REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE -JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Série :…………………………

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Master en physique

Spécialité : Physique Théorique

par :

Meryem Boutadjine

Intitulé

Méthodes de résolution des systèmes dépendants du temps

Soutenue le : **22 /07/2019**

Devant le jury :

Président :	N.Ferkous	M.C.A	Univ. de Jijel
Rapporteur :	A.Bounames	Prof	Univ. de Jijel
Examinateurs :	B.Guettou	M.A.A	Univ. de Jijel

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Dieu pour m'avoir donné la volanté et la patience tout au long de mes études.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur Pr. A. Bounames, Professeur à l'université de Jijel, que je remercie pour ses conseils durant la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont ensuite au jury de ce mémoire : Dr.N.Ferkous, Maitre de conférence A à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et B. Guettou, Maitre Assistante A à l'université de Jijel, qui a accepté de juger ce travail en sa qualité d'examinatrice.

Un grand merci pour mes parents qui m'ont aidé beaucoup.

Je tiens à remercier mes soeurs et mes frère et mes amies pour l'encouragement et pour leur soutien moral.

Enfin, je tiens également à remercier tous mes enseignants de physique théorique.

M. Boutadjine

Table des matières

Introduction générale

Les systèmes dépendants explicitement du temps est un sujet d'un grand intérêt et sont souvent utilisés comme modèles pour décrire les phénomènes physiques. On rencontre ces systèmes dans différents domaines comme la chimie quantique, l'optique quantique, la physique des plasmas et la théorie quantique des champs [1, 2, 3]. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre l'équation de Schrodinger associée à ces systèmes, parmi ces méthodes citons la méthode des invariants [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], la méthode des intégrales de chemins [8, 9, 10, 11, 12, 13], les transformations unitaires [14, 15], le principe d'action de Schwinger, les méthodes algébriques [16, 17], la théorie des perturbations dépendante du temps, l'approximation adiabatique et les méthodes numériques [18].

Si l'Hamiltonien dépend explicitement du temps, alors il n'est pas une constante du mouvement, et dans ce cas il n'est pas facile de trouver les solutions de l'équation de Schrödinger associée. En 1969, H.R Lewis, JR,W.B. Riesenfeld ont développé une méthode pour obtenir les invariants de l'oscillateur harmonique dépendant du temps, et ont montré l'existence d'une relation entre les fonctions propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger mais le prix à payer est l'apparition d'une équation differentielle auxiliaire non linéaire supplémentaire qu'il faut résoudre [4, 5].

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux différentes méthodes de calcul des invariants associés aux hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques dépendants du temps. Pour cela, nous allons refaire les démonstrations en détails de trois articles. En effet, dans un premier travail, on refait l'article [6] pour calculer l'expression de l'invariant quadratique d'un oscillateur harmonique quantique de masse et de fréquence variable avec le temps par la méthode de Lewis-Riesenfeld. Ensuite, nous calculons l'invariant linéaire et la solution de Schrodinger du même système et nous comparons les solutions associées aux deux invariants. Dans le deuxième travail, on refait l'article [19] pour calculer l'invariant quadratique d'un oscillateur harmonique quantique de masse et de fréquence variable avec le temps en représentation de Heisenberg. Dans le troisième travail, on refait l'article [20] pour construire les invariants classiques et quantiques de l'oscillateur harmonique à une dimension avec fréquence dépendante du temps à partir des équations du mouvement. Notons que dans ces trois travaux, on utilise la representation de Schrodinger ou la représentation de Heisenberg.

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, après introduction de la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld, nous avons traité en comme exemple l'oscillateur harmonique à une dimension avec masse et fréquence dépendantes du temps en utilisant les invariants quadratique et linéaire pour obtenir les solutions corespondantes de l'équation de

Schrodinger. Ensuite, nous avons présenté au deuxième chapitre la méthode de calcul de l'invariant de l'oscillateur harmonique à une dimension avec masse et fréquence dépendantes du temps en représentation de Heisenberg. Au troisième chapitre, nous avons présenté une nouvelle approche de calcul des invariants classiques et quantiques de l'oscillateur harmonique à une dimension avec fréquence dépendante du temps à partir des équations du mouvement. Nous avons calculé, dans la cas classique et quantique, les invariants linéaires et quadratiques ainsi que le lien entre ces invariants. Le mémoire se termine par une conclusion.

Chapitre 1

Méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld pour obtenir la solution de l'équation de Schrödinger dépendante explicitement du temps [5]. Cette méthode consiste à trouver un invariant, ses fonctions et ses valeurs propres. Lewis et Riesenfeld ont montré que la solution de l'équation de Schrödinger correspondante est une combinaison linéaire des fonctions propres de l'invariant.

1.2 Exposé de la méthode

On considère un système physique dont l'Hamiltonien $H(t)$ dépend explicitement du temps. Son évolution est régie par l'équation Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\psi(t)\right\rangle. \tag{1.1}$$

Définition : Un opérateur $I(t)$ est un invariant, ou constante du mouvement, s'il est hermitien $I(t) = I^{\dagger}(t)$ et vérifie l'équation de Von Neumann

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[I(t), H(t)\right] = 0. \tag{1.2}$$

Montrons que si $\left|\psi(t)\right\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger alors le vecteur $I(t)\left|\psi(t)\right\rangle$ l'est aussi : mutiplions l'équation (1.2) par l'état $\left|\psi(t)\right\rangle$ on obtient

$$i\hbar\left(\frac{\partial I(t)}{\partial t}\right)\left|\psi(t)\right\rangle + \left[I(t), H(t)\right]\left|\psi(t)\right\rangle = 0, \tag{1.3}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial I\left(t\right)}{\partial t}+I\left(t\right)H\left(t\right)\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle =H\left(t\right)I\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle , \tag{1.4}$$

et en remplacant (1.1) dans (1.4) on obtient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(I\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle\right) =H\left(t\right)I\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle , \tag{1.5}$$

ce signifie que le vecteur $I\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ est aussi solution de l'équation de Schrödinger.

1.2.1 Recherche de l'invariant

Pour construire des opérateurs invariants, on utilise par exemple l'algèbre de Lie fermée engendrée par l'Hamiltonien et donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens de dimension M [21, 22]

$$\wedge_M=\left\{T_1,T_2,.....T_M\right\}, \tag{1.6}$$

qui vérifiant les relations de commutation

$$\left[T_i,T_l\right]=\sum_{k=1}^{M}\xi_{ilk}T_k. \tag{1.7}$$

et l'Hamiltonien $H\left(t\right)$ s'écrit comme une combinaision linéaire des générateurs T_i

$$H\left(t\right)=\sum_{i=1}^{N}h_i\left(t\right)T_i;\ \text{pour}\quad M\geq N, \tag{1.8}$$

tel que $h_i\ \left(t\right)$ sont des fonctions réelles dépendantes explicitement du temps.

Ensuite cherchons des invariants $I\left(t\right)$ de la forme

$$I\left(t\right)=\sum_{l=1}^{M}\beta_l\left(t\right)T_l, \tag{1.9}$$

où les $\beta_l\left(t\right)$ sont des fonctions réelles du temps.

En insérant (1.7) et (1.8) dans l'équation (1.2), on montre que les $\beta_l\left(t\right)$ vérifient un système d'équations différentielles du premier order par rapport au temps

$$i\hbar\dot{\beta}_l\left(t\right)=\sum_{k=1}^{M}C_k\left(t\right)\beta_l\left(t\right),\qquad \text{avec } l,k\in\left\{1.2.....M\right\}, \tag{1.10}$$

avec

$$C_k\left(t\right)=\sum_{k=1}^{M}h_i\left(t\right)\xi_{ilk}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Propriétés de l'invariant

On suppose que l'invariant $I(t)$ admet un ensemble d'états propres orthogonaux $\{|\phi_n\rangle\}$ avec les valeurs propres λ_n

$$I(t)|\phi_n\rangle = \lambda_n |\phi_n\rangle, \quad \text{avec} \quad \langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}. \tag{1.12}$$

On peut montrer que les valeurs propres λ_n sont réelles et indépendentes du temps. Pour cela, calculons la dérivée de l'équation (1.12) par rapport au temps

$$\frac{\partial}{\partial t}(I(t)|\phi_n\rangle) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda_n |\phi_n\rangle),$$

on obtient

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + I(t)\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}|\phi_n\rangle + \lambda_n \frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle. \tag{1.13}$$

En appliquant l'équation (1.2) sur l'état propre $|\phi_n\rangle$ on a

$$i\hbar\left(\frac{\partial I(t)}{\partial t}\right)|\phi_n\rangle + [I(t), H(t)]|\phi_n\rangle = 0, \tag{1.14}$$

et utilisons la relation (1.12) dans (1.14) on obtient

$$i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + I(t)H(t)|\phi_n\rangle - \lambda_n H(t)|\phi_n\rangle = 0, \tag{1.15}$$

ensuite multiplions à gauche l'équation (1.15) par $\langle\phi_m|$

$$i\hbar\langle\phi_m|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + \lambda_m\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle - \lambda_n\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle = 0, \tag{1.16}$$

nous obtenons alors

$$i\hbar\langle\phi_m|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + (\lambda_m - \lambda_n)\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle = 0. \tag{1.17}$$

Pour $m = n$ on a

$$\langle\phi_n|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle = 0. \tag{1.18}$$

Multiplions maintenant l'équation (1.13) par $\langle\phi_n|$

$$\langle\phi_n|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + \langle\phi_n|I(t)\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\langle\phi_n|\phi_n\rangle + \lambda_n\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle, \tag{1.19}$$

avec $\langle\phi_n|\phi_n\rangle = 1$, on obtient

$$\langle\phi_n|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle + \lambda_n\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t} + \lambda_n\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle,$$

$$\langle\phi_n|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t} = 0, \tag{1.20}$$

alors les valeurs propres de l'invariant sont indépendants du temps. Pour trouver la relation entre les états propres de $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger, l'équation (1.19) s'écrit dans ce cas

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle = (\lambda_n - I(t))\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle, \tag{1.21}$$

et multiplions par $\langle\phi_m|$

$$i\hbar\langle\phi_m|\frac{\partial I(t)}{\partial t}|\phi_n\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle, \tag{1.22}$$

utilisons ensuite l'équation (1.17)

$$i\hbar\lambda_n\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle - i\hbar\lambda_m\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle, \tag{1.23}$$

d'où

$$i\hbar(\lambda_n - \lambda_m)\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle. \tag{1.24}$$

Pour $\lambda_n \neq \lambda_m$, nous avons

$$i\hbar\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle, \tag{1.25}$$

on déduit immédiatement que $|\phi_n\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger. Jusqu'ici on n'a pas parlé de la phase de $|\phi_n\rangle$

$$|\phi_n\rangle_\alpha = \exp[i\alpha_n(t)]|\phi_n\rangle, \tag{1.26}$$

où $\alpha_n(t)$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie.

Ces $|\phi_n\rangle_\alpha$ sont des états propres orthonormés de $I(t)$ associés à λ_n, aussi bien que les $|\phi_n\rangle$ pour un choix approprié des phases $\alpha_n(t)$ sera vérifée pour $\lambda_n = \lambda_m$ et donc l'objectif sera atteint à condition d'avoir

$$i\hbar\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}(\exp[i\alpha_n(t)]|\phi_n\rangle) = \langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle,$$

$$-\hbar\frac{\partial\alpha_n(t)}{\partial t}\exp[i\alpha_n(t)]\langle\phi_m|\phi_n\rangle + i\hbar\exp[i\alpha_n(t)]\langle\phi_m|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \exp[i\alpha_n(t)]\langle\phi_m|H(t)|\phi_n\rangle,$$

$$\hbar\delta_{mn}\frac{\partial\alpha_n(t)}{\partial t} = \langle\phi_m|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right)|\phi_n\rangle. \tag{1.27}$$

Pour satisfaire cette équation, les états $|\phi_n\rangle$ doivent étre choisies de sorte que le membre à droite s'annule pour $m \neq n$. La diagonalisation est toujours possible car l'opérateur $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)$ est hermitien. une fois on a choisi les états,les phases $\alpha_n(t)$ sont choisies pour qu'elles statisfassent l'équation simple

$$\hbar\frac{\partial\alpha_n(t)}{\partial t} = \langle\phi_n|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\right)|\phi_n\rangle. \tag{1.28}$$

1.2.3 Solution générale de l'équation de Schrödinger

Du fait que chacun de nouveaux états propres $|\phi_n\rangle_\alpha$ de $I(t)$ satisfait l'équation de Schrödinger, la solution générale est donneé par

$$|\,\psi(t)\rangle = \sum_n C_n \exp\left[i\alpha_n(t)\right]|\phi_n\rangle\,, \tag{1.29}$$

tel que C_n sont des coefficients de normalisation indépendants du temps, et à l'instant $t=0$ on a

$$|\,\psi(0)\rangle = \sum_n C_n \exp\left[i\alpha_n(0)\right]|\phi_n(0)\rangle\,, \tag{1.30}$$

sachant que

$$C_n = \langle\phi_n(0)\,|\psi(0)\rangle\,. \tag{1.31}$$

1.3 Application à l'oscillateur dépendant du temps

Considérons un oscillateur harmonique à une dimension de masse et fréquence dépendants du temps, dont l'expression de l'Hamiltonien est donnée par [6]

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2, \tag{1.32}$$

où $M(t)$ et $\omega(t)$ sont respectivement la masse et la fréquence de l'oscillateur qui sont des fonctions réelles et qui dépendent explicitement du temps, et les variables canonique (q,p) vérifient la relation de commutation

$$[q,p] = i\hbar, \tag{1.33}$$

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}\left[q, H(t)\right] = \frac{1}{M(t)}p, \dot{p} = \frac{1}{i\hbar}\left[p, H(t)\right] = -M(t)\,\omega^2(t)\,q \quad , \tag{1.34}$$

après simplification on obtient

$$\ddot{q} + \gamma(t)\,\dot{q} + \omega^2(t)\,q = 0, \tag{1.35}$$

avec

$$\gamma(t) = \frac{1}{M(t)}\frac{d}{dt}\left(M(t)\right) = \frac{d}{dt}\left[\ln M(t)\right], \tag{1.36}$$

1.3.1 Invariant quadratique

Pour déterminer l'expression de l'invariant $I(t)$ associé à l'Hamiltonien (1.32), on choisi les générateur T_1, T_2 et T_3 de l'algèber de Lie comme

$$T_1 = \frac{1}{2}p^2, T_2 = \frac{1}{2}\{p, q\}_+, T_3 = \frac{1}{2}q^2, \tag{1.37}$$

et qui vérifient les relation de commutation suivantes

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_1, \qquad [T_1, T_3] = -i\hbar T_2, \qquad [T_2, T_3] = -2i\hbar T_3. \tag{1.38}$$

L'Hamiltonien (1.32) s'écrit sous la forme

$$H(t) = \frac{1}{M(t)}T_1 + M(t)\,\omega^2(t)\,T_3, \tag{1.39}$$

par subsitution dans l'éq (1.8) ,l' invariant est

$$I(t) = \sum_{l=1}^{3} \beta_l(t)\,T_l = \beta_1(t)\,T_1 + \beta_2(t)\,T_2 + \beta_3(t)\,T_3, \tag{1.40}$$

et la dérivée de l'invariant par rapport au temps est

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \dot{\beta}_1(t)\,T_1 + \dot{\beta}_2(t)\,T_2 + \dot{\beta}_3(t)\,T_3, \tag{1.41}$$

en raportant l'equation de Von Neumann(1.2), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar}[H(t), I(t)] &= \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{M(t)}\beta_2(t)[T_1, T_2] + \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{M(t)}\beta_3(t)[T_1, T_3] \\ &+ \frac{1}{i\hbar}M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_1(t)[T_3, T_1] + \frac{1}{i\hbar}M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_2(t)[T_3, T_2], \end{aligned} \tag{1.42}$$

en tentant compte des relation de commutation (1.38), alors

$$\frac{1}{i\hbar}[H(t), I(t)] = -\frac{2}{M(t)}\beta_2(t)\,T_1 + \left(M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_1(t) - \frac{1}{M(t)}\beta_3(t)\right)T_2 + 2M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_2(t)\,T_3, \tag{1.43}$$

en insérant les deux équation (1.41) et (1.43) dans (1.2) et identifiant les termes semblables on obtient le système des équations différentiells linéaires couplées suivant

$$\dot{\beta}_1(t) = -\frac{2}{M(t)}\beta_2(t), \tag{1.44}$$

$$\dot{\beta}_2(t) = M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_1(t) - \frac{1}{M(t)}\beta_3(t), \tag{1.45}$$

$$\dot{\beta}_3(t) = 2M(t)\,\omega^2(t)\,\beta_2(t). \tag{1.46}$$

En tenant compte des équations (1.44) , (1.45) et (1.46) on trouve la relation qui reliés entre $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ et $\beta_3(t)$

$$\chi(t) = \beta_1(t)\beta_3(t) - \beta_2^2(t) = \text{constante}, \tag{1.47}$$

et la dérivée de $\chi(t)$ par rapport le temps est nulle

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(t) &= \dot{\beta}_1(t)\beta_3(t) + \beta_1(t)\dot{\beta}_3(t) - 2\beta_2(t)\dot{\beta}_2(t) \\ &= -\frac{2}{M(t)}\beta_2(t)\beta_3(t) + 2M(t)\omega^2(t)\beta_2(t)\beta_1(t) - 2M(t)\omega^2(t)\beta_1(t)\beta_2(t) + \frac{2}{M(t)}\beta_3(t)\beta_2(t) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Si on choisit $\beta_1(t) = \rho^2\ (t)$

$$\dot{\beta}_1(t) = 2\rho(t)\dot{\rho}(t). \tag{1.49}$$

Il est facile déterminer $\beta_2(t)$ en utilisant(1.44) et (1.49)

$$\beta_2(t) = -M(t)\rho(t)\dot{\rho}(t), \tag{1.50}$$

$$\dot{\beta}_2(t) = -\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\rho(t)\dot{\rho}(t) - M(t)\left(\dot{\rho}^2(t) + \rho(t)\ddot{\rho}(t)\right), \tag{1.51}$$

et en utilisant (1.45) et (1.51) , $\beta_3(t)$ et

$$\beta_3(t) = M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\rho(t)\dot{\rho}(t) + M^2(t)\left(\dot{\rho}^2(t) + \rho(t)\ddot{\rho}(t)\right) + M^2(t)\omega^2(t)\rho^2(t), \tag{1.52}$$

et sa la dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_3(t) &= 2\ M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}^2(t) + 2M^2(t)\dot{\rho}(t)\ddot{\rho}(t) + 2\ M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\rho(t)\ddot{\rho}(t) \\ &+ M^2(t)\rho(t)\dddot{\rho}(t) + M^2(t)\dot{\rho}(t)\ddot{\rho}(t) + 2\ M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\omega^2(t)\rho^2(t) \\ &+ M^2(t)\left(\frac{d}{dt}\omega^2(t)\right)\rho^2(t) + 2M^2(t)\omega^2(t)\rho(t)\dot{\rho}(t) + \left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\rho(t)\dot{\rho}(t) \\ &+ M(t)\left(\frac{d^2}{d^2t}M(t)\right)\rho(t)\dot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\rho(t)\ddot{\rho}(t) + \ M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}^2(t), \end{aligned} \tag{1.53}$$

Ensuite insérons les éqs $(1.49), (1.50), (1.51), (1.52)$ et (1.53) dans(1.48) on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho(t)\left[\frac{d}{dt}M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right] \\
&+\ 3\dot{\rho}(t)\left[M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right] \\
&= 0\ ,
\end{aligned} \tag{1.54}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\frac{d}{dt}\left[M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right]}{\left[M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right]} = -\ 3\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}, \tag{1.55}$$

En intégrant l'équation (1.55) par rapport au temps on trouve

$$\int \frac{d\left[M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right]}{\left[M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t)\right]}dt = -\ 3\int \frac{d\rho(t)}{\rho(t)}dt, \tag{1.56}$$

on simplifant

$$M^2(t)\,\omega^2(t)\,\rho(t) + M^2(t)\,\ddot{\rho}(t) + M(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\dot{\rho}(t) = \frac{C}{\rho^3(t)}, \tag{1.57}$$

où C est une constante d'intégration, et posons $C = 1$ alors

$$\ddot{\rho}(t) + \gamma(t)\,\dot{\rho}(t) + \rho(t)\,\omega^2(t) = \frac{1}{M^2(t)\,\rho^3(t)}. \tag{1.58}$$

où $\gamma(t)$ est défini par la relation (1.36)

A partir de l'équation auxiliaire on a

$$\omega^2(t) = \frac{1}{M^2(t)\,\rho^4(t)} - \frac{1}{M(t)}\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)}, \tag{1.59}$$

En insérant (1.59) dans (1.52), on trouve l'expression de $\beta_3(t)$ en fonction de $\rho(t)$

$$\beta_3(t)\ = \frac{1}{\rho^2(t)}\left(1 + M^2(t)\,\rho^2(t)\,\dot{\rho}^2(t)\right). \tag{1.60}$$

Alors l'invariant s'écrit en fonction de $\rho(t)$ sous la forme

$$I(t) = \rho^2\ (t)\,T_1 - M(t)\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)\,T_2 + \frac{1}{\rho^2(t)}\left(1 + M^2(t)\,\rho^2(t)\,\dot{\rho}^2(t)\right)T_3. \tag{1.61}$$

On peut vérifier aisément que les fonctions propres $|\varphi_n(q,t)\rangle$ de $I(t)$ forment un ensemble orthonormé complet

$$I(t)|\varphi_n(q,t)\rangle = \lambda_n |\varphi_n(q,t)\rangle\,, \tag{1.62}$$

et

$$\langle\varphi_n(q,t) \mid \varphi_{n'}(q,t)\rangle = \delta_{nn'}. \tag{1.63}$$

Afin d'obtenir les valeurs et les fonctions propres de $I(t)$, on utilise la transformations unitaires U défine par

$$\varphi_n'(q,t) = U\varphi_n(q,t) \tag{1.64}$$

où U est un opérateur unitaire ,$UU^\dagger = U^\dagger U = I$, dont la forme est

$$U = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{2\rho(t)}q^2\right], \tag{1.65}$$

il important de noter qu' à travers cette transformation unitaire les coordonnées et moment conjugués se transforment comme suit

$$UqU^\dagger = q, \quad UpU^\dagger = \left(p + \frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\right), \tag{1.66}$$

et par conséquent ,l'invariant $I(t)$ est transformé en un opérateur U, en insérant l'Eq (1.66) dans (1.61) l'opérateur $I(t)$ se transforme comme suit

$$\begin{aligned} I'(t) = UI(t)U^\dagger &= \frac{1}{2}\rho^2(t)Up^2U^\dagger - \frac{1}{2}M(t)\rho(t)\dot{\rho}(t)U\{p,q\}_+U^\dagger \\ &+ \frac{1}{2\rho^2(t)}\left(1 + M^2(t)\rho^2(t)\dot{\rho}^2(t)\right)Uq^2U^\dagger, \\ &= \frac{1}{2}\rho^2(t)p^2 + \frac{1}{2\rho^2(t)}q^2, \end{aligned} \tag{1.67}$$

c'est-à-dire on trouve un nouvel invariant $I'(t)$

$$I'(t) = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\rho^2(t)\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2\rho^2(t)}q^2. \tag{1.68}$$

D'autre part, l'équation aux valeurs propres (1.62) de se transforme

$$I(t)U^\dagger \mid \varphi_n'(q,t)\rangle = \lambda_n U^\dagger \mid \varphi_n'(q,t)\rangle, \tag{1.69}$$

appliquons U à gauche

$$UI(t)U^\dagger \mid \varphi_n'(q,t)\rangle = \lambda_n UU^\dagger \mid \varphi_n'(q,t)\rangle,$$

on obtient

$$I'(t) \mid \varphi_n'(q,t)\rangle = \lambda_n \mid \varphi_n'(q,t)\rangle. \tag{1.70}$$

En utilisant (1.68) la derniére s'écrit

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\rho^2(t)\,\partial^2}{\partial^2 q}+\frac{1}{2\rho^2(t)}q^2\right] \mid \varphi_n'(q,t)\rangle = \lambda_n \mid \varphi_n'(q,t)\rangle, \tag{1.71}$$

posons $\sigma = \frac{q}{\rho}$ qui ne dépend pas explicitement du temps, on obtient la nouvel expression de (1.71) en fonction de σ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2\sigma}+\frac{\sigma^2}{2}\right] \mid \phi_n(\sigma)\rangle = \lambda_n \mid \phi_n(\sigma)\rangle, \tag{1.72}$$

sachant que

$$\mid \varphi_n'(q,t)\rangle = \rho^{-\frac{1}{2}}(t) \mid \phi_n(\sigma)\rangle = \rho^{-\frac{1}{2}}(t) \mid \phi_n\left(\frac{q}{\rho}\right)\rangle. \tag{1.73}$$

la facteur $\rho^{-\frac{1}{2}}(t)$ est choisi dans (1.74) de telle sorte que les $\varphi_n'(q,t)$ satisferont la relation de la normalisation

$$\int \varphi_n^{*\prime}(q,t)\,\varphi_n'(q,t)\,dq = 1, \tag{1.74}$$

ainsi la normalisation de $\phi_n(\sigma)$ est obtenue en utilisant $dq = \rho d\sigma$

$$\int \phi_n^*(\sigma)\,\rho^{-\frac{1}{2}}(t)\,\phi_n^*(\sigma)\,\rho^{-\frac{1}{2}}(t)\,\rho d\sigma = 1,$$
$$\int \phi_n(\sigma)\,\phi_n(\sigma)\,d\sigma = 1. \tag{1.75}$$

l'équation (1.72) est une équation de Schrödinger pour de l'oscillateur harmonique independ du temps de masse $M(t) = 1$ et la frequence $\omega(t) = 1$ et

$$\phi_n(\sigma) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right]\mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\sigma\right], \tag{1.76}$$

où $\mathcal{H}_n$ est le polynôme d'Hermite d'ordre n.

Les valeurs propres de λ_n sont

$$\lambda_n = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{1.77}$$

où n est un entier positive ou nul.

Pour trouver les fonctions propres de $I(t)$ on utilise les Eqs $(1.64), (1.65), (1.73)$,et (1.76) on trouve

$$\varphi_n(q,t)=\left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\rho(t)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}+\frac{i}{M(t)\rho^2(t)}\right)\right]\mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{1.78}$$

Cherchons maintenant l'expression de la phase $\alpha_n(t)$ la phase $\alpha_n(t)$ en reportant dans (1.28), multiplions à gauche et droite par l'opérateur identité $I=U^\dagger U$ comme suit

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t)=\langle\varphi_n\mid U^\dagger U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right)U^\dagger U\mid\varphi_n\rangle, \tag{1.79}$$

on voit que cette dérnière s'écrit explicitement comme

$$\begin{aligned}\hbar\dot{\alpha}_n(t)&=\langle\varphi_n'\mid U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right)U^\dagger\mid\varphi_n'\rangle,\\&=\langle\varphi_n'\mid U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U^\dagger-UH(t)U^\dagger\mid\varphi_n'\rangle,\end{aligned} \tag{1.80}$$

calculons l'expression du premier terme

$$U\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U^\dagger \;=\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{M}(t)\dot{\rho}(t)+M(t)\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2+\frac{1}{2}\frac{M(t)\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}q^2\right), \tag{1.81}$$

et le deuxième terme est

$$\begin{aligned}UH(t)U^\dagger&=U\left[\frac{P^2}{2M(t)}+\frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)q^2\right]U^\dagger\\&=\frac{1}{2M(t)}Up^2U^\dagger+\frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)Uq^2U^\dagger,\end{aligned} \tag{1.82}$$

et sachant que

$$\begin{aligned}Up^2U^\dagger=UpU^\dagger UpU^\dagger&=\left(p+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\right)\left(p+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\right)\\&=p^2+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}pq+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp+\frac{M^2(t)\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}q^2,\end{aligned} \tag{1.83}$$

$$Uq^2U^\dagger=q^2, \tag{1.84}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}UH(t)U^\dagger&=\frac{p^2}{2M(t)}+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{2M(t)\rho(t)}pq+\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{2M(t)\rho(t)}qp+\frac{M^2(t)\dot{\rho}^2(t)}{2M(t)\rho^2(t)}q^2+\frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)q^2\\&=\frac{p^2}{2M(t)}+\frac{\dot{\rho}(t)}{2\rho(t)}pq+\frac{\dot{\rho}(t)}{2\rho(t)}qp+\frac{M(t)\dot{\rho}^2(t)}{2\rho^2(t)}q^2+\frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)q^2,\end{aligned} \tag{1.85}$$

et en utilisant (1.59), l'expression précédant se réduit à

$$UH(t)U^{\dagger} = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)}pq + \frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)}qp + \frac{M(t)\dot\rho^2(t)}{2\rho^2(t)}q^2 + \frac{1}{2M(t)\rho^4(t)}q^2 - \frac{\dot M(t)\dot\rho(t)}{2\rho(t)}q^2 - \frac{M(t)\ddot\rho(t)}{2\rho(t)}q^2, \tag{1.86}$$

insérons (1.81) et (1.86) dans (1.80) alors

$$\begin{aligned}\hbar\dot\alpha_n(t) &= \langle\varphi_n' \mid \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2M(t)} - \frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)}qp - \frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)}pq - \frac{1}{2M(t)\rho^4(t)}q^2\right\} \mid \varphi_n'\rangle \\ &= \langle\varphi_n' \mid \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2M(t)} - \frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}qp + \frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)} - \frac{1}{2M(t)\rho^4(t)}q^2\right\} \mid \varphi_n'\rangle \\ &= \langle\varphi_n' \mid \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^2}{2M(t)} + i\hbar\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\,\frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)} - \frac{1}{2M(t)\rho^4(t)}q^2\right\} \mid \varphi_n'\rangle,\end{aligned} \tag{1.87}$$

remplaçons p^2 par $p^2 = \hbar^2\frac{\rho^2(t)}{\rho^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial^2 q}$, on obtient

$$\hbar\dot\alpha_n(t) = \langle\varphi_n' \mid \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \hbar^2\frac{1}{2M(t)}\frac{\rho^2(t)}{\rho^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial^2 q} + i\hbar\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\,\frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)} - \frac{1}{2M(t)\rho^4(t)}q^2\right\} \mid \varphi_n'\rangle, \tag{1.88}$$

remplaçons (1.68) dans la dérnière relation on trouve

$$\hbar\dot\alpha_n(t) = \langle\varphi_n' \mid \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\,\frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)}\right\} \mid \varphi_n'\rangle, \tag{1.89}$$

En utilisant la formule (1.73) dans (1.89) , on obtient finalement

$$\hbar\dot\alpha_n(t) = \langle\phi_n(\sigma) \mid \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\,\frac{\dot\rho(t)}{2\rho(t)} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)}\right\}\rho^{-\frac{1}{2}}(t) \mid \phi_n(\sigma)\rangle, \tag{1.90}$$

calculons ensuite le premier terme dans (1.90)

$$\begin{aligned}&\langle\phi_n(\sigma) \mid \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho^{-\frac{1}{2}}(t) \mid \phi_n(\sigma)\rangle \\ &\qquad = \langle\phi_n(\sigma) \mid \left\{-\frac{1}{2}i\hbar\rho^{-2}(t)\dot\rho(t) + \rho^{-1}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right\} \mid \phi_n(\sigma)\rangle,\end{aligned} \tag{1.91}$$

et remplaçons (1.91) dans (1.90)

$$\hbar\dot\alpha_n(t) = \langle\phi_n(\sigma) \mid \rho^{-1}i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\left\{i\hbar\frac{\dot\rho(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)}\right\}\rho^{-\frac{1}{2}}(t) \mid \phi_n(\sigma)\rangle, \tag{1.92}$$

et après simplication du deuxième et troisième terme dans (1.92), on a

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \langle\phi_n(\sigma) \mid \rho^{-1}\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)}\right\} \mid \phi_n(\sigma)\rangle. \tag{1.93}$$

D'autre part, on peut utiliser le changement de variable $\sigma = \frac{q}{\rho}$ qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial\left(\frac{q}{\rho}\right)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\sigma} = -q\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)}\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{1.94}$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial\sigma}{\partial q}\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial\left(\frac{q}{\rho}\right)}{\partial q}\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{1}{\rho(t)}\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{1.95}$$

après remplacement on trouve

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \langle\phi_n(\sigma) \mid \rho^{-1}\left\{-i\hbar q\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)}\frac{\partial}{\partial\sigma} + i\hbar q\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)}\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)}\right\} \mid \phi_n(\sigma)\rangle, \tag{1.96}$$

alors on obtient

$$\hbar\dot{\alpha}_n(t) = \langle\varphi_n' \mid -\frac{I'(t)}{M(t)\rho^2(t)} \mid \varphi_n'\rangle, \tag{1.97}$$

en utilisant (1.73) et la condition de normalisation φ_n' on a

$$\dot{\alpha}_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{M(t)\rho^2(t)}, \tag{1.98}$$

ainsi l'expression finale de la phase est donnée par

$$\alpha_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{M(t')\rho^2(t')}dt', \tag{1.99}$$

et les solutions $\psi_n(q,t)$ de l'équation de schrödinger sont obtenues à partir de (1.29) et (1.78)

$$\psi_n(q,t) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\rho(t)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp\left[i\alpha_n(t)\right]\exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{M(t)\rho^2(t)}\right)\right]\mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{1.100}$$

1.3.2 Invariant linéaire

on sait que l'invariant n'est pas unique, plusieurs auteurs ont utilisé les invariants linéaires pour résoudre l'équation de Schrodinger dépendante du temps [23, 24, 25, 26].

On cherche un opérateur invariant linéaire, associé à l'hamiltonien (1.32), sous la forme

$$I_L(t) = \alpha(t) q + \beta(t) p + \gamma(t), \tag{1.101}$$

où les coefficients $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des fonctions réelles du temps qui seront choisies de telle sorte à satisfaire l'équation de Von Neumann

$$\frac{\partial}{\partial t} I_L(t) = -\frac{1}{i\hbar}\left[I_L(t), H(t)\right], \tag{1.102}$$

la dérivée de l'invariant par rapport au temps est

$$\frac{\partial}{\partial t} I_L(t) = \dot{\alpha}(t) q + \dot{\beta}(t) p + \dot{\gamma}(t), \tag{1.103}$$

et la relation de commutation du deuxième membre est

$$-\frac{1}{i\hbar}\left[H(t), I_L(t)\right] = -\frac{1}{M(t)}\alpha(t) p + M(t)\omega^2(t)\beta(t) q, \tag{1.104}$$

en insérant les deux équations (1.103) et (1.104) dans (1.102) et par identification des termes semblables des deux members

$$\dot{\alpha}(t) = M(t)\omega^2(t)\beta(t) \ , \ \dot{\beta}(t) = -\frac{1}{M(t)}\alpha(t) \ , \dot{\gamma}(t) = 0, \tag{1.105}$$

et $\beta(t)$ vérifie l'équation auxiliaire suivante

$$\ddot{\beta}(t) + \omega^2(t)\beta(t) + \dot{\beta}(t)\frac{1}{M(t)}\frac{d}{dt}(M(t)) = 0, \tag{1.106}$$

posons $\beta(t) = \rho^2(t)$ alors

$$\dot{\beta}(t) = 2\rho(t)\dot{\rho}(t), \quad \ddot{\beta}(t) = 2\left(\dot{\rho}^2(t) + \rho(t)\ddot{\rho}(t)\right), \tag{1.107}$$

et vérifie $\rho^2(t)$ l'équation suivant

$$2\ddot{\rho}(t) + 2\frac{1}{M(t)}\frac{d}{dt}(M(t))\dot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) = -\frac{2\dot{\rho}^2(t)}{\rho(t)}, \tag{1.108}$$

$$\omega^2(t) = -\frac{2\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)} - \frac{2\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{2\dot{M}(t)\dot{\rho}(t)}{M(t)\rho(t)}. \tag{1.109}$$

Alors l'invariant s'écrit en fonction de $\rho(t)$ pour $(\gamma(t) = 0)$,comme

$$I_L(t) = \rho^2(t) p - 2M(t)\rho(t)\dot{\rho}(t) q, \tag{1.110}$$

on peut vérifier que les fonctions propres $|\varphi_\lambda(q,t)\rangle$ de $I(t)$ forment un ensemble orthonormé complet

$$I_L(t)|\varphi_\lambda(q,t)\rangle = \lambda|\varphi_\lambda(q,t)\rangle, \quad \langle\varphi_\lambda(q,t)|\varphi_\lambda(q,t)\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{1.111}$$

Considérons donc la transformation unitaire définie par

$$\varphi'_{\lambda}(q,t) = U_L \varphi_{\lambda}(q,t), \qquad U_L = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\,\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2\right], \tag{1.112}$$

avec $U_L U_L^{\dagger} = U_L^{\dagger} U_L = I$.

L'opérateur U commute avec l'operateur q et transforme l'opérateur p de la manière suivante

$$U_L p U_L^{\dagger} = \left(p + \frac{2M(t)\,\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\right), \quad U_L q U_L^{\dagger} = q, \tag{1.113}$$

en insérant l'eq (1.113) dans la relation (1.110) $\varphi_{\lambda}(q,t)$ devient

$$I'_L(t) = U_L I_L(t)\, U_L^{\dagger} = \rho^2(t)\, p^2, \tag{1.114}$$

ainsi l'équation aux valeurs propres de l'invaiant $I'_L(t)$ est

$$I'_L(t) \left|\varphi'_{\lambda}(q,t)\right\rangle = \lambda \left|\varphi'_{\lambda}(q,t)\right\rangle. \tag{1.115}$$

qui s'écrit en representation position comme

$$\left[-i\hbar\rho^2(t)\frac{\partial}{\partial q}\right]\left|\varphi'_{\lambda}(q,t)\right\rangle = \lambda\left|\varphi'_{\lambda}(q,t)\right\rangle, \tag{1.116}$$

posons $\delta = \frac{q}{\rho^2}$ qui ne dépend pas explicitement du temps, et l'expression (1.116) s'écrit en fonction de δ sous la forme

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\delta}\right]\left|\phi_{\lambda}(\delta)\right\rangle = \lambda\left|\phi_{\lambda}(\delta)\right\rangle, \tag{1.117}$$

sachant que

$$\left|\varphi'_{\lambda}(q,t)\right\rangle = \rho^{-1}(t)\left|\phi_{\lambda}(\delta)\right\rangle = \rho^{-1}(t)\left|\phi_{\lambda}\left(\frac{q}{\rho^2}\right)\right\rangle. \tag{1.118}$$

la facteur $\rho^{-1}(t)$ est choisi dans (1.118) de telle sorte que les $\varphi'_{\lambda}(q,t)$ satisferont les relations de normalisation

$$\int \varphi^{*\prime}_{\lambda}(q,t)\,\varphi'_{\lambda}(q,t)\,dq = 1, \tag{1.119}$$

nous obtenons la normalisation de $\phi_{\lambda}(\delta)$

$$\int \phi^{*}_{\lambda}(\delta)\,\phi_{\lambda}(\delta)\,d\delta = 1, \tag{1.120}$$

alors les fonctions propres $\phi_{\lambda}(\delta)$ sont des ondes planes de la forme

$$\phi_{\lambda}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda\delta\right). \tag{1.121}$$

et les valeurs propres λ forment un spectre continu.

Pour obtenir les fonction propre de $I_L(t)$ on utilise les eqs (1.112) et (1.118) ,on trouve

$$\varphi_\lambda(q,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}\rho(t)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2+\frac{i\lambda}{\hbar}\frac{q}{\rho^2}\right].$$

Ensuit on cherche la phase $\alpha_\lambda(t)$, en reportant (1.28), et multiplions à gauche et droite par l'opérateur identité $I=U_L^\dagger U_L$

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t)=\langle\varphi_\lambda|\,U_L^\dagger U_L\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right)U_L^\dagger U_L\,|\varphi_\lambda\rangle\,, \tag{1.122}$$

on voit que cette dérnière s'écrit explicitement comme

$$\begin{aligned}\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t)&=\langle\varphi_\lambda'\mid U_L\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)\right)U_L^\dagger\mid\varphi_\lambda'\rangle,\\&=\langle\varphi_\lambda'\mid U_L\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U_L^\dagger-U_LH(t)\,U_L^\dagger\mid\varphi_\lambda'\rangle,\end{aligned} \tag{1.123}$$

après calcul et simplification le premier terme s'écrit

$$U_L\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)U_L^\dagger\;=\;i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\left(-\frac{\dot{M}(t)\,\dot{\rho}(t)+M(t)\,\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2+\frac{M(t)\,\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}q^2\right), \tag{1.124}$$

et le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned}U_LH(t)\,U_L^\dagger&=\frac{p^2}{2M(t)}+\frac{M(t)\,\dot{\rho}(t)}{M(t)\,\rho(t)}pq+\frac{M(t)\,\dot{\rho}(t)}{M(t)\,\rho(t)}qp+\frac{2M^2(t)\,\dot{\rho}^2(t)}{M(t)\,\rho^2(t)}q^2+\frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2\\&=\frac{p^2}{2M(t)}+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}pq+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp+\frac{2M(t)\,\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}q^2+\frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2,\end{aligned} \tag{1.125}$$

en reportant (1.109) dans (1.125) on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned}U_LH(t)\,U_L^\dagger&=\frac{p^2}{2M(t)}+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}pq+\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp+\frac{2M(t)\,\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}q^2\\&\quad+\frac{1}{2}M(t)\left(-\frac{2\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)}-\frac{2\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)}-\frac{2\dot{M}(t)\,\dot{\rho}(t)}{M(t)\,\rho(t)}\right)q^2,\end{aligned} \tag{1.126}$$

et en insérant (1.124) et (1.125) dans (1.123) on obtient

$$\begin{aligned}\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t)&=\langle\varphi_\lambda'\mid\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p^2}{2M(t)}-\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp-\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp+i\hbar\,\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right\}\mid\varphi_\lambda'\rangle,\\&=\langle\varphi_\lambda'\mid\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p^2}{2M(t)}-\frac{2\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}qp+\;i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right\}\mid\varphi_\lambda'\rangle,\\&=\langle\varphi_\lambda'\mid\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{p^2}{2M(t)}+2i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q}+i\hbar\,\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right\}\mid\varphi_\lambda'\rangle,\end{aligned} \tag{1.127}$$

En remplaçant (1.114) dans le dérnière relation on trouve

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\varphi'_\lambda \mid \left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + 2i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\ \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\} \mid \varphi'_\lambda\rangle, \tag{1.128}$$

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-1}(t) \left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + 2i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\ \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\} \rho^{-1}(t) \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.129}$$

calculons l'expression du premier terme

$$\langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-1}(t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho^{-1}(t) \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \left\{ -i\hbar\rho^{-3}(t)\dot{\rho}(t) + \rho^{-2}i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \right\} \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.130}$$

et

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-2}i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \rho^{-1}(t)\left\{ 2i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\}\rho^{-1}(t) \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.131}$$

et après simplication du deuxième et troisième terme,on obtient donc

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-2}\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + 2i\hbar\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\} \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.132}$$

utilisons le changement de variable $\delta = \frac{q}{\rho^2}$ alors

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\delta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\delta} = -2q\frac{\rho(t)\dot{\rho}(t)}{\rho^4(t)}\frac{\partial}{\partial\delta}, \qquad \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial\delta}{\partial q}\frac{\partial}{\partial\delta} = \frac{1}{\rho^2(t)}\frac{\partial}{\partial\delta}, \tag{1.133}$$

après remplacement on a

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-2}\left\{ -2i\hbar q\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^3(t)}\frac{\partial}{\partial\delta} + 2i\hbar q\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^3(t)}\frac{\partial}{\partial\delta} - \frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\} \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.134}$$

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\phi_\lambda(\delta) \mid \rho^{-1}(t)\left\{ -\frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \right\}\rho^{-1}(t) \mid \phi_\lambda(\delta)\rangle, \tag{1.135}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\hbar\dot{\alpha}_\lambda(t) = \langle\varphi'_\lambda \mid -\frac{I'^2(t)}{2M(t)\rho^4(t)} \mid \varphi'_\lambda\rangle, \tag{1.136}$$

$$\dot{\alpha}_\lambda(t) = -\frac{\lambda^2}{2\hbar M(t)\rho^4(t)} \qquad \text{car} \ \ \langle\varphi'_\lambda \mid \varphi'_\lambda\rangle = 0, \tag{1.137}$$

alors l'expression finale de la phase est

$$\alpha_\lambda(t) = -\frac{\lambda^2}{2\hbar}\int_0^t \frac{1}{M(t')\rho^4(t')}dt'. \tag{1.138}$$

Enfin, les solutions $\psi_\lambda(q,t)$ sont données par

$$\psi_\lambda(q,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}\rho(t)} \exp(i\alpha_\lambda(t)) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2 + \frac{i\lambda}{\hbar}\frac{q}{\rho^2}\right]. \tag{1.139}$$

1.3.3 Liens entre les solutions des invariants linéaire et quadratique

Soient $\left\{\psi_n^{(Q)}(q,t)\right\}$ et $\left\{\psi_\lambda^{(L)}(q,t)\right\}$ sont respectivement deux ensembles de solutions de l'équation de Schrödinger correspondant respectivement aux deux opérateurs invariants quadratique I_Q et linéaire I_L, alors on peut écrire

$$\psi_n^{(Q)}(q,t) = \int dq g_n(\lambda)\psi_\lambda^{(L)}(q,t), \tag{1.140}$$

où la fonction $g_n(\lambda)$ sera alors obtenue à partir de

$$g_n(\lambda) = \int dq \psi_\lambda^{*(L)}(q,0)\psi_\xi^{(Q)}(q,0). \tag{1.141}$$

Il est évident que les $g_n(\lambda)$ forment un ensemble de fonctions orthogonales

$$\int d\lambda g_n^*(\lambda) g_m(\lambda) = \delta_{nm}. \tag{1.142}$$

Relations entre les solution simples de $\mathbf{I}_L$ et $\mathbf{I}_Q$

À l'instant $t=0$, on obtient les solutions simples de l'invaraint linéaire et quadratique pour $(\rho_0 = 1)$ à l'instant initial sous la forme

$$\psi_\lambda(q,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}\rho(t)} \exp(i\alpha_\lambda(t)) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{M(t)\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}q^2 + \frac{i\lambda}{\hbar}\frac{q}{\rho^2}\right], \tag{1.143}$$

$$\psi_\lambda(q,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[\frac{i\lambda}{\hbar}q\right], \tag{1.144}$$

et celles correspondant à l'invariant quadratique par

$$\psi_n(q,t) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}\rho(t)}\right]^{\frac{1}{2}} \exp[i\alpha_n(t)] \exp\left[\frac{iM(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{M(t)\rho^2(t)}\right)q^2\right] \mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{q}{\rho}\right],$$

$$\psi_n(q,0) = \left[\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{q^2}{2\hbar}\right] \mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} q\right]. \tag{1.145}$$

En insérant les éqs (1.144) et (1.145) dans (1.141), on obtient l'expression de $g_n(\lambda)$, qui fait passer des états correspondant à l'invariant linéaire à celles correspondant à l'invariant quadratique, sous la forme

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left[-\frac{i\lambda}{\hbar} q\right] \exp\left[-\frac{q^2}{2\hbar}\right] \mathcal{H}_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} q\right], \tag{1.146}$$

on utilisons la fourmule [27]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixy) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathcal{H}_n(x)\, dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathcal{H}_n(y)\, i^n, \tag{1.147}$$

et après un calcul direct, on obtient

$$g_n(\lambda) = \left[\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\lambda^2}{2\hbar}\right] \mathcal{H}_n\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{\hbar}}\right] i^n, \tag{1.148}$$

et

$$\int d\lambda g_n^*(\lambda)\, g_m(\lambda) = (-1)^m i^n i^m \left[\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi\hbar}}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\lambda^2}{\hbar}\right] \mathcal{H}_n\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{\hbar}}\right] \mathcal{H}_m\left[-\frac{\lambda}{\sqrt{\hbar}}\right] d\lambda, \tag{1.149}$$

pour vérifier que les $g_n(\lambda)$ sont des fonctions orthogonales, effectuons le changement de variable $z = -\frac{\lambda}{\sqrt{\hbar}}$, et on utilisons la fourmule suivante [27]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) \mathcal{H}_n(x)\, \mathcal{H}_m(x)\, dx = 2^n\ .n! \sqrt{\pi}\ \delta_{mn}, \tag{1.150}$$

on obtient

$$\int d\lambda g_n^*(\lambda)\, g_m(\lambda) = \delta_{mn}. \tag{1.151}$$

Chapitre 2

Méthode des invariants en représentation de Heisenberg

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons le contenu d'un article [19] concernant le calcul de l'invariant de l'oscillateur harmonique avec masse et frequence dépendantes explicitement du temps en représentation de Heisenberg. Dans cette représentation, les opérateurs dépendent du temps cependant les fonctions d'onde ne le sont pas. Le but est de calculer les expressions des opérateurs position $q = q(t)$ et impulsion $p = p(t)$.

2.2 Application à l'oscillateur dépendant du temps

On considère un oscillateur harmonique à une dimension dont l'Hamiltonien $H(t)$ est

$$H(t) = \frac{P^2(t)}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2(t)\,, \tag{2.1}$$

où $M(t)$ et $\omega(t)$ sont respectivement la masse et la fréquence de l'oscillateur qui sont des fonctions réelles dépendantes explicitement du temps et sachant que $[q(t), p(t)] = i$.

Pour commencer, on définit la base hermitienne suivante

$$L_-(t) = \frac{p^2(t)}{2},\quad L_0(t) = \frac{p(t)\,q(t) + q(t)\,p(t)}{2},\ L_+(t) = \frac{q^2(t)}{2}, \tag{2.2}$$

qui vérifie une algèbre de Lie $su(2)$ avec la structure de groupe

$$\left[\frac{i}{2}L_0(t), L_+\right] = L_+(t)\,,\quad \left[\frac{i}{2}L_0(t), L_-\right] = -L_-(t)\,,\quad [L_+(t), L_-(t)] = 2\left(\frac{i}{2}L_0(t)\right). \tag{2.3}$$

Ensuite écrivons l'Hamiltonien dans cette base

$$H(t) = \frac{1}{M(t)} L_-(t) + M(t)\,\omega^2(t)\, L_+(t)\,, \tag{2.4}$$

et cherchons un invaraiant $I(t)$ du système de la forme

$$I(t) = \sum_{k=0,\pm} g_k(t)\, L_k = g_0(t)\, L_0(t) + g_+(t)\, L_+(t) + g_-(t)\, L_-(t)\,. \tag{2.5}$$

Sa derivée par rapport au temps est

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \dot{g}_0(t)\, L_0(t) + \dot{g}_+(t)\, L_+(t) + \dot{g}_-(t)\, L_-(t)\,, \tag{2.6}$$

et qui satisfait l'équation ($\hbar = 1$) de Von Neumann

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = i\,[I(t)\,, H(t)]\,. \tag{2.7}$$

En utilisant les relations (2.3) on montrera que l'équation (2.7) est equivalente un système d'équations differentielles du premier ordre. En effet, en insérant les relations (2.4) (2.6) dans (2.7) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(t)}{\partial t} &= i\,[g_0(t)\, L_0(t) + g_+(t)\, L_+(t) + g_-(t)\, L_-(t)]\left[\frac{1}{M(t)} L_-(t) + M(t)\,\omega^2(t)\, L_+(t)\right] - \\
&\quad i\left(\frac{1}{M(t)} L_-(t) + M(t)\,\omega^2(t)\, L_+(t)\right)[g_0(t)\, L_0(t) + g_+(t)\, L_+(t) + g_-(t)\, L_-(t)] \\
&= \frac{i}{M(t)} g_0(t)\,[L_0(t)\,, L_-(t)] + \frac{i}{M(t)} g_+(t)\,[L_+(t)\,, L_-(t)] + \\
&\quad iM(t)\,\omega^2(t)\, g_0(t)\,[L_0(t)\,, L_+(t)] + iM(t)\,\omega^2(t)\, g_-(t)\,[L_-(t)\,, L_+(t)]\,,
\end{aligned}$$

et en utilisant les relations de commutation(2.3) on trouve

$$\begin{aligned}
\dot{g}_0(t)\, L_0(t) + \dot{g}_+(t)\, L_+(t) + \dot{g}_-(t)\, L_-(t) &= \frac{-2}{M(t)} g_0(t)\, L_-(t) - \frac{1}{M(t)} g_+(t)\, L_0(t) + \\
&\quad 2M(t)\,\omega^2(t)\, g_0(t)\, L_+(t) + M(t)\,\omega^2(t)\, g_-(t)\, L_0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

et par comparaison on obtient le systéme suivant

$$\dot{g}_0(t) = M(t)\,\omega^2(t)\, g_-(t) - \frac{1}{M(t)} g_+(t)\,, \tag{2.9}$$

$$\dot{g}_+(t) = 2M(t)\,\omega^2(t)\, g_0(t)\,, \tag{2.10}$$

$$\dot{g}_-(t) = -\frac{2}{M(t)} g_0(t)\,, \tag{2.11}$$

la solution générale du ce système est donnée par

$$g_-(t) = c_1 f_1^2(t) + c_2 f_1(t) f_2(t) + c_3 f_2^2(t), \tag{2.12}$$

$$g_0(t) = -M(t)\left\{c_1 f_1^2(t)\dot{f}_1(t) + \frac{c_2}{2}\left[\dot{f}_1(t) f_2(t) + f_1(t)\dot{f}_2(t)\right] + c_3 f_2(t)\dot{f}_2(t)\right\}, \tag{2.13}$$

$$g_+(t) = M^2(t)\left[c_1 \dot{f}_1^2(t) + c_2 \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) + c_3 \dot{f}_2^2(t)\right], \tag{2.14}$$

où $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation du mouvement classique

$$\frac{d}{dt}\left(M(t)\frac{d}{dt}f(t)\right) + M(t)\omega^2(t) f(t) = 0. \tag{2.15}$$

Ensuite introduisons les opérateurs de création et d'annihilation dépendants du temps

$$A^\dagger(t) = \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}} - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)q(t) - i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}p(t), \tag{2.16}$$

$$A(t) = \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}} + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)q(t) + i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}p(t), \tag{2.17}$$

où $\omega_I = \sqrt{g_+(t)g_-(t) - g_0^2(t)}$ est une constante .

A partir de ces définitions, il est facile de monter que

$$\left[A(t), A^\dagger(t)\right] = 1, \tag{2.18}$$

sachant que

$$A^\dagger(t)A(t) = \left(\frac{\omega_I}{2g_-(t)} + \frac{g_0^2(t)}{2\omega_I g_-(t)}\right)q^2(t) - \frac{1}{2} + \frac{g_0(t)}{2\omega_I}\{q(t), p(t)\} + \frac{g_-(t)}{2\omega_I}p^2(t), \tag{2.19}$$

$$A(t)A^\dagger(t) = \left(\frac{\omega_I}{2g_-(t)} + \frac{g_0^2(t)}{2\omega_I g_-(t)}\right)q^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{g_0(t)}{2\omega_I}\{q(t), p(t)\} + \frac{g_-(t)}{2\omega_I}p^2(t), \tag{2.20}$$

donc l'opérateur $A^\dagger(t)A(t)$ est un opérateur qui a des valeurs propres entières positives.

L'invariant $I(t)$ peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\omega_I A^\dagger(t)A(t) &= \left(\frac{\omega_I^2}{2g_-(t)} + \frac{g_0^2(t)}{2g_-(t)}\right)q^2(t) - \frac{1}{2}\omega_I + \frac{g_0(t)}{2}\{q(t), p(t)\} + \frac{g_-(t)}{2}p^2(t)\\ &= \left(\frac{g_+(t)g_-(t) - g_0^2(t)}{g_-(t)} + \frac{g_0^2(t)}{g_-(t)}\right)L_+(t) - \frac{1}{2}\omega_I + g_0(t)L_0(t) + g_-(t)L_-(t)\end{aligned}$$

$$\omega_I A^\dagger(t)A(t) + \frac{1}{2}\omega_I = g_+(t)L_+(t) + g_0(t)L_0(t) + g_-(t)L_-(t)$$

$$I(t) = \omega_I\left(A^\dagger(t)A(t) + \frac{1}{2}\right), \tag{2.21}$$

alors les état propres $|n,t\rangle_I$ de l'invaraint peuvent s'écrire sous la forme

$$|n,t\rangle_I = \frac{A^{\dagger n}(t)}{\sqrt{n!}}\,|0,t\rangle_I\,, \tag{2.22}$$

où $|0,t\rangle_I$ est défini par

$$A(t)\,|0,t\rangle_I = 0. \tag{2.23}$$

D'autre part, l'Hamiltonien s'écrit sous la forme

$$H(t) = \sum_{j=0,\pm} h_j(t)\,K_j(t) = h_0(t)\,K_0(t) + h_-(t)\,K_-(t) + h_+(t)\,K_+(t)\,, \tag{2.24}$$

où $K_j(t)$ sont les générateurs de l'algèbre $su(1,1)$ de l'oscillateur harmonique

$$K_-(t) = \frac{A^2(t)}{2},\quad K_0(t) = \frac{A^\dagger(t)\,A(t) + A(t)\,A^\dagger(t)}{4},\ K_+(t) = \frac{A^{\dagger 2}(t)}{2}, \tag{2.25}$$

avec

$$h_0(t) = \frac{g_0^2(t) + M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t) + \omega_I^2}{g_-(t)\,M(t)\,\omega_I},\quad h_\pm(t) = \frac{g_0^2(t) + M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t) - \omega_I^2 \mp 2ig_0(t)\,\omega_I}{2g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}, \tag{2.26}$$

et les expressions de $A^2(t)$ et $A^{\dagger 2}(t)$ sont

$$\begin{aligned} A^2(t) = {} & \left(\frac{\omega_I}{2g_-(t)} + i\frac{g_0(t)}{g_-(t)} - \frac{g_0^2(t)}{2\omega_I g_-(t)}\right) q^2(t) + \frac{i}{2}q(t)\,p(t) + \frac{g_0(t)}{2}q(t)\,p(t) \\ & + \frac{i}{2}p(t)\,q(t) + \frac{g_0(t)}{2}p(t)\,q(t) - \frac{g_-(t)}{2\omega_I}p^2(t)\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} A^{\dagger 2}(t) = {} & \left(\frac{\omega_I}{2g_-(t)} - i\frac{g_0(t)}{g_-(t)} - \frac{g_0^2(t)}{2\omega_I g_-(t)}\right) q^2(t) - \frac{i}{2}q(t)\,p(t) \\ & + \frac{g_0(t)}{2\omega_I}q(t)\,p(t) - \frac{i}{2}p(t)\,q(t) + \frac{g_0(t)}{2\omega_I}p(t)\,q(t) - \frac{g_-(t)}{2\omega_I}p^2(t)\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

en insérant des éqs. $(2.19),(2.20),(2.27)$ et (2.28) on obtient l'expression de $H(t)$

$$\begin{aligned}
H(t) &= \left(\frac{g_0^2(t)+M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t)+\omega_I^2}{g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}\right)\left(\frac{A^\dagger(t)\,A(t)+A(t)\,A^\dagger(t)}{4}\right)\\
&+\left(\frac{g_0^2(t)+M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t)-\omega_I^2-2ig_0(t)\,\omega_I}{2g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}\right)\left(\frac{A^{\dagger 2}(t)}{2}\right)\\
&+\left(\frac{g_0^2(t)+M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t)-\omega_I^2+2ig_0(t)\,\omega_I}{2g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}\right)\left(\frac{A^2(t)}{2}\right)\\
&=\left(\frac{g_0^2(t)+M^2(t)\,\omega^2(t)\,g_-^2(t)}{4g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}\right)\left(\frac{2\omega_I}{g_-(t)}\right)q^2(t)+\left(\frac{\omega_I^2}{4g_-(t)\,M(t)\,\omega_I}\right)\\
&\left[\left(\frac{2g_0^2(t)}{\omega_I g_-(t)}\right)q^2(t)+\frac{2g_0(t)}{\omega_I}q(t)\,p(t)+\frac{2g_0(t)}{\omega_I}p(t)\,q(t)+\frac{2g_-(t)}{\omega_I}p^2(t)\right]\\
&-\frac{g_0^2(t)}{g_-^2(t)\,M(t)}q^2(t)-\frac{g_0(t)}{2g_-(t)\,M(t)}q(t)\,p(t)-\frac{g_0(t)}{2g_-(t)\,M(t)}p(t)\,q(t)\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{M(t)}p^2(t)+\frac{1}{2}M(t)\,\omega^2(t)\,q^2(t)\,, \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

En utilisant le système d'équations différentielles $(2.9),(2.10)$ et (2.11) dans les équations du mouvement de Heisenberg des opérateurs de création et d'annihilation, l'expression de $\frac{dA^\dagger(t)}{dt}$ est

$$\begin{aligned}
\frac{dA^\dagger(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}-i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)q(t)-i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}p(t)\right\}\\
&=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_I}{2}}\frac{\dot g_-(t)}{g_-^{\frac{3}{2}}(t)}+\frac{1}{2}i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I}}\frac{\dot g_-(t)}{g_-^{\frac{3}{2}}(t)}g_0(t)-i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}\dot g_0(t)\right)q(t)\\
&+\left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}-i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)\dot q(t)\\
&-i\frac{1}{2}\frac{\dot g_-(t)}{\sqrt{2\omega_I g_-(t)}}p(t)-i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}\dot p(t)\,,
\end{aligned}$$

après simplification, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dA^{\dagger}(t)}{dt} &= \sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}\frac{g_0(t)}{M(t)\,g_-(t)}q(t) - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}\frac{g_0^2(t)}{M(t)\,g_-(t)}q(t) \\
&\quad - i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}M(t)\,\omega^2(t)\,q(t) + i\frac{1}{M(t)}\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_+(t)\,q(t) \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}} - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)\frac{1}{M(t)}p(t) \\
&\quad + i\frac{g_0(t)}{M(t)\sqrt{2\omega_I g_-(t)}}p(t) + i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}M(t)\,\omega^2(t)\,q(t) \\
&= \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}\frac{g_0(t)}{M(t)\,g_-(t)} + i\frac{1}{M(t)}\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}\frac{\omega_I^2}{g_-(t)}\right)q(t) + \sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}\frac{1}{M(t)}p(t) \\
&= \frac{i\omega_I}{M(t)\,g_-(t)}\left\{\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}q(t) - i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\,q(t) + -i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}p(t)\right\} \\
&= \frac{i\omega_I}{M(t)\,g_-(t)}A^{\dagger}(t)\,,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

et de la même manière on trouve l'expression de $\frac{dA(t)}{dt}$

$$\begin{aligned}
\frac{dA(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}}\frac{\frac{-2}{M(t)}g_0(t)}{g_-(t)}q(t) - \frac{1}{2}i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}\frac{\frac{-2}{M(t)}g_0(t)}{g_-(t)}g_0(t)\,q(t) \\
&\quad + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}\left(M(t)\,\omega^2(t)\,g_-(t) - \frac{1}{M(t)}g_+(t)\right)q(t) \\
&\quad + \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t)}} + i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\right)\frac{1}{M(t)}p(t) \\
&\quad + i\frac{1}{2}\frac{\frac{-2}{M(t)}g_0(t)}{\sqrt{2\omega_I g_-(t)}}p(t) - i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}M(t)\,\omega^2(t)\,q(t) \\
&= \frac{-i\omega_I}{M(t)\,g_-(t)}A(t)\,.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En intégrant une fois les deux équations (2.30) et (2.31) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{A^{\dagger}(t_0)}^{A^{\dagger}(t)}\frac{dA^{\dagger}(t)}{A^{\dagger}(t)} &= \int\frac{i\omega_I}{M(t)\,g_-(t)}dt \\
\ln\left(\frac{A^{\dagger}(t)}{A^{\dagger}(t_0)}\right) &= \int_{t_0}^{t}\frac{i\omega_I}{M(t)\,g_-(t)}dt \\
A^{\dagger}(t) &= \exp\left[i\Omega\,(t-t_0)\right]A^{\dagger}(t_0)\,,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

et de même pour

$$A(t) = \exp\left[-i\Omega(t-t_0)\right] A(t_0), \tag{2.33}$$

avec $A^{\dagger}(t_0)$ et $A(t_0)$ sont les opérateurs de création et d'annihilation à l'instant initial t_0 et

$$\Omega(t-t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\omega_I}{M(t)\, g_-(t)} dt. \tag{2.34}$$

Alors l'invariant $I(t)$ peut alors être s'écrire sous la forme : en insérant les éqs$(2.32), (2.33)$ dans (2.21) on a

$$I(t) = \omega_I \left[\exp\left(i\Omega(t-t_0)\right) A^{\dagger}(t_0) \exp\left(-i\Omega(t-t_0)\right) A(t_0) + \frac{1}{2}\right],$$

on trouve

$$I(t) = \omega_I \left(A^{\dagger}(t_0) A(t_0) + \frac{1}{2}\right), \tag{2.35}$$

on remarque que l'invaraint (2.35) est independant du temps dans la répresentation d'Heisenberg ce qui n'est pas le cas dans la répresentation de Schödinger.

En appliquant les éqs. (2.32) et (2.33) plusieurs fois et après avoir fixé la phase de $|0\rangle_I$ correctement, les états propres l' invariant sont donnés par

$$|n,t\rangle_I = \exp\left[i\Omega(t-t_0)\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] |n\rangle_I, \tag{2.36}$$

où $|n\rangle_I = |n,t_0\rangle_I$ est un état propre de I à l'instant $t_{0.}$

En utilisant (2.16) et (2.17) pour obtenir les expressions des opérateurs $q(t)$ et $p(t)$ dans la répresentation d'Heisenberg

$$q(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g_-(t)}{\omega_I}} \left[A^{\dagger}(t) + A(t)\right], \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2g_-(t)}{\omega_I}} \left[\exp\left(i\Omega(t-t_0)\right) A^{\dagger}(t_0) + \exp\left(-i\Omega(t-t_0)\right) A(t_0)\right] \\ &= \sqrt{\frac{2g_-(t)}{\omega_I}} \left(\sqrt{\frac{\omega_I}{2g_-(t_0)}} \cos\Omega(t-t_0)\, q(t_0) + \sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t_0)}} g_0(t_0) \sin\Omega(t-t_0)\, q(t_0)\right) + \\ & \sqrt{\frac{2g_-(t)}{\omega_I}} \sqrt{\frac{g_-(t_0)}{2\omega_I}} p(t_0) \sin\Omega(t-t_0), \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} q(t) = q(t_0) \sqrt{\frac{g_-(t)}{g_-(t_0)}} \left[\cos\Omega(t-t_0) + \frac{g_0(t_0)}{\omega_I} \sin\Omega(t-t_0)\right] + \\ p(t_0) \frac{\sqrt{g_-(t)\, g_-(t_0)}}{\omega_I} \sin\Omega(t-t_0), \end{aligned} \tag{2.39}$$

et de la même manière, calculons l'expression de $p(t)$

$$A(t) - A^{\dagger}(t) = 2i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\, q(t) + 2i\sqrt{\frac{g_-(t)}{2\omega_I}}p(t)\,, \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2\omega_I}{g_-(t)}}\left(A(t) - A^{\dagger}(t) - 2i\sqrt{\frac{1}{2\omega_I g_-(t)}}g_0(t)\, q(t)\right) \\ &= q(t_0)\frac{1}{\sqrt{g_-(t_0)\, g_-(t)}}\left[(g_0(t_0) - g_0(t))\cos\Omega(t-t_0) - \left(\omega_I + \frac{g_0(t_0)\, g_0(t)}{\omega_I}\right)\sin\Omega(t-t_0)\right] + \\ & p(t_0)\sqrt{\frac{g_-(t_0)}{g_-(t)}}\left[\cos\Omega(t-t_0) - \frac{g_0(t)}{\omega_I}\sin\Omega(t-t_0)\right]. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Finalement, on a obtenus les expressions (2.39) et (2.41) des opérateurs position $q(t)$ et $p(t)$ de l'oscillateur harmonique dépendant du temps dans la représentation de Heisenberg.

Chapitre 3

Nouvelle approche pour la construction des invariants

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons exposé le contenu d'un article récent concernant le calcul des invariants par une nouvelle approche [20]. En effet, cette nouvelle approche consiste à construire les invariants des oscillateurs classiques et quantiques dépendants explicitemets du temps en utilisant uniquement les équations du mouvement. Nous établirons aussi le lien entre l'invariant linéaire et quadratique, et nous discutons comment l'invariant quadratique peut être relié à l'invariant d'Ermakov.

Comme exemple d'application, considérons un oscillateur harmonique à une dimension fréquence $\omega(t)$ dépendante explicitement du temps dont l'Hamiltonien est donné par

$$H(t) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega^2(t)\, q^2. \tag{3.1}$$

3.2 Invariants classiques de l'oscillateur dépendant du temps

Notre point de départ est l'équation du mouvement classique de cet oscillateur

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2(t)\, q = 0, \tag{3.2}$$

qui une équation différentielle ordinaire (EDO) du deuxième ordre, et on sait qu'il est possible de la transformer en un système d'équations différentielle du premier ordre : comme le moment conjugué p est défini par

$$p = \frac{dq}{dt}, \tag{3.3}$$

alors l'équation différentielle (3.2) devient

$$\frac{dp}{dt} = -\omega^2(t)\, q. \tag{3.4}$$

Ces deux équations décrivent le mouvement classique de l'oscillateur dans l'espace des phases (p, q).

Pour obtenir une solution unique du problème il faut avoir les valeurs des deux conditions initiales sur les variables (p, q) à un instant donné dans le cas des équations (3.3) et (3.4) , ou bien les conditions initiales sur q et sa dérivée $\dot{q}$ dans le cas l'équation (3.2) .

Invariants linéaires

Soient $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ deux fonctions arbitraires dépendentes explicitements du temps, multiplions l'éq. (3.3) par $\alpha(t)$ et l'éq.(3.4) par $\beta(t)$ et effectuons ensuite la somme des deux équations, on obtient

$$\alpha(t)\frac{dq}{dt} + \beta(t)\frac{dp}{dt} = \alpha(t)\, p - \beta(t)\,\omega^2(t)\, q, \tag{3.5}$$

pour avoir une dérivée totale au premier membre de cette équation, nous ajoutons aux deux membres les termes adéquats

$$\frac{d}{dt}\left(\beta(t)\, p + \alpha(t)\, q\right) = \left(\alpha(t) + \frac{d\beta(t)}{dt}\right) p + \left(\frac{d\alpha(t)}{dt} - \beta(t)\,\omega^2(t)\right) q. \tag{3.6}$$

Choisissons les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ pour que le système d'équations différentielles ordinaires soit vérifié

$$\alpha(t) + \frac{d\beta(t)}{dt} = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} - \beta(t)\,\omega^2(t) = 0, \tag{3.8}$$

dans ce cas la quantité I_L définie au premier membre de l'équation (3.7) par

$$I_L = \beta(t)\, p + \alpha(t)\, q, \tag{3.9}$$

est un invariant dynamique classique de l'oscillateur, c'est à dire

$$\frac{dI_L}{dt} = 0. \tag{3.10}$$

Ensuite dérivons l'équation (3.7) par rapport au temps et utilisons l'équation (3.8), on a

$$\frac{d^2\beta(t)}{dt^2} + \beta(t)\,\omega^2(t) = 0, \tag{3.11}$$

alors l'invariant linéaire classique (3.9) peut s'écrire en fonction d'un seul paramétre $\beta(t)$

$$I_L = \beta(t)\, p - \frac{d\beta(t)}{dt} q. \tag{3.12}$$

L'équation différentielle de $\alpha(t)$ est du deuxième ordre mais sa forme est plus compliquée, nous utilisons alors le paramètre $\beta(t)$ et l'expression de $\alpha(t)$ sera déduite de l'équation (3.7). Notons aussi que l'équation différentielle (3.11) de $\beta(t)$ a la même forme que l'équation du mouvement (3.2), et soient $\beta(t)$ et $\beta^*(t)$ ses deux solutions complexes conjuguées. Par conséquent, l'invariant linéaire classique I_L de l'oscillateur a deux expressions indépendantes

$$I_L = \beta(t)\, p - \frac{d\beta(t)}{dt} q, \tag{3.13}$$

$$I_L^* = \beta^*(t)\, p - \frac{d\beta^*(t)}{dt} q, \tag{3.14}$$

Invariants quadratiques

De la même manière, les invariants quadratiques peuvent être obtenus à partir des combinaisons linéaires des équations du mouvement. Cependant, dans ce cas, nous pouvons envisager la superposition de produits quadratiques d'équations (3.3) et (3.4). Considérons les combinaisons suivantes

$$p\frac{dp}{dt} = -\omega^2(t)\, pq, \tag{3.15}$$

$$q\frac{dq}{dt} = qp, \tag{3.16}$$

$$\frac{dq}{dt}p + \frac{dp}{dt}q = p^2 - \omega^2(t)\, q^2, \tag{3.17}$$

notons que d'autres combinaisons sont possibles mais celles-ci suffisent pour calculer l'expression générale de l'invaraint quadratiques.

Multiplions les équations(3.15), (3.16) et (3.17) par des fonctions arbitraires dépendentes du temps $\gamma(t)$, $\epsilon(t)$ et $\xi(t)$ et nous prenons la somme, on obtient

$$\gamma(t)\, p\frac{dp}{dt} + \epsilon(t)\left(\frac{dq}{dt}p + \frac{dp}{dt}q\right) + \xi(t)\, q\frac{dq}{dt} = \epsilon(t)\left[p^2 - \omega^2(t)\, q^2\right] + \left[\xi(t) - \gamma(t)\,\omega^2(t)\right] pq, \tag{3.18}$$

réarrangeons les termes pour obtenir une dérivée totale au premier membre, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma(t)\, p^2 + 2\epsilon(t)\, qp + \xi(t)\, q^2\right] = \left(2\epsilon(t) + \frac{d\gamma(t)}{dt}\right) p^2 + \left(\frac{d\,\xi(t)}{dt} - 2\epsilon(t)\,\omega^2(t)\right) q^2 + 2\left(\frac{d\epsilon(t)}{dt} + \xi(t) - \gamma(t)\,\omega^2(t)\right) qp, \tag{3.19}$$

si on impose que les coefficients vérifient l'ensemble des équations suivantes

$$2\epsilon(t)+\frac{d\gamma(t)}{dt}=0, \tag{3.20}$$

$$\frac{d\,\xi(t)}{dt}-2\epsilon(t)\,\omega^2(t)=0, \tag{3.21}$$

$$\frac{d\epsilon(t)}{dt}+\xi(t)-\gamma(t)\,\omega^2(t)=0, \tag{3.22}$$

dans ce cas la quantité I_Q définie au premier membre de l'équation (3.19) par

$$I_Q=\gamma(t)\,p^2+2\epsilon(t)\,qp+\ \xi(t)\,q^2, \tag{3.23}$$

est un invariant dynamique, c'est à dire

$$\frac{dI_Q}{dt}=0, \tag{3.24}$$

Les équations (3.20), (3.21) et (3.22) peuvent être écrite sous la forme d'une équation différentielle du troisième ordre. Pour démontrer cela, dérivons deux fois l'équation (3.20) par rapport au temps et utilisons l'équation (3.22) on trouve

$$\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}=2\frac{d}{dt}\left(\xi(t)-\gamma(t)\,\omega^2(t)\right), \tag{3.25}$$

ensuite remplacons les deux équations (3.20) et (3.21) dans l'éq (3.25) on obtient

$$\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}+4\omega^2(t)\,\frac{d\gamma(t)}{dt}+2\gamma(t)\,\frac{d\omega^2(t)}{dt}=0, \tag{3.26}$$

et mutiplions cette dernière par $\gamma(t)$

$$\frac{1}{2}\gamma(t)\,\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}+2\omega^2(t)\,\gamma(t)\,\frac{d\gamma(t)}{dt}+\gamma^2(t)\,\frac{d\omega^2(t)}{dt}=0, \tag{3.27}$$

on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\gamma(t)\,\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\gamma^2(t)\,\omega^2(t)\right)=\frac{1}{2}\frac{d\gamma(t)}{dt}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}, \tag{3.28}$$

en intégrant une fois cette équation

$$\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\gamma(t)\,\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\gamma^2(t)\,\omega^2(t)\right)dt=\frac{1}{2}\int\frac{d}{dt}\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)\frac{d\gamma(t)}{dt}dt, \tag{3.29}$$

après intégration et simplification on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\gamma(t)\,\omega^2(t)=\frac{W^2}{\gamma(t)}+\frac{1}{4\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)^2. \tag{3.30}$$

où W^2 est une constante d'intégation.

3.3 Invariants quantiques de l'oscillateur dépendant du temps

L'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel avec une fréquence dépendente du temps a la même forme que dans le cas classique

$$\frac{d^2\hat{q}}{dt^2} + \omega^2(t)\,\hat{q} = 0, \tag{3.31}$$

où $\hat{q}$ est l'opérateur associé à la coordonnée généralisée q. Les équations du premier ordre sont aussi identiques aux équations (3.3) et (3.4) mais les variables (q, p) seront remplacées par les opérateurs $(\hat{q}, \hat{p})$. Signalons que dans le cas quantique, on doit tenir compte du fait que les opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$ ne commutent pas : $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Cependant, lors de la dérivation des invariants linéaires cette contrainte n'influe pas et on obtient les deux expressions suivantes

$$\hat{I}_L = \beta(t)\,\hat{p} - \frac{d\beta(t)}{dt}\hat{q}, \tag{3.32}$$

$$\hat{I}_L^{\dagger} = \beta^*(t)\,\hat{p} - \frac{d\beta^*(t)}{dt}\hat{q}, \tag{3.33}$$

où $\hat{I}_L^{\dagger}$ est l'opérateur adjoint de l'invariant linéaire $\hat{I}_L$, et $\beta^*(t)$ est le complexe conjugué de $\beta(t)$ qui sont deux solutions de l'équation différentielle(3.11) .

D'autre part, les expressions quadratiques possibles peuvent etre obtenues à partir des combinaisons de produits d'équations du premier ordre

$$\left\{\hat{p}, \frac{d\hat{p}}{dt}\right\} = \hat{p}\frac{d\hat{p}}{dt} + \frac{d\hat{p}}{dt}\hat{p} = 2\hat{p}\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{d\hat{p}^2}{dt} = -\omega^2(t)\{\hat{q}, \hat{p}\}, \tag{3.34}$$

$$\frac{d}{dt}\{\hat{q}, \hat{p}\} = \frac{d}{dt}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) = 2p^2 - 2\omega^2(t)\,\hat{q}^2, \tag{3.35}$$

$$\left\{\hat{q}, \frac{d\hat{q}}{dt}\right\} = \frac{d\hat{q}^2}{dt} = \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} = \{\hat{q}, \hat{p}\}, \tag{3.36}$$

où $\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ est l'anti-commutateur des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

Ensuite utilisons les fonctions complexes $\gamma(t)$, $\epsilon(t)$ et $\xi(t)$ et les équations (3.34) , (3.35)et(3.36) pour obtenir l'expression suivante

$$\gamma(t)\frac{d\hat{p}^2}{dt} + \epsilon(t)\frac{d}{dt}\{\hat{q}, \hat{p}\} + \xi(t)\frac{d\hat{q}^2}{dt} = -\gamma(t)\,\omega^2(t)\{\hat{q}, \hat{p}\} + \epsilon(t)\left(2p^2 - 2\omega^2(t)\,\hat{q}^2\right) + \xi(t)\{\hat{q}, \hat{p}\}, \tag{3.37}$$

$$\gamma(t)\frac{d\hat{p}^2}{dt} + \epsilon(t)\frac{d}{dt}\{\hat{q}, \hat{p}\} + \xi(t)\frac{d\hat{q}^2}{dt} = \left(\xi(t) - \gamma(t)\,\omega^2(t)\right)\{\hat{q}, \hat{p}\} + \epsilon(t)\left(2\hat{p}^2 - 2\omega^2(t)\,\hat{q}^2\right), \tag{3.38}$$

qui peut s'écrire sous la forme d'une dérivée totale comme suit

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma(t)\hat{p}^2+\epsilon(t)\{\hat{q},\hat{p}\}+\xi(t)\hat{q}^2\right]=\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}+2\epsilon(t)\right)\hat{p}^2+ \tag{3.39}$$

$$\left(\frac{d\xi(t)}{dt}-2\epsilon(t)\omega^2(t)\right)\hat{q}^2+\left(\frac{d\epsilon(t)}{dt}+\xi(t)-\gamma(t)\omega^2(t)\right)\{\hat{q},\hat{p}\}, \tag{3.40}$$

par conséquent, nous remarquons que les conditions (3.20), (3.21) et (3.22) doivent etre satisfaites pour que la grandeur $\hat{I}_Q$ définie par

$$\hat{I}_Q=\gamma(t)\hat{p}^2+\epsilon(t)\{\hat{q},\hat{p}\}+\ \xi(t)\hat{q}^2, \tag{3.41}$$

soit un invariant quantique du système.

3.4 Algèbre des invariants dynamiques

Cas classique

Nous avons montrer que les combinaisons linéaires simples des équations différentielles du premier ordre du mouvement de l'oscillateur harmonique classique dépendant du temps permettent d'obtenir les invariants dynamiques linéaires

$$I_L=\beta(t)p-\frac{d\beta(t)}{dt}q, \tag{3.42}$$

$$I_L^*=\beta^*(t)p-\frac{d\beta^*(t)}{dt}q, \tag{3.43}$$

où la fonction complexe dépendante du temps $\beta(t)$ (et β^*) verifie une équation différentielle du second ordre

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2(t)\right)\begin{pmatrix}\beta(t)\\ \beta^*(t)\end{pmatrix}=0. \tag{3.44}$$

D'autre part, insérons les eqs. (3.20), (3.21) et (3.22)dans l'éq. (3.23), l'expression de I_Q

$$I_Q=\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\gamma(t)\omega^2(t)\right)q^2-\frac{d\gamma(t)}{dt}qp+\gamma(t)p^2, \tag{3.45}$$

est un invariant quadratqiue si $\gamma(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^3\gamma(t)}{dt^3}+4\omega^2(t)\frac{d\gamma(t)}{dt}+2\gamma(t)\frac{d\omega^2(t)}{dt}=0. \tag{3.46}$$

On peut se poser la question si l'invariant quadratique peut etre obtenu à partir des invariant linéaires. En d'autre mots, pouvons-nous générer la forme quadratique à partir des formes linéaires, et les équations des paramètres restent cohérentes ? Dans le cas classique, le problème d'ordre est absent, on peut construire toutes les expressions quadratiques à partir des formes linéaires

$$I_L^* I_L = \beta^*(t)\,\beta(t)\,p^2 - \frac{d}{dt}\left(\beta^*(t)\,\beta(t)\right)qp + \frac{d\beta^*(t)}{dt}\frac{d\beta(t)}{dt}q^2, \tag{3.47}$$

et

$$I_L I_L^* = \beta(t)\,\beta^*(t)\,p^2 - \frac{d}{dt}\left(\beta(t)\,\beta^*(t)\right)qp + \frac{d\beta(t)}{dt}\frac{d\beta^*(t)}{dt}q^2, \tag{3.48}$$

et remarquons que

$$I_L^* I_L = I_L I_L^*, \tag{3.49}$$

ce produit est un invariant quadratique puisque $I_L$et I_L^* sont des invariants. Cela coïncide avec I_Q si on fait les identifications suivantes

$$\gamma(t) = \beta^*(t)\,\beta(t)\,, \tag{3.50}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + \gamma(t)\,\omega^2(t) = \frac{d\beta^*(t)}{dt}\frac{d\beta(t)}{dt}, \tag{3.51}$$

l'équation (3.51) ne contient aucune nouvelle information car elle est satisfaite car $\beta(t)$ et $\beta^*(t)$ obéissent à l'équation(3.44) . Par conséquent, l'invariant quadratique I_Q peut être généré naturellement à partir des invariants linéaires I_L lorsque l'eq. (3.50) est satisfaite.

Ecrivons $\beta(t)$ en coordonnées polaires $\beta(t) = \rho(t)\exp(i\phi(t))$, alors $\gamma(t) = \rho^2(t)$. Dans ce cas, l'équation(3.44) devient

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\rho(t)\exp(i\phi(t))\right] + \rho(t)\exp(i\phi(t))\,\omega^2(t) = 0, \tag{3.52}$$

$$\ddot{\rho}(t) + 2i\dot{\rho}(t)\,\dot{\phi}(t) + i\rho(t)\,\ddot{\phi}(t) - \rho(t)\,\dot{\phi}^2(t) + \rho(t)\,\omega^2(t) = 0, \tag{3.53}$$

$$\ddot{\rho}(t) + \rho(t)\,\omega^2(t) + \frac{i}{\rho(t)}\left[\frac{d}{dt}\rho^2(t)\,\dot{\phi}(t)\right] = \rho(t)\,\dot{\phi}^2(t)\,, \tag{3.54}$$

on trouve alors les deux équations suivantes :

$$\ddot{\rho}(t) + \rho(t)\,\omega^2(t) = \rho(t)\,\dot{\phi}^2(t)\,, \tag{3.55}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\rho^2(t)\,\dot{\phi}(t)\right] = 0 \Rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{W}{\rho^2(t)}, \tag{3.56}$$

où W est la même constante qui apparaît dans (3.30) . Remplacons le résultat de l'éq. (3.56) dans l'équation (3.30)

$$\frac{1}{2}\left(2\dot{\rho}^2(t) + 2\rho(t)\,\ddot{\rho}(t)\right) + \rho^2(t)\,\omega^2(t) = \frac{W^2}{\rho^2(t)} + \frac{1}{4\rho^2(t)}\left(2\rho(t)\,\dot{\rho}(t)\right)^2, \tag{3.57}$$

on obtient finalement l'équation auxiliaire de Pinney-Ermakov

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho(t)+\rho(t)\,\omega^2(t)=\frac{W^2}{\rho^3(t)}, \tag{3.58}$$

D'autre part, l'Eq(3.50) implique que $\gamma(t)$ est un nombre réel positif, l'équation (3.46) s'écrit en fonction de $\rho(t)$ comme suit

$$\frac{d}{dt}\left[\rho^3(t)\left(\frac{d^2}{dt^2}\rho(t)+\rho(t)\,\omega^2(t)\right)\right]=0. \tag{3.59}$$

et on obtient également de cette équation l'équation auxiliaire de Pinney-Ermakov(3.58).

A partir de l'équation (3.45), calculons l'expression de l'invariant quantique I_Q

$$I_Q=\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}+\gamma(t)\,\omega^2(t)\right)q^2-\frac{d\gamma(t)}{dt}qp+\gamma(t)\,p^2, \tag{3.60}$$

$$I_Q=\left(\rho^2(t)\,\omega^2(t)+\frac{d\rho^2(t)}{dt}+\rho(t)\,\frac{d^2\rho(t)}{dt^2}\right)q^2-\frac{d\rho^2(t)}{dt}qp+\rho^2(t)\,p^2, \tag{3.61}$$

$$I_Q=\left(\rho^2(t)\,\omega^2(t)+\rho(t)\,\frac{d^2\rho(t)}{dt^2}\right)q^2+\left(\frac{d\rho(t)}{dt}\right)^2-2\rho(t)\,\frac{d\rho^2(t)}{dt}qp+\rho^2(t)\,p^2, \tag{3.62}$$

et en utilisant l'équation auxiliaire(3.58) dans l'éq (3.62) on trouve l'expression finale de l'invariant quadratqiue classique de l'oscillateur harmonique unidimensionnel de fréquence dépendante du temps

$$I_Q=\frac{W^2}{\rho^2(t)}q^2+\left(\frac{d\rho(t)}{dt}q-\rho(t)\,p\right)^2, \tag{3.63}$$

Cas quantique

Dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique dépendant du temps, commencons par calculer les deux produits $\hat{I}_L^\dagger\hat{I}_L$ et $\hat{I}_L\hat{I}_L^\dagger$ suivants

$$\hat{I}_L^\dagger\hat{I}_L=\beta^*(t)\,\beta(t)\,\hat{p}^2-\beta^*(t)\,\frac{d\beta(t)}{dt}\hat{p}\hat{q}-\frac{d\beta^*(t)}{dt}\beta(t)\,\hat{q}\hat{p}+\frac{d\beta^*(t)}{dt}\frac{d\beta(t)}{dt}\hat{q}^2, \tag{3.64}$$

$$\hat{I}_L\hat{I}_L^\dagger=\beta(t)\,\beta^*(t)\,\hat{p}^2-\beta^*(t)\,\frac{d\beta(t)}{dt}\hat{q}\hat{p}-\frac{d\beta^*(t)}{dt}\beta(t)\,\hat{p}\hat{q}+\frac{d\beta(t)}{dt}\frac{d\beta^*(t)}{dt}\hat{q}^2, \tag{3.65}$$

où nous avons deux combinaisons possibles, le cas antisymétrique défini par

$$\hat{I}_A=\frac{1}{2}\left(\hat{I}_L\hat{I}_L^\dagger-\hat{I}_L^\dagger\hat{I}_L\right)=\left(\beta(t)\,\frac{d\beta^*(t)}{dt}-\frac{d\beta(t)}{dt}\beta^*(t)\right)(\hat{q}\hat{p}-\hat{p}\hat{q}), \tag{3.66}$$

et le cas symétrique est défini par

$$\hat{I}_S=\frac{1}{2}\left(\hat{I}_L\hat{I}_L^\dagger+\hat{I}_L^\dagger\hat{I}_L\right)=\beta^*(t)\,\beta(t)\,\hat{p}^2-\frac{1}{2}\frac{d\beta^*(t)\,\beta(t)}{dt}\{\hat{q},\hat{p}\}, \tag{3.67}$$

notons que l'invaraint quantique $\hat{I}_A$ défini par (3.66) n'est pas vraiment une forme quadratique car les opérateurs $\hat{q}$ et $\hat{p}$ vérifient la relation de commutation $[\hat{q}, , \hat{p}] = i\hbar$. On peut aussi montrer à partir des équations quantiques du mouvement

$$\hat{p} = \frac{d\hat{q}}{dt}, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\omega^2(t)\,\hat{q}, \tag{3.68}$$

que le commutateur $[\hat{q}, , \hat{p}] = (\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})$ est une constante : calculons sa dérivée

$$\frac{d}{dt}(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) = 0. \tag{3.69}$$

par conséquent, le commutateur $\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}$ est un nombre complexe.

D'autre part, l'invariant $\hat{I}_S$ est un invaraint quadratique et comparons le l'invariant quadratique $\hat{I}_Q$ défini par l'équation (3.41)

$$\hat{I}_Q = \left(\gamma(t)\,\omega^2(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}\right)\hat{q}^2 - \frac{1}{2}\frac{d\gamma(t)}{dt}\{\hat{q}, \hat{p}\} + \gamma(t)\,\hat{p}^2, \tag{3.70}$$

où nous avons utilisé les équations(3.20) , (3.21) et (3.22). Notons que l'égalité $\hat{I}_S = \hat{I}_Q$ est satisfaite si

$$\gamma(t) = \beta^*(t)\,\beta(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} + \gamma(t)\,\omega^2(t) = \frac{d\beta^*(t)}{dt}\frac{d\beta(t)}{dt}. \tag{3.71}$$

En conclusion, l'invariant quadratique quantique $\hat{I}_Q$ de l'oscillateur peut être obtenu à partir de l'invariant lineaire quantique $\hat{I}_L$,en utilisant la définition (3.67) si les contraintes (3.71) sont satisfaites.

Enfin, notons qu'il est possible d'appliquer cette méthode pour obtenir les invariants classiques et quantiques de l'oscillateur harmonique forcé dépendent du temps [28].

Conclusion

Dans ce mémoire, après introduction de la méthode des invariants de Lewis-Riesenfeld au premier chapitre, nous avons traité comme exemple l'oscillateur harmonique à une dimension avec masse et fréquence dépendantes du temps en utilisant un invariant quadratique puis un invariant linéaire pour obtenir les solutions corespondantes de l'équation de Schrodinger. Ensuite, nous avons présenté au deuxième chapitre, la méthode de calcul de l'invariant quadratique de l'oscillateur harmonique à une dimension avec masse et fréquence dépendantes du temps en représentation de Heisenberg. Au troisième chapitre nous avons présenté une nouvelle approche de calcul des invariants classiques et quantiques de l'oscillateur harmonique à une dimension avec fréquence dépendante du temps à partir des équations du mouvement uniquement. Nous avons calculé, dans la cas classique et quantique, les invariants linéaires et quadratiques ainsi que le lien entre ces invariants.

Bibliographie

[1] M. A. Markov (Ed.), *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*,1989, Nova Science Publishers, Commack.

[2] M. Kleber, Phys. Rep. **236**, 331 (1994).

[3] Chung-In Um, Kyu-Hwang Yeon, and Thomas F. George, Phys. Rep. **362**, 63 (2002).

[4] H. R. Lewis, Jr., Phys. Rev. Lett. 27, 510 (1967) ; J. Math. Phys. 9, 1976 (1968).

[5] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. 10, 1458 (1969).

[6] I. A. Pedrosa, Phys. Rev. A **55**, 3219 (1997).

[7] M. Maamache, Phys. Rev. A **52**, 936 (1995)..

[8] D.C. Khandekar, S.V. Lawande and K.V. Bhagwat, *Path Integral Methods and their Applications*, World Scientific, Singapore, 1993.

[9] M. Hillery and M.S. Zubairy, Phys. Rev. **A 26,** 451 (1982).

[10] L. Chetouani, L. Guechi and T.F. Hammann, Phys. Rev. A 40, 1157 (1989).

[11] Kh. Nouicer and L. Chetouani, Act. Phys. Slovaca, 49, 905 (1999).

[12] F. Benamira and L. Guechi, Czech. J. Phys. 53, 717 (2003), quant-ph/0112003.

[13] F. Benamira and L. Guechi, Europhys. Lett. 60, 649 (2002), quant-ph/0304134.

[14] M. Gitterman, Eur. J. Phys. J. **B 19,** 581 (1998), and references therein.

[15] C. Yüce, Ann. Phys. 308, 599 (2003) .

[16] Q. Wang, J. Phys. **A 20,** 5041 (1987) .

[17] C.F. Lo, Europhys. Lett. **24,** 319 (1993) .

[18] P.R. Berman, Introductory Quantum Mechanics, Springer, 2018.

[19] J. Y. Ji, J. Kim and S. P. Kim, Phys. Rev. A **51**, 4268 (1995).

[20] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and J. A. Ramirez, J. Math. Phys. **53**, 042104 (2012).

[21] M. Mirrahim, "*Contrôlabilité des systèmes quantiques*", Mémoire de DEA, Ecole des Mines de Paris, 2003.

[22] Saloman. S. Mizrahi, Phys. Lett A **138**. 465 (1989).

[23] I A Pedrosa, Alexandre Rosas and I. Guedes, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 7757 (2005).

[24] Alberes Lopes de Lima, Alexandre Rosas, I.A. Pedrosa. Annals of Physics **323**, 2253 (2008).

[25] M. Berrehail, F. Benamira, Indian. J. Phys. **87**, 1023 (2013).

[26] M. Berrehail, "Approches des transformations unitaires et des invariants pour la résolution de problèmes de mécanique quantique avec Hamiltonien dépendant explicitement du temps",thèse de doctorat, Universite Constantine1, 2013.

[27] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, Series and products, Elsevier, 2007.

[28] M. C. Bertin, B. M. Pimentel and J. A. Ramirez,"*Construction of dynamical invariants for the time-dependent harmonic oscillator with a time-dependent driven force*", 2014, arXiv :1409.2429V1.