REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Série :……………………….

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de Master
Filière : physique
Spécialité : Physique Théorique

Présenté par
Boulekroun Ibtissam

Intitulé

Etude de quelques interactions dans le cadre de la géométrie non commutative

Soutenu le : 04/11/2020

Devant le jury:

Président :	N. Chine	MCB	Univ. MSBY, Jijel
Rapporteur :	S. Haouat	Prof.	Univ. MSBY, Jijel
Examinateur :	D. Bouaziz	Prof.	Univ. MSBY, Jijel

Remerciements

Ce travail à été réalisé au Laboratoire de physique théorique (LPTh) de l'université Mohamed Seddik Ben Yahia-jijel.

Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout puissant qui nous données la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

Mon respect, ma gratitude, mes grands remerciements vont à mon encadreur Prof. Salah Haouat pour ses précieux conseils et pour sa disponibilité.

Je tiens aussi à remercier également M. Nadia Chine pour l'honneur qu'elle ma fait en acceptant de présider le jury de mon mémoire, et M. Djamil Bouaziz pour avoir accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont ensuite à tous les enseignants du master de physique théorique qui ont contribué à ma formation scientifique.

Jje remercie fortement tous mes collègues de la promotion 2019/2020 qui étaient toujours prêts à m'aider.

Enfin, j'adresse une pensée particulière à ma famille et à mes parents qui ont fait beaucoup de sacrifices et qui m'ont supporté.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons voulu étudier la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif. En premier lieu, nous nous sommes intéressés aux champs quantiques en présence d'un champ électromagnétique dans l'espace commutatif de Minkowski, où nous avons montré comment calculer la probabilité de création de particule par deux approches. La première approche est basée sur la transformation de Bogoliubov entre les états « in » et « out ». La deuxième méthode utilise l'action effective de Schwinger. Comme application, nous avons considéré l'exemple simple que constitue le champ électrique constant et homogène. Ensuite, nous avons exposé les différentes formulations de la théorie quantique dans le cadre de la géométrie non commutative. Il s'agit de la méthode du décalage de Bopp, la méthode du produit de Moyal et la carte de Seiberg Witten. Après, nous avons considéré la création des particules de Klein Gordon et de Dirac en utilisant le décalage de Bopp. En dernière étape, nous avons étudié la création des particules de Dirac par un champ électrique en géométrie non commutative à partir des cartes de Seiberg-Witten.

Mots clés :

Effet de Schwinger, Géométrie non commutative, Les cartes de Seiberg-Witten

ملخص

في هذا العمل ، درسنا خلق الجسيمات من الفراغ بواسطة مجال كهربائي في زمكان غير تبديلي.

أولاً ، كنا مهتمين بالمجالات الكمومية في وجود مجال كهرومغناطيسي في فضاء مينكوفسكي التبديلي ، حيث بيننا كيفية حساب احتمال تكوين الجسيمات من خلال طريقتين. تعتمد الطريقة الأولى على تحويل بوغوليوبوف بين حالتي "الداخل" و "الخارج". الطريقة الثانية تستخدم فعل شوينغر الفعال. كتطبيق ، أخذنا في الاعتبار المجال الكهربائي الثابت والمتجانس.

بعد ذلك ، كشفنا عن الصيغ المختلفة لنظرية الكم في إطار الهندسة غير التبديلية. هذه هي طريقة إزاحة بوب ، وطريقة الجداء النجمي لموبال ، وخرائط سيبارغ ويتن.

بعد ذلك ، درسنا إنشاء جسيمات كلاين جوردون وديراك باستخدام إزاحة بوب.

في الخطوة الأخيرة، درسنا إنشاء جسيمات ديراك بواسطة مجال كهربائي في هندسة غير تبادلية من خرائط سيبارغ ويتن

ألكلمات المفتاحية

مفعول شوينغر ، الهندسة غير التبديلية ، خرائط سيبارغ ويتن

Abstract

In this work, we have studied the creation of particles from vacuum by an electric field in a non-commutative space-time. First, we were interested in quantum fields in the presence of an electromagnetic field in Minkowski's commutative space, where we showed how to calculate the probability of particle creation by two approaches. The first approach is based on the Bogoliubov transformation between the “in” and “out” states. The second method uses the Schwinger effective action. As an application, we have considered the constant and homogeneous electric field. Then, we exposed the different formulations of quantum theory within the framework of non-commutative geometry. These are the Bopp Shift Method, the Moyal Product Method, and the Seiberg Witten Map. Next, we considered the creation of Klein Gordon and Dirac particles using the Bopp shift. In the final step, we studied the creation of Dirac particles by an electric field in non-commutative geometry from Seiberg-Witten maps.

Keywords :

Schwinger Effect, Noncommutative geometry, Seiberg-Witten maps

Table des matières

Chapitre 1

Intoduction générale

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le contexte scientifique dans lequel s'inscrit la thématique de ce mémoire et de décrire la méthodologie suivie et l'enchainement des travaux réalisés.

1.1 La géométrie non commutative

La mécanique quantique, dans sa première formulation proposée par Heisenberg, apparaît comme une modification de la mécanique hamiltonienne classique où les coordonnées de l'espace des phases sont remplacées par des opérateurs qui ne commutent pas. En généralisant cette idée, Heisenberg lui-même, à introduit en 1930 la non-commutativité des coordonnées de l'espace temps dans le but de résoudre le problème des divergences ultraviolettes en théorie quantique des champs [1]. Ce concept est ensuite conçu d'une manière plus ou moins rigoureuse par Snyder en 1947 [2]. Dans les années 1980, le terme de "géométrie non commutative" est introduit enfin par Alain Connes dans un programme visant à généraliser les différents concepts de la géométrie ordinaire en des concepts équivalents pour des algèbres non commutatives et en particulier les concepts venant de la géométrie différentielle [3].

Par ailleurs, devant l'inaptitude d'unifier la gravitation avec le modèle standard de la physique des particules et les difficultés rencontrées dans la quantification de la Relativité générale par les mêmes schémas utilisés avec succès pour les autres interactions fondamentales, l'outil le plus utilisé pour décrire l'interaction des particules élémentaires avec le champ gravitationnel est la théorie quantique des champs dans un espace courbe [4, 5, 6, 7]. Cette théorie hybride dans laquelle les champs de la matière supposés quantifiés sont soumis à l'action du champ gravitationnel traité classiquement, semble fructueuse au moins jusqu'à ce que les effets quantiques de la gravitation deviennent importants et invalident les hypothèses classiques sur lesquelles les propriétés de l'espace-temps sont fondées.

Dans ce contexte, la géométrie non commutative est une modification de la théorie quantique des champs qui apparaît dans certaines descriptions de la gravité quantique. Pour répendre à la nécessité d'aller au-delà de l'approximation semi-classique de la théorie quantique des champs dans l'espace courbe, de nouvelles approches basées sur des arguments de géométrie non commutative ont été proposées. La théorie des cordes et la théorie M font partie des motivations pour considérer la géométrie non commutative. De plus, la gravité quantique à boucle peut donner lieu à un certain type de géométrie non commutative connu sous le nom κ-Poincaré.

La caractéristique principale des théories des champs non commutatives est qu'elles incorporent des effets quantiques de la gravitation. Un autre effet intéressant est que les champs de matière peuvent ressentir la non-commutativité comme un champ gravitationnel.

En effet, il y a une croyance de longue date que la gravité quantique devrait avoir un principe d'incertitude qui empêche de mesurer des distances en dessous de la longueur de Planck car la quantité de mouvement et l'énergie nécessaires pour effectuer une telle mesure modifient elles-mêmes la géométrie de l'espace temps. Par conséquent, on pourrait souhaiter décrire ces effets, au moins effectivement, par une théorie ayant une nouvelle sorte du principe d'incertitude sur les coordonnées. De la même manière que cela se produit avec les coordonnées et les quantités de mouvement dans la mécanique quantique ordinaire, l'incertitude sur les coordonnées proviendrait d'une relation non commutative, postulant l'existence d'une variété non commutative. L'ingrédient de base de la géométrie non commutative est que, lors de la quantification, les coordonnées spatio-temporelles x_μ sont associées à des opérateurs hermitiens $\hat{x}_\mu$, qui ne sont pas commutatifs. La façon la plus simple de le faire est de considérer que les opérateurs $\hat{x}_\mu$ obéissent à la relation de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \qquad \theta << 1 \tag{1.1}$$

Il est clair que le commutateur non-nul en lui-même introduit déjà une certaine notion de résolution fondamentalement finie. Pour voir comment une longueur minimale entre en jeu dans la géométrie non commutative il suffit d'appliquer le principe d'incertitude pour deux opérateurs A et B qui ne commutent pas

$$\left(\triangle\hat{A}\right)\left(\triangle\hat{B}\right) \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right|, \tag{1.2}$$

ce qui implique que

$$\left(\triangle x_{\mu}\right)\left(\triangle x_{\nu}\right) \geq \frac{1}{2}\left|\theta_{\mu\nu}\right|. \tag{1.3}$$

Actuellement, il existe un grand nombre des travaux qui couvrent les applications et la phénoménologie de la géométrie non commutative.

1.2 La création des particules à partir du vide

Comme nous le savons, les effets relativistes peuvent avoir des conséquences importantes sur le comportement quantique des particules. Le résultat le plus surprenant de la mécanique quantique relativiste est le fameux paradoxe de Klein [10]. Ce paradoxe concerne la diffusion de particules relativistes par une barrière de potentiel où le flux de l'onde réfléchie par la barrière peut être supérieur à l'onde incidente [11]. Cela peut être expliqué, dans le cadre de la théorie de trous de Dirac qui a prédit l'existence d'antiparticules associées aux particules. Selon cette théorie le vide n'est pas le neant absolue mais une "mer de Dirac" où tous les états d'énergies négative sont occupés par des particules virtuelles. Alors, la diffusion des particules est accompagnée par la transition des particules virtuelles de la mer de Dirac en particules réelles par l'effet tunnel. Cette transition produit des paires particule-antiparticule au voisinage de la barrière. Bien sûr cette transition ne peut y avoir lieu que pour une barrière du potentiel supérieur à le double de la masse de la particule (i.e. $eV_0 > 2mc^2$).

Actuellement, il est bien connu que tout champ électrique intense peut créer à partir du vide des paires de particules chargées [12]. Depuis la publication du papier de Schwinger [17], le problème de la création des paires des particules a attiré beaucoup d'attention. Du point de vue théorique, l'importance de cet effet vient de sa nature nonperturbative et sa relation avec d'autres problèmes comme le rayonnement des trous noirs et l'effet Casimir. En effet, la création de particules a plusieurs applications dans différents domaines, de la physique des particules à la physique des trous noirs [12].

Du point de vue expérimental, la création des particules par un champ électrique est devenue à l'heure actuelle un effet d'une grande importance. L'intensité nécessaire pour observer l'effet est de l'ordre de la valeur critique $E_c = \frac{m^2}{e} = 10^{16}\mathtt{Vcm}^{-1}$ (pour les électrons), qui dépasse les développements téchnologiques actuellement disponibles. Ainsi, des techniques expérimentales ont été, récemment, proposées pour observer l'effet de Schwinger pour la première fois dans le laboratoire [13, 14, 15]. Le principe de base de ces techniques est l'amplification de la création de particules par des effets dynamiques en considérant la superposition d'un champ de laser faible de pulsations rapides avec un champ de laser intense de pulsations lentes. Il a été montré dans [13] que le laser de pulsations rapides donne une contribution qui réduit la barrière à travers laquelle les particules virtuelles pénètrent et cause une grande amplification de la création des particules. L'observation de ce phénomène semble donc possible dans le proche futur.

1.3 L'objet du mémoire

Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier la création des particules à partir du vide par un champs électromagnétique dans l'espace-temps non commutatif. Une étude pareille a été réalisée dans le context de l'électrodynamique quantique non commutative [16] où les auteurs ont utilisé le décalage de Bopp pour écrire l'équation de Dirac non commutative. Le résultat obtenu est que la non commtativité de l'espace temps n'a aucune influence sur le taux de création de particules. Cependant cette démarche n'est pas toute-à-fait correcte en raison que le décalage de Bopp ne preseve pas l'invariance de jauge. Pour construire une théorie non commutative invariante de jauge il faut considérer les cartes de Sieberg-Witten qui consistent à des corrections supplémentaire aux champs quantique pour rendre la théorie invariante de jauge.

Pour étudier le phénomène de création de particules à partir du vide par un champ électrique nous pouvons utiliser plusieurs méthodes comme par exemple la technique des intégrales de chemins [23, 24], la méthode semi-classique complexe [25, 26, 27], la technique de la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out" [20, 28], la méthode de projection basée sur le calcul de la fonction de Green [29, 30, 31]. Dans ce travail nous allons utiliser la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov.

Outre la présente introduction, le mémoire est composé de six chapitres.

Dans le deuxième chapitre nous exposons la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique. Comme nous le savons l'Hamiltonien d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ extérieur n'est pas toujours diagonal. Ainsi, nous déterminons d'abord les états "in" et "out" qui nous permettent une interprétation en termes de particules. Ensuite nous utilisons la relation entre les modes "in" et "out" pour exprimer la probabilité de création d'une paire en termes de coefficients de Bogoliubov.

Dans le troisième chapitre nous nous proposons d'illustrer la méthode sus-citée par l'exemple d'un champ électrique constant et homogène. Pour un champ constant, la définition des modes "in" et "out" n'est pas triviale. Ces états, cependant, peuvent être définis à l'aide de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, en admettant que les états d'énergie négative et positive se comportent à $\pm\infty$ comme les solutions semi-classiques. C'est ainsi que nous solutionnons l'équation relativiste d'Hamilton-Jacobi. Ensuite nous comparons les solutions de l'équation de Klein Gordon avec les solutions semi-classique $\varphi(t,\vec{r}) \sim e^{\pm iS}$. Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out". En utilisant la transformation de Bogoliubov, nous calculons la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules crées.

Le quatrième chapitre rappelle les différents concepts de la géométrie non commutative, en l'occurence : Le produit de Moyal, le décalage de Bopp et les cartes de Seiberg-Witten.

Dans le cinquième chapitre nous considérons la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif suivant la référence [16].

Dans le sixième chapitre nous nous proposons d'étudier la création des particules en considérant les cartes de Seiberg-Witten. Après avoir introduit un champ quantique en interaction avec un champ de Maxwell, nous appliquons la procedure les cartes de Sieberg-Witten, pour dériver le Lagrangien total qui tient compte des corrections non commutatives et préserve l'invariance de jauge. Ensuite, nous cherchons des solutions exactes à l'équation de Dirac correspondante. A partir de ces solutions nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules crées.

Le septième chapitre est consacré à une conclusion générale. qui récapitule l'ensemble des résultats obtenus.

Chapitre 2

Champs quantiques et création de particules

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer le processus de création de particules à partir du vide par un champ électrique en considérant deux méthodes différentes. La première méthode est basée sur la formulation canonique de la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique tandis que la deuxième est basée sur la dérivation de l'amplitude vide-vide par les intégrales fonctionnelle.

Pour la première méthode, nous commençons d'abord par une brève description de la quantification canonique d'un champ complexe libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ extérieur de nature électromagnétique. Après avoir montré comment quantifier un champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique, nous montrons comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule à partir du vide et le nombre de particules crées en termes des coefficients de Bogoliubov.

Pour la deuxième méthode, nous définissons en premier lieu l'amplitude de transition en mécanique quantique en théorie quantique des champs. Ensuite, nous montrons que l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme une probabilité de création de particules.

2.2 Champs quantiques libres

Avant de considérer la création de particules, rappelons d'abord les principales étapes de la quantification du champ scalaire complexe libre. Partons de la densité lagrangienne de ce problème qui s'écrit

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^{*} \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{2.1}$$

A partir de cette densité nous obtenons l'équation de Klein Gordon qui régie la dynamique de ce champ

$$(\Box + m^2)\varphi(x, t) = 0. \tag{2.2}$$

Ici, l'opérateur $\Box$ est donné par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle. \tag{2.3}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes sont notées $f_k(\vec{r}, t)$ et $f_k^*(\vec{r}, t)$ avec

$$f_k(\vec{r}, t) = N e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}, \tag{2.4}$$

où $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ et la constante de normalisation N se détermine à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = 2i, \tag{2.5}$$

qui exprime la conservation du courant. En utilisant les solutions $f_k(\vec{r}, t)$ et $f_k^*(\vec{r}, t)$, nous pouvons construire la solution générale de l'équation de Klein Gordon [36]

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[A_k f_k(\vec{r}, t) + B_k^* f_k^*(\vec{r}, t)\right] \tag{2.6}$$

$$\varphi^*(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[B_k f_k(\vec{r}, t) + A_k^* f_k^*(\vec{r}, t)\right]. \tag{2.7}$$

Pour quantifier le champ scalaire libre nous calculons d'abord les moments conjugués de $\varphi(\vec{r}, t)$ et $\varphi^*(\vec{r}, t)$. Il est facile de montrer que ces moments sont donnés par

$$\hat{\pi}_\varphi(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \left[A_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)} - B_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}\right] \tag{2.8}$$

$$\hat{\pi}_{\varphi^*}(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \left[B_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)} - A_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{r}\right)}\right]. \tag{2.9}$$

La procédure de quantification canonique nous impose de considérer les champs $\varphi(\vec{r},t)$ et $\hat{\pi}_{\varphi}(\vec{r},t)$ comme des opérateurs satisfaisant les relations de commutations suivantes

$$[\hat{\varphi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{r}',t)] = i\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \tag{2.10}$$

et

$$[\hat{\varphi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\varphi}(\vec{r}',t)] = [\hat{\pi}(\vec{r},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{r}',t)] = 0. \tag{2.11}$$

Ainsi, les coefficients A_k, B_k, A_k^* et B_k^* deviennent des opérateurs et les champs $\varphi(\vec{r},t)$ et $\varphi^+(\vec{r},t)$ s'écrivent sous la forme

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{a}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{b}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right] \tag{2.12}$$

$$\varphi^+(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{b}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{a}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right]. \tag{2.13}$$

A partir des relations de commutation (2.10) et (2.11), nous pouvons obtenir des relations de commutation pour les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^3\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right) \tag{2.14}$$

et

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = \left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_k\right] = 0. \tag{2.15}$$

Cherchons maintenant le spectre du Hamiltonien du système qui est défini par la transformation de Legendre

$$H = \int d^3x\ \left(\pi_{\varphi}\dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*}\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}\right). \tag{2.16}$$

Après un calcul simple comprenant des intégrations des fonctions exponentielles et des fonctions deltas, nous obtenons

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0(\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ + \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k). \tag{2.17}$$

Avec presque les mêmes calculs, nous obtenons pour l'opérateur de de charge

$$Q = e\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k\ - \hat{b}_k^+\ \hat{b}_k). \tag{2.18}$$

Ici, nous remarquons que H et Q sont diagonals, ce qui nous permet d'interpréter les opérateurs $\hat{a}_k^+$ et a_k comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs b_k^+ et b_k comme les opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Les opérateurs $N_a = \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{a}_k^+\ \hat{a}_k$ et $N_b = \frac{1}{(2\pi)^3}\hat{b}_k^+\ \hat{b}_k$ représentent, respectivement, le nombre de particules et le nombre d'antiparticules. L'état qui vérifie la condition $N_a\left|0\right\rangle = N_b\left|0\right\rangle$ est dit l'état du vide.

2.3 Champs quantiques en présence d'un champ électrique

Ayant montré comment quantifier le champ scalaire libre, considérons maintenant la quantification du champ scalaire complexe en présence d'un champ électrique décrit par le potentiel vecteur $\vec{A}(t)$, avec $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t)$. La densité Lagrangienne de ce système est donnée par [36]

$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \left[\vec{\nabla}\varphi - ie\, \vec{A}\varphi\right]^* \left[\vec{\nabla}\varphi - ie\, \vec{A}\varphi\right] - m^2 \varphi^* \varphi, \tag{2.19}$$

d'où nous dérivons, pour le champ φ, l'équation de Klein Gordon en présence d'un potentiel vecteur $\vec{A}(t)$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\vec{\nabla} - ie\, \vec{A}\right)^2 + m^2\right] \varphi = 0, \tag{2.20}$$

Pour des raisons de simplicité, nous considérons un champ électrique dirigé suivant l'axe (OZ). i.e.

$$\vec{A}(t) = (0, 0, A_z(t)) \tag{2.21}$$

Alors, en écrivant $\varphi(t, \vec{r})$ sous la forme

$$\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \chi_{\vec{k}}(t), \tag{2.22}$$

nous obtenons pour $\chi_{\vec{k}}(t)$ l'équation suivante

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + k_\perp^2 + (k_z - eA_z(t))^2 + m^2\right] \chi_{\vec{k}}(t) = 0, \tag{2.23}$$

où $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Remarquons d'abord que que si $\chi_{\vec{k}}(t)$ est une solution de l'équation (2.23), alors $\chi_{\vec{k}}^*(t)$ est aussi une solution. De plus, nous pouvons montrer que si le champ $\varphi(t, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} \chi_{\vec{k}}(t)$ est une solution à l'équation (2.20) pour la charge e, le champ $\varphi^*(t, \vec{r}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} \chi_{\vec{k}}^*(t)$ est une solution pour la charge $(-e)$. Nous en déduisons alors que les fonctions $\chi_{\vec{k}}(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^*(t)$ sont, respectivement, associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative.

Dans ce qui suit, nous utilisons la notation $\chi_{\vec{k}}^+(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^-(t)$ au lieu de $\chi_{\vec{k}}(t)$ et $\chi_{\vec{k}}^*(t)$. L'opérateur de champ s'écrit alors sous la forme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(a_k \chi_{\vec{k}}^+(t)\; e^{i\vec{k}\vec{r}} + b_k^+ \chi_{\vec{k}}^-(t)\; e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.24}$$

avec la condition de normalisation

$$\chi_k^* \dot{\chi}_k - \chi_k \dot{\chi}_k^* = 2i. \tag{2.25}$$

Ici, les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$ satisfont les mêmes relations de commutation que dans le cas du champ libre, mais leur interprétation n'est pas aussi simple. L'interprétation de ces opérateurs dépend de la définition d'un état du vide. Pour obtenir un état du vide, nous devons calculer, d'abord, le Hamiltonien du système $H = \int d^3x \; (\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L})$. Comme il a été montré dans [36], le Hamiltonien H peut prendre la forme

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[E_k(t)(\hat{a}_k^+ \; \hat{a}_k \; + \hat{b}_k^+ \; \hat{b}_k) + F_k^*(t) \; \hat{b}_k \; \hat{a}_k + F_k(t) \; \hat{a}_k^+ \; \hat{b}_k^+ \right] \tag{2.26}$$

avec

$$\begin{aligned} E_k(t) &= |\dot{\chi}_k \; (t) \; |^2 + \omega^2 \; |\chi_k(t)|^2 & (2.27) \\ F_k(t) &= \dot{\chi}_k^2(t) \; + \omega^2 \; \chi_k^2(t). & (2.28) \end{aligned}$$

Il est bien clair que H n'est pas diagonal car il contient les termes mixtes $\hat{a}_k^+ \hat{b}_k^+$ et $\hat{b}_k \hat{a}_k$.

2.3.1 L'équation d'Hamilton-Jacobi et les états "in" et "out"

Le fait que H n'est pas diagonal montre que le système n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particule n'est pas toute à fait claire. Ils existent cependant des instants à lesquels l'interprétation en terme de particules est possible. Généralement ces instants sont le passé et le futur lointains. Il est bien évident que pour un champ électrique qui s'annule à $\pm\infty$, le système du champ complexe se comporte comme libre dont l'état du vide est bien déterminé. Nous avons alors un vide à $(-\infty)$, noté $|0_{in}\rangle$ et un vide à $(+\infty)$, noté $|0_{out}\rangle$. Les états de particules engendrés à partir de ces deux vides sont dits les états "in" et "out". Ces états ne sont rien d'autres que les solutions de l'équation de Klein Gordon en présence du champ électrique. En admettant que les états d'énergie positive et négative se comporte comme les solutions semi-classique de l'équation d'Hamilton-Jacobi, les solutions exactes de l'équation de Klein Gordon peuvent être classées en états "in" et "out" par leur comparaison aux solutions semi-classiques.

Partons de l'équation de Klein Gordon en presence d'un champ électrique qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \left(\vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar} \; \vec{A} \right)^2 + m^2 \right] \varphi = 0, \tag{2.29}$$

et posons

$$\varphi = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S\right] \tag{2.30}$$

pour obtenir l'équation

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\vec{\nabla}S - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2 - i\hbar\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0. \tag{2.31}$$

En prenant la limite $\hbar \rightarrow 0$, nous obtenons l'équation d'Hamilton-Jaccobi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla}S - e\ \vec{A}\right)^2 - m^2 = 0. \tag{2.32}$$

Pour un champ électrique dépendant du temps, la solution S est de la forme

$$S = \vec{k}.\vec{x} + G\left(t\right) \tag{2.33}$$

avec

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sqrt{\left(\vec{k} - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2}, \tag{2.34}$$

ou bien

$$G = \int dt \sqrt{\left(\vec{k} - e\ \vec{A}\right)^2 + m^2}. \tag{2.35}$$

Les états "in" et "out" ont donc les comportements

$$\chi^{\pm}_{\vec{k},in}(t) \underset{t\rightarrow-\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\mp i\ G\left(t\right)\right] \tag{2.36}$$

et

$$\chi^{\pm}_{\vec{k},out}(t) \underset{t\rightarrow+\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\mp i\ G\left(t\right)\right] \tag{2.37}$$

2.3.2 Interprétation en termes de particules

Comme l'équation (2.23) est de l'ordre deux, elle admet plusieurs ensembles $\left\{\chi^{+}_{\vec{k}}(t), \chi^{-}_{\vec{k}}(t)\right\}$ de solutions linéairement indépendantes. Donc la decomposition (2.24) n'est pas unique. Les seules décompositions physiques sont les deux décompositions suivant les états "in" et "out" qui rendent H diagonal,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(a_{k,in}\chi^{+}_{\vec{k},in}(t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} + b^{+}_{k,in}\chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.38}$$

et

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(a_{k,out}\chi^{+}_{\vec{k},out}(t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} + b^{+}_{k,out}\chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right), \tag{2.39}$$

Pour le premier ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},in}(t), \chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\right\}$, nous avons

$$H_{t\to-\infty} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{in} \ \left[\hat{a}^{+}_{k,in}\ \hat{a}_{k,in}\ + \hat{b}^{+}_{k,in}\ \hat{b}_{k,in}\right] \tag{2.40}$$

où

$$2\omega_{in} = E_k(t \to -\infty).$$

Pour le deuxième ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},out}(t), \chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\right\}$, nous obtenons

$$H_{t\to+\infty} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{out} \ \left[\hat{a}^{+}_{k,out}\ \hat{a}_{k,out}\ + \hat{b}^{+}_{k,out}\ \hat{b}_{k,out}\right] \tag{2.41}$$

avec

$$2\omega_{out} = E_k(t \to +\infty)\ . \tag{2.42}$$

Le Hamiltonien H est donc diagonal pour deux états du vide $|0_{in}\rangle$ et $|0_{out}\rangle$, avec $\hat{a}_{k,in}\ |0_{in}\rangle = \hat{b}_{k,in}\,|0_{in}\rangle = 0$ et $\hat{a}_{k,out}\ |0_{out}\rangle = \hat{b}_{k,out}\,|0_{out}\rangle = 0$.

Nous concluons que l'interprétation en termes de particules pour un champ quantique en présence d'un champ électrique n'est possible qu'à des instants particulièrs pour lesquels H est diagonal. Cela montre que la notion de particule en theorie quantique des champs en présence d'un champ extérieur n'est pas complètement claire. A un instant t quelconque, la matière se comporte comme des ondes.

2.3.3 Création de particules à partir du vide

Comme l'ensemble $\left\{\chi^{+}_{\vec{k},out}(t), \chi^{-}_{\vec{k},out}(t)\right\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (**??**), nous pouvons écrire les éléments du deuxième ensemble$\left\{\chi^{+}_{\vec{k},in}(t), \chi^{-}_{\vec{k},in}(t)\right\}$ comme combinaisons linéaires des fonctions $\chi^{+}_{\vec{k},out}(t)$ et $\chi^{-}_{\vec{k},out}(t)$

$$\chi^{+}_{\vec{k},in}(t) = \alpha\ \chi^{+}_{\vec{k},out}(t) + \beta\ \chi^{-}_{\vec{k},out}(t) \tag{2.43}$$

$$\chi^{-}_{\vec{k},in}(t) = \alpha^*\ \chi^{-}_{\vec{k},out}(t) + \beta^*\ \chi^{+}_{\vec{k},out}(t). \tag{2.44}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où α et β sont les coefficients de Bogoliubov qui vérifient la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{2.45}$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{out} = \alpha\ a_{in} + \beta\ b^{+}_{in} \tag{2.46}$$

$$b^{+}_{out} = \beta^{*}\ a_{in} + \alpha^{*}\ b^{+}_{in}. \tag{2.47}$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivant

$$\langle 0_{in}|\ \hat{a}^{+}_{k,out}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle = \langle 0_{in}|\ b^{+}_{k,out}\ b_{k,out}\ |0_{in}\rangle = |\beta|^{2}, \tag{2.48}$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". L'explication de ce résultat est que la présence du champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules. Selon les principes généraux de la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition de l'état $|0_{in}\rangle$ à l'état $a^{+}_{out}b^{+}_{out}\,|0_{out}\rangle$ est donnée par

$$A = \langle 0_{out}|\ \hat{b}_{k,out}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle\,. \tag{2.49}$$

Compte tenu des équation (2.46) et (2.47), b_{out} peut s'écrire en fonction de b_{in} et a^{+}_{out}

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^{*}}b_{in} + \frac{\beta^{*}}{\alpha^{*}}a^{+}_{out} \tag{2.50}$$

et l'amplitude A se réduit à

$$A = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2} \langle 0_{out}|\ 0_{in}\rangle\,. \tag{2.51}$$

La probabilité de création d'une paire dans l'état $\vec{k}$ est alors donné par

$$P_{\vec{k}} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2}. \tag{2.52}$$

2.4 Méthode de l'action effective

Maintenant nous nous proposons d'étudier la création de particules en suivant la méthode développée dans [37]. Cette méthode consiste à écrire d'abord l'amplitude de transition vide-vide en termes du déterminant de l'opérateur de Klein Gordon et extraire, ensuite, à partir de ce déterminant la probabilité de création de particules qui est dans ce cas la partie imaginaire de l'action éffective de Schwinger. L'action effective de Schwinger définit l'amplitude de transition vide-vide comme suit

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \exp\left(iS_{eff}\right) = \exp\left(i \int d^D x \mathcal{L}_{eff}\right) \tag{2.53}$$

où $\mathcal{L}_{eff}$ est dit le Lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{vac-vac} &= \left|\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle\right|^2 \\ &= \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}\right) \\ &= \exp\left(-\int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}\right). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Creat.} &= 1 - \mathcal{P}_{vac-vac} \\ &= 1 - \exp\left(-\int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}\right) \\ &\simeq \int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\,L_{eff}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.4.1 Amplitude de transition vide-vide en mécanique quantique

Commençons par la définition de l'amplitude vide-vide en mécanique quantique. En physique quantique, l'état fondamental d'un système est l'état qui correspond à la plus basse énergie. Cette état est appelé aussi état du vide. Supposons, maintenant que le système physique est initialement, à l'instant t_i est dans son état fondamental.

L'amplitude de transition vide-vide est l'amplitude de probabilité pour que le système soit encore dans son état fondamental à l'instant t_f. Suivant cette définition, nous avons, pour $T = t_f - t_i$,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \langle 0 | \exp\left(-iHT\right) | 0 \rangle = \exp\left(-iE_0 T\right). \tag{2.56}$$

D'autre part, le propagateur du système est l'amplitude de transition de l'état $\psi\left(x, t_i\right)$ à l'état $\psi\left(y, t_f\right)$ qui vérifie

$$\psi\left(y, t_f\right) = \int dx\ D_F\left(x_f, t_f; x_i, t_i\right) \psi\left(x, t_i\right) \tag{2.57}$$

L'expression du propagateur en fonction de l'opérateur d'évolution est

$$D_F\left(x_f,t_f;x_i,t_i\right)=\langle x_f|\,e^{-iH\left(t_f-t_i\right)}\,|x_i\rangle=\int Dx\;e^{iS_{cl}[x]} \tag{2.58}$$

avec

$$S_{cl}\left[x\right]=\int_{t_i}^{t_f}dt\;L\left(x,\dot{x}\right) \tag{2.59}$$

Considérons les vecteurs $|\phi_n\rangle$ états propres à H,

$$H\left|\phi_n\right\rangle=E_n\left|\phi_n\right\rangle. \tag{2.60}$$

Ces vecteurs vérifient les relations suivantes

$$\sum_n\;\left|\phi_n\right\rangle\left\langle\phi_n\right|=1 \tag{2.61}$$

et

$$\left\langle\phi_m\right|\phi_n\rangle=\delta_{nm} \tag{2.62}$$

Le propagateur peut s'écrire alors comme suit

$$D_F\left(x_f,t_f;x_i,t_i\right)=\sum_n\;\phi_n\left(x_f\right)\phi_n^*\left(x_i\right)e^{-iE_nT} \tag{2.63}$$

avec

$$\phi_n\left(x\right)=\langle x|\,\phi_n\rangle. \tag{2.64}$$

Maintenant, nous effectuons une rotation de Wick $T\longrightarrow -i\tau$ et nous prenons la limite $\tau\longrightarrow\infty$, pour avoir

$$D_F\left(x_f,-i\frac{\tau}{2};x_i,i\frac{\tau}{2}\right)\overset{\tau\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\;\phi_0\left(x_f\right)\phi_0^*\left(x_i\right)e^{-E_0\tau}\;. \tag{2.65}$$

L'amplitude de transition vide-vide en mécanique quantique se détermine alors à partir du propagateur en faisant la limite $T\longrightarrow\infty$

$$\left\langle 0_{out}\right|0_{in}\rangle\overset{T\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\;N\int Dx\exp\left(i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}L\left(x,\dot{x}\right)dt\right), \tag{2.66}$$

où N est une constante.

2.4.2 Amplitude de transition vide-vide en TQC

Champ scalaire

En théorie quantique des champs, une expression identique peut être obtenue en remplaçant la somme sur les chemins par une sommation sur toutes les configurations de champ. Les changements à faire sont donc

$$Dx \to D\phi D\phi^*,$$
$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} L\left(x,\dot{x}\right) \longrightarrow \int d^4x\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right) \tag{2.67}$$

et

$$\int Dx\exp\left(i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} L\left(x,\dot{x}\right)dt\right) \longrightarrow \int D\phi D\phi^*\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right)\right) \tag{2.68}$$

où $\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right)$ est la densité Lagrangien du champ

$$\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right) = \phi^*\left(x\right)\mathcal{O}\phi\left(x\right) \tag{2.69}$$

avec

$$\mathcal{O} = \left(i\partial_\mu - eA_\mu\left(x\right)\right)^2 - m^2. \tag{2.70}$$

L'amplitude de transition du vide au vide devient

$$\langle 0_{out}\,|0_{in}\rangle = N\int D\phi\ D\phi^*\exp i\int d^4x\phi^*\left(x\right)\mathcal{O}\phi\left(x\right) \tag{2.71}$$

Pour calculer cette amplitude, nous introduisons la base des fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O}\chi_n\left(x\right) = \lambda_n\chi_n\left(x\right) \tag{2.72}$$

et nous developpons $\phi\left(x\right)$ sur cette base

$$\phi\left(x\right) = \sum_n a_n\chi_n\left(x\right). \tag{2.73}$$

En utilisant la relation d'orthonormalisation des fonctions $\chi_n\left(x\right)$

$$\int d^4x\chi_n^*\left(x\right)\chi_l\left(x\right) = \delta_{nl} \tag{2.74}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle &= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \int d^4x \sum_{n,l} a_l^* a_n \chi_l^* (x) \mathcal{O} \chi_n (x) && (2.75) \\
&= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \sum_{n,l} \lambda_n a_l^* a_n \int d^4x \chi_l^* (x) \chi_n (x) \\
&= C \prod_{ij} \int da_i \int da_j^* \exp i \sum_n \lambda_n |a_n|^2 \\
&= \frac{C}{\prod\limits_n \lambda_n} && (2.76)
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = \frac{C}{\det \mathcal{O}}$$

Maintenant nous utilisons la propriété du déterminant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\det \mathcal{O}} &= \exp \left[- \ln \left(\det \mathcal{O} \right) \right] = \exp \left[- \ln \prod_n \lambda_n \right] && (2.77) \\
&= \exp \left[- \sum_n \ln \lambda_n \right] = \exp \left[-tr \ln \mathcal{O} \right] && (2.78)
\end{aligned}$$

pour écrire

$$\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle = C \exp \left[-tr \ln \mathcal{O} \right] . \qquad (2.79)$$

Compte tenu du fait que la fonction $\ln(x)$ admet la représentation intégrale suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + i\epsilon} &= -i \int_0^\infty ds \exp (isx) \\
\ln (x + i\epsilon) &= - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp (is (x + i\epsilon)) + \mathrm{C^{ste}}
\end{aligned}$$

$$\ln A = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp (isA) + \mathrm{C^{ste}}, \qquad (2.80)$$

nous arrivons à l'expression

$$S_{eff} = i \,\mathrm{tr} \left(\ln \mathcal{O} \right) = -i \,\mathrm{tr} \sum_n \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp (i \mathcal{O} s) . \qquad (2.81)$$

$$m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$$

Champ spinoriel

Pour un champ de Dirac la densité Lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left(i \not{D} - m \right) \psi \equiv \overline{\psi} \mathcal{O} \psi \tag{2.82}$$

avec

$$\mathcal{O} = i \not{D} - m = \gamma^{\mu} \left(i \partial_{\mu} - e A_{\mu} \right) - m \tag{2.83}$$

Dans ce cas l'amplitude vide-vide est définie par

$$\langle 0_{out} \left| 0_{in} \right\rangle \sim \int d\psi \; d\overline{\psi} \; \exp \left(i \int d^4 x \overline{\psi} \mathcal{O} \psi \right) \tag{2.84}$$

où ψ et $\overline{\psi}$ sont cette fois-ci des variales de Grassmann. L'intégrale fonctionnelle est gaussienne et donc intégrable. Le résultat est

$$\det \mathcal{O} = \prod_i \lambda_i = \det \mathcal{O}^{\dagger} = \left[\det \mathcal{O} \mathcal{O}^{\dagger} \right]^{1/2} \tag{2.85}$$

avec

$$\mathcal{O}^{\dagger} = -\gamma^{\mu} \left(i \partial_{\mu} - e A_{\mu} \right) - m. \tag{2.86}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \mathcal{O}^{\dagger} &= \left[\gamma^{\mu} \left(i \partial_{\mu} - e A_{\mu} \right) - m \right] \left[-\gamma^{\mu} \left(i \partial_{\mu} - e A_{\mu} \right) + m \right] && (2.87) \\ &= -\left(i \partial_{\mu} - e A_{\mu} \left(x \right) \right)^2 + m^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. && (2.88) \end{aligned}$$

Dans ce cas nous obtenons

$$S_{eff} = -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \left(\ln \mathcal{O} \mathcal{O}^{\dagger} \right) = i \operatorname{tr} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp \left(-i \mathcal{O} \mathcal{O}^{\dagger} s \right) \tag{2.89}$$

où nous avons utilisé l'intégrale

$$\ln \left(x - i\epsilon \right) = -\int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp \left(-is \left(x - i\epsilon \right) \right) + \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}. \tag{2.90}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique où nous avons montré que l'Hamiltonien de ce système n'est pas toujours diagonal.

Ainsi, nous avons défini en premier lieu les modes "in" et "out" qui rendent l'Hamiltonien diagonal et nous permettent donc une interprétation en termes de particules. A partir de la relation entre les modes "in" et "out" nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire en termes de coefficients de Bogoliubov. En deuxième partie, nous montré comment définir l'amplitude de transition vide-vide pour le champ scalaire complexe et le champ spinoriel et comment extraire de cette amplitude la probabilité de création de particules.

Chapitre 3

Création de particules scalaires par un champ électrique constant et homogène

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'illustrer les méthodes présentées dans le chapitre précédent en considérant la création de particules par un champ électrique constant et homogène dans un espace de Minkowski à (3+1) dimensions.

Pour la première méthode, nous considérons l'équation de Klein Gordon en présence d'un champ électrique qui peut s'écrire sous la forme

$$\left[\left(\hat{p}_\mu - eA_\mu\left(x\right)\right)^2 - m^2\right]\psi\left(t,x\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $\psi\left(t,x\right)$ est le champ de la matière de masse m et de charge e et A_μ est le vecteur potentiel qui décrit le champ éléctrique. Ensuite, nous utilisons les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour classer les solutions de Klein Gordon en état "in" et "out". A partir de la relation de Bogoliubov qui liée ces états nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules crées. Il est à noter que le champ éléctrique constant peut être décrit par deux jauges ; la jauge dépendant de la position $A_\mu = (-Ex, 0, 0, 0)$ et la jauge dépendant du temps $A_\mu = (0, 0, 0, Et)$. Dans ce chapitre nous effectuons les calculs dans les deux jauges en montrant ainsi l'invariance de jauge du problème.

Pour la deuxième méthode, nous cherchons d'abord, les valeurs propres des opérateurs de Klein Gordon et de Dirac. Ensuite nous calculons directement l'action effective de Schwinger qui définie l'amplitude vide-vide. La probabilité de création des particules dans ce cas est la partie imaginaire de cette action effective.

3.2 Création des particuels par un champ électrique

3.2.1 La jauge dépendant du temps

En présence d'un champ électrique constant et homogène E, décrit par la jauge

$$A_z(t) = -Et, \tag{3.2}$$

l'équation de Klein Gordon se réduit à

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k_z + eEt)^2 + m_\perp^2\right]\chi(t) = 0 \tag{3.3}$$

avec $m_\perp^2 = m^2 + k_x^2 + k_y^2$ et $\psi\,(t,x) = e^{i\vec{k}\vec{x}}\;\chi(t)$.

Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre cette équation nous faisons le changement de variable $t \to Z$ avec

$$Z = \sqrt{eE}\left(t + \frac{k_z}{eE}\right). \tag{3.4}$$

Dans ce cas nous avons

$$\frac{d^2}{dt^2} = eE\frac{d^2}{dZ^2} \tag{3.5}$$

l'équation résultante de ce changement prend la forme

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + Z^2 + \lambda\right]\chi(t) = 0 \tag{3.6}$$

avec

$$\lambda = \frac{m_\perp^2}{eE}. \tag{3.7}$$

Suivant [39] l'équation (3.6) a deux ensembles de solutions. Le premier ensemble est donné par

$$\chi_1(t) = D_\nu((1+i)\,Z) \tag{3.8}$$

$$\chi_2(t) = D_\nu(-\,(1+i)\,Z) \tag{3.9}$$

où $D_\nu(x)$ sont les fonctions de Weber et

$$\nu = -\frac{1+i\,\lambda}{2}. \tag{3.10}$$

Pour le deuxième ensemble nous avons

$$\begin{aligned}\chi_3(t) &= D_{\nu^*}((1-i)\,Z) & (3.11)\\ \chi_4(t) &= D_{\nu^*}(-(1-i)\,Z). & (3.12)\end{aligned}$$

Equation d'Hamilton-Jacobi et états "in" et "out"

Pour un champ constant qui ne s'annule pas a ∞, la définition des états "in" et "out" n'est pas triviale. Ces états, cependant, peuvent être définies à l'aide de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, en admettant que les états d'énergie négative et positive se comporte a $\pm\infty$ comme les solutions semi-classiques. Ainsi, nous commençons d'abord par résoudre l'équation semi-classique d'Hamilton-Jacobi. Puis, nous comparons ces solutions avec les solutions semi-classiques $\varphi(t,x) \sim e^{\pm is}$. Cela nous permet de classer nos solutions en états "in" et "out".

L'équation relativiste d'Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla} S - e\,\vec{A}\right)^2 - m^2 = 0. \tag{3.13}$$

En séparant la partie dépendante de $\vec{x}$,

$$S = \vec{k}.\vec{x} + G(t), \tag{3.14}$$

nous obtenons pour $G(t)$ l'équation suivante

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)^2 = m_\perp^2 + (k_z - eA_z(t))^2, \tag{3.15}$$

dont la solution formelle est

$$G(t) = \pm \int \sqrt{m_\perp^2 + (k - eA_z(t))^2} dt. \tag{3.16}$$

Quand $|t| \to \infty$, nous pouvons voir que la solution $G(t)$ se comporte comme

$$G(t) = \pm\frac{1}{2} eEt^2. \tag{3.17}$$

Par conséquent, les états $\chi_{in}^{\pm}(t)$ et $\chi_{out}^{\pm}(t)$ doivent se comporter comme suit

$$\lim_{t\to\,-\infty} \chi_{in}^{\pm}(t) \simeq\ e^{\mp i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.18}$$

et

$$\lim_{t\to\ +\infty}\chi^{\pm}_{out}\ (t)\simeq\ e^{\ \mp i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.19}$$

D'autre part, en tenant compte du comportement des fonctions $D_\nu(Z)$, [39]

$$D_\nu(Z)\underset{|Z|>>|\nu|}{\simeq}Z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}\qquad\text{avec}\qquad|\arg(Z)|<\frac{3\pi}{4} \tag{3.20}$$

nous obtenons

$$\chi_1(t)_{t\to\ +\infty}\ \simeq\ e^{\ -i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.21}$$

$$\chi_2(t)_{t\to\ -\infty}\ \simeq\ e^{\ +i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.22}$$

$$\chi_3(t)_{t\to\ +\infty}\ \simeq\ e^{\ +i\frac{1}{2}eEt^2} \tag{3.23}$$

$$\chi_4(t)_{t\to\ -\infty}\ \simeq\ e^{\ -i\frac{1}{2}eEt^2}. \tag{3.24}$$

En faisant une comparaison de (3.18) et (3.19) d'une part et (3.21)-(3.24) de l'autre part, nous déduisons que les états $\chi^{\pm}_{in}(t)$ et $\chi^{\pm}_{out}(t)$ sont donnés par

$$\chi^{+}_{out}\ (t)\ =\ \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{i\pi}{4}\nu}D_\nu((1+i)\,Z) \tag{3.25}$$

$$\chi^{-}_{out}\ (t)\ =\ \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*}D_{\nu^*}((1-i)\,Z) \tag{3.26}$$

$$\chi^{+}_{in}\ (t)\ =\ \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}}e^{\frac{i\pi}{4}\nu^*}D_{\nu^*}(-\,(1-i)\,Z) \tag{3.27}$$

$$\chi^{-}_{in}\ (t)\ =\ \frac{1}{(2eE)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{i\pi}{4}\nu}D_\nu(-\,(1+i)\,Z), \tag{3.28}$$

où les constantes de normalisation $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\,e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu}$ et $(2eE)^{-\frac{1}{4}}\,e^{\pm\frac{i\pi}{4}\nu^*}$ sont déterminés à partir de la condition

$$\chi^*\dot{\chi}-\chi\dot{\chi}^*=2i. \tag{3.29}$$

Création de particules

Pour obtenir la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules crées nous utilisons la transformation [39]

$$D_\nu(z)=e^{-i\pi\ \nu}D_\nu(-Z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}D_{-\nu-1}(iZ) \tag{3.30}$$

qui nous permet d'écrire

$$\chi_{in}^{+}(t) = \alpha\ \chi_{out}^{+}(t) + \beta\ \chi_{out}^{-}(t) \tag{3.31}$$

$$\chi_{in}^{-}(t) = \beta^{*}\ \chi_{out}^{+}(t) + \alpha^{*}\ \chi_{out}^{-}(t). \tag{3.32}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients de Bogoliubov α et β, donnés par

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu^{*})} e^{\frac{i\pi}{2}(\nu^{*}+\frac{1}{2})} \tag{3.33}$$

et

$$\beta = e^{i\pi\nu^{*}}, \tag{3.34}$$

avec la condition

$$|\alpha|^{2} - |\beta|^{2} = 1. \tag{3.35}$$

Cette transformation nous permet d'écrire

$$a_{k,out} = \alpha\ a_{k,in} + \beta\ b_{k,in}^{+} \tag{3.36}$$

$$b_{k,out}^{+} = \beta^{*}\ a_{k,in} + \alpha^{*}\ b_{k,in}^{+}. \tag{3.37}$$

En utilisant ces deux dernières relations nous arrivons au résultat suivante

$$\langle 0_{in}|\ \hat{a}_{k,out}^{+}\ \hat{a}_{k,out}\ |0_{in}\rangle = \langle 0_{in}|\ b_{k,out}^{+}\ b_{k,out}\ |0_{in}\rangle = |\beta|^{2}, \tag{3.38}$$

ce qui montre que le vide $|0_{in}\rangle$ contient des particules "out". L'explication de ce résultat est que la présence du champ électrique perturbe le vide $|0_{in}\rangle$ et produit des paires de particules.

Pour la probabilité de création d'une paire, nous avons

$$P_{\vec{k}} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^{2} \tag{3.39}$$

$$= \left|\frac{\Gamma(-\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\pi}{2}\nu}\right|^{2}, \tag{3.40}$$

en utilisant la formule

$$\left|\Gamma(\frac{1}{2} + ix)\right|^{2} = \frac{\pi}{\cosh \pi x}, \tag{3.41}$$

nous obtenons pour la probabilité de création d'une paire

$$P_{\vec{k}} = \frac{e^{-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{2e\ E}}}{2\cosh \pi\left(\frac{m_{\perp}^{2}}{2eE}\right)} = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{eE}\right)}{1 + \exp\left(-\pi\frac{m_{\perp}^{2}}{eE}\right)} \tag{3.42}$$

et pour la densité des particules crées dans l'état $\vec{k}$,

$$n\left(\vec{k}\right) = \left|e^{i\pi\nu^*}\right|^2 = \exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.43}$$

3.2.2 La jauge dépendant de la position

Considérons maintenant la jauge suivante

$$A^\mu \equiv (-Ex, 0, 0, 0). \tag{3.44}$$

Pour ce potentiel vecteur l'équation de Klein Gordon est exactement soluble. L'identification des états "in" et "out" cependant n'est pas tout à fait claire. Il existe dans la littérature deux choix pour ces états, à savoir, le choix de Hansen et Ravandal [35, 40] et ce de Nikishov [28]. Dans ce mémoire nous prenons le choix de Nikishov. Commençons d'abord par la solution de l'équation de Klein Gordon.

Solutions exactes de l'équation de Klein Gordon

Pour résoudre l'équation de Klein Gordon, nous écrivons la solution sous la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left[-i\left(\omega t - k_x x - k_y y\right)\right]\varphi(x). \tag{3.45}$$

L'équation résultante est

$$\left[(\omega + eEx)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m_\perp^2\right]\varphi(x) = 0, \tag{3.46}$$

en faisant le changement de variable

$$\xi = \sqrt{2ieE}\left(x + \frac{\omega}{eE}\right), \tag{3.47}$$

nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1}{4}\xi^2 + \gamma + \frac{1}{2}\right]\tilde{\varphi}(\xi) = 0, \tag{3.48}$$

où $\tilde{\varphi}(\xi) \equiv \varphi(x)$ et

$$\gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{m_\perp^2}{eE}. \tag{3.49}$$

L'équation (3.48) admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonctions de Weber (PCF_s) [39]. Selon [28] la classification de ces solutions comme des états "in" et "out" est comme suit

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}^{-}(x) &= D_{\gamma^*}\left[(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], &(3.50)\\
\varphi_{in}^{+}(x) &= D_{\gamma}\left[-(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], &(3.51)\\
\varphi_{out}^{-}(x) &= D_{\gamma}\left[(1+i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right], &(3.52)\\
\varphi_{out}^{+}(x) &= D_{\gamma^*}\left[-(1-i)\sqrt{eE}\left(x+\frac{\omega}{eE}\right)\right]. &(3.53)
\end{aligned}$$

Création des particules

Nous utilisons la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out" pour déterminer la probabilité de création de particules et la densité des particules crées. Comme l'ensemble $\left\{\varphi_{out}^{+}(x), \varphi_{out}^{-}(x)\right\}$ forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (3.48) , nous pouvons écrire l'ensemble $\left\{\varphi_{in}^{+}(x), \varphi_{in}^{-}(x)\right\}$ comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_{out}^{+}(x)$ et $\varphi_{out}^{-}(x)$. En tenant compte du fait que $\gamma^* = -\gamma - 1$ et en utilisant la formule [39]

$$D_{\gamma}(\xi) = \exp\{i\pi\gamma\} D_{\gamma}(-\xi) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\} D_{-\gamma-1}(-i\xi) \tag{3.54}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}^{+}(x) &= \alpha\varphi_{out}^{+}(x) + \beta\varphi_{out}^{-}(x) &(3.55)\\
\varphi_{in}^{-}(x) &= \beta^*\varphi_{out}^{+}(x) + \alpha^*\varphi_{out}^{-}(x), &(3.56)
\end{aligned}$$

où les coefficients de Bogoliubov α et β, sont cette fois ci donnés par

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left\{\frac{i\pi\gamma}{2}\right\} &(3.57)\\
\beta &= \exp\{i\pi\gamma\}. &(3.58)
\end{aligned}$$

Par conséquent la probabilité pour créer une paire de particules avec l'énergie ω du vide est donnée par

$$p_{\omega} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2, \tag{3.59}$$

en utilisant la formule (3.41) nous obtenons

$$p_\omega = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right)}. \tag{3.60}$$

La densité des particules crées dans un état ω (le nombre moyen de particules crées par état) est donnée par

$$n(\omega) = |\beta|^2 = \exp\left(-\pi\frac{m_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.61}$$

Les équations (3.60) et (3.61) prouvent en premier lieu l'invariance de jauge de la théorie et montre que le présent choix des modes "in" et "out" mène aux résultats exacts de la création de particules.

3.3 Méthode de l'action effective

3.3.1 Particules de spin 0

Pour un champ électrique décrit par la jauge

$$A^\mu(t) = (0,0,0,-Et\ ) \tag{3.62}$$

l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}_{KG}\chi(x) = \lambda\chi(x) \tag{3.63}$$

se réduit à l'équation de Klein Gordon (3.3) avec $m_\perp^2 - \lambda$ au lieu de $m_\perp^2$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k_z + eEt)^2 + m_\perp^2 - \lambda\right]\chi(t) = 0 \tag{3.64}$$

En faisant les changements

$$\tau = t + \frac{k_z}{eE} \tag{3.65}$$

$$\varpi = -ieE \tag{3.66}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(m_\perp^2 - \lambda\right) \tag{3.67}$$

Nous obtenons une équation qui se ressemble à l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\varpi^2\tau^2\right]\tilde{\chi}(\tau) = \mathcal{E}\tilde{\chi}(\tau) \tag{3.68}$$

où l'*énergie* complexe est donnée par

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varpi. \tag{3.69}$$

Les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{O}_{KG}$ sont donc données par

$$\begin{aligned}\lambda &= m_\perp^2 + (2n+1)\, ieE \\ &= m^2 + k_x^2 + k_y^2 + i\,(2n+1)\, eE.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Nous avons alors

$$S_{eff} = i\,\mathrm{tr}\,(\ln \mathcal{O}_{KG}) = -iL^3 \int \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3} \sum_n \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left[i\left(m^2 + k_x^2 + k_y^2\right)s\right] \exp\left[-(2n+1)\, eEs\right]. \tag{3.71}$$

L'intégrale $\int dk_z$ peut être remplacer par eET. Nous avons également la somme

$$\sum_n \exp\left[-(2n+1)\, eEs\right] = \sum_{n=0}^\infty e^{-2neEs} e^{-eEs} = \frac{1}{1 - e^{-2eE_0 s}} e^{-eEs} \tag{3.72}$$

qui se réduit à

$$\sum_n \exp\left[-(2n+1)\, eEs\right] = \frac{1}{2\sinh eE_0 s}. \tag{3.73}$$

L'intgration sur k_x et k_y est directe

$$\int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \exp\left[i\left(k_x^2 + k_y^2\right)s\right] = i\frac{1}{4\pi}\frac{1}{s}. \tag{3.74}$$

Nous obtenons alors

$$S_{eff} = L^3 T \frac{eE}{8\pi^2} \int dk_z \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{1}{2\sinh eE_0 s} \exp\left(im^2 s\right). \tag{3.75}$$

La partie imaginaire de S_{eff} peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Im}\, S_{eff} &= \frac{1}{2i}\left(S_{eff} - S_{eff}^*\right) \\ &= \frac{1}{i} L^3 T \frac{eE}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{1}{\sinh eEs} \exp\left(im^2 s\right)\end{aligned} \tag{3.76}$$

Pour calculer l'intégrale sur s nous choisissons la fonction complexe

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sinh eEz} \exp\left(im^2 z\right)$$

et nous utilisons le théorème des résidues

$$\int_C f(z)dz = 2i\pi \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \tag{3.77}$$

où

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) \,. \tag{3.78}$$

Nous fermons le contour d'intégration à l'infini par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur. Dans ce cas les poles sont donnés par

$$z_k = i\frac{k\pi}{eE} \tag{3.79}$$

et les résidues se calculent

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{(-1)^k}{eE\left(ik\frac{\pi}{eE}\right)^2} \exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right) \tag{3.80}$$

Nous avons finalement

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3T\frac{e^2E^2}{(2\pi)^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.81}$$

3.3.2 Particules de spin $\frac{1}{2}$

Pour les particules de Dirac nous avons

$$\mathcal{O}_D\mathcal{O}_D^\dagger = \left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right]\left[-\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right) + m\right] \tag{3.82}$$

$$= -\left(i\partial_\mu - eA_\mu(x)\right)^2 + m^2 - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.83}$$

Pour la jauge (3.62), le $\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ qui exprime l'intéraction spin champ se réduit à

$$\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = e\sigma_{0i}F^{0i} = e\sigma^{0i}\left(\partial_0A_i\right) = ie\gamma^0\gamma^i\left(\partial_0A_i\right) = -ie\vec{\alpha}.\vec{E} \tag{3.84}$$

Dans ce cas nous avons

$$\left(\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)^2 = \left(-ie\vec{\alpha}.\vec{E}\right)^2 = -e^2E^2 \tag{3.85}$$

ce qui montre que les valeurs propres de $\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ sont donc $a_\nu = i\nu eE$, avec $\nu = \pm 1$. Nous avons alors l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}_D\mathcal{O}_D^\dagger\chi = \lambda\chi \tag{3.86}$$

qui se réduit à

$$\left(-\mathcal{O}_{KG} + i\nu eE\right)\tilde{\chi} = \lambda\tilde{\chi} \tag{3.87}$$

Dans ce cas λ ce calcule à partir des valeurs propres de l'opérateur de Klein Gordon

$$\lambda = m^2 + k_x^2 + k_y^2 + i\left(2n+1\right)eE + i\nu eE. \tag{3.88}$$

Nous avons alors

$$S_{eff} = i\int \frac{dk_x dk_y dk_z}{\left(2\pi\right)^3}\sum_n \sum_{\nu=\pm 1}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\exp\left[-i\left(-m^2 - k_x^2 - k_y^2 - i\left(2n+1\right)eE + i\nu eE\right)s\right] \tag{3.89}$$

Ici, nous avons

$$\sum_{\nu=\pm 1}\exp\left(-\nu eEs\right) = 2\cosh\left(eEs\right). \tag{3.90}$$

Après avoir effectué l'intégration sur k_x, k_y et k_z et fait la somme sur n nous obtenons

$$S_{eff} = -L^3 T\frac{eE}{2\left(2\pi\right)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\coth\left(eEs\right)\exp\left(im^2 s\right) \tag{3.91}$$

et par conséquent

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = iL^3 T\frac{eE}{2\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{s}\coth\left(eEs\right)\exp\left(im^2 s\right). \tag{3.92}$$

Comme dans le cas de l'équation de Klein Gordon, nous utilisons le théorème de résidues pour obtenir l'expression finale

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 T\frac{2e^2E^2}{\left(2\pi\right)^3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\exp\left(-k\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.93}$$

3.4 Equivalence entre les deux méthodes

L'équivalence entre les deux méthodes peut se montrer comme suit :

Partons des résultats de la première méthode et considérons la probabilité $C_{\vec{k}}$ pour qu'il n'y ait pas de création de particules dans l'état $\vec{k}$. La probabilité de avoir crée seulement n paires dans l'état $\vec{k}$ est donc donnée par $C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n$. Suivant la normalisation des probabilité, nous avons

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n = 1, \tag{3.94}$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = \frac{1}{1+\left|c_2\right|^2} \tag{3.95}$$

La probabilité de transition vide-vide est donc

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\ 2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}\right) &= \prod_k C_{\vec{k}} \\
&= \prod_k \exp\left[-\ln\left(1+|c_2|^2\right)\right] \\
&= \exp\left[-\sum_k \ln\left(1+|c_2|^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \sum_k \ln\left(1+|c_2|^2\right). \tag{3.97}$$

Utilisons le developpement de Taylor

$$\ln\left(1+\sigma\right) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |c_2|^{2n} \tag{3.98}$$

et remplaçons la sommation sur k par l'intégrale $\int \frac{L^3 d^3k}{(2\pi)^3}$. Ici la mésure $\frac{L^3 d^3k}{(2\pi)^3}$ représente le nombre d'états dans l'intervale $\left[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}\right]$ dans le volume L^3. L'action effective de Schwinger devient

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = \int \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.99}$$

Nous avons alors

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n\pi\frac{m^2+k_\perp^2}{eE}\right). \tag{3.100}$$

En effectuant l'intégration sur k_x et k_y nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 \int dk_z \frac{eE}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.101}$$

En remplaçant l'intégrale $\int dk_z$ par eET nous obtenons

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff} = L^3 T \frac{e^2E^2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{3.102}$$

3.5 Inclusion d'un champ magnétique

Pour insérer un champ magnétique parallèle à l'axe (OZ), nous choisissons pour le potentiel A_μ la jauge suivante

$$A_\mu = (0, By, 0, Et) \tag{3.103}$$

ce qui conduit à l'équation de Klein Gordon suivante

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(-i\frac{\partial}{\partial x} + eBy\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(-i\frac{\partial}{\partial z} + eEt\right)^2 - m^2\right]\Phi\left(t, x, y, z\right) = 0 \tag{3.104}$$

Pour résoudre cette équation, nous décomposons $\Phi\left(t, x, y, z\right)$ comme

$$\Phi\left(t, x, y, z\right) = \exp\left[i(k_x x + k_z z)\right]\chi(t)F(y) \tag{3.105}$$

où les fonctions $F(y)$ et $\chi(t)$ obéissent respectivement aux équations suivantes

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (eBy + k_x)^2\right]F(y) = AF(y) \tag{3.106}$$

et

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 - A - m^2\right]\chi(t) = 0 \tag{3.107}$$

où A est une constante résultant de la séparation des variables. Il est clair qu'en effectuant le changement $y \to y - \frac{k_x}{eB}$, l'équation (3.106) devient similaire à l'équation d'onde associée à l'oscillateur harmonique,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + e^2B^2Y^2\right]F(Y) = AF(Y) \tag{3.108}$$

où la solution est donnée en termes de polynômes Hermit $\mathcal{H}_n\left(x\right)$

$$\chi(y) = \left(\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{eB}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{eB}{2}\left(y + \frac{k_x}{eB}\right)^2\right]\ \mathcal{H}_n\left[\sqrt{eB}\left(y + \frac{k_x}{eB}\right)\right] \tag{3.109}$$

avec les niveaux Landau

$$A = eB\left(2n + 1\right). \tag{3.110}$$

Pour la fonction $\chi(t)$ nous avons

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (k_z + eEt)^2 - eB\left(2n + 1\right) - m^2\right]\chi(t) = 0 \tag{3.111}$$

La dernière équation est similaire à (3.3) avec le changement $m_\perp^2 \to m^2 + eB\,(2n+1)$, ce qui nous donne la probabilité

$$P = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right)} \tag{3.112}$$

et la densité des particules crées

$$n = \exp\left(-\pi\frac{m^2+eB\,(2n+1)}{eE}\right). \tag{3.113}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons voulu étudier la création à partir du vide des particules scalaires sous l'action d'un champ électrique constant et homogène suivant deux méthodes :

1) La technique des transformations de Bogoliubov reliant les états "in" aux états "out". Dans ce cas, pour déterminer ces états "in" et "out" il nous a fallu résoudre l'équation relativiste d'Hamilton-Jacobi. La relation entre les états "in" et "out" nous a permis de calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particule crées. A travers les résultats de cette partie nous concluons que le processus de création des particules par un champ électrique ne dépend pas de la jauge choisie.

2) La méthode de l'action effective de Schwinger dans laquelle la probabilité de création des particules n'est rien d'autre que la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger.

Nous avons montré que les deux méthodes sont équivalentes.

En dernière étape nous avons considéré l'addition d'un champ magnétique.

Chapitre 4

Le formalisme de la géométrie non commutative

4.1 Introduction

L'introduction des coordonnées non commutatives peut conduire à des modifications importantes à la mécanique quantique. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la formulation et à l'interprétation de la théorie quantique non commutative. Nous commençons d'abord par la présentation de la quantification de Weyl et le produit de Moyal pour réduire le formalisme des opérateurs non commutatifs au formalisme ordinaire. Ensuite nous exposons les deux formulations de la théorie quantique non commutative. Il s'agit du décalage de Bopp et les cartes de de Seiberg-Witten. Notre intention est avant tout d'examiner la distinction entre ces formulations mathématiques et de discuter brièvement ensuite de l'incidence que cela peut avoir sur les interprétations conceptuelles.

4.2 L'opérateur de Weyl

Nous définissons un espace non commutatif comme décrit dans l'introduction en remplaçant les coordonnées locales x^μ de $\mathbb{R}^D$ par des opérateurs hermitiens $\hat{x}^\mu$ obéissant aux relations de commutation

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{4.1}$$

Les $\hat{x}^\mu$ génèrent alors une algèbre non commutative d'opérateurs. La quantification sous l'hypothèse d'une géométrie non commutative peut être étendue des coordonnées elles-mêmes à l'algèbre des fonctions $f(x)$ en utilisant la quantification de Weyl. La quantification de Weyl fournit une correspondance entre l'algèbre des champs sur $\mathbb{R}^D$ et cet algèbre d'opérateurs. Considérons l'algèbre commutative des fonctions définies sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$ de dimension D, avec un produit défini par la multiplication habituelle des fonctions. Ce que l'on recherche est une application W qui assigne à chaque élément $f(x)$ dans l'algèbre des fonctions $\mathcal{A}$ un opérateur hermitien $\hat{\mathcal{W}}[f]$ dans l'algèbre des opérateurs $\hat{\mathcal{A}}$. On fait cela en choisissant une base appropriée pour les éléments de chaque algèbre et ensuite les identifie les uns avec les autres. Le choix le plus courant consiste à utiliser une décomposition de Fourier de la fonction $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x\, e^{-ik_\nu x^\nu} f(x)\,, \tag{4.2}$$

puis faire la transformation inverse avec les opérateurs non commutatifs $\hat{x}^\nu$

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}\,. \tag{4.3}$$

Un cas particulièrs de la quantification de Weyl est la fonction exponentièlle,

$$\hat{\mathcal{W}}[\, e^{\,ik_\mu x^\mu}] = \, e^{\,ik_\mu \hat{x}^\mu}.$$

La condition de Schwartz implique également que toute fonction $f(x)$ peut être décrite par sa transformée de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x \;\; e^{\,-ik_\mu x^\mu} \, f(x) \;, \tag{4.4}$$

avec $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ quand $f(x)$ a une valeur réelle. Si $f\;(x)$ est une fonction réelle, l'opérateur de Weyl est hermitien. En fait, en faisant le changement $k \to -k$, dans la conjuguée hermitiènne de (4.3)

$$\hat{\mathcal{W}}^+ [f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{f^*} \;\, (k) \;\; e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu}, \tag{4.5}$$

nous obtenons

$$\hat{\mathcal{W}}^+ [f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \widetilde{f} \;\, (-k)\, e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu}. \tag{4.6}$$

En posant $k' = -k$, nous obtenons enfin

$$\hat{\mathcal{W}}^+ [f] = \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \widetilde{f} \;\, (k') \;\; e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} = \hat{\mathcal{W}} \;\; [f]\,. \tag{4.7}$$

On peut écrire (4.3) en termes d'une application $\hat{\Delta}(x)$ entre opérateurs et champs en utilisant (4.2) pour obtenir

$$\hat{\mathcal{W}}\ [f] = \int d^D x\ f(x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{ik_\nu \hat{x}^\nu}$$

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x\ f(x)\, \hat{\Delta}(x) \tag{4.8}$$

où

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} e^{ik_\nu \hat{x}^\nu}. \tag{4.9}$$

L'opérateur (4.9) est hermitien, $\hat{\Delta}(x)^+ = \hat{\Delta}(x)$, et il décrit une base mixte pour les opérateurs et les champs sur l'espace-temps. De cette façon, nous pouvons interpréter le champ $f(x)$ comme la représentation de l'espace de coordonnées de l'opérateur de Weyl $\hat{\mathcal{W}}[f]$. Notez que dans le cas commutatif $\theta^{\mu\nu} = 0$, l'application (4.9) se réduit trivialement à une fonction delta $\delta^D(\hat{x} - x)$ et $\hat{\mathcal{W}}[f]|_{\theta=0} = f(\hat{x})$. Mais généralement, d'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, pour $\theta^{\mu\nu} \neq 0$, cette opérateur n'est pas trivial.

4.3 Le produit "$\star$" de Moyal

Le produit star est un moyen particulièrement utile pour gérer les géométries non commutatives, car on peut continuer à travailler avec des fonctions ordinaires, il suffit de garder à l'esprit qu'elles obéissent à une règle de produit modifiée dans l'algèbre. Avec cela, on peut construire des théories quantiques non commutatives des champs en remplaçant les produits normaux des champs dans le Lagrangien par les produits star.

Nous pouvons étendre cet isomorphisme entre les espaces vectoriels à un isomorphisme entre les algèbe en construisant un nouveau produit, noté $\star$, qui respecte l'application W,

$$W(f \star g)(x) = W(f) \cdot W(g)\,, \tag{4.10}$$

pour $f, g \in \mathcal{A}$ et $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}$. A partir des équations (4.3) et (4.10) nous obtenons

$$W(f \star g) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}k_\mu \hat{x}^\mu}\, e^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)\,. \tag{4.11}$$

En utilisant, la formule de Campbell - Baker - Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]-\frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]]+\ldots} \tag{4.12}$$

nous pouvons écrire

$$e^{\mathrm{i}k_\nu \hat{x}^\nu} e^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu} = e^{\mathrm{i}(k_\nu + p_\nu)\hat{x}^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2} k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa}, \tag{4.13}$$

et, ainsi,

$$W(f \star g) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}(k_\mu + p_\mu)\hat{x}^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p)\,. \tag{4.14}$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2} k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa}\,. \tag{4.15}$$

L'opérateur de Weyl correspondant est

$$W(F) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}q_\mu \hat{x}^\mu}\, \tilde{F}(q) \tag{4.16}$$

où

$$\tilde{F}(q) = \int d^D x\, e^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} F(x)\,, \tag{4.17}$$

Nous avons alors

$$W(F) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2} k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} \int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D} \int d^D x\, e^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa}\, e^{\mathrm{i}q_\mu \hat{x}^\mu} \tag{4.18}$$

Il s'en suit que

$$W(F) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{\mathrm{i}(k_\mu + p_\mu)\hat{x}^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} k_\nu \theta^{\nu\kappa} p_\kappa} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) \tag{4.19}$$

L'équation (4.19) comparée à l'équation (4.14)

$$f(x) \star g(x) = F(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\frac{\mathrm{i}}{2} k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa} \tag{4.20}$$

Si nous réécrivons le facteur dépendant de θ en un opérateur différentiel agissant sur la base de l'onde plane, nous pouvons aussi l'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\mathrm{i}}{2} k_\kappa \theta^{\kappa\nu} p_\nu} e^{-\mathrm{i}(k_\kappa + p_\kappa)x^\kappa} &= \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2} \theta^{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)^n e^{-\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} e^{-\mathrm{i}p_\kappa y^\kappa} \Big|_{x \to y} \\ &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2} \theta^{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) e^{-\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} e^{-\mathrm{i}p_\kappa y^\kappa} \Big|_{x \to y} \end{aligned} \tag{4.21}$$

et par conséquent,

$$f(x) \star g(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2} \theta^{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, \tilde{f}(k)\tilde{g}(p) e^{-\mathrm{i}(k_\kappa x^\kappa + p_\kappa y^\kappa)} \Big|_{x \to y} \tag{4.22}$$

Nous obtenons alors le produit

$$f\left(x\right)\star g\left(x\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)f\left(x\right)g\left(y\right)\Big|_{x\rightarrow y} \tag{4.23}$$

qui est connu sous le nom de produit Moyal [41]. Le produit star (4.23) est associatif mais non commutatif. Pour $\theta=0$, il se réduit au produit ordinaire des fonctions.

Il est à noter que le commutateur Moyal avec les coordonnées locales x^i peut être utilisé pour générer des dérivées comme

$$x^i\star f(x)-f(x)\star x^i=i\,\theta^{ij}\,\partial_j f(x)\ .$$

En général, le commutateur de Moyal de deux fonctions peut être représenté sous une forme compacte en utilisant un opérateur bi-différentièl comme dans (4.23),

$$f(x)\star g(x)-g(x)\star f(x)=2i\,f(x)\ \sin\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_i}\,\theta^{ij}\,\overrightarrow{\partial_j}\right)\ g(x)\ ,$$

tandis que l'anti-commutateur avec $\star$ peut être écrit comme

$$f(x)\star g(x)+g(x)\star f(x)=2\,f(x)\ \cos\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial_i}\,\theta^{ij}\,\overrightarrow{\partial_j}\right)\ g(x)\ .$$

Une extension utile de la formule (4.23) est

$$f_1(x_1)\star\cdots\star f_n(x_n)=\prod_{a<b}\exp\left(\frac{i}{2}\,\theta^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_a^i}\,\frac{\partial}{\partial x_b^j}\right)\ f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\ .$$

Dans le cas présent, la technique décrite dans cette section s'est avérée être une méthode inestimable pour l'étude de la théorie des champs non commutatifs. Nous notons, cependant, que la construction générale présentée ci-dessus ne fait aucune référence à une représentation particulière de l'algèbre d'opérateurs de Weyl.

La méthode de quantification ci-dessus peut être généralisée à des situations plus compliquées où les commutateurs $[\hat{x}^i,\hat{x}^j]$ ne sont pas simplement des nombres complexes. La situation générique est celle où les espaces de moment coordonnés et conjugués sont non commutatifs d'une manière corrélée. Alors les commutateurs $[\hat{x}^i,\hat{x}^j]$, $[\hat{x}^i,\hat{p}_j]$ et $[\hat{p}_i,\hat{p}_j]$ sont des fonctions de $\hat{x}^i$ et $\hat{p}_i$, c'était le type d'espace non commutatif qui était considéré à l'origine dans la construction de Snyder.

4.4 Le décalage de Bopp

Comme on le sait, en mécanique quantique ordinaire nous pouvons utiliser pour les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ la représentation de coordonnées donnée par la correspondance habituelle

$$\begin{aligned} \hat{x} &\rightarrow x \\ \hat{p} &\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\partial_x \end{aligned}$$

ou bien la représentation des impulsions, où les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{x} &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial p} = i\hbar\partial_p \\ \hat{p} &\rightarrow p \end{aligned}$$

Le physicien Fritz Bopp fut le premier à considérer, pour étudier certaines implications statistiques de la quantification, des opérateurs pseudo-différentiels obtenus à partir d'une représentation mixte basée sur les règles de quantification [42]

$$\hat{x} \rightarrow x + \frac{i\hbar}{2}\partial_p \tag{4.24}$$

$$\hat{p} \rightarrow p - \frac{i\hbar}{2}\partial_x. \tag{4.25}$$

Cette procédure, dite décalage de Bopp, est en lien direct avec un produit $\star$ défini sur l'espace des phase comme une déformation associative du produit ordinaire. Le produit $\star$ a été défini par Groenewold [33] comme suit

$$H(x,p) \star W(x,p) \equiv H(x,p)e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_x\overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p\overrightarrow{\partial}_x)}W(x,p). \tag{4.26}$$

Le produit $\star$ induit le décalage de Bopp [43] dans le sens où il peut être évalué par une translation (un décalage) de l'arguments de la première fonction.

$$H(x,p) * W(x,p) = H(x + \frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{p}}\ ,\ p - \frac{i\hbar}{2}\partial_{\vec{x}})W(x,p). \tag{4.27}$$

Cette approche peut être très utile en géométrie non commutative sachant que les opérateurs $\hat{x}_\mu$ et $\hat{p}_\mu$ qui vérifient la relation de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad , \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0 \quad , \quad [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\delta_{\mu\nu} \tag{4.28}$$

peuvent être représentés par

$$\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{\theta_{\mu\nu}}{2} p_\nu \tag{4.29}$$

et

$$\hat{p}_\mu = p_\mu. \tag{4.30}$$

Dans ce cas, nous nous attendons à ce que le produit Moyal $\star$ soit écrit comme un produit ordinaire avec un décalage de l'argument de la première fonction

$$f(x) \star g(x) = f\left(x^\mu - \frac{1}{2}\tilde{p}^\mu\right) \star g(x) \tag{4.31}$$

avec

$$\tilde{p}^\mu = \theta^{\mu\nu} p_\nu. \tag{4.32}$$

Pour démontrer cette propriété, partons de la définition du produit de Moyal et faisons le développement de l'exponentielle

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)^n f(x)g(y)\Big|_{x\to y}, \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \left(\theta^{\kappa_1\nu_1}\theta^{\kappa_2\nu_2}....\theta^{\kappa_n\nu_n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_1}}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_2}}...\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_n}} f(x)\right) \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}}...\frac{\partial}{\partial x^{\nu_n}} g(x)\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Maintenant nous introduisons l'opérateur

$$\hat{p}_{\kappa_i} = -i\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_i}}. \tag{4.34}$$

et la propriété

$$\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_i}} g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\, i k_{\kappa_i} e^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu}\, \tilde{g}(k) \tag{4.35}$$

pour écrire

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\nu x^\nu} \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{2}\right)^n \left(\theta^{\kappa_1\nu_1}\theta^{\kappa_2\nu_2}....\theta^{\kappa_n\nu_n}\right)\left(\hat{p}_{\kappa_1}\hat{p}_{\kappa_2}...\hat{p}_{\kappa_n} f(x)\right) \\ &\quad k_{\nu 1} k_{\nu_2}...k_{\nu_n}\tilde{g}(k). \end{aligned} \tag{4.36}$$

La dernière équation peut se mettre sous la forme

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{2}\right)^n \left(\theta^{\kappa\nu} k_\nu \hat{p}_\kappa\right)^n f(x)\tilde{g}(k), \tag{4.37}$$

où, maintenant, la somme sur n peut être effectuer

$$\sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i}{2}\right)^n (k_\kappa \theta^{\kappa\nu}\hat{p}_\nu)^n = \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu}k_\nu\hat{p}_\kappa\right) \tag{4.38}$$

Il vient alors

$$f(x)\star g(x) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa} \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu}k_\nu\hat{p}_\kappa\right) f(x)\tilde{g}(k). \tag{4.39}$$

Sachant que

$$\exp\left(\frac{-i}{2}\theta^{\kappa\nu}k_\nu\hat{p}_\kappa\right) f(x) = f(x^\kappa - \frac{i}{2}\theta^{\kappa\nu}k_\nu) \tag{4.40}$$

et que

$$\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} f(x^\kappa - \frac{i}{2}\theta^{\kappa\nu}k_\nu) e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa}\tilde{g}(k) = f(x - \frac{1}{2}\tilde{p}) \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4} e^{\mathrm{i}k_\kappa x^\kappa}\tilde{g}(k) \tag{4.41}$$

nous obtenons enfin

$$f(x)\star g(x) = f(x - \frac{i}{2}\tilde{p})g(x). \tag{4.42}$$

Cette procédure est beaucoup plus utile en mécanique quantique. Elle fourni une manière simple, , quoique approximative, suivant laquelle nous pouvons avoir un aperçu sur les effets de la non commutativité sur les phénomènes quantiques. Cependant, ceci n'est pas sans difficulté car, comme le potentiel décalé implique en principe des puissances arbitraires de l'impulsion, nous aurons un grand nombre arbitraire de dérivées dans l'équation de Schrödinger. C'est ainsi que les physiciens développent le potentiel décalé à quelques ordres en θ. C'est encore une autre approximation.

4.5 Transformations de Seiberg-Witten

Les cartes de Seiberg-Witten ont été découvertes pour la première fois par Nathan Seiberg et Edward Witten dans le contexte de la théorie des cordes et la géométrie non commutative. Ils ont considéré que la théorie de jauge ordinaire devrait être équivalente à une théorie de champ de Yang-Mills non commutative. Ils ont introduit une correspondance entre une théorie de jauge non commutative et une théorie de jauge ordinaire. De plus, ils ont montré que la carte de Seiberg-Witten pouvait être interprétée comme un développement du champ de jauge non commutative en θ.

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement la méthode de Seiberg-Witten, les détails étant donnés dans [44]. Prenons un espace plat Minkowski, sur lequel les coordonnées sont considérées comme des opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert, satisfaisant l'algèbre (4.28)

Partons de la transformation de jauge ordinaire

$$\begin{aligned}\delta_\lambda A_\mu &= \partial_\mu \lambda + ie\left[\lambda, A^\mu\right] \quad (4.43)\\ \delta_\lambda F_{\mu\nu} &= ie\left[\lambda, F_{\mu\nu}\right] \quad (4.44)\end{aligned}$$

où A_μ est le champ de jauge, λ est le champ de la transformation locale et

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie\left[A_\mu, A_\nu\right] \quad (4.45)$$

Pour construire une théorie de jauge non-commutative nous remplaçons les champs ordinaires (A_ν, λ, $F_{\mu\nu}$...) par des champs non commutatifs noté avec chapeau ($\hat{A}_\nu$, $\hat{\lambda}$, $\hat{F}_{\mu\nu}$...) et les commutateurs habituels par les commutateurs de Moyal. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i\left[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu\right]_\star \quad (4.46)\\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\lambda} + i\left[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu\right]_\star \quad (4.47)\\ \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{F}_{\mu\nu} &= i\left[\hat{\lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}\right]_\star \quad (4.48)\end{aligned}$$

Au premier ordre en θ, le commutateur de Moyal ce développe comme suit

$$\begin{aligned}[f,g]_\star &= f \star g - g \star f\\ &= fg + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho f\ \partial_\delta g - gf - \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\delta g\ \partial_\rho f + O\left(\theta^2\right)\\ &= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\partial_\rho g\ \partial_\delta f + O\left(\theta^2\right)\\ &= fg - gf + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left[\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \partial_\rho g\ \partial_\delta f\right] + O\left(\theta^2\right)\\ &= [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left[\partial_\rho f\ \partial_\delta g + \partial_\delta g\ \partial_\rho f\right] + O\left(\theta^2\right)\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$[f,g]_\star = [f,g] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left\{\partial_\rho f, \partial_\delta g\right\} + O\left(\theta^2\right). \quad (4.49)$$

Dans le cas abélien ($[f,g]=0$), nous trouvons

$$[f,g]_\star = \frac{i}{2}\theta^{\rho\delta}\left\{\partial_\rho f, \partial_\delta g\right\} + O\left(\theta^2\right) \quad (4.50)$$

L'idée de base des cartes de Seiberg Witten est que la correspondance entre les champs non commutatifs et leurs équivalents ordinaires s'obtient à partir de la relation d'équivalence de jauge

$$\hat{A}_\mu (A, \theta) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu (A + \delta_\lambda A, \theta), \tag{4.51}$$

en faisant les développements en puissances de θ

$$\hat{\lambda} = \lambda + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + ... \tag{4.52}$$

et

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu^{(1)} + A_\mu^{(2)} + ... \tag{4.53}$$

Le problème est que nous devons résoudre une équation (l'équation (4.51)) avec deux inconus $\hat{\lambda}$ et $\hat{A}_\mu$. Pour contourner ce problème une autre condition (équation) doit être ajouter. Cette condition n'est rien d'autre que la généralisation de la condition de consistence de jauge au cas non commutatif

$$i\delta_\alpha \hat{\lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\lambda}_\alpha - \left[\hat{\lambda}_\alpha, \hat{\lambda}_\beta\right]_\star = i\hat{\lambda}_{-i[\alpha,\beta]} \tag{4.54}$$

La dernière équation nous donne $\hat{\lambda}$ comme une fonction de λ. Pour trouver $\hat{A}_\mu$ nous écrivons (4.51) sous la forme

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu (A + \delta_\lambda A; \theta) - \hat{A}_\mu (A, \theta) = \delta_\lambda \hat{A}_\mu$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= -\frac{1}{4}\theta^{\mu\nu} \{A_\mu, \partial_\nu \lambda\} \\ A_\mu^{(1)} &= -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\nu} \{A_\kappa, \partial_\nu A_\mu + F_{\nu\mu}\} \end{aligned}$$

Si nous développons $\hat{F}_{\mu\nu}$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)} + ..., \tag{4.55}$$

nous obtenons à l'ordre 1 en θ

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\rho} \left(\{A_\kappa, \partial_\rho F_{\mu\nu} + D_\rho F_{\mu\nu}\} - 2\{F_{\mu\kappa}, F_{\nu\rho}\}\right). \tag{4.56}$$

Il est à noter que les champs de matière se transforme dans le cas ordinaire suivant la loi

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \phi &= i\lambda\phi \\ \delta_\lambda \psi &= i\lambda\psi \\ \delta_\lambda \bar{\psi} &= -i\lambda\bar{\psi} \end{aligned}$$

qui se généralise au cas non commutatif comme suit dans

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\phi} &= i\hat{\lambda}\star\hat{\phi} \\
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\psi} &= i\hat{\lambda}\star\hat{\psi} \\
\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\widehat{\overline{\psi}} &= -i\hat{\lambda}\star\widehat{\overline{\psi}}.
\end{aligned}$$

avec les relations d'équivalence de jauge $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\phi} = \delta_{\lambda}\hat{\phi}$, $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{\psi} = \delta_{\lambda}\hat{\psi}$ et $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\widehat{\overline{\psi}} = \delta_{\lambda}\widehat{\overline{\psi}}$.

Actuellement, les cartes de Seiberg Witten représentent la technique la plus appropriée pour étudier les phénomènes physiques dans le cadre de la géométrie non commutative. En prenant en compte les corrections des champs de jauge aux quels sont soumises les particules qui constituent la matière, ces cartes donnent la manière exacte dont la non-commutativité de l'espace-temps modifie la physique.

4.6 Conclusion

La géométrie non commutative représente une extension naturelle de la mécanique quantique habituelle, dans laquelle on considère également des commutateurs non-nuls entre les coordonnées. Dans ce cadre, plusieurs méthodes de quantification ont été proposées. Dans ce chapitre nous avons essayé d'exposer les méthodes les plus utilisées par les physiciens. Il s'agit de la méthode du décalage de Bopp, la méthode du produit de Moyal et la carte de Seiberg Witten. Les trois méthodes consistent à relier l'algèbre non commutative à l'algèbre standard par une classe de transformations linéaires. Nous avons vu que la méthode de décalage de Bopp est équivalente à la méthode du produit de Moyal et que la carte de Seiberg Witten est une version très avancée qui préserve l'invariance de jauge.

Le problème avec ces formulations est que les observables non commutatives écrites en termes d'observables commutatives ne présentent pas une structure mathématique simple, ce qui tend à obscurcir la signification physique.

Chapitre 5

Création des particules dans un espace non commutatif : Le décalage de Bopp

5.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'étudier la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif en considérant la méthode canonique basées sur les transformations de Bogoliubov reliant les états "in" et "out". Cette méthode consiste d'abord à déterminer les états "in" et "out" solutions à l'équation de Klein Gordon (ou de Dirac pour les particules de spin $\frac{1}{2}$) et d'effectuer ensuite la transformation de Bogoliubov pour extraire de ses coefficients la probabilité de création des particules et le nombre des particules crées. Pour écrire la version non commutative de l'équation (d'onde), nous utilisons le décalage de Bopp.

Comme il a été mentionné dans le premier chapitre le problème de la création de particules de Dirac est déjà étudié dans la référence [16]. Nous allons donc reproduire ses résultat afin de les confirmer.

Avant de considérer le problème de la création des particules nous considérons d'abord l'équation de Klein Gordon en présence d'un champ magnétique résultante de l'application du décalage de Bopp. Ce problème peut se réduire en mécanique quantique ordinaire à l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique. Ensuite, nous nous intéressons à la création des particules scalaires en présence d'un champ électromagnétique. En dernière étape, nous considérons l'équation de Dirac non commutative pour étudier la création des particules de spin $\frac{1}{2}$.

5.2 Décalage de Bopp pour l'équation de Klein Gordon

Comme il a été mensionné, dans le chapitre précédent, la représentation des opérateurs $\hat{x}_\mu$, avec $\mu = 0, 1, 2, 3$, qui vérifient la relation de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \tag{5.1}$$

où θ_{ij} est une matrice anti-symétrique, peut être réalisé à partir des opérateurs ordinaires via le décalage de Bopp. En fait si nous écrivons les opérateurs $\hat{x}_\mu$ sous la forme

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + f_\mu{}^{\nu}\hat{p}_\nu \tag{5.2}$$

où x_μ et $\hat{p}_\nu$ représentent, respectivement, la coordonnée et l'impulsion ordinaires. Il vient alors

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] &= \left[x_\mu + f_\mu{}^{\rho}\hat{p}_\rho, x_\nu + f_\nu{}^{\sigma}\hat{p}_\sigma\right] \\
&= f_\mu{}^{\rho}\left[\hat{p}_\rho, x_\nu\right] + f_\nu{}^{\sigma}\left[x_\mu, \hat{p}_\sigma\right] \\
&= -if_\mu{}^{\rho}\delta_{\rho\nu} + if_\nu{}^{\sigma}\delta_{\mu\sigma} \\
&= -if_{\mu\nu} + if_{\nu\mu}
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat comparé à l'équation (5.1), nous donne l'équation

$$-f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu} = \theta_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

dont la solution est

$$f_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\theta_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

Nous avons alors

$$\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{1}{2}\theta_\mu{}^{\nu}\hat{p}_\nu \tag{5.5}$$

Considérons maintenant l'équation de Klein Gordon non commutative en présence d'un champ magnétique

$$\left[\left(\hat{p}_\mu - eA_\mu\left(\hat{x}\right)\right)^2 - m^2\right]\psi = 0. \tag{5.6}$$

Nous choisissons pour le champ magnétique la jauge

$$A^\mu = (0, -By, 0, 0)$$

avec $y \equiv x^2$. Nous supposons aussi que les paramètres θ non nuls sont $\theta_{12} = -\theta_{21} = \theta$. Dans ce cas l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\hat{p}_0^2 - (\hat{p}_1 - eB\hat{x}_2)^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - m^2\right]\psi = 0 \tag{5.7}$$

ou, encore

$$\left[\hat{p}_0^2 - \left(\hat{p}_1 - eBy + \frac{1}{2}eB\theta\hat{p}_1\right)^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2 - m^2\right]\psi = 0 \tag{5.8}$$

Pour résoudre cette équation, nous écrivons la solution sous la forme

$$\psi = \exp\left[-i\left(Et - p_x x - p_z z\right)\right]\varphi\left(y\right). \tag{5.9}$$

Il vient alors

$$\left\{E^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left[\left(1 + \frac{eB\theta}{2}\right)p_x - eBy\right]^2 - p_z^2 - m^2\right\}\varphi\left(y\right) = 0. \tag{5.10}$$

En faisant le changement de variable $y \rightarrow Y$ avec

$$Y = y - \frac{p_x}{eB}\left(1 + \frac{eB\theta}{2}\right)$$

nous obtenons l'équation

$$\left[E^2 + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - e^2B^2Y^2 - p_z^2 - m^2\right]\tilde{\varphi}\left(Y\right) = 0$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + e^2B^2Y^2 - \mathcal{E}\right]\tilde{\varphi}\left(Y\right) = 0$$

avec $\varphi\left(y\right) \equiv \tilde{\varphi}\left(Y\right)$. Cette équation se ressemble à l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique de masse $m = \frac{1}{2}$ et de pulsation $\omega = 2eB$. l'énergie est donnée alors par

$$\mathcal{E} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega = \left(2n + 1\right)eB \tag{5.11}$$

ce qui implique

$$E^2 = \left(2n + 1\right)eB + p_z^2 + m^2. \tag{5.12}$$

Notons ici, que le spectre obtenue est le même que celui du cas commutatif.

5.3 Création des particule scalaires

Considérons maintenant un champ électromagnétique décrit par la jauge

$$A_\mu = (0,\ 0,\ Bx_1, -Et) \tag{5.13}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\Pi^2 - m^2\right]\Psi = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= \hat{p}_0 \\
\Pi_1 &= \hat{p}_1 \\
\Pi_2 &= \hat{p}_2 - eB\left(x_1 - \frac{1}{2}\theta_{1j}p_j\right) \\
\Pi_3 &= \hat{p}_3 + eEt.
\end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation de Kein Gordon, nous posons

$$\Psi = N\exp\left(ip_2x_2 + ip_3x_3\right)F\left(x_1, t\right)$$

La fonction $F\left(x_1, t\right)$ vérifient alors l'équation

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{x_1}^2 - \left(p_2 + eBx_1 - \frac{1}{2}eB\theta_{1j}p_j\right)^2 - \left(p_3 - eEt\right)^2 - m^2\right]F\left(x_1, t\right) = 0.$$

Pour simplifier la dernière équation nous faisons certains changements. D'abord nous posons

$$P_2 = -p_2 + \frac{1}{2}eB\theta_{1j}p_j$$

Ensuite nous faisons le changement $t \rightarrow \tau$ avec

$$\sqrt{eE}\tau = -p_3 + eEt.$$

Il vient alors

$$dt = \frac{1}{\sqrt{eE}}d\tau \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{eE}\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Pour la dérivée second, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\sqrt{eE}\frac{\partial}{\partial \tau}\right] = \sqrt{eE}^2\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Maintenant nous faisons le changement

$$\sqrt{eB}\rho = P_2 - eBx_1.$$

Nous avons alors

$$dx_1 = -\frac{1}{\sqrt{eB}}d\rho \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} = -\sqrt{eB}\frac{\partial}{\partial \rho}$$

et par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\sqrt{eB}\frac{\partial}{\partial \rho}\right] = eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}.$$

Enfin nous obtenons l'équation

$$\left[-eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - eE\tau^2 + eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - eB\rho^2 - m^2\right] F(\rho, \tau) = 0$$

qui admet la séparation de variables suivante

$$F(\rho, \tau) = \chi(\rho)\,\Phi(\tau).$$

Il vient que

$$\frac{1}{\Phi(\tau)}\left[eE\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + eE\tau^2 + m^2\right]\Phi(\tau) = \frac{1}{\chi(\rho)}\left[eB\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - eB\rho^2\right]\chi(\rho),$$

ce qui nous donne les deux équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \tau^2 + \frac{m^2}{eE}\right]\Phi(\tau) = \frac{K}{eE}\Phi(\tau) \tag{5.14}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho^2\right]\chi(\rho) = -\frac{K}{eB}\chi(\rho) \tag{5.15}$$

où K est la constante de séparation des variables.

La deuxième équation est similaire à d'un oscillateur harmonique non relativiste ayant la masse $M = \frac{1}{2}$ est la frequence $\omega = 2$. Dans ce cas la constante K se détermine facilement

$$-\frac{K}{eB} = \left(n + \frac{1}{2}\right)2 \Rightarrow K = -(2n+1)\,eB$$

L'équation (5.14) devient alors

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \tau^2 + \lambda\right]\Phi(\tau) = 0$$

avec

$$\lambda = \frac{m^2 + eB(2n+1)}{eE}$$

Suivant [39], l'équation admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonction de Weber

$$\begin{aligned}\Phi_1^+ &= D_\nu\left(-\left(1-i\right)\tau\right)\\ \Phi_1^- &= D_{\nu^*}\left(-\left(1+i\right)\tau\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi_2^+ &= D_{\nu^*}\left(\left(1+i\right)\tau\right)\\ \Phi_2^- &= D_\nu\left(\left(1-i\right)\tau\right)\end{aligned}$$

avec

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1+i\lambda\right)$$

Pour obtenir la probabilité nous utilisons la transformation

$$D_\gamma\left(\xi\right) = \exp\left\{i\pi\gamma\right\} D_\gamma\left(-\xi\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\gamma\right)}\exp\left\{\frac{i\pi\left(\gamma+1\right)}{2}\right\} D_{-\gamma-1}\left(-i\xi\right)$$

qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Phi_1^+ &= \beta\Phi_2^- + \zeta\Phi_2^+\\ \Phi_2^+ &= \beta^*\Phi_1^- + \zeta^*\Phi_1^+\end{aligned}$$

où β et ζ sont les coefficients de Bogoliubov donnés par

$$\beta = \exp\left\{i\pi\nu\right\}$$

et

$$\zeta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\nu\right)}\exp\left\{\frac{i\pi\left(\nu+1\right)}{2}\right\}$$

avec la condition

$$\left|\zeta\right|^2 - \left|\beta\right|^2 = 1.$$

La densité des particules crées est alors

$$n = \left|\beta\right|^2 = \left|\exp\frac{i\pi}{2}\left(1+i\lambda_\pm\right)\right|^2 = \exp\left[-\pi\frac{m^2+eB\left(2n+1\right)}{eE}\right]$$

La probabilité de production d'une paire est donnée par

$$P_{cr} = \left|\frac{\beta}{\zeta}\right|^2 = \frac{\left|\beta\right|^2}{1+\left|\beta\right|^2} = \frac{\exp\left[-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right]}{1+\exp\left[-\pi\frac{m^2+eB(2n+1)}{eE}\right]}$$

5.4 Equation de Dirac et création des particules

5.4.1 Décalage de Bopp pour l'équation de Dirac

L'équation de Dirac non-commutative peut s'écrire

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi - e\gamma^{\mu}A_{\mu} * \psi = 0 \tag{5.16}$$

Compte tenu de l'équivalence entre le produit star et le décalage de Bopp, nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m - e\gamma^{\mu}A_{\mu}\left(x - \frac{1}{2}\hat{p}\right)\right]\psi = 0 \tag{5.17}$$

Dans le cas où le champ électromagnétique est donné par l'équation (5.13) peut s'écrire comme

$$(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)\,\psi = 0 \tag{5.18}$$

où les opérateurs sont comme définis dans la section précédente

$$\Pi_{\mu} = i\partial_{\mu} - eA_{\mu} \qquad \mu \neq 2 \tag{5.19}$$

$$\Pi_2 = i\partial_2 - eBx_1 - \frac{ie}{2}B\theta_{1j}\partial_j \tag{5.20}$$

5.4.2 La forme quadratique de l'équation de Dirac

Pour une solution de l'équation de Dirac ψ,

$$(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)\,\psi = 0, \tag{5.21}$$

nous posons

$$\psi = (\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} + m)\,\Psi \tag{5.22}$$

où Ψ est un spineur à déterminer. En substituons (5.22) dans (5.21), nous pouvons obtenir la forme quadratique de l'équation de Dirac. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}(\gamma^{\mu}\Pi_{\mu} - m)(\gamma^{\nu}\Pi_{\nu} + m)\,\Psi &= 0\\ \left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Pi_{\mu}\Pi_{\nu} - m^2\right)\Psi &= 0\end{aligned} \tag{5.23}$$

Comme

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],$$

l'équation quadratique devient

$$\left[\Pi^\mu\Pi_\mu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu - m^2\right]\Psi = 0 \tag{5.24}$$

Maintenant, nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu &= \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,[\Pi_\mu,\Pi_\nu] \\ &= \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,[\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu] \end{aligned} \tag{5.25}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,\Pi_\mu\Pi_\nu = -\frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,F_{\mu\nu}. \tag{5.26}$$

L'équation quadratique de Dirac prend alors la form

$$\left[\Pi^2 - m^2 - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\,F_{\mu\nu}\right]\Psi = 0 \tag{5.27}$$

qui peut s'écrire aussi comme

$$\left[\Pi^2 + S - m^2\right]\Psi = 0 \tag{5.28}$$

avec

$$S = -\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}. \tag{5.29}$$

Cherchons d'abord les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice S

$$S\Gamma_i = s_i\Gamma_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \tag{5.30}$$

Pour la jauge choisie, le tenseur $F_{\mu\nu}$ est donné par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{ie}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}F_{\mu\nu} && (5.32)\\
&= -\frac{ie}{2}\left[\gamma^{0}\gamma^{i}F_{0i}+\gamma^{i}\gamma^{0}F_{i0}+\gamma^{i}\gamma^{j}F_{ij}\right]\\
&= -\frac{ie}{2}\left[2\gamma^{0}\gamma^{i}F_{0i}+\gamma^{i}\gamma^{j}F_{ij}\right] && (5.33)\\
&= -\frac{ie}{2}\left[2\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}+2i\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right] && (5.34)\\
&= e\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right) && (5.35)
\end{aligned}$$

Calculons maintenons S^2

$$\begin{aligned}
S^2 &= \left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right) && (5.36)\\
&= \left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)^2-\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)^2-i\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)-i\left(\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{E}\right)\left(\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}\right)\\
&= B^2-E^2-i\left[\alpha_i\Sigma_j+\Sigma_j\alpha_i\right]E_iB_j\\
&= \begin{pmatrix} E^2-B^2 & 2ie^2\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\\ 2ie^2\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B} & E^2-B^2\end{pmatrix} && (5.37)\\
&= B^2-E^2-2i\gamma^5\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B} && (5.38)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de S^2 sont données alor par l'équation

$$\det\left(S^2-\lambda\right)=\left(e^2E^2-e^2B^2+\lambda\right)^2+4e^4\left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\right)^2=0 \tag{5.39}$$

qui donne la solution

$$\begin{aligned}
\lambda &= e^2\left(-E^2+B^2\pm 2i\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{B}\right) && (5.40)\\
&= e^2\left(-E^2+B^2\pm 2iEB\right) && (5.41)\\
\lambda &= e^2\left(-iE\pm B\right)^2 && (5.42)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de S sont alors

$$s_{\pm}=\pm eB-ieE. \tag{5.43}$$

Le spineur Ψ peut être écrit sous la forme

$$\Psi_{\pm}=Z_{\pm}\left(x\right)\Gamma_{\pm} \tag{5.44}$$

où $\Gamma_{\pm}$ sont les vecteurs propres de S. Les fonctions $Z_{\pm}$ vérifient alors l'équation

$$\left[\Pi^2 + s_{\pm} - m^2\right] Z_{\pm} = 0. \tag{5.45}$$

Comme dans le cas de Klein Gordon, nous écrivons pour résoudre la dernière équation

$$Z_{\pm} = N \exp\left(ip_2 x_2 + ip_3 x_3\right) F_{\pm}\left(x_1, t\right). \tag{5.46}$$

En suivant les mêmes étapes que dans la section précédente, nous obtenons l'équation

$$\left[-eE\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - eE\tau^2 + eB\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - eB\rho^2 - m^2 \pm eB - ieE\right] F_{\pm}\left(\rho, \tau\right) = 0$$

et après la séparation des variables nous obtenons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \tau^2 + i + \frac{m^2}{eE}\right] \Phi_{\pm}\left(\tau\right) = \frac{K_{\pm}}{eE}\Phi_{\pm}\left(\tau\right) \tag{5.47}$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \rho^2 \mp 1\right] \chi_{\pm}\left(\rho\right) = -\frac{K_{\pm}}{eB}\chi_{\pm}\left(\rho\right). \tag{5.48}$$

avec $K_{\pm} = -\left(2n + 1 \pm 1\right) eB$.

Maintenant, en posant

$$\lambda_{\pm} = i + \frac{m^2 - eBK_{\pm}}{eE}, \tag{5.49}$$

nous arrivons à l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \tau^2 + \lambda_{\pm}\right] \Phi_{\pm}\left(\tau\right) = 0. \tag{5.50}$$

qui admet deux ensembles de solutions exactes qui peuvent être écrites en termes de fonction de Weber

$$\Phi_1^+ = D_{\nu}\left(-\left(1 - i\right)\tau\right) \tag{5.51}$$

$$\Phi_2^+ = D_{\nu^*}\left(\left(1 + i\right)\tau\right) \tag{5.52}$$

$$\Phi_1^- = D_{\nu^*}\left(-\left(1 + i\right)\tau\right) \tag{5.53}$$

$$\Phi_2^- = D_{\nu}\left(\left(1 - i\right)\tau\right) \tag{5.54}$$

où

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + i\lambda_{\pm}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{m^2 - eBK_{\pm}}{eE} \tag{5.55}$$

Pour obtenir la probabilité nous utilisant la transformation

$$D_\gamma(\xi) = \exp\{i\pi\gamma\} D_\gamma(-\xi) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \exp\left\{\frac{i\pi(\gamma+1)}{2}\right\} D_{-\gamma-1}(-i\xi) \tag{5.56}$$

qui nous permet d'écrire

$$\Phi_1^+ = \beta\Phi_2^- + \zeta\Phi_2^+ \tag{5.57}$$

$$\Phi_2^+ = \beta^*\Phi_1^- + \zeta^*\Phi_1^+ \tag{5.58}$$

où β et ζ sont les coefficients de Bogoliubov donnés par

$$\beta = \exp\{i\pi\nu\} \tag{5.59}$$

et

$$\zeta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{\frac{i\pi(\nu+1)}{2}\right\} \tag{5.60}$$

avec la condition

$$|\zeta|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{5.61}$$

La densité des particules crées est alors

$$n = \exp\left(-\pi\frac{m^2 + eB(2n+1\pm1)}{eE}\right) \tag{5.62}$$

La probabilité de production d'une paire est donnée par

$$P = \frac{\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1\pm1)}{eE}\right)}{1+\exp\left(-\pi\frac{m^2+eB(2n+1\pm1)}{eE}\right)}$$

5.5 Conclusion

Le but principal de ce chapitre était de refaire les calculs de la référence [16] concernant la création des particules de Dirac par un champ électromagnétique dans un espace non commutatif en considérant le décalage de Bopp.

Cependant, nous avons considéré d'abord l'équation de Klein Gordon non commutative résultante du décalage de Bopp pour un champ magnétique où nous avons montré que la non commutativité de l'espace temps ne modifie pas les niveaux de Landau connus pour le champ magnétique constant. Ensuite nous avons considéré la création des particules de Klein Gordon et de Dirac.

Le résultat essentiel de chapitre est que la non commutativité de l'espace temps comme introduit dans [16], n'a aucune influence sur la création des particules.

Chapitre 6

Création des particules dans un espace non commutatif : Cartes de Seiberg Witten

6.1 Introduction

Le principal résultat du chapitre précédent est que la non-commutativité de l'espace-temps introduite par le décalage de Bopp n'a aucun effet sur la création de particules à partir du vide par un champ électromagnétique. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la création des particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un espace non commutative en utilisant les cartes de Seiberg-Witten qui montrent via l'équivalence de jauge, les corrections que l'on doit apporter aux champs. Nous commençons d'abord par l'écriture de la densité lagrangienne modifiée, et ensuite nous dérivons de cette densité l'équation de Dirac non commutative. Pour un champ électrique constant et homogène, nous étudions la création des particules par deux méthodes :

1) La méthode canonique basée sur la solution de l'équation de Dirac

2) La méthode de l'action effective.

6.2 La densité lagrangienne du champ spinoriel

Considérons maintenant une particule de spin $\frac{1}{2}$, de masse m et de charge $(-e)$ qui se propage en présence d'un champ électromagnétique dans un espace-temps non comutatif. Cette particule est décrite par un champ spinoriel non commutatif qui a l'action

$$S = \int dx\,\mathcal{L}, \tag{6.1}$$

avec la densité lagrangienne non commutative

$$\mathcal{L} = i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\widehat{\psi} - m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi} - e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}. \tag{6.2}$$

Suivant les cartes de Seiberg-Witten les champ non commutatifs s'écrivent en fonction des champs commutatifs comme suit

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \psi - \frac{e}{2}\theta^{\kappa\lambda}A_{\kappa}\left(\partial_{\lambda}\psi\right) && (6.3)\\ \widehat{\bar{\psi}} &= \bar{\psi} - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right) && (6.4)\\ \widehat{A}_{\mu} &= A_{\mu} + \frac{e}{2}\theta^{\rho\sigma}A_{\rho}\left(F_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}A_{\mu}\right) && (6.5) \end{aligned}$$

A l'ordre 1 en $\theta^{\alpha\beta}$ nous avons les corrections suivantes :

1. Corrections dûs au terme $m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi}$: En remplaçant les champs $\widehat{\psi}$ et $\widehat{\bar{\psi}}$ par leurs expression en fonction de champ commutatif, nous obtenons

$$\begin{aligned} m\widehat{\bar{\psi}} \star \widehat{\psi} &= m\left(\bar{\psi} - e\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right)\right)\left(\psi - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda}eA_{\kappa}\left(\partial_{\lambda}\psi\right)\right) + m\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\sigma}\psi\right) + ...\\ &= m\bar{\psi}\psi + m\theta^{\alpha\beta}\left[\frac{e}{2}\left(\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\,\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right)\right]. && (6.6) \end{aligned}$$

2. Correction dûs au terme $i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\widehat{\psi}$: Ce terme peut être développé comme suit

$$\begin{aligned} i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\widehat{\psi} &= i\left(\bar{\psi} - e\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}\left(\partial_{\beta}\bar{\psi}\right)\right)\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\psi - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda}e\partial_{\mu}\left(A_{\kappa}\left(\partial_{\lambda}\psi\right)\right)\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\sigma}\partial_{\mu}\psi\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\widehat{\psi} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi && (6.7)\\ &\quad +\theta^{\alpha\beta}\left(-i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\,\mu}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right) + i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\,\mu}\left(\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\mu}\psi\right) - \frac{1}{2}\,\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\right)\left(\partial_{\beta}\partial_{\mu}\psi\right)\right) \end{aligned}$$

3. Correction dûs au terme $e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}$: Comme le produit de Moyal est associatif nous pouvons développer le terme $e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}$ en calculons d'abord le produit $\left(\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi}\right)$

$$\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi} = \hat{A}_{\mu}\hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\,\left(\partial_{\rho}\hat{A}_{\mu}\right)\left(\partial_{\sigma}\hat{\psi}\right). \tag{6.8}$$

Le résultat final est donc

$$
\begin{aligned}
e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi} &= e\hat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu} \left[\hat{A}_{\mu}\hat{\psi} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma} \left(\partial_{\rho}\hat{A}_{\mu}\right)\left(\partial_{\sigma}\hat{\psi}\right)\right] \\
&= e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi + \frac{e^2}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_{\alpha}F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_{\mu}F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \\
&\quad + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}e\left(\partial_{\alpha}\hat{A}_{\mu}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\beta}\psi\right) \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

Finalement nous pouvons écrire ces corrections comme

$$
\begin{aligned}
i\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\widehat{\psi} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \theta^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} \qquad (6.10) \\
m\hat{\bar{\psi}} \star \hat{\psi} &= m\bar{\psi}\psi + \theta^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \qquad (6.11) \\
e\widehat{\bar{\psi}} \star \gamma^{\mu}\widehat{A}_{\mu} \star \widehat{\psi} &= e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi + \theta^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

où $D_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ et $A_{\alpha\beta}$ sont donnés par

$$
\begin{aligned}
D_{\alpha\beta} &= -i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right) - i\frac{e}{4}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}F_{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}\psi\right) \\
M_{\alpha\beta} &= -\frac{e}{4}mF_{\alpha\beta}\bar{\psi}\psi \\
A_{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{2}\left(A_{\alpha}F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_{\mu}F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + \frac{i}{2}e\left(\partial_{\alpha}\hat{A}_{\mu}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\beta}\psi\right)
\end{aligned}
$$

La densité Lagranienne peut s'écrire alors sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi + \theta^{\alpha\beta}\left(D_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}\right) \\
&= \mathcal{L}_0 + \theta^{\alpha\beta}\mathcal{L}_{\alpha\beta} \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \\
&= -i\frac{e}{2}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\left(\partial_{\beta}\psi\right) - \frac{i}{2}e\left(\partial_{\alpha}\hat{A}_{\mu}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\beta}\psi\right) - i\frac{e}{4}\bar{\psi}\gamma^{\ \mu}F_{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}\psi\right) \\
&\quad + \frac{e}{4}mF_{\alpha\beta}\bar{\psi}\psi - \frac{e^2}{2}\left(A_{\alpha}F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_{\mu}F_{\alpha\beta}\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

6.3 Equation de Dirac non commutative

Suivant le principe de moindre action ($\delta S = 0$), l'équation de Dirac non commutative pour le champ ψ se dérive à partir de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ via l'équation d'Euler-Lagrange

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\right)}\right) = 0 \qquad (6.15)
$$

Comme $\mathcal{L}$ ne dépend pas des dérivées $\partial_\mu\bar{\psi}$, l'équation d'Euler-Lagrange se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= \gamma^\mu\left(i\partial_\mu - i\frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\partial_\mu - i\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\partial_\beta - \frac{i}{2}e\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\hat{A}_\mu\right)\partial_\beta\right)\psi \\ &\quad -\gamma^\mu\left(eA_\mu + \frac{e^2}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right)\right)\psi \\ &\quad -m\left(1 - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\psi = 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

La dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\left[\gamma^\mu\left(i\mathcal{D}_\mu - e\mathcal{A}_\mu\right) - \mathcal{M}\right]\psi = 0 \tag{6.17}$$

où $\mathcal{M}$, $\mathcal{D}_\mu$ et $\mathcal{A}_\mu$ sont donnés par

$$\mathcal{M} = m\left(1 - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \tag{6.18}$$

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu + \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(A_\alpha F_{\mu\beta} - \frac{1}{2}A_\mu F_{\alpha\beta}\right) \tag{6.19}$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\partial_\mu - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\mu A_\alpha\right)\partial_\beta - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\partial_{\beta.} \tag{6.20}$$

Il est à noter, ici, que les corrections apportées à m et A_μ sont dues aux cartes de Seiberg Witten et c'est parail pour les deux premières corrections à ∂_μ. Par contre, la troisième correction dans l'expression de $\mathcal{D}_\mu$ résulte du décalage de Bopp. Pour voir ça, considérons le développemt de $A_\mu\left(x - \delta x\right)$

$$A_\mu\left(x - \delta x\right) = eA_\mu\left(x\right) - \left(\partial_\alpha A_\mu\right)\delta x^\alpha + ... \tag{6.21}$$

Dans ce cas, l'opérateur de Bopp $i\partial_\mu - eA_\mu\left(x - \frac{1}{2}\tilde{p}\right)$ apparant de l'équation de Dirac, devient

$$\begin{aligned}\pi_\mu &= i\partial_\mu - eA_\mu\left(x - \frac{1}{2}\tilde{p}\right) \\ &= i\partial_\mu - eA_\mu\left(x\right) - \frac{e}{2}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\tilde{p}^\alpha \\ &= i\tilde{D}_\mu - eA_\mu\left(x\right)\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\mu\right)\partial_\beta.$$

6.4 Création de particules

6.4.1 Méthode de l'action effective

Partons de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ qui peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\mathcal{O}\psi \tag{6.22}$$

où l'opérateur $\mathcal{O}$ est donné par

$$\mathcal{O} = \gamma^{\mu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right) - \mathcal{M}.$$

Comme dans le cas commutatif, nous avons

$$\det \mathcal{O} = \prod_{i} \lambda_i = \det \mathcal{O}^{\dagger} = \left[\det \mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger}\right]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\mathcal{O}^{\dagger} = -\gamma^{\mu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right) - \mathcal{M}.$$

Le produit $\mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger}$ est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} &= \left[\gamma^{\mu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right) - \mathcal{M}\right]\left[-\gamma^{\mu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right) - \mathcal{M}\right] \\
&= -\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right) + \mathcal{M}^2
\end{aligned}$$

En tenant compte de la propriété des matrices de Dirac

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right],$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} &= -\left(g^{\mu\nu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right)\right) + \mathcal{M}^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right).
\end{aligned}$$

La deuxième ligne de l'équation précédente peut se simplifier en deux étapes. En premier lieu nous écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right) &= \frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right), \left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right)\right] \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

et ensuite, nous développons le commutateur $\left[\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right), \left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right)\right]$

$$\left[\left(i\mathcal{D}_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}\right), \left(i\mathcal{D}_{\nu} - e\mathcal{A}_{\nu}\right)\right] = -\left[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}\right] - ie\left[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{A}_{\nu}\right] + ie\left[\mathcal{D}_{\nu}, \mathcal{A}_{\mu}\right]. \tag{6.24}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\mathcal{O}^{\dagger} &= -g^{\mu\nu}\left(i\mathcal{D}_{\mu}-e\mathcal{A}_{\mu}\right)\left(i\mathcal{D}_{\nu}-e\mathcal{A}_{\nu}\right)+\mathcal{M}^{2} \\
&+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\mu},\mathcal{D}_{\nu}\right]+ie\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\mu},\mathcal{A}_{\nu}\right]-ie\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\mathcal{D}_{\nu},\mathcal{A}_{\mu}\right].
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Considérons maintenant, le cas d'un champ électrique constant et homogène, dirigé suivant l'axe (OZ). Dans ce cas nous pouvons choisir la jauge $A_{\mu}=\left(A_0\left(z\right),0,0,0\right)$ avec

$$A_0\left(z\right)=-Ez. \tag{6.26}$$

Les composantes non nulles du tenseur énergie impulsion sont

$$F_{03}=-F_{30}=E \tag{6.27}$$

Pour les paramètres $\theta^{\mu\nu}$, nous supposons que

$$\begin{aligned}
\theta^{03} &= -\theta^{30}=\theta \\
\theta^{02} &= -\theta^{20}=\theta \\
\theta^{01} &= -\theta^{10}=\theta \\
\theta^{12} &= -\theta^{21}=\theta \\
\theta^{13} &= -\theta^{31}=\theta \\
\theta^{23} &= -\theta^{32}=\theta.
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}=\theta^{03}F_{03}+\theta^{30}F_{30}=2\theta E. \tag{6.28}$$

Les quantités $\mathcal{M}$ et $\mathcal{A}_{\mu}$ et les opérateurs $\mathcal{D}_{\mu}$ deviennent alors

$$\mathcal{M}=m\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right),$$

$$\begin{cases}
\mathcal{A}_0=A_0=-Ez \\
\mathcal{A}_1=A_1=0 \\
\mathcal{A}_2=A_2=0 \\
\mathcal{A}_3=A_3=0
\end{cases} \tag{6.29}$$

et

$$\begin{cases}
\mathcal{D}_0=\partial_0+\frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1+\partial_2\right) \\
\mathcal{D}_1=\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\partial_1 \\
\mathcal{D}_2=\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\partial_2 \\
\mathcal{D}_3=\partial_3+\frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1+\partial_2\right)
\end{cases} \tag{6.30}$$

Parmi les commutateurs $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$, le seul non nul est

$$[\mathcal{D}_3, \mathcal{A}_0] = \left[\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right), -Ez\right] = -E$$

Les commutateurs $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$ sont tous nuls

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = 0.$$

Il vient donc

$$\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger = (\mathcal{D}_0 + ie\mathcal{A}_0)^2 - (\mathcal{D}_1)^2 - (\mathcal{D}_2)^2 - (\mathcal{D}_3)^2 + m^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + ieE\gamma^0\gamma^3$$

qui s'écrit explicitement

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger &= \left(\partial_0 + \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right) - ieEz\right)^2 - \left(\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right)\right)^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)(\partial_1)^2 - \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)(\partial_2)^2 + m^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + ieE\gamma^0\gamma^3\end{aligned}$$

Cherchons maintenant les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger$. En prenant en compte le fait que $\left(\gamma^0\gamma^3\right)^2 = 1$, qui implique que les valeurs propres de la matrice $\gamma^0\gamma^3$ sont $\kappa = \pm 1$, nous pouvons écrire pour l'opérateur $\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger$ l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger U\chi(x) = \lambda U\chi(x)$$

où U_κ est le vecteur propre de la matrice $\gamma^0\gamma^3$ qui correspond à la valeur propre κ

$$\gamma^0\gamma^3 U_\kappa = \kappa U_\kappa.$$

Comme le potentiel A_μ ne dépend que de la coordonnée z, il est très commode d'écrire la fonction $\chi(x)$ sous la forme

$$\chi(x) = \exp\left[-i\left(\omega t - p_x x - p_y y\right)\right] F(z) \tag{6.31}$$

La fonction $F(z)$ vérifie alors l'équation

$$\begin{aligned}&\left[\left(-i\omega + i\frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right) - ieEz\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right)\right)^2\right. \\ &\left. + m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right] F(z) = \lambda F(z)\end{aligned} \tag{6.32}$$

Nous faisons encore la factorization

$$F(z) = \exp\left[i\frac{eE\theta}{2}(p_x + p_y)z\right] f(z) \tag{6.33}$$

pour obtenir l'équation

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - e^2E^2\left(z + \frac{\omega}{eE} - \frac{\theta}{2}(p_x + p_y)\right)^2\right.\\ &\left.+m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right] f(z) = \lambda f(z)\,.\end{aligned} \tag{6.34}$$

Maintenons nous faisons le changement du variable z en ξ avec

$$\xi = z + \frac{\omega}{eE} - \frac{\theta}{2}(p_x + p_y)\,, \tag{6.35}$$

pour écrire finalement l'équation (6.34) sous la forme

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - e^2E^2\xi^2 + m_\perp^2\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)^2 + i\kappa eE\right]\tilde{f}(\xi) = \lambda\tilde{f}(\xi) \tag{6.36}$$

où $\tilde{f}(\xi) \equiv f(z)$. Compte tenu du fait que la dernière équation se ressemble à l'équation (**??**) du deuxième chapitre nous obtenons

$$\lambda = \left(m^2 + p_x^2 + p_y^2\right)(1 - eE\theta) + i(2n+1)eE + i\kappa eE. \tag{6.37}$$

Dans ce cas, suivant la méthode préscrite dans le deuxième chapite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}S_{eff} &= -\frac{i}{2}\operatorname{tr}\left(\ln \mathcal{O}\mathcal{O}^\dagger\right)\\ &= i\int \frac{d\omega dp_x dp_y}{(2\pi)^3}\sum_n\sum_{\nu=\pm1}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\\ &\quad \exp\left[\left(i\left(m^2 + p_x^2 + p_y^2\right)(1 - eE\theta) - (2n+1)eE + \kappa eE\right)s\right]\end{aligned} \tag{6.38}$$

Après quelques intégrations nous obtenons

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3T\frac{2e^2E^2}{(2\pi)^3(1 - eE\theta)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{eE}(1 - eE\theta)\right) \tag{6.39}$$

En posons

$$e\mathcal{E} = eE(1 + eE\theta) \tag{6.40}$$

nous obtenons finalement la partie imaginaire de l'action effective

$$2\operatorname{Im} S_{eff} = L^3T\frac{2e^2\mathcal{E}^2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-n\pi\frac{m^2}{e\mathcal{E}}\right). \tag{6.41}$$

6.4.2 Méthode de la transformation de Bogoliubov

En multipliant l'équation (**??**) par $\left(1+\frac{e}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$, nous obtenons l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)-m\right]\psi=0 \tag{6.42}$$

où cette fois-ci $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}$ et $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu} &= A_{\mu}+\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}A_{\alpha}F_{\mu\beta}\\ \widetilde{\mathcal{D}}_{\mu} &= \partial_{\mu}-\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}A_{\alpha}\right)\partial_{\beta}-\frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha}A_{\mu}\right)\partial_{\beta}.\end{aligned}$$

Cherchons maintenant la forme quadratique de l'équation (6.42). Pour cela nous introduisons un nouveau champ φ défini par

$$\psi=\left[\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)+m\right]\varphi. \tag{6.43}$$

Ce nouveau champ φ vérifie alors l'équation

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)-m\right]\left[\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)+m\right]\varphi=0 \tag{6.44}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)-m^{2}\right]\varphi=0. \tag{6.45}$$

Compte tenu du fait que $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=g^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad-\frac{1}{2}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\end{aligned} \tag{6.46}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\left[\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right),\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.47}$$

En écrivant le commutateur

$$\left[\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right),\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}-e\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right)\right]=-\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu},\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu}\right]-ie\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu},\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu}\right]+ie\left[\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu},\widetilde{\mathcal{A}}_{\mu}\right] \tag{6.48}$$

Nous obtenons l'équation quadratique

$$\left[g^{\mu\nu}\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_\mu - e\widehat{\mathcal{A}}_\mu\right)\left(i\widetilde{\mathcal{D}}_\nu - e\widetilde{\mathcal{A}}_\nu\right) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{D}_{\mu\nu} - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu} - m^2\right]\varphi = 0 \tag{6.49}$$

où les tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ et $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\mu, \widehat{\mathcal{A}}_\nu\right] - \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\nu, \widetilde{\mathcal{A}}_\mu\right] \tag{6.50}$$

et

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \left[\widetilde{\mathcal{D}}_\mu, \widetilde{\mathcal{D}}_\nu\right] = \frac{e}{2}\theta^{\alpha\beta}\left[\left(\partial_\nu F_{\alpha\beta}\right)\partial_\mu + \left(\partial_\alpha F_{\mu\nu}\right)\partial_\beta\right] \tag{6.51}$$

Pour la jauge (6.26) nous avons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}}_0 &= \left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right) A_0 = -\left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right) Ez \\
\widetilde{\mathcal{A}}_1 &= 0 \\
\widetilde{\mathcal{A}}_2 &= 0 \\
\widetilde{\mathcal{A}}_3 &= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}_0 &= \left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_0 - \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right) \\
\widetilde{\mathcal{D}}_1 &= \partial_1 \\
\widetilde{\mathcal{D}}_2 &= \partial_2 \\
\widetilde{\mathcal{D}}_3 &= \left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_3 - \frac{eE\theta}{2}\left(\partial_1 + \partial_2\right)
\end{aligned}$$

Le tenseur $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ est dans ce cas

$$\mathcal{F}_{30} = -E\left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)^2 = -\mathcal{E} = -\mathcal{F}_{03}.$$

L'équation (6.49) devient

$$\begin{aligned}
&\Bigg[\left(\left(1 - \frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right) + e\left(1 + \frac{e}{2}\theta E\right) Ez\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 \\
&- \left(i\left(1 + \frac{eE\theta}{2}\right)\partial_3 + \frac{eE\theta}{2}\left(p_x + p_y\right)\right)^2 - ie\gamma^0\gamma^3 E\left(1 - \frac{e}{2}\theta E\right) - m^2\Bigg] F(z) = 0
\end{aligned}$$

où nous avons posé $\varphi = \exp\left[-i\left(\omega t - p_x x - p_y y\right)\right] F(z)$.

Maintenant, nous écrivons $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \exp\left(i\frac{eE\theta}{2\left(1+\frac{eE\theta}{2}\right)}(p_x+p_y)z\right)f(z) \tag{6.52}$$

et nous introduisons le changement

$$z \to \xi = z + \frac{\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}(p_x+p_y)}{e\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)E} \tag{6.53}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[e^2E^2\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - i\kappa eE - \frac{m_\perp^2}{\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)^2}\right]\tilde{f}(\xi) = 0 \tag{6.54}$$

En faisant encore le changement de variable

$$\eta = \sqrt{2ieE}\xi$$

nous obtenons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{1}{4}\eta^2 + \gamma + \frac{1}{2}\right]\bar{f}(\eta) = 0$$

avec

$$\gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{m_\perp^2}{2eE}(1-eE\theta)$$

Dans ce cas suivant le résultats du deuxième chapitre les états "in" et "out" sont donnés par

$$\begin{aligned} F_{in}^-(x) &= D_{\gamma^*}\left[(1-i)\sqrt{eE}(z+z_0)\right], & (6.55)\\ F_{in}^+(x) &= D_{\gamma}\left[-(1+i)\sqrt{eE}(z+z_0)\right], & (6.56)\\ F_{out}^-(x) &= D_{\gamma}\left[(1+i)\sqrt{eE}(z+z_0)\right], & (6.57)\\ F_{out}^+(x) &= D_{\gamma^*}\left[-(1-i)\sqrt{eE}(z+z_0)\right]. & (6.58) \end{aligned}$$

où

$$z_0 = \frac{\left(1-\frac{eE\theta}{2}\right)\omega + \frac{eE\theta}{2}(p_x+p_y)}{e\left(1+\frac{e}{2}\theta E\right)E} \tag{6.59}$$

En utilisant la formule (3.54), nous obtenons les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = e^{-\frac{i\pi\gamma}{2}}\frac{\sqrt{2eE}}{[ik_\perp+m]\left(1-\frac{e}{2}E\theta\right)}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\gamma)} \tag{6.60}$$

et

$$\beta = e^{-i\pi\gamma}. \tag{6.61}$$

Nous avons alors le résultat final

$$P = \frac{\exp\left[-\pi\frac{m_{\perp}^2}{eE(1+eE\theta)}\right]}{1-\exp\left[-\pi\frac{m_{\perp}^2}{eE(1+eE\theta)}\right]}. \tag{6.62}$$

et

$$n = \exp\left[-\pi\frac{m_{\perp}^2}{eE\left(1+eE\theta\right)}\right]. \tag{6.63}$$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la création des particules de Dirac dans un espace non commutatif en considérant les cartes de Seiberg-Witten. Après avoir calculé les corrections apportées aux champs non commutatifs pour préserver l'invariance de jauge. Nous avons utilisé les deux méthodes présentées dans le deuxième chapitre pour calculer la probabilité de création des paires de particules. Le résultat essentiel de cette étude est que la non commutativité de l'espace temps influe considérablement le phénomène de création des particules.

Dans un espace non commutatif les particules sentent un champ effectif $e\mathcal{E} = eE\left(1+eE\theta\right)$.

Chapitre 7

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons voulu étudier la création des particules à partir du vide par un champ électrique dans un espace non commutatif. Ce problème a été étudié pour la première fois dans la référence [16], où les auteurs on considéré le décalage de Bopp.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés aux champs quantiques en présence d'un champ électromagnétique dans l'espace commutatif de Minkowski. Nous avons exposé d'abord la théorie quantique des champs en présence d'un champ électrique où nous avons montré que l'Hamiltonien de ce système n'est pas toujours diagonal. Ainsi, nous avons défini en premier lieu les modes "in" et "out" qui rendent l'Hamiltonien diagonal et nous permettent donc une interprétation en termes de particules. A partir de la relation entre les modes "in" et "out" nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire en termes de coefficients de Bogoliubov. En deuxième partie, nous avons montré comment définir l'amplitude de transition vide-vide pour le champ scalaire complexe et le champ spinoriel et comment extraire de cette amplitude la probabilité de création de particules.

Dans le troisième chapitre, nous avons considéré l'exemple simple que constitue le champ électrique constant et homogène, pour lequel calculé la probabilité de création des paires par les deux méthode décrites dans le chapitre précédent. A travers cette étude nous avons montré que

1) le processus de création des particules par un champ électrique ne dépend pas de la jauge choisie.

2) Les deux méthodes sont équivalentes

Dans le quatrième chapitre nous avons exposé les différentes formulations de la théorie quantique dans le cadre de la géométrie non commutative. Il s'agit de la méthode du décalage de Bopp, la méthode du produit de Moyal et la carte de Seiberg Witten. Les trois méthodes consistent à relier l'algèbre non commutative à l'algèbre standard par une classe de transformations linéaires. Nous avons vu que la méthode de décalage de Bopp est équivalente à la méthode du produit de Moyal et que la carte Seiberg Witten est une version très avancée qui préserve l'invariance de jauge.

Dans le cinquième chapitre, nous avons considéré d'abord l'équation de Klein Gordon non commutative résultante du décalage de Bopp pour un champ magnétique où nous avons montré que la non commutativité de l'espace temps ne modifie pas les niveaux de Landau connus pour le champ magnétique constant. Ensuite nous avons considéré la création des particules de Klein Gordon et de Dirac. Principalement, nous avons refait les calculs de la référence [16] concernant la création des particules de Dirac par un champ électromagnétique dans un espace non commutatif en considérant le décalage de Bopp. Nous avons montré ainsi que la non commutativité de l'espace temps comme implémentée par le décalage de Bopp, n'a aucune influence sur la création des particules.

Dans le sixième chapitre, nous avons étudié la création des particules de Dirac par un champ électrique en géométrie non commutative à partir des cartes de Seiberg-Witten. Après avoir déterminé les corrections apportées aux champs non commutatifs pour préserver l'invariance de jauge, nous avons calculé la probabilité de création des particules par les deux méthodes présentées dans le deuxième chapitre. Le résultat essentiel de ce chapitre est que la non commutativité de l'espace temps influe considérablement le phénomène de création des particules.

Bibliographie

[1] Padmanabhan, T., "Physical Significance of Planck Length", Ann. Phys. (N.Y.), 165, 38–58 (1985).

[2] H.S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[3] A. Connes, Noncommutative Differential Geometry, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 62 (1985) 257

[4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).

[5] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (Campridge University. Press, Campridge 1985).

[6] V. F.Mukhanov and S. Winitzki, Intoduction of Quantum Effects in Gravity (Campridge Univ. Press, Campridge 2007).

[7] L. Parker and D. J. Toms, Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity (Campridge University. Press, Campridge 2009).

[8] M.R. Douglas, D.N. Kabat, , P. Pouliot, and S.H. Shenker,Nucl. Phys. B, 485, 85–127 (1997).

[9] M.R. Douglas and N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys., 73, 977–1029 (2001).

[10] O. Klein, Z. Phys. **53** (1929) 157

[11] A. Calogeracos, N. Dombey, Contemp. Phys. **40** (1999) 313.

[12] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010)

[13] R. Schuetzhold, H. Gies, G. Dunne, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 130404

[14] A. Di Piazza, E. Lotstedt, A. I. Milstein, C.H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 170403.

[15] M. J. A. Jansen and C. Müller, Phys. Rev. **A 88** (2013) 052125

[16] N. Chair, M.M. Sheikh-Jabbari, Phys.Lett. B504 (2001) 141.

[17] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

[18] E. Bresin and C. Itzykson, Phys. Rev. **D 2** (1970) 1191.

[19] M. S. Marinov and V. S. Popov, Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 702.

[20] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, Phys.Rev. **D 53** (1996) 7162

[21] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. **D 73** (2006) 065020

[22] E. T. Akhmedov and P. Burda, Phys Lett **B 687** (2010) 267

[23] S. Haouat and L. Chetouani, Phys. Scr. **75** (2007) 759

[24] G.V. Dunne and C. Schubert, Phys. Rev. **D 72** (2005) 105004

[25] S. Biswas, J. Guha and N. G. Sarkar, Class. Quantum Grav. **12,** 1591 (1995)

[26] S. Biswas, A. Shaw and P. Misra, Gen. Rel. Grav. **34,** 665 (2002)

[27] S. Biswas and I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. **D 15,** 937 (2006)

[28] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11** (1970) 596

[29] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1045

[30] S. A. Baran and I. H. Duru, J. Sov. Laser Res. **13** (1992) 241

[31] I. H. Duru, J. Phys. A : Math. Gen. **28** (1995) 5883

[32] E. S. Fradkin, D.M. Gitman and S.M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin 1991)

[33] H. Groenewold, Physica 12 (1946)405.

[34] A. A.Grib, S. G. Mamayev, and V.M.Mostepanenko,Vacuum Quantum Effects in Strong Fields (Friedmann Lab. Publ.,St. Petersburg 1994).

[35] A. Hansen, F. Ravndal, Physica Scripta **23** (1981) 1036.

[36] R. Adjimi, mémoire de Master, universite de Jijel 2012.

[37] B. R. Holstein, Am. J. Phys. 66, 507 (1998).

[38] A.R.Camacho and R.J.Szabo, Introduction to Non-commutative Field Theory, (2009).

[39] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, 1979.

[40] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Field (Springer-Verlag, 1985).

[41] J. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45** (1949) 99.

[42] Bopp F. 1956, La mecanique quantique est-elle une mecanique statistique particuliere ?, Ann. Inst. H. Poincaré 1581.

[43] T. Curtright, D. Fairlie, and C. Zachos, Phys. Rev. D58, 025002 (1998).

[44] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032 (1999).