

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :

Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le Diplome de

Master en Physique

Option : Physique Théorique

Par

Nabila Dorbi

Thème

**Etude de quelques implications du principe
d'incertitude généralisé en physique statistique**

Soutenu, le 25 juillet 2019

Devant le Jury :

Présidente : R.Rekioua MAA. Univ. Jijel

Rapporteur : D. Bouaziz Prof. Univ. Jijel

Examinatrice : B. Gettou MAA. Univ. Jijel

Remerciements

*Tout mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** pour m'avoir donné la volanté et la patience tout au long de mes études.*

*Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur **Mr. Djamíl Bouazíz** professeur à l'université de Jijel, que je remercie pour ses conseils durant la préparation et la rédaction de ce mémoire.*

*Je remercie les membres de jury **Madamme R. Rekióa** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et **Madamme B.Gattou** qui a accepté de jury ce travail .*

*Je remercie également toutes les enseignants de département de physique à l'université de Jijel, en particulier les enseignants de physique Théorique et la secritaire de laboratoire de physique théorique **Houria**.*

*Un grand merci pour **mes parents** et mes sœurs : **Soumaya, Roufia, Zineb, Radia et Salima** pour leur soutien et leur patience avec moi et pour m'ont boucoup encouragée.*

*Enfin, je remercie ma tante **Habiba** et mon chère amie **Wassila** et tout mes amis de promon 2018-2019 (**Wissem, Meriem, Hadjer, Rahma...**).*

Nabíla

Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Principe d'incertitude généralisé : formalisme	7
2.1	Principe d'incertitude avec une longueur minimale	8
2.1.1	Relation d'incertitude généralisée (GUP)	8
2.1.2	Représentation des opérateurs	9
2.1.3	Généralisation à plusieurs dimensions	9
2.1.4	Principe d'incertitude avec une longueur minimale et une impulsion maximale	10
2.1.5	Principe d'incertitude avec une longueur maximale et une impulsion minimale	11
3	Physique statistique avec une longueur minimale	12
3.1	Gaz parfait en présence d'une longueur minimale	12
3.1.1	Approche classique	12
3.1.2	Approche quantique	19
3.2	Système d'oscillateurs harmoniques en présence d'une longueur minimale	24
3.2.1	Basses températures	25
3.2.2	Hautes températures	27
4	Physique statistique avec une longueur maximale	29
4.1	Gaz parfait en présence d'une longueur maximale	29
4.1.1	Grandeurs thermodynamiques	31
4.2	Système d'oscillateurs harmoniques avec une longueur maximale	33

TABLE DES MATIÈRES	2
4.2.1 Traitement classique	33
4.2.2 Traitement quantique	36
5 Conclusion générale	42

Résumé

Nous étudions la physique statistique de certains systèmes (gaz parfait, oscillateurs harmoniques) dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé (GUP). Nous examinons les effets de deux GUPs, le GUP incluant une longueur minimale et le GUP impliquant une longueur maximale, sur les grandeurs thermodynamiques de ces systèmes en situation canonique. Le traitement est donné via les deux approches classique et quantique. Les résultats obtenus par les deux GUPs sont analysés en détail. Il s'avère que chaque GUP pourrait engendrer des effets nouveaux dépendant du système considéré.

Mots-clefs : Principe d'incertitude généralisé, GUP, longueur minimale, longueur maximale, fonction de partition, gaz parfait, oscillateur harmonique.

Abstract

We study the statistical physics of certain systems (ideal gas, harmonic oscillators) in the formalism of quantum mechanics with a generalized uncertainty principle (GUP). We examine the effects of two GUPs, the GUP including a minimum length and the GUP involving a maximum length, on the thermodynamic quantities of these systems, in the canonical ensemble. The treatment is given via both classical and quantum approaches. The results obtained by the two GUPs are analyzed in detail. It turns out that each GUP could generate new effects depending on the system under study.

Keywords : Generalized uncertainty principle, GUP, minimum length, maximum length, partition function, ideal gas, harmonic oscillator.

Chapitre 1

Introduction générale

La modification du principe d'incertitude de Heisenberg est devenu actuellement utilisée dans tous les domaines de la physique théorique moderne [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 34, 10]. Cette stratégie est adoptée pour tenir compte de l'existence de limites supérieure et inférieure sur la résolution de la position et de l'impulsion, impliquées dans plusieurs contextes [11, 12, 1]. Ainsi, l'existence une longueur minimale, en dessous de laquelle la résolution des distance est impossible, est une prédiction de plusieurs études en théorie de la gravitation quantique et en théorie des cordes [11, 12, 13, 14], une impulsion maximale apparaît dans la relativité doublement spéciale [15], et l'existence d'une longueur maximale apparaît naturellement dans la cosmologie en raison de la présence d'horizons particuliers [35]. Pour tenir compte de ces limites, on modifie le principe d'incertitude de Heisenberg en introduisant quelques paramètres de déformation ; la relation d'incertitude obtenue est appelée "principe d'incertitude généralisé" (GUP). Il y a plusieurs formes du GUP dans la littérature, le GUP le plus étudié est celui incluant une longueur minimale [2, 3, 4] Il y a aussi le GUP incluant une longueur minimale et une impulsion maximale [34]. Plus récemment, un GUP impliquant l'existence d'une la longueur maximale et d'une impulsion minimale a été proposé dans la référence [35].

Plusieurs problème ont été étudiés dans le formalisme du GUP, en particulier en présence d'une longueur minimale, on cite entre autre, l'oscillateur harmonique [32], l'atome d'hydrogène [23, 24, 25, 26] et le problème du puits gravitationnel quantique [27]. D'autre part, les implications du GUP avec une longueur minimale ont été examinées en physique statistique. En effet, la thermostatistique d'un gaz parfait et d'un système d'oscillateurs harmoniques en présence d'une longueur minimale a été étudiée dans les références [18, 38, 36]. De plus, les im-

plications de l'introduction d'une longueur maximale en physique statistique ont été étudiées en considérant un gaz parfait quantique [39].

Dans ce mémoire, on va continuer à étudier les effets du GUP en physique statistique, en considérant un gaz parfait et un système d'oscillateurs harmoniques. Cette étude va se faire à la fois dans le formalisme du GUP avec une longueur minimale et dans celui avec une longueur maximale, via les deux approches classique et quantique. L'objectif principal de ce travail c'est de comparer les effets engendrés par les deux GUPs pour des systèmes différents.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter quelques notions de base du formalisme de la mécanique quantique avec un GUP. Dans le troisième chapitre, nous étudions la physique statistique avec une longueur minimale ; nous traitons le gaz parfait et un système d'oscillateurs harmoniques en situation canonique. Ce traitement sera refait dans le formalisme du GUP avec une longueur maximale au quatrième chapitre. Enfin, le dernier chapitre sera consacré à un récapitulatif des principaux résultats et conclusions du travail.

Chapitre 2

Principe d'incertitude généralisé : formalisme

Dans ce chapitre, nous allons revoir les principales variantes du principe d'incertitude généralisé, en présentant les outils de bases du formalisme mathématique impliqué par la nouvelle version de la mécanique quantique.

La mécanique quantique ordinaire est basée sur le principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.1)$$

où \hbar est la constante de Planck. La relation de commutation canonique associée à relation (2.1) a la forme

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.2)$$

La relation (2.1) montre que la position et l'impulsion ne peuvent pas être déterminées avec une précision arbitrairement grande en même temps. Cependant, la relation d'incertitude (2.1) permet des incertitudes nulles et infinies : pour des énergies suffisamment grandes ($\Delta p \rightarrow \infty$), la position de la particule peut être mesurée avec une incertitude nulle, et de même, si $\Delta x \rightarrow \infty$, l'incertitude sur l'impulsion sera également nulle $\Delta p \rightarrow 0$. Bien sûr, cela est une idéalisation, des limites supérieures et inférieures sur les incertitudes devraient exister en réalité.

Dans ce contexte, plusieurs approches en théorie quantique de la gravitation et en cosmologie proposent de petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg de façon à inclure des incertitudes minimales non nulles, $(\Delta x)_{\min}$ et $(\Delta p)_{\min}$ des grandeurs maximales X_{\max} et

P_{\max} finies sur la mesure de la position et de l'impulsion. Ces limites sont principalement introduites pour tenir compte de l'existence d'une longueur minimale, d'une impulsion minimale, d'une longueur maximale et d'une impulsion maximale. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à deux formes du principe d'incertitude généralisé (GUP) : le GUP avec une longueur minimale [2, 3, 4] et le GUP avec une longueur maximale [35].

2.1 Principe d'incertitude avec une longueur minimale

2.1.1 Relation d'incertitude généralisée (GUP)

Dans un espace à une dimension, la relation d'incertitude généralisée s'écrit sous la forme [2, 3, 4]

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma), \quad (2.3)$$

où β et γ sont des petits paramètres positifs. La relation (2.3) implique une incertitude minimale non nulle sur la position donnée par

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (2.4)$$

En effet, dû à la présence du terme $\beta (\Delta P)^2$ dans la relation (2.3), même pour des valeurs très grandes de ΔP , l'incertitude ΔX est toujours supérieure à une valeur minimale non nulle $(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}$.

La relation (2.3) peut être obtenue en modifiant la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion à la forme [2]

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2), \quad (2.5)$$

Il est à mentionner que l'on peut avoir une incertitude minimale non nulle sur la position et sur l'impulsion. Il suffit de généraliser la relation d'incertitude à la forme suivante [2] :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha (\Delta X)^2 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma). \quad (2.6)$$

Le cas $\alpha = 0$ revêt une importance particulière en mécanique quantique du fait que cette longueur minimale peut être associée à une dimension intrinsèque du système et joue un rôle important dans la régularisation des divergences ultraviolettes [2, 19].

2.1.2 Représentation des opérateurs

Plusieurs représentations de \hat{X} et \hat{P} , qui vérifient la relation de commutation (2.5), peuvent être définies.

La représentation la plus simple est [2]

$$\hat{X}\Psi(p) = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2)\partial\Psi(p), \quad (2.7)$$

$$\hat{P}\Psi(p) = p\Psi(p). \quad (2.8)$$

Une autre représentation de \hat{X} et \hat{P} qui vérifie la relation de commutation (2.5) au premier ordre en β s'écrit [23]

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad (2.9)$$

$$\hat{P} = \left(1 + \frac{1}{3}\beta\hat{p}^2\right)\hat{p}. \quad (2.10)$$

où \hat{x} et \hat{p} sont les opérateurs de la mécanique quantique ordinaire.

2.1.3 Généralisation à plusieurs dimensions

Pour le cas générale à N dimensions, la relation de commutation généralisée est de la forme [4, 32]

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar \left[\delta_{ij} \left(1 + \beta\hat{P}^2\right) + \beta' \hat{P}_i \hat{P}_j\right], \quad (\beta, \beta') > 0. \quad (2.11)$$

En supposant que

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \quad (2.12)$$

alors l'identité de Jacobi conduit à la relation suivante :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + \beta(2\beta + \beta')\hat{P}^2}{1 + \beta\hat{P}^2} \left(\hat{P}_i \hat{X}_j - \hat{P}_j \hat{X}_i\right). \quad (2.13)$$

La relation d'incertitude associée à la relation (2.11) est

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left[1 + (N\beta + \beta')(\Delta P_j)^2 + \gamma\right], \quad (2.14)$$

avec $\gamma = \beta \sum_{k=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2$.

La relation (2.14) implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On a [32] :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{(N\beta + \beta')}, \quad \forall i. \quad (2.15)$$

Plusieurs représentations des opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_j existent dans la littérature. On peut citer, entre autre, la représentation [32]

$$\hat{X}_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right], \quad \hat{P}_i = p_i. \quad (2.16)$$

Une autre représentation valable au premier ordre en β dans le cas $\beta' = 2\beta$ est particulièrement importante surtout dans le traitement perturbatif, elle a la forme suivante [23] :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i, \quad \hat{P}_i = (1 + \beta \hat{p}^2) \hat{p}. \quad (2.17)$$

2.1.4 Principe d'incertitude avec une longueur minimale et une impulsion maximale

Pour inclure une impulsion maximale et une longueur minimale en même temps, comme exigé par la théorie "doubly special relativity", la forme suivante du principe d'incertitude généralisé a été proposée à une dimension [34] :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{1 - \beta (\Delta P)^2}. \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) implique l'existence d'une incertitude minimale sur la position $(\Delta X)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \hbar \sqrt{\beta}$, et une impulsion maximale sur l'impulsion $(\Delta P)_{\max} \equiv P_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

La relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui en découle a la forme [34]

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \frac{1}{1 - \beta \hat{P}^2}. \quad (2.19)$$

Les opérateurs de position et d'impulsion peuvent représenter comme comme suit [34]

$$\hat{X} = \frac{1}{1 - \beta \hat{p}^2} \hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p}. \quad (2.20)$$

2.1.5 Principe d'incertitude avec une longueur maximale et une impulsion minimale

Motivé par des études en cosmologie, qui postulent l'existence d'une longueur maximale finie, une nouvelle variante du principe d'incertitude généralisé a été proposée récemment dans la littérature ; à une dimension elle a la forme suivante [35] :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \frac{1}{1 - \alpha (\Delta X)^2}. \quad (2.21)$$

où $\alpha = l_{\max}^{-2} = \alpha_0 \left(\frac{H_0}{c}\right)^2$, avec H_0 est la constante de Hubble, c est la vitesse de la lumière, et α_0 est un paramètre sans dimension.

La relation (2.21) implique l'existence d'une incertitude minimale $(\Delta p)_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \hbar \sqrt{\alpha}$, et une longueur maximale $(\Delta x)_{\max} \equiv l_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. [35].

La relation de commutation qui correspond au GUP (2.21) s'écrit

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \frac{1}{1 - \alpha \hat{X}^2}. \quad (2.22)$$

Les opérateurs de position et d'impulsion satisfaisant à cette algèbre modifiée, peuvent être représentés comme suit [35]

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{P} = \frac{1}{1 - \alpha \hat{x}^2} \hat{p}, \quad (2.23)$$

où \hat{x} et \hat{p} sont les opérateurs de position et d'impulsion qui vérifient la relation de commutation standard $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Chapitre 3

Physique statistique avec une longueur minimale

3.1 Gaz parfait en présence d'une longueur minimale

Le traitement statistique du gaz parfait dans le formalisme du GUP avec une longueur minimale a été considéré dans plusieurs références [18, 36], via les deux approches, classique et quantique. Dans ce chapitre, on va reprendre ces travaux pour but de faire une comparaison avec les résultats qui seront obtenus dans le formalisme du GUP avec une longueur maximale.

3.1.1 Approche classique

La fonction de partition canonique pour une particule s'écrit dans le cas ordinaire comme suit :

$$Z = \frac{1}{h^3} \int \exp\left(\frac{-H}{kT}\right) d^3x d^3p, \quad (3.1)$$

où les variables conjuguées x_i et p_i , correspondant à la position et à l'impulsion, satisfont aux crochets de poisson habituels :

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \quad (3.2)$$

Dans le cas où on postule l'existence d'une longueur minimale, introduites via les relations de commutation (2.11), à savoir

$$\begin{aligned} [\widehat{X}_i, \widehat{P}_j] &= i\hbar \left[(1 + \beta \widehat{P}^2) \delta_{ij} + \beta' \widehat{P}_i \widehat{P}_j \right], \quad [\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0, \\ [\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] &= i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')}{1 + \beta P^2} (\widehat{P}_i \widehat{X}_j - \widehat{P}_j \widehat{X}_i). \end{aligned} \quad (3.3)$$

les crochets de poisson peuvent être obtenus à partir de ces relations en considérant la limite classique $\hbar \rightarrow 0$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \{X_i, P_j\} &= [(1 + \beta P^2) \delta_{ij} + \beta' P_i P_j], \quad \{P_i, P_j\} = 0, \\ \{X_i, X_j\} &= \frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')}{1 + \beta P^2} (P_i X_j - P_j X_i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il a été montré dans la référence [18] que la fonction de partition qui tient compte de ces déformations prend la forme

$$Z = \frac{1}{h^3} \int \exp\left(\frac{-H(X, P)}{kT}\right) \frac{d^3 X d^3 P}{J}, \quad (3.5)$$

où J est le Jacobien, qui tient compte des transformations entre les anciennes variables (x_i, p_j) et les nouvelles variables (X_i, P_j) . Le Jacobien s'écrit donc

$$J = \frac{\partial(X, P)}{\partial(x, p)}. \quad (3.6)$$

En 3 dimensions on a [18]

$$J = (1 + \beta P^2)^2 (1 + (\beta + \beta') P^2). \quad (3.7)$$

En utilisant la relation (3.7), la fonction de partition déformée (3.5) s'écrit

$$Z = \frac{1}{h^3} \int \exp\left(\frac{-P^2}{2mkT} - \frac{U(\mathbf{X})}{kT}\right) \frac{d^3 X d^3 P}{(1 + \beta P^2)^2 (1 + (\beta + \beta') P^2)}. \quad (3.8)$$

Cette expression peut être utilisée quelque soit le système étudié. On va l'appliquer maintenant au cas d'un gaz parfait, et elle va être servir pour examiner un système d'oscillateurs harmoniques dans la prochaine section.

Puisque l'intégrale de la formule (3.8) n'est pas calculable analytiquement, on va considérer séparément le régime des basses et des hautes températures.

Basses températures :

Dans la limite des basses températures ($\beta mT \ll 1$ et $\beta' mT \ll 1$), on peut effectuer les approximations suivantes :

$$(1 + \beta P^2)^{-2} \simeq 1 - 2\beta P^2 + 3\beta^2 P^4 + o(\beta^2), \quad (3.9)$$

$$(1 + (\beta + \beta') P^2)^{-1} \simeq 1 - (\beta + \beta') P^2 + (\beta + \beta')^2 P^4 + o(\beta^2, \beta'^2). \quad (3.10)$$

Donc, en premier ordre de β et β' , on a

$$(1 + \beta P^2)^{-2} (1 + (\beta + \beta') P^2)^{-1} \simeq (1 - 3(\beta + \beta') P^2 + o(\beta, \beta')). \quad (3.11)$$

En se servant de (3.11), la relation (3.8) se réécrit

$$Z \simeq \frac{1}{h^3} \int d^3 X \exp \left[\frac{-U(X)}{T} \right] \int d^3 P \left[(1 - 3(\beta + \beta') P^2) \exp \left(\frac{-P^2}{2mT} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Utilisons les résultats suivants :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP \exp \left(\frac{-P^2}{2mkT} \right) = \sqrt{2m\pi kT}, \quad (3.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP P^2 \exp \left(\frac{-P^2}{2mkT} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2mkT)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.14)$$

la fonction de partition (3.12) s'écrit explicitement, en 3 dimensions, comme suit

$$Z = \frac{1}{h^3} \int d^3 X \exp \left[\frac{-U(X)}{T} \right] \int \int \int \exp \left[\frac{-(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)}{2mT} \right] \quad (3.15)$$

$$\cdot (1 - 3(\beta + \beta') (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)) dP_x dP_y dP_z. \quad (3.16)$$

Après intégration on trouve

$$Z = Z_0 (1 - 3(\beta + \beta') mkT + o(T^2)), \quad (3.17)$$

où

$$Z_0 = \frac{1}{h^3} \int d^3 X \exp \left(\frac{U}{T} \right) \int dp \exp \left(\frac{-P^2}{2mkT} \right), \quad (3.18)$$

est la fonction de partition non déformée correspondante à une particule du système. Pour un système contenant N particules, la fonction de partition déformée s'écrit

$$Z_N = \frac{Z_0^N}{N!} [(1 - 3(3\beta + \beta')mkT + o(T^2))]^N. \quad (3.19)$$

Calculons maintenant quelques grandeurs thermodynamiques. Pour un gaz parfait (système de N particules identiques libres et indépendantes). Le Hamiltonien correspondant à une seule particule est donné par $H = \frac{P^2}{2m}$, soit $.U(\mathbf{X}) = 0$.

La fonction de partition ordinaire d'une particule libre est simplement

$$Z_0 = \frac{1}{h^3} \int d^3X \int d^3P \exp \left[\frac{-P^2}{2mkT} \right] = \frac{V}{h^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.20)$$

En utilisant l'équation (3.19), on aboutit à l'expression de la fonction de partition d'un gaz parfait en présence d'une longueur minimale :

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} (1 - 3(3\beta + \beta')mkT + o(T)) \right]^N. \quad (3.21)$$

L'énergie interne est donnée par

$$U = \frac{-\partial}{\partial(\bar{\beta})} \ln Z_N, \quad (3.22)$$

où $\bar{\beta} = 1/kT$. L'utilisation de la relation (3.21) conduit à l'expression suivante :

$$U = \frac{3}{2}NkT - 3(3\beta + \beta')Nmk^2T^2 + o(T^2), \quad (3.23)$$

où $\frac{3}{2}NkT$ représente l'énergie interne ordinaire. Remarquons que la correction introduite par la longueur minimale est négative : $(\Delta U)_\beta = -3(3\beta + \beta')Nmk^2T^2 < 0$, ce qui conduit à une diminution de l'énergie interne du système.

La capacité calorifique, définie par $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{NV}$ aura l'expression suivante dans le cas déformé :

$$C_V = \frac{3}{2}kN - 6(3\beta + \beta')NmkT + o(T^2), \quad (3.24)$$

où $\frac{3}{2}Nk$ est la capacité calorifique ordinaire des gaz parfait. La correction de la longueur minimale, $(\Delta C)_\beta = -6(3\beta + \beta')NmkT$, est négative ce qui conduit à une diminution de capacité du système.

L'énergie libre est donnée par

$$A = -kT \ln Z_N. \quad (3.25)$$

En utilisant l'équation (3.21), on a

$$\ln Z_N = N \ln \left[\left(\frac{V}{h^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} (1 - 3(3\beta + \beta')mkT) \right) \right] - \ln N!, \quad (3.26)$$

avec

$$\ln(1 - 3(3\beta + \beta')mkT) \simeq -3(3\beta + \beta')mkT. \quad (3.27)$$

Il en résulte

$$A \simeq -NkT \left(\ln \left[\frac{V}{Nh^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} \right] + 1 \right) + 3(3\beta + \beta') Nm k^2 T^2 + o(T^2). \quad (3.28)$$

Le premier terme, $-NkT \ln \left[\frac{V}{Nh^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} \right]$, représente l'énergie libre ordinaire et le deuxième terme, $(\Delta A)_\beta = 3(3\beta + \beta') Nm T^2 > 0$, est une correction positive introduite par le GUP avec une longueur minimale.

L'expression (3.28) permet de calculer l'entropie canonique du gaz parfait

$$S = \left(\frac{-\partial A}{\partial T} \right)_{N,V},$$

on trouve

$$S = Nk \left[\ln \left(\frac{V}{Nh^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3}{2} \right] - 3(3\beta + \beta') Nm k^2 T + o(T). \quad (3.29)$$

Le premier terme, $s = N \left(\ln \left(V (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{3}{2} \right)$ est l'entropie ordinaire, et le deuxième terme $(\Delta S)_\beta = -3(3\beta + \beta') Nm T^2 < 0$ est la correction engendrée par la présence d'une longueur minimale. Cette correction conduit à une diminution de l'entropie du système.

De même, on peut calculer le potentiel chimique à partir de la relation (3.28) en utilisant la définition

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{T,V}. \quad (3.30)$$

On trouve

$$\mu = -kT \left[\ln \left(\frac{V}{Nh^3} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}} \right) - 1 \right] + 3(3\beta + \beta') m k^2 T^2 + o(T^2). \quad (3.31)$$

Le premier terme dans l'équation (3.31) représente le potentiel chimique ordinaire, et $(\Delta \mu)_\beta = 3(3\beta + \beta') m T^2$ est une correction positive due au GUP avec une longueur minimale.

Pour terminer cette section, on va calculer la pression, qui est définie par

$$P = \left(\frac{-\partial A}{\partial V} \right)_{N,T} . \quad (3.32)$$

La relation (3.28) mène à

$$P = \frac{NkT}{V}, \quad (3.33)$$

ce qui donne l'équation d'état ordinaire

$$PV = NkT . \quad (3.34)$$

On en conclut que le GUP avec une longueur minimale n'a aucun effet sur l'équation d'état des gaz parfaits. Comme on va le voir dans le prochain chapitre, cela n'est pas le cas avec le GUP incluant une longueur maximale.

Hautes températures :

Comme dans le cas à basses températures, la fonction de partition d'un gaz parfait à hautes températures ($\beta mkT \gg 1$ et $\beta' mkT \gg 1$), en présence d'une longueur minimale, peut être obtenue en utilisant les équations (3.8) et (3.20). En effet, en développant l'intégrande et en intégrant on trouve l'expression suivante [18] :

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V\pi^2}{h^3 \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \left(1 - \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{2m\beta kT \sqrt{\beta + \beta'}} + o\left(\frac{1}{T}\right) \right) \right]^N . \quad (3.35)$$

Ainsi, toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être dérivées. Pour l'énergie interne, on a

$$U = \frac{-\partial}{\partial(\frac{1}{kT})} \ln \left(\frac{1}{N!} \left[\frac{V\pi^2}{h^3 \sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \left(1 - \frac{1}{2mkT\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} \right) \right]^N \right) .$$

Utilisons l'approximation

$$\ln \left(1 - \frac{1}{2mkT\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} + o\left(\frac{1}{T}\right) \right) \simeq -\frac{1}{2mkT\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} ,$$

on obtient

$$U \simeq \frac{1}{2m\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}}. \quad (3.36)$$

Puisque l'énergie interne ne dépend pas de T à hautes températures, la capacité calorifique sera donc nulle : $C_V = 0$.

Concernant l'énergie libre, $A = -kT \ln Z_N$, en utilisant la relation (3.35) avec l'approximation

$$\ln \left(1 - \frac{1}{2mkT\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} + o\left(\frac{1}{T}\right) \right) \simeq -\frac{1}{2mkT\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}},$$

on obtient

$$A \simeq NkT \ln \left(\frac{h^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2}{NV\pi^2} \right) + \frac{N}{2m\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}}. \quad (3.37)$$

Pour l'entropie, $S = \left(\frac{-\partial A}{\partial T}\right)_{N,V}$, l'énergie libre (3.37) donne

$$\begin{aligned} S &= \frac{-\partial}{\partial T} \left(NkT \ln \left(\frac{h^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2}{NV\pi^2} \right) + \frac{N}{2m\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} \right), \\ S &= Nk \ln \left(\frac{NV\pi^2}{h^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le Potentiel chimique se calcule aussi aisément en se servant de la définition $\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{T,V}$ et de la relation (3.37); on trouve

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial}{\partial N} \left(NkT \ln \left(\frac{h^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2}{NV\pi^2} \right) + \frac{N}{2m\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}} \right), \\ \mu &= kT \ln \left(\frac{V\pi^2}{Nh^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} - 1 \right) + \frac{1}{2m\beta} \frac{2\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'}}{\sqrt{\beta + \beta'}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Enfin, le calcul de la pression à hautes températures confirme que l'équation d'état des gaz parfait reste inchangée :

$$P = \left(\frac{-\partial A}{\partial V} \right)_{N,T},$$

D'après la relation (3.37) on a

$$P = \frac{-\partial}{\partial V} NkT \ln \left(\frac{V\pi^2}{h^3 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right),$$

ce qui implique alors, $PV = NkT$. Donc l'équation d'état n'est pas affectée par la longueur minimale quelque soit la température.

3.1.2 Approche quantique

Dans cette partie, on va suivre l'approche de la référence [36], où la représentation (2.9) a été choisie pour les opérateurs \widehat{X} et \widehat{P} . Rappelons que cette représentation est valable au cas $\beta' = 2\beta$ en premier ordre de β , et elle a été utilisée initialement dans la référence [23]. Écrivons alors cette représentation :

$$\widehat{X}_i = \widehat{x}_i, \quad (3.40)$$

$$\widehat{P}_i = \widehat{p}_i(1 + \beta\widehat{p}_i^2), \quad (3.41)$$

où \widehat{x}_i et \widehat{p}_i sont les opérateurs de la mécanique quantique habituelle. Le Hamiltonien d'une particule libre s'écrit au premier ordre en β comme suit :

$$H = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \beta\frac{\widehat{p}^4}{m},$$

ce qui peut être écrit sous la forme

$$H = H_0 + \beta H_1, \quad (3.42)$$

où $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ est le Hamiltonien non-perturbé, et $H_1 = \frac{p^4}{m}$ est la perturbation introduite par la longueur minimale. Le Hamiltonien peut s'écrire également sous la forme

$$H = \frac{\widehat{p}^2}{2m} \left(1 + 4m\beta\frac{\widehat{p}^2}{2m} \right).$$

Donc, le spectre d'énergie correspondant au Hamiltonien H va s'écrire

$$E_n = E_n^{(0)} + 4m\beta(E_n^{(0)})^2. \quad (3.43)$$

Fonction de partition canonique modifiée

La fonction de partition d'une particule libre du système est donnée par

$$Z = \sum_n \exp(-\bar{\beta}E_n), \quad (3.44)$$

avec $\bar{\beta} = 1/kT$, et E_n représente les niveaux d'énergie possible d'une particule confinée dans une boîte cubique de volume $V = L^3$.

Considérons donc une particule de masse m dans une boîte rectangulaire de dimensions l_x , l_y , l_z avec

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= 0, \text{ si } & 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, 0 < z < l_z \\ &= \infty, \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

Le spectre d'énergie non déformé est donné par

$$E_n^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right).$$

D'après la relation (3.43), la fonction de partition (3.44) s'écrit

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \exp(-[\bar{\beta}(E_n^{(0)} + 4m\beta(E_n^{(0)})^2)]), \\ Z &= \sum_n \exp[-\bar{\beta}E_n^{(0)}(1 + 4m\beta E_n^{(0)})]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Comme on le fait dans le cas non déformé, remplaçons la somme par l'intégrale (puisque $n \gg 1$), la relation (3.45) devient

$$Z = \int \int \int \exp[-\bar{\beta}E_n^{(0)}(1 + 4m\beta E_n^{(0)})] dn_x dn_y dn_z.$$

Ecrivons Z sous la forme suivante :

$$Z = Z_0 + \beta Z_1,$$

où Z_0 est a fonction de partition non-perturbé, Z_1 est la fonction de partition perturbée
possons

$$Z_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-\bar{\beta}E_n^{(0)}] dn_x dn_y dn_z, \quad (3.46)$$

$$Z_1 = -4m\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (E_n^{(0)})^2 \exp(-\bar{\beta}E_n^{(0)}) dn_x dn_y dn_z. \quad (3.47)$$

Utilisons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-\alpha n^2) dn &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \\ \int_0^\infty n^2 \exp(-\alpha n^2) dn &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}, \\ \int_0^\infty n^4 \exp(-\alpha n^2) dn &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Après intégration sur n_x, n_y et n_z , on obtient

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z \\
&= \int_0^\infty \exp \left(-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n_x^2}{l_x^2} \right) dn_x \int_0^\infty \exp \left(-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n_y^2}{l_y^2} \right) dn_y \int_0^\infty \exp \left(-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) dn_z \\
&= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta \pi^2 \hbar^2}} l_x \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta \pi^2 \hbar^2}} l_y \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta \pi^2 \hbar^2}} l_z,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$Z_0 = \frac{V}{8\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta\pi} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.50}$$

$$Z_1 = -4m\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (E_n^{(0)})^2 \exp(-\beta E_n^{(0)}) dn_x dn_y dn_z \tag{3.51}$$

D'autre part, on a

$$(E_n^{(0)})^2 = \left[\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right]^2, \tag{3.52}$$

$$(E_n^{(0)})^2 = \frac{\pi^4 \hbar^4}{4m^2} \left[\frac{n_x^4}{l_x^4} + \frac{n_y^4}{l_y^4} + \frac{n_z^4}{l_z^4} + 2 \left(\frac{n_x^2 n_y^2}{l_x^2 l_y^2} + \frac{n_y^2 n_z^2}{l_y^2 l_z^2} + \frac{n_x^2 n_z^2}{l_x^2 l_z^2} \right) \right].$$

Remplaçons (3.52) dans (3.51), on écrit

$$\begin{aligned}
Z_1 &= -4m\beta \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\pi^4 \hbar^4}{4m^2} \left[\frac{n_x^4}{l_x^4} + \frac{n_y^4}{l_y^4} + \frac{n_z^4}{l_z^4} + 2 \left(\frac{n_x^2 n_y^2}{l_x^2 l_y^2} + \frac{n_y^2 n_z^2}{l_y^2 l_z^2} + \frac{n_x^2 n_z^2}{l_x^2 l_z^2} \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Possons

$$Z_1 = -m\beta \frac{\pi^4 \hbar^4}{m} (I_1 + 2I_2), \tag{3.54}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{n_x^4}{l_x^4} + \frac{n_y^4}{l_y^4} + \frac{n_z^4}{l_z^4} \right] \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z, \\
I_2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{n_x^2 n_y^2}{l_x^2 l_y^2} + \frac{n_y^2 n_z^2}{l_y^2 l_z^2} + \frac{n_x^2 n_z^2}{l_x^2 l_z^2} \right) \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z,
\end{aligned}$$

Ces intégrales se calculent en se servant des relation (3.48), on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{n_x^4}{l_x^4} + \frac{n_y^4}{l_y^4} + \frac{n_z^4}{l_z^4} \right] \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z, \\
&= 3 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{2} l_x l_y l_z \left(\frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{5}{2}} \right],
\end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{9V}{8} \pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{7}{2}}. \quad (3.55)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{n_x^2 n_y^2}{l_x^2 l_y^2} + \frac{n_y^2 n_z^2}{l_y^2 l_z^2} + \frac{n_x^2 n_z^2}{l_x^2 l_z^2} \right) \exp \left[-\beta \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} + \frac{n_z^2}{l_z^2} \right) \right] dn_x dn_y dn_z \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right) l_x l_y l_z, \\ I_2 &= \frac{3V}{8} \pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{7}{2}}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Rempaçons (3.55) et (3.56) dans (3.54)

$$\begin{aligned} Z_1 &= -m\beta \frac{\pi^4 \hbar^4}{m} (I_1 + 2I_2), \\ &= -m\beta \frac{\pi^4 \hbar^4}{m} \left(\frac{9V}{8} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{7}{2}} + 2 \frac{3V}{8} \pi^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2m}{\beta \pi^2 \hbar^2} \right)^{\frac{7}{2}}, \\ Z_1 &= \frac{-15m}{\beta} Z_0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La fonction de partition de N particules non discernables s'écrit

$$Z_N = \frac{Z_0^N}{N!}.$$

D'après la relation (3.57), on obtient

$$Z_N = \frac{Z_0^N}{N!} \left(1 - \frac{15m}{\beta} \beta \right)^N. \quad (3.58)$$

Grandeurs thermodynamiques

Comme dans le cas classique, on peut maintenant calculer toutes les grandeurs thermodynamiques.

Pour l'énergie interne, on a

$$\ln Z_N = \ln \left[\frac{Z_0^N}{N!} \left(1 - \frac{15m}{\beta} \beta \right)^N \right],$$

soit

$$\ln Z_N = N \ln \left(\frac{V}{8\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta \pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \ln N! + N \ln \left(1 - \beta \frac{15m}{\beta} \right). \quad (3.59)$$

Donc,

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[N \ln \left(\frac{V}{8\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \ln N! + N \ln \left(1 - \beta \frac{15m}{\beta} \right) \right].$$

en prenant

$$\ln \left(1 - \beta \frac{15m}{\beta} \right) \simeq -\beta \frac{15m}{\beta},$$

alors

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[N \ln \left(\frac{V}{8\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + N \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{15m\beta}{\beta} \right],$$

ce qui donne

$$U = \frac{3N}{2\beta} - N \left(\frac{15m\beta}{\beta^2} \right),$$

$$U = \frac{3}{2} NkT - 15\beta Nm(kT)^2. \quad (3.60)$$

La correction $(\Delta U)_\beta = -\beta 15Nm(kT)^2$ introduite par la longueur minimale est presque identique à celle obtenue dans le cas classique à basses températures, donnée par l'équation (3.23), à savoir $(\Delta U)_\beta = -3(3\beta + \beta') NmT$. Rappelons que dans l'expression (3.60), on a $\beta' = 2\beta$.

Calculons maintenant l'énergie libre, $A(V, T) = -kT \ln Z_N$.

D'après la relation (3.58) on a

$$\ln Z_N = N \ln \left(\frac{V}{8\hbar^3} \left(\frac{2m}{\beta\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \ln N! + N \ln \left(1 - \beta \frac{15m}{\beta} \right),$$

avec

$$\ln \left(1 - \beta \frac{15m}{\beta} \right) \simeq -\beta \frac{15m}{\beta}.$$

Donc

$$A = NkT \left[\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 1 \right] + \beta [15Nm(kT)^2]. \quad (3.61)$$

On a également un résultat analogue à celui obtenu dans le cas classique à basses températures, Eq. (3.28), à savoir $(\Delta A)_\beta = 3(3\beta + \beta') Nmk^2T^2$.

Pour l'entropie canonique,

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{N,V},$$

la fonction de partition (3.61) permet d'écrire

$$S = \frac{-\partial}{\partial T} \left[NkT \left(\ln \left(\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 1 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial T} (15Nm\beta (kT)^2),$$

$$S = Nk \left[\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{5}{2} \right] - 30\beta Nk^2T.$$

La correction obtenue dans le cas classique à basses températures est donnée par l'équation (3.29), à savoir $(\Delta S)_\beta = -3(3\beta + \beta') NmT$, ce qui montre l'accord entre l'approche classique et quantique.

De même, pour le potentiel chimique

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V,T},$$

on trouve

$$\mu = \frac{\partial}{\partial N} NkT \ln \left(\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial N} 15Nm\beta (kT)^2,$$

$$\mu = kT \ln \left(\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + 15\beta m (kT)^2.$$

Ce résultat est analogue à celui obtenu dans le cas classique $(\Delta\mu)_\beta = 3(3\beta + \beta') (kT)^2$.

Enfin, le calcul de la pression conduit à l'équation d'état ordinaire, comme dans le cas classique.

3.2 Système d'oscillateurs harmoniques en présence d'une longueur minimale

Dans cette partie, on va considérer dans le formalisme du GUP avec une longueur minimale un système constitué de N oscillateurs harmoniques, libres et indépendants supposé en situation canonique. On va se contenter par un traitement classique en suivant la référence [18].

La fonction de partition classique s'écrit en présence d'une longueur minimale sous la forme¹

¹Voir Eq. (3.8).

$$Z = \frac{1}{h^3} \int \exp\left(\frac{-P^2}{2mkT} - \frac{U(\mathbf{X})}{kT}\right) \frac{d^3X d^3P}{(1 + \beta P^2)^2 (1 + (\beta + \beta') P^2)}. \quad (3.62)$$

Comme dans le chapitre précédent, on va étudier l'oscillateur harmonique classique dans les deux régimes : basses et hautes températures.

3.2.1 Basses températures

Dans la limite des basses températures ($\beta mkT \ll 1$ et $\beta' mkT \ll 1$), comme dans le cas du gaz parfait, la fonction de partiton d'une particule s'écrit

$$Z \simeq Z_0([1 - 3(3\beta + \beta')mkT]), \quad (3.63)$$

où

$$Z_0 = \frac{1}{h^3} \int d^3X \exp\left[\frac{-U(X)}{kT}\right] \int d^3P \exp\left[\frac{-P^2}{2mkT}\right], \quad (3.64)$$

est la fonction de partition non déformée, avec $U(X) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$ est l'énergie potentielle correspondante à un oscillateur harmonique. Donc, on a

$$Z_0 = \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^3. \quad (3.65)$$

La relation (3.63) devient

$$Z \simeq \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^3 [1 - 3(3\beta + \beta')mkT]. \quad (3.66)$$

Pour un système de N oscillateurs harmoniques (supposés discernables), la fonction de partition s'écrit :

$$Z_N \simeq \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^{3N} [1 - 3(3\beta + \beta')mkT]^N. \quad (3.67)$$

La relation (3.67), va nous servir pour examiner l'effet de la longueur minimale sur les paramètres thermodynamiques du système.

Grandeurs thermodynamiques

Commençons par l'énergie interne, la relation (3.67) permet d'écrire

$$U = \frac{-\partial}{\partial(\frac{1}{kT})} \ln \left[\left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right)^{3N} [1 - 3(3\beta + \beta')mkT]^N \right].$$

En utilisant

$$\ln(1+x) \simeq x, \quad |x| \ll 1, \quad (3.68)$$

on obtient

$$U = 3NkT - 3Nm(3\beta + \beta')(kT)^2 + o(T^2). \quad (3.69)$$

Le premier terme $3NkT$ est l'énergie interne ordinaire, le deuxième terme $(\Delta U)_\beta = -3N(3\beta + \beta')mT^2$ est une correction négative représentant l'effet de la longueur minimale, ce qui conduit à une diminution de l'énergie interne du système. Cette correction est identique à celle obtenue pour un gaz parfait, voir Eq. (3.23).

De la relation (3.69), on déduit directement l'expression de la capacité calorifique,

$$C_V = 3Nk - 6N(3\beta + \beta')mk^2T + o(T^2). \quad (3.70)$$

Comme pour les gaz parfaits, on observe que la capacité du système n'est plus constante dans le formalisme du GUP avec une longueur minimale, elle dépend maintenant de la température via la correction $(\Delta C)_\beta = -6N(3\beta + \beta')mk^2T$.

Concernant l'énergie libre, $A = -kT \ln Z_N$, en se servant de l'équation (3.67), on a

$$A = -kT \ln \left[\left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right)^{3N} [1 - 3(3\beta + \beta')mkT]^N \right],$$

soit

$$A = -NkT \left[3 \ln \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right) + \ln [1 - 3(3\beta + \beta')mkT] \right]. \quad (3.71)$$

Ce résultat est analogue à celui obtenu pour un gaz parfait.

La relation (3.71) permet ainsi de calculer l'entropie canonique,

$$S = \left(\frac{-\partial A}{\partial T} \right)_{N,V},$$

$$S = \frac{\partial}{\partial T} \left(NkT \left[3 \ln \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right) + \ln [1 - 3(3\beta + \beta')mkT] \right] \right),$$

et puisque $3\beta + \beta' \ll 1$, alors

$$S = Nk \left(\ln \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right)^3 + 3 \right) - 6(3\beta + \beta')Nm k^2 T + O(T). \quad (3.72)$$

On remarque que le GUP avec une longueur minimale apporte une correction négative identique à celle obtenue pour un gaz parfait, voir Eq.(3.29).

Enfin, compte tenu de ce qui a été examiné, on en déduit que l'effet de la longueur minimale est pratiquement le même pour les deux systèmes considérés, gaz parfait et oscillateurs harmoniques.

3.2.2 Hautes températures

Examinons maintenant le cas de hautes températures ($\beta mkT \gg 1$ et $\beta' mkT \gg 1$), la fonction de partition d'une particule, donnée par l'équation (3.62), peut s'écrire comme suit :

$$Z = Z_0 \frac{\pi^2 (2m \pi kT)^{\frac{-3}{2}}}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \left(1 + o\left(\frac{1}{T}\right)\right), \quad (3.73)$$

avec

$$Z_0 = \left(\frac{2\pi kT}{h\omega}\right)^3 = \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} (2m\pi kT)^{\frac{3}{2}},$$

est la fonction de partition non déformée. Il en résulte

$$Z = \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} (1 + o(T)). \quad (3.74)$$

Pour N particules, la fonction de partition du système s'écrit

$$Z_N \simeq \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \left[\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right]^N. \quad (3.75)$$

Grandeurs thermodynamiques

L'énergie interne impliquée par la fonction de partition modifiée (3.75) s'écrit

$$U = \frac{-\partial}{\partial(\frac{1}{kT})} \ln \left(\left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \left[\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right]^N \right),$$

donc,

$$U = \frac{-\partial}{\partial(\frac{1}{kT})} \ln \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2}\right)^{\frac{3N}{2}},$$

soit

$$U \simeq \frac{3N}{2}kT. \quad (3.76)$$

Ce résultat représente l'énergie interne d'un gaz parfait dans le cas ordinaire. La coïncidence de l'énergie interne d'un système d'oscillateurs harmoniques à hautes températures en présence d'une longueur minimale avec celle d'un gaz parfait dans le cas ordinaire peut être interprétée en examinant le spectre d'énergie déformé d'un oscillateur harmonique pour des grandes valeurs du nombre quantique n [18]. La capacité calorifique à hautes températures sera donc constante et ne dépend ni de la température ni des paramètres de déformation :

$$C_V \simeq \frac{3N}{2}k. \quad (3.77)$$

En ce qui concerne l'énergie libre, la relation (3.75) permet d'écrire

$$A \simeq -kT \ln \left(\left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \left[\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right]^N \right),$$

donc

$$A \simeq -NkT \ln \left[\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2} \right) \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right) \right]. \quad (3.78)$$

L'entropie se calcule directement de la relation (3.78), elle s'écrit

$$S = \frac{-\partial}{\partial T} \left(-NkT \ln \left[\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2} \right) \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right) \right] \right),$$

alors

$$S \simeq Nk \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right) \right) \right]. \quad (3.79)$$

Enfin pour le potentiel chimique à hautes températures, en utilisant la définition, $\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V,T}$, et la relation (3.78), on trouve

$$\mu \simeq \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\left(\frac{2\pi kT}{mh^2\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^2}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta + \beta'})^2} \right) \right]. \quad (3.80)$$

D'après les calculs performés plus-haut, il s'avère que l'effet du GUP avec une longueur minimale serait important dans le régime des hautes températures ; à basses températures la longueur minimale introduit des petites corrections aux grandeurs thermodynamiques, négligeables devant les quantités de la mécanique statistique ordinaire.

Chapitre 4

Physique statistique avec une longueur maximale

Dans ce chapitre, on va considérer dans le formalisme du GUP incluant une longueur maximale deux systèmes : un gaz parfait et un système d'oscillateurs harmoniques. Les fonctions de partitions vont être calculées en utilisant l'approche classique et quantique, et les grandeurs thermodynamiques correspondantes seront examinées.

4.1 Gaz parfait en présence d'une longueur maximale

L'étude du gaz parfait en physique statistique basée sur un principe d'incertitude généralisé avec une longueur maximale a été réalisé récemment dans la référence [39], en adoptant une approche quantique et en considérant un modèle à une dimension. Dans cette section, on va adopter l'approche classique de la référence [18] pour étudier un gaz parfait unidimensionnel ; on va en particulier confirmer les résultats obtenus dans la référence [39], et reprendre la comparaison entre les effets de la longueur minimale et de la longueur maximale.

En présence d'une longueur maximale [35], rappelons que la relation de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion est donnée à une dimension par l'équation (2.22)

$$[\widehat{X}, \widehat{P}] = i\hbar \frac{1}{1 - \alpha \widehat{X}^2}. \quad (4.1)$$

La représentation (2.23) vérifie bien la relation (4.1), elle est donnée par

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad (4.2)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{1 - \alpha X^2} \hat{p}, \quad (4.3)$$

où \hat{x} et \hat{p} sont les opérateurs de la mécanique quantique ordinaire.

Les crochets de Poisson déformés peuvent être déduits à partir de la relation (4.1), on a

$$\{X, P\} = \frac{1}{1 - \alpha X^2}. \quad (4.4)$$

Comme on a déjà vu dans les chapitres précédents, la fonction de partition classique d'une particule est donné par

$$Z = \frac{1}{h} \int \exp\left(\frac{-H(X, P)}{kT}\right) \frac{dX dP}{J}, \quad (4.5)$$

où, J est le Jacobien de la transformation, à une dimension on a [18]

$$J = \frac{\partial(X, P)}{\partial(x, p)} = \{X, P\} = \frac{1}{1 - \alpha X^2} \quad (4.6)$$

Considérons maintenant un gaz parfait de N particules à une dimension confiné dans un espace à une dimension de longueur L , le Hamiltonien associé à une particule s'écrit

$$H = \frac{P^2}{2m}. \quad (4.7)$$

En remplaçant (4.7) et (4.6) dans (4.5) on trouve

$$Z = \frac{1}{h} \int \int (1 - \alpha X^2) \exp\left(\frac{-P^2}{2mkT}\right) dX dP. \quad (4.8)$$

ce qui donne

$$Z = \frac{1}{h} \int_0^L (1 - \alpha X^2) dX \exp \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-P^2}{2mT}\right) dP.$$

Après intégration, on obtient

$$Z = \sqrt{2m\pi kT} \frac{L}{h} \left(1 - \frac{\alpha}{3} L^2\right),$$

soit

$$Z = Z_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3} L^2\right), \quad (4.9)$$

où Z_0 est la fonction de partition ordinaire d'une particule confinée dans une boîte à une dimension, $Z_0 = \sqrt{2m\pi kT} \frac{L}{\hbar}$.

Pour N particules, la fonction de partition s'écrit

$$Z_N = \frac{Z^N}{N!} = \frac{1}{N!} \left[\left(\frac{L}{\hbar} \right)^N \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{\frac{N}{2}} \right] \left(1 - \frac{\alpha}{3} L^2 \right)^N. \quad (4.10)$$

Cette dernière relation est exactement ce qui a été obtenu dans la référence [39], via un traitement quantique. On va maintenant calculer toutes les quantités thermodynamiques à partir de la fonction de partition (4.10).

4.1.1 Grandeurs thermodynamiques

Energie interne

D'après la relation (4.10), l'énergie interne,

$$U = - \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)},$$

se calcule en prenant

$$\ln Z_N = \ln \left[Z_0^N \left(1 - \frac{\alpha}{3} L^2 \right)^N \right],$$

avec

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3} L^2 \right) &\simeq - \frac{\alpha}{3} L^2, \\ \ln Z_N &= N \left[\ln \left(\frac{L}{\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) - \frac{\alpha}{3} L^2 \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

alors

$$U = - \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT} \right)} \left[\frac{N}{2} \ln \left(\frac{mkT}{2\pi} \right) \right].$$

donc

$$U = \frac{N}{2} kT. \quad (4.12)$$

Ce résultat montre que la longueur maximale n'a aucun effet sur l'énergie interne du système. Par conséquent, la capacité calorifique ne subit, elle aussi, aucune influence due à la présence de la longueur maximale : $C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N}{2} k$.

Ce résultat est complètement différent de ce qui a été obtenu dans le cas du GUP avec une longueur minimale, étudié au chapitre précédent.

Energie libre

$$A = -kT \ln Z_N.$$

La relation (4.11) conduit à l'expression

$$A \simeq -NkT \left(\ln \left(\frac{L}{N\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) - \frac{\alpha}{3} L^2 \right). \quad (4.13)$$

Le premier terme est l'énergie libre ordinaire, et $(\Delta A)_\alpha = \alpha \frac{L^2}{3} NkT$ est une correction positive causée par le GUP avec une longueur maximale, ce qui conduit à une augmentation de l'énergie libre du système. Cet effet est analogue à celui causé par le GUP avec une longueur minimale.

Entropie

$$S = \left(\frac{-\partial A}{\partial T} \right)_{N,V}.$$

En utilisant la relation (4.13), on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial}{\partial T} \left(NkT \left(\ln \left(\frac{L}{\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) - \frac{\alpha}{3} L^2 \right) \right), \\ &= Nk \left(\ln \left[\frac{L}{\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right] - \frac{Nk}{2} \right) - \frac{\alpha}{3} NkL^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $N \left(\ln \left[\frac{L}{\hbar} \sqrt{\frac{mT}{2\pi}} \right] - \frac{T^2}{2} \right)$ est l'entropie ordinaire, et $(\Delta S)_\alpha = -\alpha \frac{L^2}{3} k N$ est la correction engendrée par ce GUP. Il est clair que la présence de la longueur maximale conduit à une diminution de l'entropie du système. Cet effet est analogue à celui du GUP avec une longueur minimale. Cependant, la correction $(\Delta S)_\alpha$ ne dépend pas de la température en revanche celle de la longueur minimale en dépend.

Potentiel chimique

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{T,L}.$$

D'après la relation (4.13), on trouve

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\partial}{\partial N} \left[NkT \left(\ln \left(\frac{L}{N\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) + \frac{\alpha}{3} L^2 \right) \right], \\
&= kT \left(\ln \left(\frac{L}{N\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) + \frac{\alpha}{3} L^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Le premier terme $kT \left[\ln \left(\frac{L}{N\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) \right]$ est le potentiel chimique ordinaire du gaz parfait, et $(\Delta\mu)_\alpha = \frac{\alpha}{3} L^2 kT$ est une correction positive introduite par la longueur maximale. Cet effet est analogue à celui observé en présence d'une longueur minimale.

Pression

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{N,T}.$$

D'après la relation (4.13) on a

$$P = \frac{\partial}{\partial V} \left(NkT \left(\ln \left(\frac{L}{N\hbar} \sqrt{\frac{mkT}{2\pi}} \right) - \frac{\alpha}{3} L^2 \right) \right). \tag{4.16}$$

En posant $L \equiv V$, on obtient l'équation d'état suivante :

$$PV = NkT \left(1 - \frac{2\alpha}{3} V^2 \right).$$

On déduit que l'équation d'état d'un gaz parfait en présence d'une longueur maximale change et devient semblable à celle des gaz réels.

Il s'avère que l'effet de la longueur maximale sur le gaz parfait n'est pas tout à fait identique à celui de la longueur minimale, cela se voit sur l'énergie interne et sur l'équation d'état.

4.2 Système d'oscillateurs harmoniques avec une longueur maximale

4.2.1 Traitement classique

Considérons le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique de masse m et de fréquence ω :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2, \quad (4.17)$$

et utilisons l'expression de la fonction de partition classique à une dimension d'une seule particule, donnée par l'équation (4.5), à savoir

$$Z = \frac{1}{h} \int \exp\left(\frac{-H(X, P)}{kT}\right) \frac{dX dP}{J}. \quad (4.18)$$

En se servant du jacobien (4.6), la fonction de partition (4.18) s'écrit avec le Hamiltonien (4.17) comme suit :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{h} \int \int (1 - \alpha X^2) \exp\left(\frac{-P^2}{2mkT} - \frac{m\omega^2}{2kT} X^2\right) dX dP, \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \alpha X^2) \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2kT} X^2\right) dX \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{P^2}{2mkT} X^2\right) dP, \end{aligned}$$

Après intégration, on trouve

$$Z = \frac{2\pi kT}{h\omega} \left(1 - \frac{\alpha kT}{2 m\omega^2}\right), \quad (4.19)$$

soit

$$Z = Z_0 \left(1 - \frac{\alpha kT}{2 m\omega^2}\right), \quad (4.20)$$

où $Z_0 = \frac{2\pi kT}{h\omega}$ est la fonction de partition ordinaire. Pour un système de N oscillateurs harmoniques, la fonction de partition s'écrit

$$Z_N = Z_0^N \left(1 - \frac{\alpha kT}{2 m\omega^2}\right)^N. \quad (4.21)$$

Grandeurs thermodynamiques

Energie interne : la relation (4.21) permet d'écrire

$$\ln Z_N = \ln \left[Z_0^N \left(1 - \frac{\alpha kT}{2 m\omega^2}\right)^N \right],$$

en prenant

$$\ln \left(1 - \frac{\alpha kT}{2 m\omega^2}\right) \simeq -\frac{\alpha kT}{2 m\omega^2},$$

alors

$$\ln Z_N = N \left[\ln \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{kT}{m\omega^2} \right]. \quad (4.22)$$

Donc, l'énergie interne s'écrit

$$U = -\frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{kT}\right)} \left(N \left[\ln \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{kT}{m\omega^2} \right] \right),$$

donc

$$U = N \left(kT - \frac{\alpha}{2} \frac{k^2 T^2}{m\omega^2} \right). \quad (4.23)$$

Le premier terme NkT est l'énergie interne ordinaire, et $(\Delta U)_\alpha = -\frac{\alpha}{2} N \frac{k^2 T^2}{m\omega^2}$ est une correction négative engendrée par la présence de la longueur maximale. Ce résultat est différent de celui obtenu dans le cas d'un gaz parfait où l'énergie interne n'était pas sensible à l'effet de la longueur maximale. En revanche, la correction $(\Delta U)_\alpha$ est similaire à celle de la longueur minimale, donnée par l'équation (3.69).

La capacité calorifique se calcule directement à partir de la relation 4.23, on trouve

$$C_V = Nk \left(1 - \alpha \frac{kT}{m\omega^2} \right). \quad (4.24)$$

Energie libre :

$$A = -kT \ln Z_N.$$

La relation (4.22) donne

$$A \simeq -NkT \left(\left[\ln \left(\frac{2\pi T}{h\omega} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{kT}{m\omega^2} \right] \right). \quad (4.25)$$

La correction sur l'énergie libre ordinaire, $(\Delta A)_\alpha = \frac{\alpha}{2} N \frac{k^2 T^2}{m\omega^2}$ est positive, ce qui conduit à une augmentation de l'énergie libre du système. Ce résultat est analogue à celui obtenu dans le cas d'un gaz parfait. De plus, le même effet a été observé en présence d'une longueur minimale, voir équation (3.71).

Entropie : en se servant de la définition $S = -\frac{\partial A}{\partial T}$ et de de la relation (4.25), on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial}{\partial T} \left(NkT \left(\left[\ln \left(\frac{2\pi T}{h\omega} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{kT}{m\omega^2} \right] \right) \right), \\ S &= Nk \left[\ln \left(\frac{2\pi T}{h\omega} \right) + 1 \right] - \frac{N\alpha k^2 T}{m\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le premier terme représente exactement l'entropie d'un système de N oscillateurs harmoniques en mécanique statistique ordinaire, tandis que $(\Delta S)_\alpha = -N\alpha \frac{k^2 T}{m\omega^2}$ une correction due au GUP avec une longueur maximale. Cette correction conduit à une diminution de l'entropie du système comme dans le cas du gaz parfait. Cependant la correction de l'entropie ne dépend pas de la température dans le cas du gaz parfait. Il est à noter aussi que ce résultat est analogue à celui obtenu dans le traitement d'un système d'oscillateurs harmoniques en présence d'une longueur minimale $(\Delta S)_\beta = -3N(3\beta + \beta') mT^2$.

4.2.2 Traitement quantique

Dans cette section, on va calculer la fonction de partition quantique en utilisant le spectre d'énergie de l'oscillateur harmonique, obtenu à partir de l'équation de Schrödinger déformée.

Il est à noter que l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique en présence d'une longueur maximale a été étudiée récemment dans la référence [35] ; un spectre d'énergie approché a été établi en examinant numériquement l'équation de Schrödinger déformée.

Cette équation s'écrit en utilisant la représentation des opérateurs de position et d'impulsion (4.2). En effet, le Hamiltonien (4.17) de l'oscillateur harmonique s'écrit avec la représentation (4.2) comme suit

$$H_\alpha = \frac{-i\hbar}{2m} \frac{1}{1 - \alpha x^2} \frac{d}{dx} \left(-i\hbar \frac{1}{1 - \alpha x^2} \frac{d}{dx} \right) + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (4.27)$$

l'équation de Schrödinger devient

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\alpha x}{1 - \alpha x^2} \frac{d\psi}{dx} + (1 - \alpha x^2)^2 (\varepsilon - \eta^2 x^2) \psi = 0, \quad (4.28)$$

avec $\varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $\eta^2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$. En posant

$$x^2 = \frac{1}{\eta}, \quad \bar{x} = x\sqrt{\eta}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\eta} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\eta}, \quad (4.29)$$

donc $\bar{\varepsilon} = \frac{2E}{\hbar\omega}$. L'équation de Schrödinger en présence d'une longueur maximale prend la forme

$$\frac{d^2\psi}{d\bar{x}^2} + \frac{2\bar{\alpha} \bar{x}}{1 - \bar{\alpha} \bar{x}^2} \frac{d\psi}{d\bar{x}} + (1 - \bar{\alpha} \bar{x}^2)^2 (\bar{\varepsilon} - \bar{x}^2) \psi = 0. \quad (4.30)$$

Le spectre d'énergie obtenu dans la référence [35] a la forme suivante :

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} \bar{\varepsilon}, \quad (4.31)$$

avec

$$\bar{\varepsilon}(n, \bar{\alpha}) = 2n + 1 + \left(\frac{1}{2} + n(n+1)\bar{\alpha} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_{crit}, \quad (4.32)$$

où

$$\bar{\alpha}_{crit}(n) = \frac{4n+1}{11(n+1)^2 - 2n(n+1) - 1}.$$

La fonction de partition quantique va être calculée en utilisant le spectre (4.32). Pour une particule, on a

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp \left(-\bar{\beta} \frac{\hbar\omega}{2} \left(2n + 1 + \left(\frac{1}{2} + n(n+1)\bar{\alpha} \right) \right) \right), \quad (4.33)$$

où $\bar{\beta} = 1/kT$. Donc,

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp \left(-\bar{\beta} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \exp \left(-\bar{\alpha} \frac{\bar{\beta} \hbar\omega}{2} \left(\frac{1}{2} + n(n+1) \right) \right). \quad (4.34)$$

Au premier ordre en α , on peut écrire

$$\exp \left(-\bar{\alpha} \frac{\bar{\beta} \hbar\omega}{2} \left(\frac{1}{2} + n(n+1) \right) \right) \simeq 1 - \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta} \hbar\omega}{2} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right),$$

l'équation(4.33) devient

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} \hbar\omega}{4} \right) e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} \hbar\omega}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} \hbar\omega}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})}. \quad (4.35)$$

En utilisant les formules suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} + \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 \bar{\beta}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})},$$

la relation (4.35) s'écrit après quelques simplifications

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta}}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\partial^2}{\partial^2 \bar{\beta}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\bar{\beta} \hbar\omega (n+\frac{1}{2})} \right]. \quad (4.36)$$

On pose

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\bar{\beta}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right),$$

où Z_0 est la fonction de partition ordinaire d'un oscillateur harmonique à une dimension,

$$Z_0 = \left[2 \sinh\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Compte tenu du résultat

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \bar{\beta}} \left[2 \sinh\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right]^{-1} = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \left[\frac{\coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)} - \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)}\right],$$

la fonction de partition quantique en présence d'une longueur maximale prend la forme suivante :

$$Z = Z_0 \left(1 - \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta}}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right). \quad (4.37)$$

Dans la limite $\alpha = 0$, la fonction de partition ci-dessus se réduit à la fonction de partition ordinaire.

La fonction de partition de N oscillateurs harmoniques s'écrit

$$Z_N = Z_0^N \left[\left(1 - \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta}}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right)\right]^N. \quad (4.38)$$

Grandeurs thermodynamiques

Energie interne : la relation 4.38 donne

$$\ln Z_N \simeq -N \ln \left[2 \sinh\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right] - \bar{\alpha} \frac{N\bar{\beta}}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right),$$

alors

$$\begin{aligned} U &= \frac{N}{2} \hbar\omega \coth\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) - \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \left[\coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) + \bar{\beta}\hbar\omega \left(1 - \coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right) \coth\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)\right], \\ &= \frac{N}{2} \hbar\omega \coth\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) - \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) \left[1 - \frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) \coth\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right)}\right], \end{aligned}$$

$$U = \frac{N}{2} \hbar\omega \coth\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 \left[\coth^2\left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}\right) \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh\bar{\beta}\hbar\omega}\right]\right], \quad (4.39)$$

en utilisant

$$\begin{aligned}\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x, \\ 1 - \coth^2 x &= -\frac{1}{\sinh^2 x},\end{aligned}$$

$$U = U_0 + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \left[\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right],$$

avec $U_0 = \frac{N}{2} \hbar\omega \coth \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)$ est l'énergie interne ordinaire, et

$$(\Delta U)_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \left[\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right],$$

est la correction introduite par la longueur maximale.

Examinant ce résultat en examinant la limite des hautes températures, $T \rightarrow \infty$ ($\bar{\beta} \rightarrow 0$) : on a $\sinh \bar{\beta}\hbar\omega \simeq \bar{\beta}\hbar\omega$ et $\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \simeq \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)^{-2}$, donc $(\Delta U)_{\bar{\alpha}} = -\bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega\bar{\beta}^2}$. Compte tenu de l'expression de $\bar{\alpha}$, donné par (4.29), on aboutit à la correction $(\Delta U)_{\bar{\alpha}} \approx -\alpha N \frac{k^2 T^2}{m\omega^2}$. Cette correction est en accord avec le résultat obtenu via l'approche classique, voir équation (4.23).

Capacité calorifique : d'après la relation (4.39), en utilisant la définition $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$, on trouve

$$\begin{aligned}C_V &= Nk \left(\frac{\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}}{\sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \right)^2 + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right], \\ C_V &= Nk \left(\frac{\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}}{\sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \right)^2 + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \left\{ \frac{\omega\hbar}{T^2 k} \left(\coth \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \right) \left(\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} \right] - \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \left[\frac{2\omega}{T^2 k} \frac{\hbar}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} - \frac{2}{T^3 k^2} \omega^2 \hbar^2 \frac{\cosh \bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh^2 \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right\}, \\ &= Nk \left(\frac{\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}}{\sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \right)^2 + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \left\{ \frac{\omega\hbar}{T^2 k} \left(\frac{\coth \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)}{\sinh^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \left[\frac{2\omega}{T^2 k} \frac{\hbar}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} - \frac{2}{T^3 k^2} \omega^2 \hbar^2 \frac{\cosh \bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh^2 \bar{\beta}\hbar\omega} \right] \right\}, \\ &= Nk \left(\frac{\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2}}{\sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \right)^2 + \bar{\alpha} \frac{N}{2} (\hbar\omega)^2 \frac{\coth \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)}{\sinh^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right)} \left[1 - \frac{2\bar{\beta}\hbar\omega}{\sinh \bar{\beta}\hbar\omega} - \frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \coth \left(\bar{\beta}\hbar\omega \right) \right].\end{aligned}$$

Limite hautes températures : on a

$$\sinh_{\bar{\beta} \rightarrow 0} \bar{\beta} \hbar \omega \simeq \bar{\beta} \hbar \omega, \quad \coth_{\bar{\beta} \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \simeq \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right)^{-1},$$

on en trouve

$$C_V = C_{0V} + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} U &\sim \lim_{\bar{\beta} \rightarrow 0} \left(\frac{N}{2} \hbar \omega \coth \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) + \bar{\alpha} \frac{N}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 \left[\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \left[1 - \frac{2\bar{\beta} \hbar \omega}{\sinh \bar{\beta} \hbar \omega} \right] \right] \right) \\ &\sim \frac{N}{\bar{\beta}} \left(1 - \bar{\alpha} \frac{1}{\hbar \omega \bar{\beta}} \right). \end{aligned}$$

Cela est en parfait accord avec le résultat classique.

Les autres grandeurs thermodynamiques se calculent de façon directe à partir de la fonction de partition.

Concernant l'énergie libre, la relation (4.38) conduit à l'expression

$$A = NkT \left[\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \right] + \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta}}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \right],$$

avec $A_0 = NkT \left(\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \right] \right)$ est l'énergie libre ordinaire, et

$$(\Delta A)_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} NkT \frac{\bar{\beta}}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right),$$

est la correction de la longueur maximale.

Dans la limite hautes températures ($\bar{\beta} \rightarrow 0$), $\coth^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \simeq \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right)^{-2}$, donc $(\Delta A_0)_{\bar{\alpha}} = \frac{N\bar{\alpha}}{\hbar \omega \bar{\beta}}$. Ce résultat est en accord avec à celui obtenu dans le cas classique. Il est de même analogue à celui obtenu en présence d'une longueur minimale.

Entropie : la relation (4.38) donne

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial}{\partial T} \left(NkT \left[\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \right] + \bar{\alpha} \frac{N\bar{\beta}}{\hbar \omega} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) \right] \right), \\ &= Nk \ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right) + 1 \right] - \bar{\alpha} \frac{N}{4} \left(\frac{\hbar \omega}{2} \right)^2 \frac{\coth \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right)}{\sinh^2 \left(\frac{\bar{\beta} \hbar \omega}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour le potentiel chimique, la relation (4.38) conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\partial}{\partial N} \left[NkT \left[\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \right] - \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta}}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \right] \right], \\ &= kT \left[\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \right] - \bar{\alpha} \frac{\bar{\beta}}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \coth^2 \left(\frac{\bar{\beta}\hbar\omega}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (4.40)$$

Dans la limite des hautes températures, le potentiel chimique (4.40) coïncide avec le résultat classique, dont la correction est donnée par $(\Delta U)_\alpha = -\frac{\alpha}{2} N \frac{T^2}{m\omega^2}$.

On en conclut que, tout comme dans le cas de la mécanique statistique ordinaire, les résultats obtenus via un traitement quantique tendent vers ceux obtenus via un traitement classique.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au principe d'incertitude généralisé (GUP), et nous avons considéré des applications en physique statistique.

D'abord, nous avons présenté les outils mathématiques de base des différentes formes du GUP, en particulier le GUP incluant une longueur minimale et le GUP avec une longueur maximale.

Nous avons ensuite appliqué le formalisme du GUP en mécanique statistique en étudiant deux systèmes, un gaz parfait et un système d'oscillateurs harmoniques. Les fonctions de partition classiques et quantiques et les quantités thermodynamiques de chaque système ont été calculées en considérant le GUP avec une longueur minimale et le GUP avec une longueur maximale.

Comme en mécanique statistique ordinaire, les résultats obtenus par le traitement classique et ceux obtenus par un traitement quantique coïncident dans la limite de hautes températures. Cette étude montre que le GUP avec une longueur maximale, récemment proposé dans la littérature, pourrait avoir des effets nouveaux par rapport à l'effet du GUP incluant une longueur minimale, qui a été extensivement examiné dans la littérature. Cela s'est bien illustré dans l'équation d'état des gaz parfaits qui a été établie dans le formalisme du GUP avec une longueur maximale. D'autre part, il a été également constaté que l'effet de la longueur maximale ne serait pas toujours le même pour des systèmes différents ; et il serait très important, tout comme l'effet de la longueur minimale, dans le régime de hautes températures.

Bibliographie

- [1] M. Maggiore, Phys. Lett. B 304 (1993) 65 ; M. Maggiore, Phys. Rev. D 49 (1994) 5182.
- [2] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).
- [3] A. Kempf, J. Math. Phys. 38, 1347 (1997).
- [4] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994).
- [5] Hossenfeldor et all, Phys. Lett. B. 575(2003) 85-99.
- [6] A.F. Ali, S. Das, E.C. Vagenas, Phys. Lett. B 678 (2009) 497-499.
- [7] S. Das, E.C. Vagenas, A.F. Ali, Phys. Lett. B 690 (2010) 407-412.
- [8] S. Das, E.C. Vagenas, A.F. Ali, Phys. Lett. B 690 (2010) 407.
- [9] P. Pedram, Phys. Lett. B 714 (2012) 317-323.
- [10] P. Pedram, Phys. Lett. B 718 (2012) 638-645.
- [11] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A 10, 145 (1995).
- [12] D. Amati, M. Ciafaloni, G. Veneziano, Phys. Lett. B 216 (1989) 41-47.
- [13] K. Konishi, G. Paffuti, P. Provero, Phys. Lett. B 234 (1990) 276-284.
- [14] C. Rovelli, L. Smolin, Phys. B. 442(1995) 593-619.
- [15] G. Amelino-Camilia, Int. J. Mod. Phys. D. 11 (2002) 35-59.
- [16] L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D. 95 (2017) 103523.
- [17] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk and V. M. Tkachuk, J. Phys. A 39 (2006) 2143.
- [18] T. V. Fityo, Phys. Lett. A 372 (2008) 5872.
- [19] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. A 76 (2007) 032112.
- [20] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A 36 (2003) 10373.
- [21] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A 36 (2004) 10095.

-
- [22] C. Quesne and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A* 37 (2005) 1747.
- [23] F. Brau, *J. Phys. A* 32 (1999) 7691.
- [24] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic and T. Takeuchi, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 012104.
- [25] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 012101.
- [26] M. M. Stetsko, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 062105.
- [27] F. Brau and F. Buisseret, *Phys. Rev. D* 74 (2006) 036002.
- [28] D.J.Gross and P.F.Mende.*Nucl.Phys.B* 303,407(1988).
- [29] F. Lizzi, N. E. Mavromatos; Preprint OUTP-96-66-P ;DSF 53/96 ; hep-th/9611040.
- [30] E.Witten; *Phys.Today* 49 (4), 24 (1996).
- [31] S. Haro, *JHEP* 10, 023 (1998).
- [32] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65, 125027 (2002).
- [33] R. N. C. Filho et all. *Phys. Lett. B*755, 367 (2016).
- [34] P. Pedram, *Phys. Lett. B* 714 (2012) 317-323.
- [35] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D.* 95 (2017) 103523.
- [36] Miraboutalebi, L. Farhang Matin, *Can. Phys.* 93 (2014) 574-579.
- [37] S. Das and E.C.Vegenas, *Phys. Lett.* 101 (2008) 221301.
- [38] K. Nozari and S. H. Mehdipour, *Chaos Soliton Fact* 32 (2007) 1637-1644.
- [39] S. Bensalem and D. Bouaziz, *Physica A. Stat. Mech. Appl.* 523 (2019) 583-592.

Remerciements

*Tout mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** pour m'avoir donné la volanté et la patience tout au long de mes études.*

*Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur **Mr. Djamíl Bouazíz** professeur à l'université de Jijel, que je remercie pour ses conseils durant la préparation et la rédaction de ce mémoire.*

*Je remercie les membres de jury **Madamme R. Rekióa** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et **Madamme B.Gattou** qui a accepté de jury ce travail .*

*Je remercie également toutes les enseignants de département de physique à l'université de Jijel, en particulier les enseignants de physique Théorique et la secritaire de laboratoire de physique théorique **Houria**.*

*Un grand merci pour **mes parents** et mes sœurs : **Soumaya, Roufia, Zineb, Radia et Salima** pour leur soutien et leur patience avec moi et pour m'ont boucoup encouragée.*

*Enfin, je remercie ma tente **Habiba** et mon chère amie **Wassila** et tout mes amis de promon 2018-2019 (**Wissem, Meriem, Hadjer, Rahma...**).*

Nabíla