r$ et on a $x_2 \in K_0$.
Et on a dans le cas (2), $x_2 \in K_0$.
Par récurrence, on peut construire une suite d'élément $(x_p)_p$, $\forall p \geq 2$.

$$x_p = x_0 + \sum_{j=0}^{p-1} h_j \ u_j$$

$$x_p - x_0 \in \Big(\sum_{j=0}^{p-1} h_j \Big) \ C,$$

par conséquent

$$\|x_p - x_0\| \leq \Big(\sum_{j=0}^{p-1} h_j \Big) \ \big(\|F(K_0)\| + 1\big).$$

Comme $h_j \in [h_0(k), \frac{1}{k}]$, alors il existe un entier m tel que

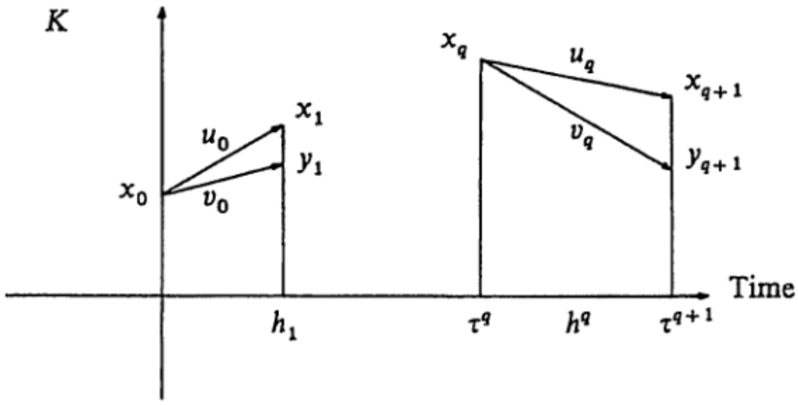
$$h_0 + h_1 + ... + h_m \leq T < h_0 + h_1 + ... + h_m + h_{m+1}$$

•En Résumé : On construit les suites d'éléments $h_p \in [h_0(k), \frac{1}{k}]$, $x_p \in K_0$ et $u_p \in C$, tels que

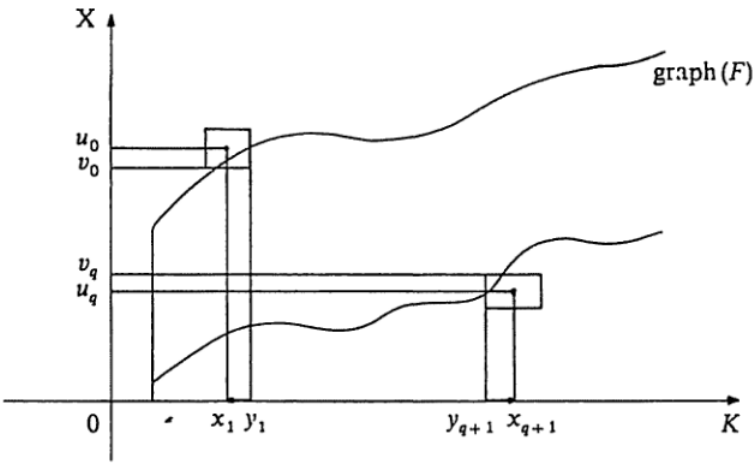
$$\begin{cases} i.\ x_{p+1} = x_p + h_p u_p \in P(x_p),\ u_p \in C \\ ii.\ (x_p, u_p) \in gph(F) + \frac{1}{k}(B \times B). \end{cases}$$

Cette suite est finie dans le cas (1) et (3) et infinie dans le cas (2).

▶ **Méthode modifiée d'Euler**



▶**Construction des couples** (x_q, u_q)



*/ Partie 05 : La convergence des solutions approchées

Considérons la suite $(\tau_k^q)_k$ donnée par

$$\begin{cases} \tau_k^q = h_0 + ... + h_{q-1} \\ \tau_k^0 = 0, \tau_k^m = T, \end{cases}$$

et on définit sur chaque sous intervalle $]\tau_k^{p-1}, \tau_k^p]$, la suite de fonctions $(x_k(.))_k$ par

$$\forall t,\ x_k(t) = x_{p-1} + (t - \tau_k^{p-1})\ u_{p-1}.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$x_k'(t) = u_{p-1},$$

donc

$$\|x_k'(t)\| = \|u_{p-1}\| \leq \|F(K_0)\| + 1. \tag{2.1}$$

Soit $t \in]\tau_k^{p-1},\ \tau_k^p]$ fixé. On a $|t - \tau_k^{p-1}| \leq \frac{1}{k}$ et $\exists (y, v) \in gph(F)$ tels que

$$\|x_k'(t) - v\| = \|u_{p-1} - v\| \leq \frac{1}{k}$$

et

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - y\| &\leq \|x_k(t) - x_{p-1}\| + \|x_{p-1} - y\| \\ &\leq |t - \tau_k^{p-1}|\ \|u_{p-1}\| + \|x_{p-1} - y\| \\ &\leq \frac{1}{k}(\|F(K_0)\| + 2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

donc $x_k(t) \in K_0$ qui est compact.

Nous avons montré que

$$\forall t \geq 0,\ (x_k(t), x_k'(t)) \in gph(F) + \varepsilon(k)(B \times B) \tag{2.3}$$

avec $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 0$

$\big($On peut prendre $\varepsilon(k) = min\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}(\|F(K_0)\| + 2)\right)\big)$.

⊛ $(x_k(.))_k$ est lipschitzienne :

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, donc il existe deux intervalles $[\tau_k^{q-1}, \tau_k^q]$ et $[\tau_k^{p-1}, \tau_k^p]$, tels que $q < p$, $t_1 \in [\tau_k^{q-1}, \tau_k^q]$ et $t_2 \in [\tau_k^{p-1}, \tau_k^p]$.

On a

$$\begin{aligned}
\|x_k(t_2) - x_k(t_1)\| &= \|x_k^{p-1} + (t_2 - \tau_k^{p-1})\ u_k^{p-1} - (x_k^{q-1} + (t_1 - \tau_k^{q-1})\ u_k^{q-1})\| \\
&= \|x_k^{p-1} - x_k^{q-1} + t_2\ u_k^{p-1} - t_1\ u_k^{q-1} - \tau_k^{p-1}\ u_k^{p-1} + \tau_k^{q-1}\ u_k^{q-1}\| \\
&\leq \Bigg\| \cancel{x_0} + \sum_{i=0}^{p-2} h_i u_i - \cancel{x_0} - \sum_{i=0}^{q-2} h_i u_i + t_2\ u_k^{p-1} - t_1\ u_k^{q-1} \\
&\qquad - (h_0 + \cdots + h_{p-2})\ u_k^{p-1} + (h_0 + \cdots + h_{q-2})\ u_k^{q-1} \Bigg\| \\
&\leq \Bigg\| \sum_{i=q-1}^{p-2} h_i u_i + t_2\ u_k^{p-1} - t_1\ u_k^{q-1} - (h_0 + \cdots + h_{p-2})\ u_k^{p-1} \\
&\qquad + (h_0 + \cdots + h_{q-2})\ u_k^{q-1} \Bigg\| \\
&\leq |t_2 - t_1|\ (\|F(K_0)\| + 1) + \left| \sum_{i=q-1}^{p-2} h_i - \sum_{i=q-1}^{p-2} h_i \right| \big(\|F(K_0)\| + 1\big) \\
&\leq |t_2 - t_1|\ \big(\|F(K_0)\| + 1\big)
\end{aligned}$$

d'où la suite est lipschitzienne.

En vertu du (2.1) et (2.2) les conditions du théorème d'Ascoli (théorème 1.5.2) sont vérifiées, et donc en vertu (2.3) les conditions du théorème de convergence (voir théorème 1.4.1 page 20) sont satisfaites. Alors il existe une sous-suite de $x_k(.)$ (encore notée $x_k(.)$) qui converge uniformément vers une solution du problème (PV) et $x'_k(t)$ converge faiblement dans $L^\infty([0, T], H)$.

***/ Partie 06 : La monotonie de la trajectoire**

Soient $s, t \in [0, T[$ avec $s > t$.

Alors pour un k, $(k \in \mathbb{N})$ assez grand, on peut trouver $p > q$ tel que

$$\tau_k^p > \tau_k^q,$$

avec $\tau_k^p \to s$ et $\tau_k^q \to t$ quand $k \to \infty$.

Comme la multi-application P est transitive, alors les inclusions $x_k(\tau_k^j) \in$

$P(x_k(\tau_k^{j-1}))$ implique que

$$x_k(\tau_k^p) \in P(x_k(\tau_k^q))$$

c'est à dire

$$(x_k(\tau_k^q), x_k(\tau_k^p)) \in gph(P).$$

Vu que $gph(P)$ est fermé donc, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(\tau_k^p) = x(s)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(\tau_k^q) = x(t)$.
On conclut que

$$(x(t), x(s)) \in gph(P),$$

c'est à dire

$$x(s) \in P(x(t)).$$

La solution $x(.) \in C([0,T[,H)$ dans le cas (1), (3) et elle appartient à $C([0,\infty[,H)$ dans le cas (2).
Comme T est choisi indépendant de x_0 dans le cas (3), nous pouvons étendre une trajectoire monotone $x(.)$ définie sur $[0,T]$ à une trajectoire définie sur $[0,2T], [0,3T]....$
Par conséquent, il existe une trajectoire monotone $x(.) \in C([0,\infty[,H)$ dans le cas (3). ■

Remarque 2.5.1. *Pour la démonstration du théorème de viabilité 2.5.2, il suffit de prendre $K = P(x)$, $\forall x \in K$ dans la démonstration du théorème 2.5.1.*

Chapitre 3

Résultat de viabilité pour une inclusion différentielle du premier ordre à valeurs non convexes

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre à valeurs non convexes. Des résultats d'existence pour cette classe d'inclusion différentielle ont été obtenus par Bressan, Cellina, Colombo [6] et Colombo, Ancona [1], en remplaçant la convexité du second membre F par, F incluse dans le sous différentiel d'une fonction propre convexe *s.c.i.*. Leurs travaux ont été généralisés par P. Rossi [15] au problème de viabilité qui est l'objet de notre chapitre.
Le problème étudié se présente sous la forme suivante

$$(PV1) \qquad \begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \; p.p. & \text{sur } [0,T], \\ x(0) = x_0, & \\ x(t) \in K & \forall t \in [0,T[, \end{cases}$$

où : K est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, $F : K \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application *s.c.s.* à valeurs non vides compactes telle que $F(x) \subset \partial V(x)$, $\forall x \in K$, avec $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction propre convexe *s.c.i.*.

3.1 Sous-différentiel d'une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement

Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur (multivoque) défini de H dans $\mathcal{P}(H)$ (l'ensemble des parties de H).
Le domaine de A est l'ensemble $D(A) = \{x \in H,\ Ax \neq \emptyset\}$, l'image de A est l'ensemble $Im(A) = \bigcup_{x \in H} Ax$.
$*$ Si pour tout $x \in H$, l'ensemble Ax contient au plus un élément, on dira que A est univoque.
Pour plus de détails sur cette partie voir [8].

3.1.1 Opérateur monotone

Définition 3.1. *Un opérateur A de H est dit monotone si* $\forall x_1, x_2 \in D(A)$,

$$< Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 >\geq 0,$$

ou plus précisément $\forall y_1 \in Ax_1,\ \forall y_2 \in Ax_2$,

$$< y_1 - y_2, x_1 - x_2 >\geq 0.$$

Exemple 3.1.1. *Soit V une fonction propre convexe sur H. Le sous différentiel ∂V est un opérateur monotone de H.*
En effet, si $y_1 \in \partial V(x_1)$ et $y_2 \in \partial V(x_2)$, en particulier pour

$$V(x_2) \geq V(x_1) + < y_1, x_2 - x_1 >,$$

et

$$V(x_1) \geq V(x_2) + < y_2, x_1 - x_2 >,$$

d'où par l'addition

$$< y_1 - y_2, x_1 - x_2 >\geq 0.$$

Ce qui implique la monotonie du ∂V.

3.1.2 Opérateur maximal monotone

L'ensemble des opérateurs monotones de H est ordonné par l'inclusion des graphes (i.e. $A \subset B \Longleftrightarrow Ax \subset Bx$).
Autrement dit, l'ensemble des opérateurs monotones est inductif pour l'inclusion des graphes.
Ce qui Justifie la définition suivante

Définition 3.2. *Un opérateur de H est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*
* *Explicitons cette définition ; A opérateur maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $(x, y) \in H \times H$,*

$$< y - A\varepsilon, x - \varepsilon > \geq 0, \ \forall \varepsilon \in D(A),$$

ou plus précisément, si $< y - \eta, x - \xi > \geq 0, \ \forall (\xi, \eta) \in A$, alors $y \in Ax$.

Proposition 3.1.1. *Soit A un opérateur de H. Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes*

1. *A maximal monotone.*
2. *A est monotone et $Im(I_d + A) = H$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_d + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.*

Proposition 3.1.2. *Soit V une fonction convexe propre sur H. Si V est s.c.i. alors ∂V est maximal monotone.*

Remarque 3.1.1. *Si V est une fonction propre convexe s.c.i. alors pour montrer que ∂V est maximal monotone, il suffit de montrer que ∂V monotone et $Im(I_d + \partial V) = H$.*

Lemme 3.1.1. *Soit $u \in W^{1,2}([0, T], H)$ tel que $u(t) \in D(A)$, p.p. sur $]0, T[$. On suppose qu'il existe $g \in L^2([0, T], H)$ tel que $g(t) \in Au(t)$, p.p.*

sur $]0, T[$, *alors la fonction* $t \mapsto f(u(t))$ *est absolument continue sur* $]0, T[$. *Désignons par* $\mathcal{L}$ *l'ensemble des points* $t \in]0, T[$ *tels que* $u(t) \in D(A)$, u *et* $f(u)$ *soient dérivables en* t. *Alors on a pour tout* $t \in \mathcal{L}$

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = < h, \frac{du}{dt}(t) >, \ \forall h \in Au(t).$$

3.2 Résultat de viabilité

Maintenant on s'intéresse à l'existence de solutions viables pour le problème $(PV1)$.

On prouve le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *[15] Soient* K *un sous ensemble compact non vide de* $\mathbb{R}^n$, F *une multi-application définie sur* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs non vides compactes dans* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant les conditions suivantes*

i) F *est s.c.s., c'est à dire :* $\forall x, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ *tel que* $|x - x'| \leq \delta \Longrightarrow F(x') \subseteq F(x) + \varepsilon B$.

ii) Il existe une fonction propre convexe s.c.i., $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *telle que* $F(x) \subset \partial V(x), \ \forall x \in K$.

iii) Soit $P : K \rightrightarrows K$ *une multi-application s.c.i. de graphe fermé, supposons la condition tangentielle*

$$\forall x \in K, \ F(x) \cap T_{P(x)}(x) \neq \emptyset.$$

On obtient les résultats suivants

1. *Si* K *est localement compact. Alors pour tout* $x_0 \in K$, *il existe* $T > 0$ *tel que le problème* $(PV1)$ *admet une trajectoire viable et monotone sur* $[0, T]$.

2. *Si* $F(K)$ *est borné, alors il existe une trajectoire viable sur* $[0, +\infty[$.

Pour plus de détails sur ce résultat voir [15].

Énonçons d'abord un lemme qui est très utile dans la démonstration

Lemme 3.2.1. *Supposons que les conditions du théorème 3.2.1 sont vérifiées, alors on a*

(a) *Si K est localement compact, alors il existe $R > 0$ tel que* $K_0 = K \cap (x_0 + R\overline{B})$ *est compact. On pose* $T = \frac{R}{\|F(K_0)\|+1}$.

(b) *Si $F(K)$ est borné, on pose* $K_0 = K \cap \overline{(x_0 + \overline{B} + TF(K))}$.

Dans les deux cas on a $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite finie $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{m-1} < T < \tau_m$ telle que

$$\tau_p - \tau_{p-1} < \varepsilon, \ \forall p = 1, \ldots, m,$$

et une suite $\{x_0, \ldots, x_m\} \subset K$ vérifiant

(1) *Pour tout $p = 1, \ldots, m,\ x_p \in K_0 \cap P(x_{p-1})$.*

(2) *Il existe $y_p \in K_0$ (y_p dépendant de x_p), et $v_p \in F(y_p)$, satisfaisant*

$$\|x_p - y_p\| < \varepsilon, \ \left\|\frac{x_p - x_{p-1}}{\tau_p - \tau_{p-1}} - v_{p-1}\right\| < \varepsilon.$$

Remarque 3.2.1. *La preuve est similaire à celle du théorème 2.5.1 du deuxième chapitre.*

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.2.1, pour plus de détails sur cette démonstration voir [12] et [15].

Démonstration. La démonstration se fait en 04 parties :

***/ Partie 01 :** Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ et considérons la famille de paires τ_k^p et x_k^p, $p = 0, \ldots, m(k)$, comme dans le lemme 3.2.1, on définit la suite $x_k(.)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall t \in]\tau_k^{p-1}, \tau_k^p], \ x_k(t) = x_k^{p-1} + (t - \tau_k^{p-1}) \ u_k^{p-1},$$

où

$$u_k^{p-1} = \frac{x_k^p - x_k^{p-1}}{\tau_k^p - \tau_k^{p-1}}.$$

On a $x_k(.)$ est définie sur $[0, \tau_k^m] \supseteq [0, T]$.

Fixons t, soit $]\tau_k^{p-1}, \tau_k^p]$ un intervalle de la $k^{\text{ème}}$ partition à laquelle t appartient. On a

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - y^{p-1}\| &\leq \|x_k(t) - x^{p-1}\| + \|x^{p-1} - y^{p-1}\| \\
&\leq |t - \tau_k^{p-1}| \, \|u^{p-1}\| + \frac{1}{k} \\
&\leq \frac{1}{k} \, (\|F(K_0)\| + 2),
\end{aligned}$$

et

$$\|x_k'(t) - v^{p-1}\| \leq \frac{1}{k}.$$

Alors nous avons prouvé que pour tout $t \in]0, T[$,

$$(x_k(t), x_k'(t)) \in gph(F) + \varepsilon(k)(B \times B),$$

avec $\varepsilon(k) \to 0$ quand $k \to \infty$.

***/ Partie 02 : Convergence des suites**

Par définition de $(x_k(.))_{k\in\mathbb{N}}$ on a les relations suivantes

$$\circledast \quad \|x_k'(t)\| = \|u_k^{p-1}\| < \|F(K_0)\| + 1 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\circledast \quad \big\|x_k(t) - x_0\big\| &= \Big\| \sum_{i=0}^{p-2} h_i u_i + (t - \tau_k^{p-1}) \; u_k^{p-1} \Big\| \\
&\leq \Big| \sum_{i=0}^{p-2} h_i + t - \tau_k^{p-1} \Big| \, \big(\|F(K_0)\| + 1\big) \\
&\leq \big|\tau_k^{p-1} + t - \tau_k^{p-1}\big| \, \big(\|F(K_0)\| + 1\big) \\
&\leq T \, \big(\|F(K_0)\| + 1\big) \\
&\leq R.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Donc $x_k(t) \in K_0$ qui est compact.

Par conséquent en vertu de (3.1) et (3.2), on obtient $(x_k'(.))_k$ est bornée dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$ et pour tout $t \in [0,T]$, l'ensemble $\{x_k(t), k \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.

$\circledast$ $(x_k(.))_k$ est lipschitzienne. (La preuve est similaire à celle du chapitre 02).
D'après le théorème d'Ascoli (théorème 1.5.2), il existe une sous-suite (encore notée $(x_k(.))_k$) et une fonction absolument continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ telles que

1. $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$
   $\big(\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0\big)$,
2. $x'_k(.)$ converge faiblement dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$.

De plus, on a $x(.)$ prend des valeurs dans K_0.

*/ **Partie 03 :** On démontre que la famille des solutions approchées $(x_k(t))_k$ vérifie la propriété suivante
Pour tout $t \in [0,T]$, il existe $q \in \{1,\dots,m(k)\}$, telle que

$$\lim_{k\to+\infty} d\big((x_k(t),x'_k(t)),gph(F)\big) = 0;$$

En effet, par construction de la suite $(\tau_k^q)_k$, il existe q tel que $t \in [\tau_k^{q-1},\tau_k^q[$ et $(\tau_k^q)_k$ converge vers t.
Vu que

$$x'_k(t) = u_k^{q-1} \in F(x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{k}B,$$

alors

$$d\big((x_k(t),x'_k(t)),gph(F)\big) \le \|x_k(t) - x_k(\tau_k^{q-1})\| + \frac{1}{k},$$

ce qui implique

$$\lim_{k\to+\infty} d\big((x_k(t),x'_k(t)),gph(F)\big) = 0. \tag{3.3}$$

Comme $x_k(.)$ converge uniformément vers $x(.)$, $x'_k(.)$ converge faiblement dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ vers $x'(.)$ et F est *s.c.s.*, en appliquant le théorème 1.4.1 (théorème de convergence), on obtient $x(.)$ est une solution du problème convexifié suivant

$$\begin{cases} x'(t) \in \overline{co}\big(F(x(t))\big), \text{ p.p. sur } [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\forall t \in [0,T]$, on a

$$x'(t) \in \overline{co}\big(F(x(t))\big) \subset \partial V(x(t)). \tag{3.4}$$

Montrons que : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x'_k\|_{L^2} = \|x'\|_{L^2}$.

Comme $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto V(x(t))$ sont absolument continues, de la relation (3.4) et du lemme 3.1.1, on trouve

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) =< x'(t), x'(t) > \text{ p.p. } sur\ [0,T].$$

Après une intégration sur $[0,T]$, il résulte

$$V(x(T)) - V(x_0) = \int_0^T \|x'(s)\|^2\, ds. \tag{3.5}$$

D'autre part, pour tout $q = 1, \dots, m(k)$

$$x'_k(t) \in \partial V(x_k(\tau_k^{q-1})) + \frac{1}{k}B,$$

il existe $b_q \in B$, tel que

$$x'_k(t) + \frac{1}{k}b_q \in \partial V(x_k(\tau_k^{q-1})),$$

par définition du sous-différentiel on a, pour tout $z \in \partial V(x_k(\tau_k^{q-1}))$

$$V(x_k(\tau_k^q)) - V(x_k(\tau_k^{q-1})) \ \geq < x_k(\tau_k^q) - x_k(\tau_k^{q-1}), z >,$$

en particulier pour $z = x'_k(t) + \frac{1}{k}b_q$, donc

$$\begin{aligned} V(x_k(\tau_k^q)) - V(x_k(\tau_k^{q-1})) \geq & \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} < x'_k(s), x'_k(s) > \ ds \\ & + \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} < x'_k(s), \frac{1}{k}b_q > \ ds. \end{aligned}$$

En faisant la sommation sur q, on obtient

$$V(x_k(T)) - V(x_0) \geq \int_0^T \|x_k'(s)\|^2 \, ds + \sum_{q=1}^{m(k)} \frac{1}{k} \int_{\tau_k^{q-1}}^{\tau_k^q} < x_k'(s), b_q > \, ds \tag{3.6}$$

En passant à la limite pour $k \to +\infty$ dans la relation (3.6) et en utilisant la continuité de la fonction V sur la boule $B(x_0, R)$, on obtient

$$V(x(T)) - V(x_0) \geq \limsup_{k \to +\infty} \int_0^T \|x_k'(s)\|^2 \, ds$$

L'inégalité (3.5) entraîne

$$\|x'\|_{L^2}^2 \geq \limsup_{k \to +\infty} \|x_k'\|_{L^2}^2 \tag{3.7}$$

par ailleurs, compte tenu de la semi-continuité inférieure de la norme, on obtient la relation

$$\|x'\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{k \to +\infty} \|x_k'\|_{L^2}^2 \tag{3.8}$$

on déduit alors à l'aide de (3.7) et (3.8) que

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_k'\|_{L^2}^2 = \|x'\|_{L^2}^2.$$

c-à-d : $(x_k'(.))_k$ converge fortement vers $x'(.)$ dans L^2 et par le théorème 1.5.3 on déduit qu'on peut extraire une sous-suite de $x_k'(.)$ qui converge presque partout vers $x'(.)$.

Compte tenu de (3.3), on conclut

$$d\big((x(t), x'(t)), gph(F)\big) = 0$$

vu que le graphe de F est fermé, on trouve

$$x'(t) \in F(x(t)), \;\; p.p. \text{ sur } [0, T].$$

***/ Partie 04 : Monotonie de la trajectoire**

Soit $t < s$, $s, t \in [0, T[$, alors pour k assez grand, on peut trouver $p > q$ tel que

$$\tau_k^p > \tau_k^q$$

convergent vers s, t respectivement.

Alors par la définition de x_k^p et la transitivité de P, on trouve que

$$\begin{aligned} x_k(\tau_k^p) = x_k^p &\in P(x_k^q) \\ &= P(x_k(\tau_k^q)), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\big(x_k(\tau_k^q), x_k(\tau_k^p)\big) \in gph(P).$$

Donc $x_k(\tau_k^p)$ et $x_k(\tau_k^q)$ convergent vers $x(s)$ et $x(t)$ respectivement, et comme $gph(P)$ est fermé, on obtient

$$x(s) \in P(x(t)).$$

Puisque T est choisi indépendant de x_0 dans le cas (b), nous pouvons étendre la trajectoire monotone $x(.)$ définie sur $[0, T]$ vers une trajectoire monotone définie sur $[0, 2T]$, $[0, 3T]$....

Par conséquent, il existe une trajectoire monotone $x(.)$ définie sur $[0, +\infty[$.

$\blacksquare$

Maintenant, on énonce le résultat fondamental de viabilité, c'est un cas particulier du théorème 3.2.1 pour $P(x) = K,\ \forall x \in K$.

Théorème 3.2.2. *K un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, F une multi-application satisfait les conditions i), ii) du théorème 3.2.1 et la condition tangentielle*

$$\forall x \in K,\ F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset.$$

Alors on a

1. *Si K localement compact, alors il existe $T > 0$ et une solution du problème $(PV1)$ définie sur $[0, T]$ avec $x(t) \in K, \ \forall t \in [0, T]$.*
2. *Si $F(K)$ est borné, alors il existe une solution viable définie sur $[0, +\infty[$.*

Remarque 3.2.2. *Pour la démonstration, il suffit de prendre $P(x) = K$, $\forall x \in K$ dans la démonstration du théorème* 3.2.1.

Conclusion

Dans notre travail, nous sommes intéressées à étudier l'existence de solutions viables pour une inclusion différentielle du premier ordre dans le cas convexe et non convexe. Dans le premier cas le résultat est obtenu en utilisant la convergence uniforme de la suite des solutions approchées et la convergence faible de sa dérivée plus un théorème de convergence du à J. P. Aubin et A. Cellina.

Cependant, dans le cas non convexe, on a supposé que le second membre est inclus dans le sous différentiel d'une fonction propre convexe *s.c.i.*. Ce qui nous a permis à démontrer la convergence forte de la suite des dérivées, et faire appel à la fermeture de graphe de la multi-application pour assurer l'existence de la solution.

Ce type de problème qu'on a étudié a connu plusieurs généralisations. Des auteurs ont étudié le problème d'ordre supérieur, certains ont considéré le problème perturbé, d'autres résultats ont été obtenu dans le cas ou F est incluse dans le sous différentiel d'une fonction V non convexe, le problème avec retard été également étudié (c-à-d : la solution est définie sur l'intervalle $[-\sigma, T],\ \sigma > 0$).

Bibliographie

[1] **F. Ancona and G. Colombo**, *Existence of solutions for a class of nonconvexe differential inclusion*, Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 83 (1990), p. 71-76.

[2] **J. P. Aubin et A. Cellina**, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] **D. AZE**, *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, édition marketing S.A., Paris, 1997.

[4] **V. Barbu and T. Precupanu**, *Convexity and optimisation in Banach space*, Springer, New York, 2012.

[5] **H. Bauschke and P. Combette**, *Convexe Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces* , Springer-Verlag New York Inc, 2011.

[6] **A. Bressan, A. Cellina and G. Colombo**, *Upper semicontinuous differential inclusions without convexity*, Proc. Am. Math. Soc. 106(1989) 771-775.

[7] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, MASSON, (1993).

[8] **H. Brezis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, New York, 1973.

[9] **J. Y. Chemin**, *Bases d'analyse fonctionnelle*, labo J-L. Lions, case 187. Univ Pierre et Marie Curie, France 2017.

[10] **M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca**, *Condensing multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2001.

[11] **M. Kisielewicz**, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer Acad. Publishers, London, 1991.

[12] **R. Morchadi**, *Sur des problèmes de viabilité du premier et du second ordre et sélection de steiner*, Thèse de doctorat, Université Mohammed V- Agdal, Faculté des science Rabat, 2006.

[13] **M. Nagumo** *Über die Lage der Intergralkurven gewöhnlicher Differentialgle-iIchungen*, Proc. phys. math. soc. Japan 24 (1942), 551-559.

[14] **Y. Sonntag**, *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Berlin 23-4-1880, 1997.

[15] **P. Rossi**, *Viability for upper semicontinuous inclusions without convexity*, Differential Integral Equations 5 (1992), 455-459.

[16] **J.V. Tiel**, *Convex Analysis An Introductory Text*, New York, Singapore, 1984.