REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Série :…………………………

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Master en physique

Spécialité : Physique théorique

Par

Kirat Soulaf

Intitulé

Théorie de jauge de Poincaré de la gravitation: quelques applications

Soutenue le : **31 /10 /2020** devant le jury:

Président :	Kh.Nouicer	Prof. Univ. de Jijel
Rapporteur :	S.Haouat	Prof. Univ. de Jijel
Examinateur:	M.S.Zidi	MCA. Univ. de Jijel

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes honorables parents

A mon bras droit, Douniazed

Et enfin, à moi-même

Soulaf

Remerciements

Avant tout, je remercie « **Dieu** » Tout-Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la force de réaliser ce travail.

Mes remerciements vont en priorité à mon encadreur, le professeur **Salah Haouat** pour son aide, ses précieux conseils, sa patience, sa disponibilité, et surtout de m'avoir fait confiance pour faire ce sujet, sincèrement je suis **fière** que vous êtes mon encadreur.

J'exprime également mes vifs gratitudes à l'ensemble des membres de jury le professeur **Kh.Nouicer** et **M.S.Zidi** pour avoir lu et porté l'intérêt pour mon travail.

Je remercie tous ceux qui m'ont étudié et ceux qui ont contribué à la formation de mon contenu scientifique de l'école primaire au niveau universitaire, pour chaque petite et grande, ceux qui m'ont appris une leçon, certains qui m'ont appris la morale et certains d'entre eux qui m'ont appris à réussir par moi-même.

Je voudrais remercier aussi les enseignants **F.Bouzrara**, **N.Baouche, A.Bouaine, H.Afer**, **S.Izza**, et **F.Boukrit**.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à l'ensemble du LPTH (Laboratoire de Physique Théorique) et spécialement les enseignants **T.Boudjedaa, A,Bounames,** et **Z,Belghobsi.**

J'adresse mes sincères remerciements à la secrétaire de LPTH **Lamri Houria** pour son soutien.

Je voudrais remercier ceux qui m'ont arrosé de confiance, d'espoir, et de prière; **Mes honorables parents,** les mots ne suffisent pas pour vous exprimer ma gratitude, sans eux je n'en serais par là.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes sœurs; **Naziha** pour m'avoir encouragé et pour le soutien moral et **Douniazed** qui est la personne la plus qui m'a aidé dans toute ma vie et qui a fait le sacrifice pour moi.

Je veux remercier aussi mes chers frères **Zinneddine**, **Badreddine** et **Othman**.

Je remercie la famille **Bouham** chaleureusement et je n'oublierai jamais son aide et son soutien durant mes années d'étude.

J'offre un merci spécial à mes très proches amies; **Amina**, **Chahra**, **Rania**, **Rahma**, **Souha**, **Nadra**, **Soumia, Amira, Karima, Imene, Meryeme, …**et les autres, pour leurs mots encourageants, pour leurs conseils inestimables, ont toujours su me pousser à croire et à avancer et notamment pour leur soutien moral.

Je voudrais remercier tous ceux de près ou de loin qui m'ont soutenu même d'un seul mot, et je remercie surtout ceux qui m'ont brisé, car c'est grâce à eux que j'ai continué à réussir.

Enfin, je tiens à remercier tous mes amies de la promotion « **Covid-19** ».

Soulaf

Résumé

L’objet de ce mémoire est d’étudier quelques aspects fondamentaux de la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation. Dans cette théorie, la géométrie de l'espace-temps est celle de Riemann-Cartan où les connexions ne sont pas symétriques et portent ainsi un tenseur de torsion.

Après avoir exposé la théorie de la relativité générale d’Einstein qui décrit l’interaction gravitationnelle, nous avons montré comment construire une théorie de jauge pour cette interaction en se basant sur le groupe de Poincaré. Ensuite, nous avons étudié la stabilité de cette théorie à cause des degrés de liberté fantômes (ghosts). Dans le cas considéré, nous avons montré que la théorie libre de ghosts est celle de Gauss-Bonnet avec torsion.

Ensuite, nous avons établi les équations de Friedmann en présence de torsion. Dans ce cas, nous avons montré que la torsion peut jouer le rôle d'une constante cosmologique effective donnant lieu à une expansion accélérée exponentiellement.

En dernière étape, nous nous étions intéressés aux solutions à symétrie sphérique en présence de torsion. Dans un cas particulier, nous avons pu trouver une métrique à symétrie sphérique de type Lifshitz qui représente un trou noir.

Mots clés :

Théorie de jauge, Géométrie de Riemann-Cartan, Torsion, Fantômes, Constante cosmologique.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة بعض الجوانب الأساسية للنظرية المعيارية لبوانكاريه للجاذبية. حيث أن هندسة الزمكان الموافقة لهذه النظرية هي هندسة ريمان-كارتان، أين تكون الموصلات غير متناظرة وبالتالي تحمل موتر الالتواء.

بعد الاطلاع على نظرية النسبية العامة لأينشتاين والتي تصف تفاعل الجاذبية، أظهرنا كيفية بناء النظرية المعيارية لهذا التفاعل بناءا على زمرة بوانكاريه. ثم قمنا بدراسة استقرار هذه النظرية من خلال تخليصها من درجات الحرية غير الفيزيائية (شبح)، في هذه الحالة توصلنا الى ان النظرية الفيزيائية (خالية من الاشباح) هي نظرية Gauss-Bonnet مع الالتواء.

كما تطرقنا الى انشاء معادلات فريدمان في وجود الالتواء، حيث وجدنا بأنه يمكن للالتواء أن يلعب دور الثابت الكوني الفعال مما يؤدي الى توسع متسارع بشكل أسي.

في الخطوة الأخيرة، اهتممنا بالحلول ذات التناظر الكروي في وجود الالتواء,أين تمكننافي حالة خاصة, من العثور على مترية ذات تناظر كروي من نوع Lifshitz والتي تمثل ثقبا أسودا.

الكلمات المفتاحية:

النظرية المعيارية, هندسة ريمان-كارتان, الالتواء, الاشباح, الثابت الكوني.

Abstract

In this work, we were interested in the study of some fundamental aspects of the Poincaré gauge theory of gravity. This theory is described by the space time of Riemann-Cartan geometry, where the connections are not symmetrical and thus carry the torsion.

After having displayed Einstein's general theory of relativity which describes the gravitational interaction, we have shown how to construct a gauge theory for this interaction based on the Poincaré group. Then, we studied the stability of this theory through eliminating the ghosts' degrees of freedom. In this case, we have shown that the ghost free theory is that of Gauss-Bonnet with torsion.

Furthermore, we had the desire to study the torsion's effect which is why we established the Friedmann equations. In this case, we have shown that the torsion can play the role of efficient cosmological constant giving rise to an exponentially accelerated expansion.

In the last step, we were interested in solutions with spherical symmetry in the presence of torsion. In a particular case, we found a Lifshitz-type spherically symmetrical metric that represents a black hole.

Keywords :

Gauge theory, Riemann-Cartan Geometry, Torsion, Ghosts, Cosmological constant

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

"*Quantum mechanics as it stands would be perfect if we didn't have the quantum gravity issue and a few other very deep fundamental problems*"
Gerard't Hooft

Même après plus d'un siècle de son avènement, la relativité générale d'Einstein est l'une des théories les plus importantes de la physique qui a radicalement changé notre compréhension des phénomènes gravitationnels. Complètement différente de la théorie de Newton, la relativité générale est basée sur le concept de la géométrie de l'espace-temps (l'unification de l'espace et du temps en une variété d'espace-temps à quatre dimensions).

Plusieurs tests ont confirmé la validité de cette élégante théorie, comme le décalage du périhélie de Mercure, la déviation de la lumière et les lentilles gravitationnelles, le décalage vers le rouge, les trous noirs et les ondes gravitationnelles ont été confirmées expérimentalement [1]. De plus, la détection des ondes gravitationnelles par les collaborations LIGO et Virgo [2, 3, 4] ainsi que l'observation récente d'un trou noir supermassif au cœur de la galaxie M87 par la collaboration EHT [5, 6], nous permet de nous assurer que la RG est fiable pour la description des phénomènes gravitationnels macroscopiques. Il est également à noter que grâce aux résultats obtenus par la collaboration PLANCK [7], qui sont très améliorés par rapport aux résultats précédents de WMAP [8], les modèles cosmologiques basés sur la RG ont acquis une reconnaissance bien méritée.

Cependant, bien que la théorie de la relativité générale soit bien étudiée et testée à bien des égards et malgré ses succès dans de nombreux contextes, elle est dotée des problèmes récents, donc il existe des questions fondamentales sur l'interaction gravitationnelle auxquelles la relativité générale n'a pas pu répondre d'une manière satisfaisante et elle semble incomplète. Parmi ces questions :

1. L'incapacité, jusqu'à présent, d'unifier la RG avec le modèle standard de la physique des particules, ou d'autres termes, les difficultés rencontrées dans la quantification de la RG par les mêmes schémas utilisés avec succès pour les autres interactions fondamentales.
2. Nous notons aussi, l'inaptitude de la RG à expliquer de manière satisfaisante la phénoménologie de la matière noire et de l'énergie noire, sans introduire une sorte

d'énergie de matière inconnue pour réconcilier ses prédictions avec les observations récentes telles que l'expansion accélérée de l'univers.

3. La prédiction de l'existence de singularités spatio-temporelles qui sont à la fois mathématiquement et physiquement difficiles à accepter. L'exemple le plus fameux est la singularité du Big-Bang.

Ces problèmes ont attiré l'attention de nombreux physiciens, dans une tentative de les résoudre et de la recherche d'une théorie gravitationnelle au-delà de la RG. A nos jours, les théories de la gravitation alternatives à la relativité générale continuent d'être d'un intérêt considérable. Il est possible que la résolution des problèmes liés à la quantification de la gravitation soit facile dans une théorie au-delà de la RG. Il est également concevable que la théorie d'Einstein nécessite des modifications pour d'autres raisons bien avant que les effets quantiques de la gravitation ne deviennent importants. Comme la situation concernant l'une ou l'autre de ces modifications n'est pas claire à l'heure actuelle, il existe plusieurs modèles candidats pour une telle description. Dans la littérature, nous pouvons voir plusieurs manières de modifier la théorie de la relativité générale. La première modification consiste à généraliser l'action de Hilbert-Einstein comme par exemple les théories $f(R)$, la théorie de Gauss-Bonnet et la gravitation de Lovelock. Il y a aussi la possibilité de modifier la géométrie et les propriétés de l'espace-temps en introduisant des structures supplémentaires comme par exemple le tenseur de torsion et le tenseur de non-compatibilité. Comme la théorie de la RG semble fiable à l'échelle macroscopique, il se peut qu'une telle modification se produise naturellement lorsque l'on réussit à fournir une description de la gravitation en théorie quantique des champs.

D'autre part, au cours des dernières décennies, un intérêt croissant s'est porté sur le problème de la construction d'une théorie unifiée des interactions fondamentales. Une telle théorie, capable d'expliquer la structure hiérarchique des forces physiques dans la nature, pourrait très probablement être basée sur le principe universel de l'invariance locale et sur le formalisme résultant des champs de jauge. Un progrès significatif dans ce domaine est couronné par la conception du modèle standard des particules élémentaires si bien confirmés par les découvertes expérimentales des bosons de jauge et de la particule de Higgs. Cependant, ce modèle ne prend pas en compte la gravitation, et ne doit donc être considéré qu'une approximation de l'unification de toutes les interactions qui pourraient avoir lieu à des échelles extrêmement petites, ou à des énergies et des températures très élevées, lorsque les effets gravitationnels devraient être significatifs. Ainsi, la construction d'une véritable théorie unifiée consiste à inclure la gravitation dans le schéma général des interactions physiques fondamentales, réconciliant les principes de la théorie de la relativité générale avec ceux de la théorie quantique et de la théorie des champs de jauge.

Nous savons que la RG est basée sur les méthodes de la géométrie différentielle pour décrire les phénomènes gravitationnels en termes de propriétés de la variété spatio-temporelle à quatre dimensions. En revanche, les trois autres interactions physiques (électromagnétique, faible et forte) peuvent également être géométrisées en utilisant l'approche de la théorie de jauge de Yang-Mills. Une question naturelle s'est posée de savoir si la théorie de la gravitation peut être formulée de manière cohérente dans le cadre des théories de jauge car le concept de symétrie de jauge a très bien réussi dans la fondation d'autres interactions fondamentales. La réponse n'est pas aussi simple que cela puisse paraître à première vue. Le point subtil est que le modèle standard est basé sur les groupes de symétrie fondamentaux agissant dans les espaces internes, alors que la gravitation est évidemment liée à la symétrie de l'espace-temps lui-même. L'utilisation d'un principe de jauge pour construire une théorie de la gravitation analogue aux célèbres théories de Yang-Mills est, sans doute, l'une des approches les plus attrayantes de la gravitation. Comme proposé pour la première fois par Sciama et Kibble [9, 10], un groupe naturel pour cette tâche est Poincaré composé des transformations homogènes du groupe de Lorentz qui génèrent la courbure de Riemann [11, 12, 13] et les transformations non homogènes responsables de l'apparition de la torsion comme champ de translation.

L'espace-temps dans cette théorie est la variété Riemann-Cartan, dans laquelle, la torsion non-nulle peut être couplée à la densité de spin intrinsèque de la matière et, de cette manière, la partie spin du groupe de Poincaré peut changer la géométrie de la variété comme le fait le tenseur d'impulsion d'énergie. La première tentative d'introduire la torsion dans une théorie de la gravitation était la théorie d'Einstein-Cartan où la courbure scalaire de l'action Einstein-Hilbert est construite à partir des connexions non-symétriques au lieu des symboles de Christoffel. La théorie de jauge de Poincaré qui utilise les mêmes connexions non-symétriques introduit des termes quadratiques à l'action d'Einstein-Hilbert, ce qui offre la possibilité de rendre la théorie renormalisable [14].

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier quelques aspects de la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation. Il est à noter que, depuis la réalisation des théories de la jauge de Poincaré, les tentatives de généraliser les différentes propriétés et les théorèmes de la RG ont été un domaine très actif. Parmi les travaux réalisés nous pouvons citer, l'étude des singularités [15, 16, 17, 18], le théorème de Birkhoff [19, 20, 21], l'existence de solutions exactes [22, 23, 24], la cosmologie [25, 26, 27, 28, 29], le mouvement des particules [30, 31] et l'analyse de la stabilité [32, 33, 34, 35].

Ce mémoire se compose de sept chapitres

Dans le deuxième chapitre, nous exposons un bref rappel sur la théorie de la relativité générale et nous montrons comment dériver les équations d'Einstein.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une formulation "théorie de jauge" pour la gravitation sur la base du groupe de Poincaré. Nous commençons d'abord par un rappel sur les groupes où nous introduisons la notion de groupe, le groupe de Lorentz et le groupe de Poincaré. Ensuite, nous montrons succinctement, comment reformuler l'électrodynamique comme une théorie de jauge du groupe U(1). Finalement, nous considérons la théorie de jauge du groupe de Poincaré.

Dans le quatrième chapitre, nous nous proposons d'étudier la stabilité de la théorie vis-à-vis les degrés de liberté fantômes.

Dans le cinquième chapitre, nous étudions les équations d'Einstein correspondantes et nous cherchons leurs solutions pour un univers en expansion.

Pour le sixième chapitre, nous nous proposons de chercher des solutions à symétrie sphérique en presence de torsion. en tenant en compte la présence du torsion nous allons présenter des solutions à symétrie sphérique.

Finalement, le septième chapitre est une conclusion générale.

Chapitre 2

Relativité Générale

" When forced to summarize the general theory of relativity in one sentence : Time and space and gravitation have no separate existence from matter"
Albert Einstein

2.1 Introduction

Lors l'avènement de la théorie de la relativité restreinte qui stipule que toute interaction physique devrait se propager à une vitesse égale ou inférieure à la vitesse de la lumière, il été constaté que la théorie Newtonienne de la gravitation ne satisfaisait pas à cette exigence. C'est ainsi que Einstein cherchait une théorie de la relativité plus générale qui pourrait rendre compte de la gravité, sans contredire la théorie de la relativité restreinte. En 1915, il a pu formuler la de la relativité générale qui a donc remplacé la théorie de la gravitation universelle de Newton en prenant en compte de nombreux effets qui ne pouvaient pas être expliqués par la dernière. L'idée fondamentale à la base de cette théorie est que le champ de gravitation, que nous mesurons par ses effets sur le mouvement des corps massifs, est en fait une manifestation de la géométrie courbe de l'espace-temps supposé pseudo-Riemannien.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions de base de la relativité générale. Aprés avoir énoncé le principe d'équivalence sur lequel est basée RG, nous exposons brièvement les différents élements de la géométrie Riemannienne. Ensuite nous montrons comment formuler la théorie de la gravitation dans cette géométrie.

2.2 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence est le pilier de la relativité générale, qui stipule que "Aucune expérience en mécanique ne peut distinguer entre un champ gravitationnel et un referentiel accéléré".

Dans sa première version, le principe d'équivalence faibe stipule que la masse inertielle m_i est équivalente à la masse gravitationnelle m_g, ce qui implique que l'accélération attribuée à un corps par un champ gravitationnel est indépendante de sa masse. La deuxième version (principe d'équivalence forte) consiste à maintenir le principe d'équivalence faible valide en présence d'une autre force non gravitationnelle $\overrightarrow{F}$,

$$m\left(\vec{a} - \vec{a}_i + \overrightarrow{\nabla}\phi\right) = \overrightarrow{F} \tag{2.1}$$

où ϕ est le potentiel gravitationnel et $\vec{a}_i$ désigne l'accélération inertielle, survenant dans les systèmes de coordonnées non euclidiens. La dernière équation suggère une autre équivalence, l'origine identique des forces gravitationnelles et inertielles. Cette équivalence permet la possibilité d'éliminer les forces gravitationnelles à un point d'espace-temps donné par un système de coordonnées choisi approprié. Ce principe n'est valable que localement.

Une autre version du principe d'équivalence est que dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, il est impossible de détecter la présence d'un champ gravitationnel et, ainsi, les lois de la physique se réduisent à celles de la relativité restreinte. En d'autres termes, l'espace-temps et les lois physiques peuvent être rendus localement invariants de Lorentz.

2.3 Espace-temps

En relativité générale l'espace-temps est une variété différentielle muni d'une métrique à quatre dimensions. Généralement nous ne pouvons pas soustraire deux points pour obtenir un vecteur qui donne le déplacement d'un point de l'autre. Pour pouvoir généraliser la notion de vecteurs des espaces affines aux variétés, nous devons définir un espace tangent en chaque point de la variété.

2.3.1 Espace tangent

Systèmes de coordonnées

L'espace tangent est l'ensemble de tous les vecteurs tangents au point p dans une variété M, dont sa structure coincide avec la structure de la variété. Dans cet espace, nous pouvons associer un nombre infini des systèmes des coordonnées. Nous définissons une base différentielle "naturelle" pour l'espace tangent T_p dans un point p donné par la dérivée partielle des coordonnées en même point p[36]

$$\widehat{e}_\mu = \partial_\mu \tag{2.2}$$

soit un quadri-vecteur $A \in T_p$. Nous avons alors

$$A = A^{\mu}\widehat{e}_{\mu}. \tag{2.3}$$

Notons bien que l'utilisation d'un indice grec dénote une composante dans la représentation du système des coordonnées (C frame).

Ainsi, nous pouvons construire un espace dual de l'espace tangent, nomé espace cotangent et dénoté par T_{p*}, qui est étendu par les éléments différentiels

$$\widehat{e}^{\mu} = dx^{\mu} \tag{2.4}$$

le 4-vecteur dual $A \in T_{p*}$ est écrit comme suit

$$A = A_{\mu}\widehat{e}^{\mu} \tag{2.5}$$

A_{μ} est la composante covariante du vecteur dual.

Alors un vecteur fait référence à un élément d'espace tangent T_p et un vecteur dual (covecteur) ou 1-forme fait référence à un élément d'espace cotangent T_{p*}.

Tenseur métrique

Le tenseur métrique g est une application entre deux vecteurs u et v pour donner un scalaire

$$u, v \longrightarrow g\,(u, v) = (u, v) = u.v$$

nous définissons le tenseur métrique comme étant un tenseur de type $(0, 2)$

$$g = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}.$$

Où dx^{α} et dx^{β} sont des 1-formes.

Pour obtenir les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique nous faisons la projection de g sur les vecteurs de base e_{α} et e_{β}

$$\begin{aligned} g\,(e_{\alpha}, e_{\beta}) &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}\,(e_{\alpha}, e_{\beta}) \\ &= g_{\mu\nu}\,(dx^{\mu}, e_{\alpha}) \otimes (dx^{\nu}, e_{\beta}) \\ &= g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

avec

$$(dx^{\mu}, e_{\alpha}) = \delta^{\mu}{}_{\alpha}$$

finalement, nous écrivons

$$\begin{aligned} g &= g\,(e_{\alpha}, e_{\beta})\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \\ &= (e_{\alpha}, e_{\beta})\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons la formule de l'élément d'espace-temps ds^2

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

notons bien que dans ce cas $\mathrm{d}x^\mu$ n'est pas d'1-forme mais représente le déplacement infinétisimale entre deux points x^μ et $x^{'\mu} = x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$.

Propriétés -L'inverse de la métrique

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = \delta^\nu_\rho$$

$g^{\mu\nu}$ est l'inverse de $g_{\mu\nu}$.

-$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)}$ est un tenseur symétrique.

-Nous élevons et abaissons les indices par $g_{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu$$

et

$$g_{\mu\rho}A^\rho = A_\mu.$$

-La loi de transformation de la métrique est

$$g^{'}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}g_{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

2.3.2 Formalisme des tétrades

Comme le tenseur métrique est symétrique et peut toujours être ramené à une forme diagonale par une transformation de congruence qui correspond à changement de base dans l'espace tangent à la variété differentielle, nous pouvons construire une base localement orthonormée $\widehat{e}_i$ à partir de la base naturelle de coordonnées $\widehat{e}_\mu(x)$[36]. La matrice de changement de base permettant cette transformation est notée $e^\mu{}_i(x)$ avec

$$\widehat{e}_i = e^\mu{}_i(x)\widehat{e}_\mu(x). \tag{2.7}$$

Inversement nous pouvons écrire

$$\widehat{e}_\mu(x) = e^i{}_\mu(x)\widehat{e}_i. \tag{2.8}$$

L'inverse du vierbein a des composantes qui satisfont la condition d'orthogonalité suivante

$$e^\mu{}_i(x)e_\nu{}^i(x) = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.9}$$

et

$$e_\mu{}^i(x)e^\mu{}_j(x) = \delta^i{}_j \tag{2.10}$$

comme la base tétrade $\widehat{e}_i$ est localement orthonormée, la métrique est localement Minkowskienne

$$g(\widehat{e}_i, \widehat{e}_j) = \eta_{ij},$$

ce qui nous donne

$$g(\widehat{e}_\mu, \widehat{e}_\nu) = e^i{}_\mu(x) e^j{}_\nu(x) g(\widehat{e}_i, \widehat{e}_j)$$

et, par conséquent,

$$g_{\mu\nu}(x) = e^i{}_\mu(x) e^j{}_\nu(x) \eta_{ij}. \tag{2.11}$$

2.3.3 Courbure de l'espace temps

Nous définissons la derivée covariante des composantes contravariantes A^μ d'un quadrivecteur A par

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} A^\rho \tag{2.12}$$

où $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ sont les connexions affines déterminant le transport parallele d'un quadrivecteur A. A partir de la propriété qu'un scalaire se transforme parallelement en lui même, nous pouvons en déduire la dérivée covariante de la composante $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$,

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} A_\rho. \tag{2.13}$$

Ces définitions peuvent être facilement généralisées aux cas de tenseurs covariants, contravariants ou mixtes. Nous avons alors, pour un tenseur T de composantes $T^\mu{}_\nu$,

$$\nabla_\rho T^\mu{}_\nu = \partial_\rho T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} T^\mu{}_\sigma. \tag{2.14}$$

Dans la théorie de la relativité génerale, la géometrie de l'éspace-temps est une variété pseudo-Riemannienne, sur laquelle la dérivée covariante du tenseur métrique s'annulle

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\rho\mu} = 0 \tag{2.15}$$

ce qui nous permet d'écrire les connexions en fonction de la métrique

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right) \tag{2.16}$$

où $g^{\lambda\rho}$ est le tenseur métrique contravariant dont les composantes sont les éléments inverse de la matrice $g_{\lambda\rho}$

$$g^{\lambda\rho} g_{\sigma\rho} = \delta^\sigma_\lambda \tag{2.17}$$

et δ^σ_λ est le symbole de Kronecker (un tenseur).

Pour un champ de vecteur A^μ les dérivées covariantes successives ne commutent pas,

$$\nabla_\lambda \nabla_\nu A^\mu \neq \nabla_\nu \nabla_\lambda A^\mu, \tag{2.18}$$

et le commutateur des deux dérivées definit le tenseur de courbure ou tenseur dre Riemann $R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda}$ par

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\nu]\, A^\mu \equiv R^{\mu}{}_{\rho\lambda\nu} A^\rho. \tag{2.19}$$

En utilisant les définitions des dérivées covariantes, nous obtenons les composantes du tenseur de Riemann

$$R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}. \tag{2.20}$$

Ce tenseur vérifie les propriétés de symétrie suivantses

$$R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda} = -R^{\mu}{}_{\rho\lambda\nu},$$

$$R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda} + R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} + R^{\mu}{}_{\lambda\rho\nu} = 0 \tag{2.21}$$

et

$$R_{\mu\rho\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\mu\rho} \tag{2.22}$$

où $R_{\mu\rho\nu\lambda} = g_{\mu\nu} R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda}$.

Le tenseur de Riemann vérifie aussi les identités de Bianchi

$$\nabla_\sigma R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda} + \nabla_\lambda R^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} + \nabla_\nu R^{\mu}{}_{\rho\lambda\sigma} = 0. \tag{2.23}$$

La contraction des indices du tenseur de Riemann nous donne le tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\mu\lambda\nu} \tag{2.24}$$

qui est un tenseur symétrique $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

La contraction du tenseur de Ricci nous donne le scalaire de courbure

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.25}$$

2.4 Gravitation : Equations d'Einstein

2.4.1 Dérivation directe

La contraction des identités de Bianchi conduit à l'équation

$$\nabla_\nu \left(R^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R \delta^{\nu}_{\mu} \right) = 0 \tag{2.26}$$

qui est formellement analogue à l'équation de continuité covariante pour le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Dans un espace-temps courbe l'équation de continuité de $T_{\mu\nu}$ s'écrit

$$\nabla_\nu T^{\nu}{}_{\mu} = 0. \tag{2.27}$$

Cette analogie entre (2.26) et (2.27) a conduit Einstein à proposé les équations qui déterminent le champ de gravitation engendré par une distribution de matière

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.28}$$

où $G_{\mu\nu}$ est appelé tenseur d'Einstein et la constante d'Einstein κ est reliée à la constante de Newton G par la relation

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{2.29}$$

2.4.2 Principe de moindre action

En définissant les équations d'Einstein (2.28), pour la théorie de la relativite générale, peuvent être, également, obtenues en minimisant l'action

$$S = S_E + S_m \tag{2.30}$$

où S_m est l'action de la matière donnée par

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{|g|} d^4x \tag{2.31}$$

et S_E est l'action d'Einstein-Hilbert associée au champ gravitationnel

$$S_E = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{|g|} d^4x \tag{2.32}$$

avec$\sqrt{|g|}d^4x$ (où $g = \det(g_{\mu\nu})$) est la densité invariante de 4-volume en coordonnées curvilignes.

Pour calculer la variation de l'action d'Einstein-Hilbert lors d'une variation $\delta g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique, nous érivons d'abord

$$\delta(R\sqrt{|g|}) = \sqrt{|g|}\left[g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}R\frac{\delta|g|}{|g|}\right]. \tag{2.33}$$

A l'aide de la condition de compatibilité $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$, et compte tenu du fait que

$$\nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda(\sqrt{|g|}A^\lambda) \tag{2.34}$$

nous pouvons montrer que le premier terme dans (2.33) conduit à une divergence qui disparait après intégration par parties, car

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}\right] \\ &= \nabla_\lambda(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}) \\ &= \partial_\lambda(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Compte tenu du fait que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\delta g_{\lambda\rho}\,, \quad \frac{\delta|g|}{|g|} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,, \tag{2.36}$$

nous obtenons alors

$$\delta S_E = \frac{1}{2\kappa}\int \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,d^4x\,. \tag{2.37}$$

La variation de l'action de la matière S_m étant, par définition du tenseur d'énergie-impulsion,

$$\delta S_m \equiv -\frac{1}{2}\int T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\,d^4x\,, \tag{2.38}$$

la variation de l'action totale (2.30) conduit bien aux équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,. \tag{2.39}$$

2.4.3 Formalisme de Palatini

Idée principale

Comme mentionné avant, en relativité générale la courbure de l'espace-temps (la variété) est uniquement déterminée par les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique, car les connexions supposées métriques (metric compatible $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$) peuvent être écrites en fonction des composantes $g_{\mu\nu}$.

Cependant, en géométrie différentielle, la métrique et la connexion sont deux grandeurs indépendantes : la première mesure les distances entre les points de la variété tandis que la seconde définit le transport parallèle des vecteurs et des tenseurs et détermine ainsi la courbure intrinsèque de la variété.

Le formalisme de Palatini consiste à considéré la métrique et la connexion comme des champs indépendants. Dans ce cas, comme nous alons le voir, c'est les équations dynamiques qui imposent la condition de compatibilité $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$.

Action de Palatini

Lorsque la métrique et la connexion sont indépendants, l'action de Palatini s'écrit sous la forme[37]

$$S\left[g_{\mu\nu},\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}\right]=\int d^{4}x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right). \tag{2.40}$$

Le facteur $\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}$ ne dépend que de $g^{\mu\nu}$ et $R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right)$ ne dépend que des Γ. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta S\left[g_{\alpha\beta},\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\right] &= \int d^{4}x\delta\left[\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right]\\ &= \int d^{4}x\left[\delta\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\right)R_{\alpha\beta}+\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right],\end{aligned}$$

la définition du tenseur de Ricci est donnée par

$$R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right)=\partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}. \tag{2.41}$$

La variation du tenseur de Ricci est comme suit

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right) &= R_{\mu\nu}\left(\Gamma+\delta\Gamma\right)-R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right)\\ &= \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}-\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\\ &\quad -\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}+0\left(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right)^{2}\end{aligned}$$

nous ajoutons et nous soustrayons le terme $\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right) &= \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}\\ &\quad -\left(\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}\right)\end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$\delta R_{\mu\nu}\left(\Gamma\right)=\nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}-\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma} \tag{2.42}$$

avec

$$\nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=\partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}$$

et

$$\nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}=\partial_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}-\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\lambda}$$

nous savons que

$$\delta\left(\sqrt{|g|}g^{\alpha\beta}\right)=\sqrt{|g|}\left[\delta g^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right]$$

et en tenant compte de la propriété

$$g^{\alpha\beta}\left(\nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right)=\nabla_{\sigma}\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\right)-\left(\nabla_{\alpha}g^{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}$$

nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned}\delta S\left[g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\right] &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left[R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right]\delta g^{\alpha\beta} \\ &+\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\sigma\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}-g^{\alpha\sigma}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\right) \\ &+\int d^4x\left[\sqrt{|g|}\left(\delta^\beta_\sigma\nabla_\lambda g^{\alpha\lambda}-\nabla_\sigma g^{\alpha\beta}\right)\right]\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} \qquad (2.43)\end{aligned}$$

dans le formalisme de Palatini les équations qui déterminent la dynamique des champs $g^{\alpha\beta}$ et $\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}$ sont données par

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \qquad (2.44)$$

et

$$\frac{\delta S}{\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}} = 0 \qquad (2.45)$$

ce qui nous donne

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \qquad (2.46)$$

et

$$\delta^\beta_\sigma\nabla_\lambda g^{\alpha\lambda}-\nabla_\sigma g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (2.47)$$

la première équation représente l'équation d'Einstein dans le vide si la connexion est celle de Levi-Civita. Pour montrer cela, contractons $\beta = \sigma$ dans la deuxième équation. Nous obtenons alors la condition de la compatibilité métrique

$$4\nabla_\lambda g^{\alpha\lambda}-\nabla_\sigma g^{\alpha\sigma} = 0 \Rightarrow \nabla_\lambda g^{\alpha\lambda} = 0,$$

qui implique que la connexion est de type Christoffel (de Levi-Civita) et l'équation (2.46)est donc équivalente à celle d'Einstein.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre préliminaire, nous avons exposé un bref rappel sur la théorie de la relativité générale. D'abord nous avons énoncé le principe d'équivalence qui affirme que, les force gravitationnelles sont, localement identiques aux effets de l'accélération du référentiel. Ensuite, nous avons exposé quelques propriétés de l'espace-temps (considéré comme une variété pseudo-Riemannienne). Finalement, nous avons montré comment dériver les équations d'Einstein.

Par ailleurs, nous avons introduit deux formalismes qui sont d'une grande importance dans le développement de nos travaux. Il s'agit du formalisme des tétrades et du formalisme de Palatini.

Chapitre 3

Théorie de jauge de Poincaré : Une théorie de la gravitation

"Einsteins theory of General Relativity has a mathematical structure very similar to Yang-Mills theory"
Chen-Ning Yang

3.1 Introduction

Une théorie de jauge est une théorie quantique des champs basée sur les propriétés de symétries et d'invariances des équations sous certaines transformations d'un groupe locale appelé "groupe de jauge". Les théories de jauges produisent automatiquement des quantités conservées comme le courant, l'énergie-impulsion...etc. La construction des théories des champs en interaction peut être guidée par un principe de dynamique relié à l'exigence de l'invariance de jauge locale.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une formulation "théorie de jauge" pour la gravitation sur la base du groupe de Poincaré. Nous commençons d'abord par un rappel sur les groupes où nous introduisons la notion de groupe, le groupe de Lorentz et le groupe de Poincaré. Ensuite, nous montrons succinctement, comment reformuler l'électrodynamique comme une théorie de jauge du groupe $U(1)$. Finalement, nous considérons la théorie de jauge du groupe de Poincaré.

3.2 Rappel sur les groupes

Le groupe est une structure algébrique qui sert à étudier les symétries et les invariances des lois physiques, et on dit qu'un groupe de transformations est un groupe de symétrie s'il laisse l'action invariante et donc laisse les lois physiques qui découlent de cette action invariantes.

3.2.1 Définition d'un groupe

Soit un groupe G ensemble des éléments $g_i \in G$, muni d'une opération $\bullet$, l'ensemble et l'opération doivent satisfaire les conditions suivantes

*Loi de composition interne ; Si g_i et $g_j \in G$, alors

$$g_i \bullet g_j \in G \tag{3.1}$$

*L'associativité ; Pour tout g_i, g_j et $g_k \in G$

$$g_i \bullet (g_j \bullet g_k) = (g_i \bullet g_j) \bullet g_k \tag{3.2}$$

*L'élément neutre ; Il existe un élément $g_1 \in G$ tel que

$$g_1 g_i = g_i g_1 = g_i \tag{3.3}$$

*L'élément inverse ; Pour chaque élément $g_i \in G$, il existe un élément inverse $g_i^{-1} \in G$ tel que

$$g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1} = g_1 \tag{3.4}$$

-En général $[g_i, g_k] \neq 0$, si nous avons un groupe dont $[g_i, g_k] = 0$ ce groupe est dit abélien.

-Notons que le nombre des éléments d'un groupe peut être fini ou infini.

-L'ensemble de $n \times n$ matrices réelles qui sont non singulières forment un groupe sous l'opération de multiplication matricielle.

-Généralement ce groupe est noté par $Gl\,(n, r)$ dans le cas des matrices réelles, l'extension complexe de ce groupe est notée par $Gl\,(n, c)$.

-Le sous-ensemble de $Gl\,(n, r)$ contient des matrices avec det $= +1$ forme un autre groupe noté $Sl\,(n, r)$ et son extension complexe est désignée par $Sl\,(n, c)$.

-Nous définissons un autre groupe qui s'appel le groupe unitaire $U\,(n)$ qui est constitué de $n \times n$ matrices unitaires (pour la vérification en tenant en compte que le produit des matrices unitaires est unitaire), de même le groupe spéciale unitaire est un sous ensemble composé des matrices unitaires de det $= 1$.

Principaux groupes de Lie

-$O\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices réelles orthogonales sur R vérifiant $M^T M = I_n$ (groupe orthogonal)

-$SO\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices réelles orthogonales sur R vérifiant $M^T M = I_n$ et $\det M = 1$ (groupe spécial orthogonal)

-$U\,(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices complexes unitaires sur C vérifiant $M^* M = I_n$ (groupe unitaire)

-$SU(n)$ est le groupe multiplicatif des $n \times n$ matrices complexes unitaires sur C vérifiant $M^*M = I_n$ et $\det M = 1$ (groupe spécial unitaire)

3.2.2 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz est un groupe de transformations linéaires des coordonnées qui laisse l'invariance des lois de la physique et surtout la loi de propagation de la lumière dans le vide et donc l'invariance de la métrique, il inclut deux types de symétries ;

-Les transformations spéciales de Lorentz.

-Les rotations statiques de l'espace.

Définition mathématique

La propriété qui caractérise le groupe de Lorentz est
$\forall \Lambda \in L$, $\forall (x, y) \in M^2$

$$(\Lambda x)^T \eta (\Lambda y) = x^T \eta y$$

où Λ sont 4×4 matrices réelles de Lorentz qui vérifient $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$
$\eta = diag(+1, -1, -1, -1)$ la métrique de Minkowski.
L le groupe de Lorentz et M l'espace-temps de Minkowski.

3.2.3 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est le groupe des transformations affines de l'espace-temps, inclut quatre types de symétrie ;

-Les translations dans l'espace-temps.

-Les rotations dans l'espace.

-Les transformations de Lorentz propres ($\det \Lambda = +1$) et orthochrones $(\Lambda_{00} \succeq 1)$.

-Le renversement de temps T et la parité P.

Nous définissons le groupe de Poincaré P comme un produit semi direct du groupe de Lorentz et des vecteurs d'espace-temps

$$P = L \ltimes M$$

de même le groupe de Poincaré propre est défini comme

$$P_0 = L_0 \ltimes M$$

Définition mathématique

Nous introduisons un élément du groupe de Poincaré (Λ, g) (où $\Lambda \in L$ et $g \in M$) à partir de produit semi direct

$$(\Lambda, g)\left(\Lambda', g'\right) = \left(\Lambda\Lambda', g + \Lambda g'\right)$$

Algèbre de Poincaré

C'est l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, qui est caractérisée par le crochet de Lie

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.5}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = \eta_{\mu\sigma} P_\nu - \eta_{\nu\sigma} P_\mu \tag{3.6}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\sigma\mu} M_{\nu\rho} + \eta_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} - \eta_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\nu} M_{\mu\rho} \tag{3.7}$$

où M, P et η sont le générateur de transformation de Lorentz, le générateur de translation et la métrique de Minkowski respectivement.

3.3 Théorie de jauge $U(1)$

La formulation de l'éléctromagnétique de Maxwell en 1864 était la première théorie des champs à avoir une symétrie de jauge,

$$A_i \rightarrow A_i' = A_i + \partial_i \alpha.$$

Plus tard, la théorie d'éléctrodynamique quantique est formuler comme une théorie de jauge du groupe $U(1)$. Dans cette partie nous montrons comment construire la théorie de jauge $U(1)$ en suivant la référence [38].

Considérons le lagrangien $\mathcal{L}$ décrivant le champ d'un seul fermion libre de masse m $(\hbar = c = 1)$

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^i \partial_i \psi - m\overline{\psi}\psi \tag{3.8}$$

ce lagrangien est invariant sous la transformation

$$U_\alpha = e^{i\alpha} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \psi' \equiv e^{i\alpha}\psi & (3.10) \\ \overline{\psi} &\longrightarrow \overline{\psi}' \equiv \overline{\psi} e^{-i\alpha} & (3.11) \end{aligned}$$

où α est une constante. L'invariance de symétrie sous la transformation (3.10) conduit à un courant conservé proportionnel à

$$J^i = \overline{\psi}\gamma^i \psi. \tag{3.12}$$

Considérons maintenant, le cas local où α est une fonction du quadri-vecteur x, $\alpha \equiv \alpha(x)$.

Dans ce cas, le lagrangien se transforme en $\mathcal{L}'$ avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= ie^{-i\alpha}\overline{\psi}\gamma^i\left[e^{i\alpha}\partial_i\psi + ie^{i\alpha}\psi\partial_i\alpha\right] - m\overline{\psi}\psi \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - J^i\partial_i\alpha. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous remarquons ici, que $\mathcal{L}$ n'est pas invariant sous la transformation locale à cause du terme $J^i\partial_i\alpha$. La question est donc quelle est la modification requis en $\mathcal{L}$ pour que notre théorie soit invariante sous les transformations

$$\psi \longrightarrow \psi' \equiv e^{i\alpha(x)}\psi,\ \overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}' \equiv \overline{\psi}e^{-i\alpha(x)}, \tag{3.14}$$

pour réaliser cette propriété, nous introduisons un nouvel ensemble de variables $A^i(x)$ et nous considérons le lagrangien modifié $\mathcal{L}_1$ avec

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + qA^iJ_i = \mathcal{L} + qA^i(x)\,J_i(x)\,,\ q \equiv \text{constante} \tag{3.15}$$

Ici, nous supposons que les quantités A^i se transforment sous les transformations (3.14) comme

$$A^i \longrightarrow A'^i = A^i + \frac{1}{q}\partial^i\alpha(x)\,. \tag{3.16}$$

Compte tenu du fait que J^i dans (3.12) est invariant sous les transformations (3.14)

$$J'^i = \overline{\psi}'\gamma^i\psi' = J^i \tag{3.17}$$

et en utilisant $(3.13), (3.17)$ et (3.16), nous obtenons le résultat souhaité

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1' &= \mathcal{L}' + qA'^iJ_i' = \mathcal{L} - J^i\partial_i\alpha(x) + q\left[A^i + \frac{1}{q}\partial^i\alpha(x)\right]J_i \\ &= \mathcal{L} + qA^iJ_i = \mathcal{L}_1\end{aligned}$$

Il est clair que, comme J^i est un 4-vecteur, $A^i(x)$ doit être un champ vectoriel pour que $\mathcal{L}_1$ soit un scalaire.

Les transformations (3.10) où α est une constante sont appelées transformations de jauge globale, et les transformations (3.14) et (3.17) où $\alpha \equiv \alpha(x)$ est une fonction de x, sont appelées transformations de jauge locale.

Maintenant, nous voulons comprendre la nature physique de $A^i(x)$. En premier lieu, nous écrivons $\mathcal{L}_1$ sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= i\overline{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\overline{\psi}\psi + q\overline{\psi}\gamma^iA_i\psi \\ &= i\overline{\psi}\left[\gamma^i(\partial_i - iqA_i)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi.\end{aligned} \tag{3.18}$$

De la théorie fondamentale de l'équation de Dirac, nous en déduisons que $A^i(x)$ est juste le potentiel vecteur pour le champ éléctromagnétique et q est la charge de particule.

Bien que $\mathcal{L}_1$ est invariant sous les transformations de jauge, il ne peut pas être le lagrangien complet pour le système, car il ne contient pas le terme d'energie cinétique pour $A^i(x)$, il faut donc ajouter un terme quadratique en dérivée de $A^i(x)$ et qu'il doit être invariant sous transformations de jauge.

La combinaison

$$F_{ik} \equiv \partial_i A_k - \partial_k A_i$$

est évidemment une invariante de jauge, donc le terme d'energie cinétique est donné par

$$-\frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}$$

finalement, nous arrivons au lagrangien invariant de jauge complet

$$\mathcal{L}_{ED} = i\overline{\psi}\left[\gamma^i\left(\partial_i - iqA_i\right)\right]\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{ik}F^{ik} \tag{3.19}$$

$\mathcal{L}_{ED}$ représente le lagrangien de l'éléctrodynamique quantique.

Nous pouvons résumer ce que nous avons fait comme suit ; Nous avons commencé par un lagrangien qui était invariant sous une transformation globale, nous avons constaté qu'un tel lagrangien doit être modifié pour être invariant sous les transformations locales par l'introduction de quelque degrès de liberté supplémentaire $A^i(x)$. Enfin, nous avons ajouté le terme d'energie cinétique pour obtenir la forme complète du lagrangien de système. Le champ $A^i(x)$ est introduit pour maintenir l'invariance de jauge locale comme un champ de jauge.

La dérivée covariante est défini par $D_i = \partial_i - iqA_i$ qui permet de coupler le champ de jauge à d'autres champs.

Nous savons également que l'intéraction électromagnétique est une bonne interaction renormalisable ce fait génère l'espoir qu'en utilisant des symétries globales plus générales et en construisant leurs versions locales, et donc nous pouvons décrire les autres interactions de la nature.

3.4 Théorie de jauge de Poincaré

Il est bien évident que le principe d'équivalence implique que la RG d'Einstein est invariante sous les transformations locales de Poincaré [39]. Cependant, pour construire une théorie de jauge pour la gravitation, nous procédons conformément à la philosophie habituelle des théories de jauge en tenant compte que, comme montré par plusieurs expériences, en l'absence du champ gravitationnel, le groupe symétrie des interactions fondamentales est le groupe de Poincaré global. Ainsi, au lieu de considérer la symétrie de Poincaré locale comme une conséquence du principe d'équivalence, nous considérons d'abord une théorie physique invariante sous le groupe de Poincaré global et nous supposons, ensuite, que les paramètres du groupe soient des fonctions de coordonnées de l'espace-temps, pour avoir un groupe de Poincaré local. Pour rendre la théorie invariante sous les transformations de Poincaré locales, nous devons introduire de nouveaux champs compensateurs. Ces nouveaux champs représentent l'interaction gravitationnelle.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer comment la transition de la symétrie globale à la symétrie locale nous conduit à la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation qui contient la RG comme un cas particulier. Nous suivons la référence [40].

3.4.1 Symétrie de Poincaré globale

Champ de matière

Considérons un champ de matière dans l'espace-temps de Minkowski. Ce système est invariant sous les transformations de Poincaré globale

$$\begin{aligned} x^{'i} &= \Lambda^i{}_j x^j + \varepsilon^i, \text{ où } \Lambda = \delta^i{}_j + \omega^i{}_j, \\ &= x^i + \omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ici, les composantes $\Lambda^i{}_j$ et ε^i sont considérées indépendantes des coordonnées (ω^{ij} et ε^i sont les dix paramètres du groupe de Poincaré). Sous cette transformation un champ de matière appartenant à une représentation arbitraire du groupe de Lorentz, se transforme comme

$$\phi^{'}(x^{'}) = e^{\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}}\phi(x) = \left[1 + \frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\right]\phi(x) \tag{3.21}$$

où Σ_{ij} sont les générateurs du groupe de Lorentz dans la représentation considérée. Pour commencer, nous calculons d'abord la variation $\delta_o\phi(x)$ avec

$$\delta_o\phi(x) = \phi^{'}(x) - \phi(x) \tag{3.22}$$

Ici, nous utilisons la notation δ_o au lieu de δ, pour faire la transformation similaire à une transformation de jauge. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \phi^{'}(x^{'}) &= \phi^{'}(x^i + \omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i) \\ &= \phi^{'}(x) + (\omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i)\partial_i\phi(x) \\ &= \phi(x) + \frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij}\phi(x), \end{aligned} \tag{3.23}$$

ce qui donne

$$\phi^{'}(x) - \phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} - \omega^{ij}\ x_j\partial_i - \varepsilon^i\partial_i)\phi(x).$$

Comme le parametre ω^{ji} est supposé antisymétrique $\omega^{ji} = -\omega^{ij}$, nous pouvons écrire

$$\phi^{'}(x) - \phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}\Sigma_{ij} - \frac{1}{2}\omega^{ij}\ x_j\partial_i - \frac{1}{2}\omega^{ji}\ x_i\partial_j - \varepsilon^i\partial_i)\phi(x) \tag{3.24}$$

pour obtenir finalement,

$$\delta_o\phi(x) = (\frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i)\phi(x) = P\phi(x) \tag{3.25}$$

avec

$$P = \frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i \tag{3.26}$$

où $M_{ij} = \Sigma_{ij} + x_i\partial_j - x_j\partial_i$ et $p_i = -\partial_i$ sont les générateurs des transformations de Poincaré.

Pour la variation de $\delta_o\partial_k\phi(x)$, nous utilisons le fait que ∂_k et δ_o commutent pour écrire

$$\delta_o\partial_k\phi(x) = \partial_k\delta_o\phi(x) = \partial_k\left[(\frac{1}{2}\omega^{ij}M_{ij} + \varepsilon^i p_i)\phi(x)\right]. \tag{3.27}$$

Nous obtenons alors

$$\delta_o\partial_k\phi(x) = P\partial_k\phi(x) + (\partial_k P)\,\phi(x) = P\partial_k\phi(x) + \omega_k{}^i\partial_i\phi(x).$$

Invariance de Poincaré globale

Considérons maintenant une théorie des champs décrite par le lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, où les champs $\phi^i(x)$ représentent les variables dynamiques. Les équations de mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange qui découlent du principe de moindre action pour l'action intégrale

$$S(\Omega) = \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) \tag{3.28}$$

Ici, nous supposons que $\mathcal{L}$ dépend explicitement de x, Ω. Soit les transformations d'espace temps

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \zeta^\mu(x) \\ &= x^\mu + \omega^\mu{}_\nu(x)\,x^\nu + \varepsilon^\mu(x)\,. \end{aligned}$$

Calculons la variation de l'action intégrale $S(\Omega)$. Comme nous avons considéré la variation δ_o au lieu de δ, nous calculons $\delta S(\Omega)$ comme suit

$$\begin{aligned} \delta S(\Omega) &\equiv \int_\Omega \Delta\mathcal{L}d^4x = \delta\int_\Omega d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) \\ &= \int_\Omega \left[\left(d^4x' - d^4x\right)\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) + d^4x\ \delta(\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x))\right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \partial_k\phi; x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{3.30}$$

Pour $d^4x^{'} - d^4x$, nous utilisons la loi de transformation

$$d^4x^{'} = \left|\frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu}\right| d^4x$$

et la propriété

$$\det e^S = e^{trS}.$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu}\right) &= \det\left(\delta^\nu{}_\mu + \partial_\mu\zeta^\nu(x)\right) \\ &= 1 + \partial_\mu\zeta^\mu(x) \end{aligned} \tag{3.31}$$

ce qui nous donne

$$d^4x^{'} - d^4x = \partial_\mu\zeta^\mu(x)d^4x.$$

Calculons maintenant $\delta S\left(\Omega\right)$. En tenant compte du fait que $\delta x^\mu = x^{'\mu} - x^\mu = \zeta^\mu(x)$, nous pouvons écrire la variation $\delta S\left(\Omega\right)$ sous la forme

$$\delta S\left(\Omega\right) = \int_\Omega d^4x\Delta\mathcal{L}. \tag{3.32}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi + \zeta^\mu(x)\partial_\mu\mathcal{L} + \partial_\mu\zeta^\mu(x)\mathcal{L}\right] \\ \Delta\mathcal{L} &= \delta_0\mathcal{L} + \zeta^\mu\partial_\mu\mathcal{L} + \partial_\mu\zeta^\mu\mathcal{L} \end{aligned} \tag{3.33}$$

où

$$\delta_0\mathcal{L} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi. \tag{3.34}$$

Pour que la théorie soit invariante, il faut que $\Delta\mathcal{L} = 0$. D'après l'équation d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right) \tag{3.35}$$

et comme $\omega^\mu{}_\mu = 0$ et

$$\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right)\delta_0\phi = \partial_k\left(\delta_0\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\phi)}\delta_0\partial_k\phi, \tag{3.36}$$

nous obtenons

$$\delta S\left(\Omega\right)=\int\limits_{\Omega}d^{4}x\partial_{\mu}\Lambda^{\mu} \tag{3.37}$$

avec

$$\Lambda^{\mu}=\zeta^{\mu}(x)\mathcal{L}+\delta^{\mu}{}_{k}\left(\delta_{0}\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{k}\phi)}\right). \tag{3.38}$$

3.4.2 Symétrie de Poincaré locale

Supposons que la théorie décrite par le Lagrangien de matière $\mathcal{L}_M=\mathcal{L}_M(\phi,\partial_k\phi)$ est invariante sous les transformations de Poincaré globales. Maintenons nous voulons généraliser ces transformations en supposant que ω^{ij} et ε^i sont des fonctions des coordonnées, $\omega^{ij}(x)$ et $\varepsilon^i(x)$.

La condition d'invariance (3.33) est maintenant violée pour deux raisons

1- $\delta_0\partial_k\phi$ se change, car nous avons

$$\delta_{0}\phi=(\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)M_{ij}+\varepsilon^{i}(x)p_{i})\phi(x) \tag{3.39}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_{k}\delta_{0}\phi &= \partial_{k}\left[(\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)M_{ij}+\varepsilon^{i}(x)p_{i})\phi(x)\right] \\ &= P\partial_{k}\phi(x)-\partial_{k}\varepsilon^{i}(x)\partial_{i}\phi(x)+\frac{1}{2}\partial_{k}\omega^{ij}(x)M_{ij}\phi(x)+\omega_{k}{}^{i}\partial_{i}\phi(x).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Comme $\frac{1}{2}\omega^{ij}(x)\partial_k(M_{ij})=\omega_k{}^{i}\partial_i$, nous pouvons écrire $\delta_0\partial_k\phi$ sous la forme

$$\delta_{0}\partial_{k}\phi=P\partial_{k}\phi-\left(\partial_{k}\zeta^{\nu}\right)\partial_{\nu}\phi+\frac{1}{2}(\partial_{k}\omega^{ij}(x)\Sigma_{ij}\phi(x) \tag{3.41}$$

où ous avons utilisé la propriété$\partial_\mu=\delta^i{}_\mu\partial_i$.

Remarque : Nous notons $\delta_0\partial_k\phi$ dans le cas d'une symétrie locale par $\delta_{0*}\partial_k\phi$.

La différence entre la variation $\delta_{0*}\partial_k\phi$ dans le cas d'une symétrie locale et la variantion $\delta_0\partial_k\phi$ la symétrie globale n'est pas nulle

$$\delta_{0*}\partial_{k}\phi-\delta_{0}\partial_{k}\phi=\frac{1}{2}(\partial_{k}\omega^{ij}(x)\Sigma_{ij}\phi(x)-\left(\partial_{k}\zeta^{\nu}\right)\partial_{\nu}\phi(x)-\omega_{k}{}^{i}\partial_{i}\phi(x)\neq 0 \tag{3.42}$$

2-Dans une symétrie locale, le terme $\partial_\mu\zeta^\mu(x)$ n'est pas nul

$$\partial_{\mu}\zeta^{\mu}(x)=\left(\partial_{\mu}\omega^{\mu}{}_{\nu}(x)\right)x^{\nu}+\partial_{\mu}\varepsilon^{\mu}(x)\neq 0.$$

Nous concluons donc que

$$\Delta\mathcal{L}\neq 0 \tag{3.43}$$

alors il y a une violation de l'invariance locale, il faut donc faire des modifications pour éliminer le problème de la non-invariance et rendre la théorie invariante. Nous allons traiter ce problème en deux parties ; premièrement nous voulons éliminer la non-invariance du terme

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \zeta^\mu\partial_\mu\mathcal{L},$$

et deuxièmement nous serons intéressés au terme

$$\partial_\mu\zeta^\mu\mathcal{L}.$$

Dérivée covariante et champs de compensation

Premièrement, nous introduisons un nouveau lagrangien $\mathcal{L}_M' = \mathcal{L}_M\left(\phi, \triangledown_k\phi\right)$ en remplaçant la dérivée ordinaire par la dérivée covariante $\partial_k \rightarrow \triangledown_k$. Comme dans le cas de la dérivée ordinaire, la dérivée covariante doit se transformer comme suit

$$\delta_o\nabla_k\phi(x) = P\nabla_k\phi + \omega_k{}^i\nabla_i\phi. \tag{3.44}$$

Pour obtenir la dernière loi de transformation nous définissons la dérivé covariante par

$$\nabla_\mu\phi = \left(\partial_\mu + A_\mu\right)\phi,\ A_\mu \equiv \frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} \tag{3.45}$$

et

$$\nabla_k\phi = \delta^\mu{}_k\nabla_\mu\phi - A^\mu{}_k\nabla_\mu\phi, \nabla_\mu\phi \equiv h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi. \tag{3.46}$$

La règle de transformation de la dérivée covariante $\nabla_\mu\phi$ est donnée par

$$\delta_0\nabla_\mu\phi = P\nabla_\mu\phi - \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)\nabla_\nu\phi. \tag{3.47}$$

Cette dernière relation nous permet d'éliminer le terme $\partial_k\omega^{ij}$ apparaissant dans la relation(3.41). Elle permet, également, de définir le champ de compensation de Lorentz $A^{ij}{}_\mu$. Pour la dérivée covariante $\nabla_k\phi$, nous définissons le champ $h_k{}^\mu = \delta^\mu{}_k - A^\mu{}_k$. Nous introduisons le champ $b^\mu{}_k$, l'inverse de $h_k{}^\mu$, avec

$$b^k{}_\mu h_i{}^\mu = \delta^k{}_i\ ,\ b^k{}_\mu h_k{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu. \tag{3.48}$$

Les transformations des champs $b^\mu{}_k$ et $A^{ij}{}_\mu$ sont données par

$$\delta_0 b^k{}_\mu = \omega^k{}_s b^s{}_\mu - \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)b^k{}_\lambda - \zeta^\lambda\partial_\lambda b^k{}_\mu \tag{3.49}$$

et

$$\delta_0 A^{ij}{}_\mu = -\triangledown_\mu\,\omega^{ij} - \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)A^{ij}{}_\lambda - \zeta^\lambda\left(\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu\right). \tag{3.50}$$

Maintenant, nous voulons montrer les relations (3.49) et (3.50) ;

1-Calculons la variation de $\delta_0\nabla_k\phi$ à partir de la relation (3.46)

$$\delta_0\nabla_k\phi = \delta_0\left(h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi\right) = \left(\delta_0 h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}\left(\delta_0\nabla_\mu\phi\right) \tag{3.51}$$

nous remplaçons le dernier terme par la relation (3.47) , et il reste donc de calculer $\delta_0 h_k{}^{\mu}$, en utilisant la relation (3.48)

$$\delta_0\left(b^k{}_{\mu}h_k{}^{\nu}\right) = \delta_0\delta^{\nu}{}_{\mu} = 0$$

$$b^k{}_{\mu}\left(\delta_0 h_k{}^{\nu}\right) = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu} \tag{3.52}$$

multiplions cette dernière relation par $h_i{}^{\mu}$

$$h_i{}^{\mu}b^k{}_{\mu}\left(\delta_0 h_k{}^{\nu}\right) = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu}$$

$$\delta_0 h_i{}^{\nu} = -\left(\delta_0 b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu} \tag{3.53}$$

nous remplaçons (3.49) dans (3.53) , nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta_0 h_i{}^{\nu} &= -\left[\omega^k{}_s b^s{}_{\mu} - \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)b^k{}_{\lambda} - \zeta^\lambda\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right]h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu} \\ &= -\omega^k{}_s\delta^s{}_i h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)\delta^{\nu}{}_{\lambda}h_i{}^{\mu} + \zeta^\lambda\left(\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right)h_k{}^{\nu}h_i{}^{\mu} \end{aligned} \tag{3.54}$$

à partir de la relation (3.48) , nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\left(b^k{}_{\mu}h_i{}^{\mu}\right) &= 0 \\ \left(\partial_\lambda b^k{}_{\mu}\right)h_i{}^{\mu} &= -b^k{}_{\mu}\left(\partial_\lambda h_i{}^{\mu}\right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

et donc la relation (3.54) devient

$$\begin{aligned} \delta_0 h_i{}^{\nu} &= \omega_i{}^k h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)h_i{}^{\mu} - \zeta^\lambda b^k{}_{\mu}h_i{}^{\mu}\left(\partial_\lambda h_i{}^{\mu}\right) \\ &= \omega_i{}^k h_k{}^{\nu} + \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)h_i{}^{\mu} - \zeta^\lambda\partial_\lambda h_k{}^{\mu} \end{aligned} \tag{3.56}$$

maintenant nous remplacons $\delta_0 h_i{}^{\nu}$ et $\delta_0\nabla_\mu\phi$ par ses expressions dans la relation (3.51) il vient

$$\begin{aligned} \delta_0\nabla_k\phi &= \left(\delta_0 h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}\left(\delta_0\nabla_\mu\phi\right) \\ &= \left[\omega_k{}^s h_s{}^{\mu} + \left(\partial_\nu\zeta^\mu\right)h_k{}^{\nu} - \zeta^\nu\left(\partial_\nu h_k{}^{\mu}\right)\right]\nabla_\mu\phi \\ &\quad + h_k{}^{\mu}\left[P\nabla_\mu\phi - \left(\partial_\mu\zeta^\nu\right)\nabla_\nu\phi\right] \end{aligned} \tag{3.57}$$

en tenant en compte que $\nabla_k\phi \equiv h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi$

$$\delta_0\nabla_k\phi = \omega_k{}^s\nabla_s\phi - \zeta^\nu\left(\partial_\nu h_k{}^{\mu}\right)\nabla_\mu\phi + h_k{}^{\mu}P\nabla_\mu\phi \tag{3.58}$$

en simplifiant le dernier terme

$$\begin{aligned}
h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= h_k{}^{\mu} \left(\frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i \right) \nabla_\mu \phi \\
h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \frac{1}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij} h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i h_k{}^{\mu} \left(\partial_j \nabla_\mu \phi \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) - \varepsilon^i h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

nous avons

$$h_k{}^{\mu} \left(\partial_i \nabla_\mu \phi \right) = \partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right)$$

donc

$$\begin{aligned}
h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \frac{1}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij} h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i \left[\partial_j \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_j h_k{}^{\mu} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j \left[\partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \right] \\
&\quad - \varepsilon^i \left[\partial_i \left(h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi \right) - \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \right] \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= \left[\frac{1}{2} \omega^{ij} \left(\Sigma_{ij} + x_i \partial_j - x_j \partial_i \right) - \varepsilon^i \partial_i \right] h_k{}^{\mu} \nabla_\mu \phi - \frac{1}{2} \omega^{ij} x_i \nabla_\mu \phi \left(\partial_j h_k{}^{\mu} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \omega^{ij} x_j \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) + \varepsilon^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\
&= \left[\frac{1}{2} \omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i \right] \nabla_k \phi + \left[\omega^i{}_j x^j + \varepsilon^i \right] \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\
h_k{}^{\mu} P \nabla_\mu \phi &= P \nabla_k \phi + \zeta^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta_0 \nabla_k \phi &= \omega_k{}^{s} \nabla_s \phi - \zeta^\nu \left(\partial_\nu h_k{}^{\mu} \right) \nabla_\mu \phi + P \nabla_k \phi + \zeta^i \nabla_\mu \phi \left(\partial_i h_k{}^{\mu} \right) \\
\delta_0 \nabla_k \phi &= P \nabla_k \phi + \omega_k{}^{s} \nabla_s \phi \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

et alors la transformation $\delta_0 b^k{}_\mu$ satisfait la relation de la dérivée covariante.

2-Dans cette partie nous allons montrer que $A^{ij}{}_\mu$ se transforme comme suit

$$\delta_0 A^{ij}{}_\mu = - \bigtriangledown_\mu \omega^{ij} - \left(\partial_\mu \zeta^\lambda \right) A^{ij}{}_\lambda - \zeta^\lambda \left(\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu \right) \qquad (3.63)$$

commençons par la variation de la relation (3.45)

$$\begin{aligned}
\delta_0 \bigtriangledown_\mu \phi &= \delta_0 \left[\left(\partial_\mu + A_\mu \right) \phi \right] \\
\delta_0 \bigtriangledown_\mu \phi &= \left(\partial_\mu + A_\mu \right) \delta_0 \phi + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi \\
&= \left(\partial_\mu + A_\mu \right) P\phi + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi, \; \delta_0 \phi = P\phi
\end{aligned} \tag{3.64}$$

d'après les relations (3.47) et (3.64)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Sigma_{ij} \delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi + \left(\partial_\mu + A_\mu \right) P\phi &= P \bigtriangledown_\mu \phi - \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) \bigtriangledown_\nu \phi \\
\frac{1}{2} \Sigma_{ij} \delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi &= P \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \right) \phi - \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) \left(\partial_\nu + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\nu \Sigma_{ij} \right) \phi \\
&\quad - \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \right) P\phi
\end{aligned} \tag{3.65}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Sigma_{ij} \delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi &= P \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} P \left(A^{ij}{}_\mu \phi \right) - \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) A^{ij}{}_\nu \phi \\
&\quad - \partial_\mu \left(P\phi \right) - \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} P\phi
\end{aligned} \tag{3.66}$$

calculons $P \left(A^{ij}{}_\mu \phi \right)$

$$\begin{aligned}
P \left(A^{ij}{}_\mu \phi \right) &= \left(\frac{1}{2} \omega^{ls} M_{ls} + \varepsilon^l p_l \right) A^{ij}{}_\mu \phi \\
&= \left[\frac{1}{2} \omega^{ls} \left(\Sigma_{ls} + x_l \partial_s - x_s \partial_l \right) - \varepsilon^l \partial_l \right] A^{ij}{}_\mu \phi \\
&= \frac{1}{2} \omega^{ls} \Sigma_{ls} A^{ij}{}_\mu \phi + \frac{1}{2} \omega^{ls} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi + \frac{1}{2} \omega^{ls} x_l A^{ij}{}_\mu \left(\partial_s \phi \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega^{sl} x_s \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \frac{1}{2} \omega^{sl} x_s A^{ij}{}_\mu \left(\partial_l \phi \right) - \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi \\
&\quad - \varepsilon^l A^{ij}{}_\mu \left(\partial_l \phi \right) \\
&= A^{ij}{}_\mu \left[\frac{1}{2} \omega^{ls} \left(\Sigma_{ls} + x_l \partial_s - x_s \partial_l \right) - \varepsilon^l \partial_l \right] \phi + \omega^{ls} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi \\
P \left(A^{ij}{}_\mu \phi \right) &= A^{ij}{}_\mu P\phi + \omega^{sl} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi
\end{aligned} \tag{3.67}$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu (P\phi) &= \partial_\mu \left[\left(\frac{1}{2}\omega^{ij} M_{ij} + \varepsilon^i p_i \right) \phi \right] \\
&= P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) M_{ij}\phi + \frac{1}{2}\omega^{ij} \left(\partial_\mu M_{ij} \right) \phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i \right) p_i \phi \\
\partial_\mu (P\phi) &= P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) M_{ij}\phi + \omega^{kj} \delta^k{}_\mu \partial_j \phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i \right) p_i \phi \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

nous remplaçons (3.67) et (3.68) dans la relation (3.66)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi &= P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left[A^{ij}{}_\mu P\phi + \omega^{ls} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi \right] \\
&\quad - \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) \partial_\nu \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) A^{ij}{}_\nu \phi - \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} P\phi \\
&\quad - \left[P\partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) M_{ij}\phi + \omega^{kj} \delta^k{}_\mu \partial_j \phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i \right) p_i \phi \right] \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi &= -\frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) A^{ij}{}_\nu \phi - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) \left[\Sigma_{ij} + x_i \partial_j - x_j \partial_i \right] \phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \omega^{ls} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi \\
&\quad - \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) \partial_\nu \phi - \omega^{kj} \delta^k{}_\mu \partial_j \phi - \left(\partial_\mu \varepsilon^i \right) p_i \phi \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

nous avons la dérivée $\partial_\mu \zeta^\nu$

$$
\partial_\mu \zeta^\nu = \left(\partial_\mu \omega^\nu{}_\rho \right) x^\rho + \omega^\nu{}_\mu + \partial_\mu \varepsilon^\nu \qquad (3.71)
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi &= -\frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) A^{ij}{}_\nu \phi + \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) x_j \partial_i \phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \omega^{ls} x_l \left(\partial_s A^{ij}{}_\mu \right) \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \varepsilon^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi \\
&\quad - \left(\partial_\mu \omega^\nu{}_\rho \right) x^\rho \partial_\nu \phi - \omega^\nu{}_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi \\
&\quad - \omega^{kj} \delta^k{}_\mu \partial_j \phi + \left(\partial_\mu \varepsilon^i \right) \partial_i \phi \qquad (3.72)
\end{aligned}
$$

il vient

$$
\frac{1}{2}\Sigma_{ij}\delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) \phi = -\frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \omega^{ij} \right) \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \left(\partial_\mu \zeta^\nu \right) A^{ij}{}_\nu \phi - \frac{1}{2}\Sigma_{ij} \zeta^l \left(\partial_l A^{ij}{}_\mu \right) \phi
$$

nous concluons donc

$$
\delta_0 \left(A^{ij}{}_\mu \right) = -\partial_\mu \omega^{ij} - \partial_\mu \zeta^\nu A^{ij}{}_\nu - \zeta^l \partial_l A^{ij}{}_\mu
$$

nous ajoutons et nous soustrayons le terme $A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}$

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = -\partial_\mu \omega^{ij} - A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} + A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} - \partial_\mu \zeta^\nu A^{ij}{}_{\nu} - \zeta^l \partial_l A^{ij}{}_{\mu} \tag{3.73}$$

notons que ω^{sj}, $A^{i}{}_{s\mu}$ et Σ_{ij} sont antisymétriques de ces deux premiers indices

$$\omega^{sj} = -\omega^{js},\ A^{i}{}_{s\mu} = -A_{s}{}^{i}{}_{\mu},\ \Sigma_{ij} = -\Sigma_{ji}$$

nous avons

$$A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} = A_{s}{}^{i}{}_{\mu}\omega^{js}\Sigma_{ij}$$

nous faisons $i \leftrightarrow j$ dans le coté droit

$$\begin{aligned} A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} &= A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}\Sigma_{ji} \\ A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj}\Sigma_{ij} &= -A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}\Sigma_{ij} \\ &\Rightarrow A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} = -A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is} \end{aligned} \tag{3.74}$$

nous remplaçons la relation (3.74) dans (3.73) nous obtenons

$$\delta_0 A^{ij}{}_{\mu} = -\nabla_\mu \omega^{ij} - \partial_\mu \zeta^\nu A^{ij}{}_{\nu} - \zeta^l \partial_l A^{ij}{}_{\mu} \tag{3.75}$$

la dérivée covariante de ω^{js} est donnée par

$$\nabla_\mu \omega^{ij} = \partial_\mu \omega^{ij} + A^{i}{}_{s\mu}\omega^{sj} + A_{s}{}^{j}{}_{\mu}\omega^{is}$$

d'après le terme $-\partial_\mu \omega^{ij}$ nous constatons que $A^{ij}{}_{\mu}$ n'est pas un tenseur mais un potentiel.

Lagrangien du champ de matière

Nous avons montré que

$$\delta \mathcal{L}'_M \equiv \delta_0 \mathcal{L}'_M + \zeta^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'_M = 0 \tag{3.76}$$

maintenant nous allons essayer de modifier le lagrangien $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}_M$ de sorte que le terme $(\partial_\mu \zeta^\mu)\,\mathcal{L}$ soit nul. Notons que $(\partial_\mu \zeta^\mu) \neq 0$.

nous introduisons un nouveau lagrangien

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M = \Lambda \mathcal{L}'_M \tag{3.77}$$

d'après la condition d'invariance

$$\Delta \widetilde{\mathcal{L}}_M \equiv \delta_0 \widetilde{\mathcal{L}}_M + \zeta^\mu \partial_\mu \widetilde{\mathcal{L}}_M + \partial_\mu \zeta^\mu \widetilde{\mathcal{L}}_M \tag{3.78}$$

remplaçons $\widetilde{\mathcal{L}}_M$ par son expression dans la relation(3.78)

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \delta_0\left(\Lambda\mathcal{L}_M^{'}\right)+\zeta^\mu\partial_\mu\left(\Lambda\mathcal{L}_M^{'}\right)+\partial_\mu\zeta^\mu\Lambda\mathcal{L}_M^{'} \\
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \Lambda\left(\delta_0\mathcal{L}_M^{'}+\zeta^\mu\partial_\mu\mathcal{L}_M^{'}\right)+\left(\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)\right)\mathcal{L}_M^{'} \\
\Delta\widetilde{\mathcal{L}}_M &\equiv \Lambda\delta\mathcal{L}_M^{'}+\left(\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)\right)\mathcal{L}_M^{'} \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

le premier terme est nul d'après (3.76) et donc pour que la condition d'invariance soit vérifiée il suffit de montrer que

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=0 \qquad (3.80)$$

l'une des solutions de cette dernière équation est

$$\Lambda=\det\left(b^k{}_\mu\right)\equiv b \qquad (3.81)$$

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)+\partial_\mu\left(\zeta^\mu b\right)=\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)+\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\partial_\rho\det\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.82)$$

nous avons

$$\delta_0\det\left(b^k{}_\mu\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}\delta_0\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.83)$$

de même

$$\partial_\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.84)$$

avec

$$\left(b^k{}_\mu\right)^{-1}=h_k{}^\mu$$

la relation (3.82) devient

$$\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right)=\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\delta_0\left(b^k{}_\mu\right)+\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \qquad (3.85)$$

en remplaçant $\delta_0\left(b^k{}_\mu\right)$ par sa formule (3.49) dans cette dernière relation et en tenant en compte la relation (3.48) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta_0\Lambda+\partial_\mu\left(\zeta^\mu\Lambda\right) &= \det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\left[\omega^k{}_s b^s{}_\mu-\left(\partial_\mu\zeta^\lambda\right)b^k{}_\lambda-\zeta^\lambda\partial_\lambda\left(b^k{}_\mu\right)\right] \\
&\quad+\left(\partial_\rho\zeta^\rho\right)\det\left(b^k{}_\mu\right)+\zeta^\rho\det\left(b^k{}_\mu\right)h_k{}^\mu\partial_\rho\left(b^k{}_\mu\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La forme finale de lagrangien du champ de matière modifiée est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{L}}_M=\Lambda\mathcal{L}_M^{'}=b\mathcal{L}_M\left(\phi,\nabla_k\phi\right). \qquad (3.86)$$

Cette construction du lagrangien est généralement valide pour les champs de matière massive, cependant il ne convient pas dans le cas de l'électrodynamique quantique.

Le Lagrangien complet

Dans cette partie nous allons constuire un lagrangien pour les nouveaux champs $b^k{}_\mu$ et $A^{ij}{}_\mu$, ensuite nous l'ajoutons au lagrangien du champ de matière afin d'obtenir le lagrangien complet.

En premier lieu, en calculant le commutateur de deux dérivées covariantes

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_k, \nabla_l\right]\phi &= \nabla_k\nabla_l\phi - \nabla_l\nabla_k\phi \\
&= \nabla_k\left(h_l{}^\nu\nabla_\nu\phi\right) - \nabla_l\left(h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi\right) \\
&= \nabla_k h_l{}^\nu\nabla_\nu\phi - \nabla_l h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi + h_l{}^\nu h_k{}^\mu\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - h_k{}^\mu h_l{}^\nu\nabla_\nu\nabla_\mu\phi \\
\left[\nabla_k, \nabla_l\right]\phi &= \nabla_k h_l{}^\nu\nabla_\nu\phi - \nabla_l h_k{}^\mu\nabla_\mu\phi + h_l{}^\nu h_k{}^\mu\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right]\phi \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= \left(\partial_\mu + A_\mu\right)\left(\partial_\nu + A_\nu\right)\phi \\
\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= \partial_\mu\partial_\nu\phi + \partial_\mu\left(A_\nu\phi\right) + A_\mu\partial_\nu\phi + A_\mu A_\nu\phi \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

de même

$$\nabla_\nu\nabla_\mu\phi = \partial_\nu\partial_\mu\phi + \partial_\nu\left(A_\mu\phi\right) + A_\nu\partial_\mu\phi + A_\nu A_\mu\phi \qquad (3.89)$$

alors

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right]\phi &= \nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \nabla_\nu\nabla_\mu\phi \\
&= \left(\partial_\mu A_\nu\right)\phi - \left(\partial_\nu A_\mu\right) + \left[A_\mu, A_\nu\right]\phi \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\partial_\nu A_\mu &= \partial_\nu\left(\frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\partial_\nu A^{ij}{}_\mu \qquad (3.91) \\
\partial_\mu A_\nu &= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}A^{ij}{}_\nu\Sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\partial_\mu A^{ij}{}_\nu. \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

Calculons le commutateur $\left[A_\mu, A_\nu\right]\phi$

nous avons le générateur de transformation de Poincaré $M_{ij} = \Sigma_{ij} + x_i\partial_j - x_j\partial_i$ et par analogie de la relation (3.7) nous pouvons écrire

$$\left[\Sigma_{ni}, \Sigma_{sj}\right] = \eta_{jn}\Sigma_{is} + \eta_{si}\Sigma_{nj} - \eta_{sn}\Sigma_{ij} - \eta_{ji}\Sigma_{ns}$$

en tenant en compte que $A^{kj}{}_\nu$ et Σ_{ij} sont antisymétriques de deux premiers indices, nous obtenons

$$\begin{aligned}
[A_\mu, A_\nu]\,\phi &= \frac{1}{4}A^{ni}{}_{\mu}A^{sj}{}_{\nu}\,[\Sigma_{ni},\Sigma_{sj}]\,\phi = \frac{1}{4}A^{ni}{}_{\mu}A^{sj}{}_{\nu}\left[\eta_{jn}\Sigma_{is}+\eta_{si}\Sigma_{nj}-\eta_{sn}\Sigma_{ij}-\eta_{ji}\Sigma_{ns}\right]\phi \\
&= \frac{1}{4}\left[A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{is}{}_{\mu}A^{j}{}_{s\nu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}\right]\Sigma_{ij}\phi \\
&= \left[\frac{1}{2}A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}+\frac{1}{4}A^{js}{}_{\mu}A^{i}{}_{s\nu}-\frac{1}{4}A^{j}{}_{s\mu}A^{si}{}_{\nu}\right]\Sigma_{ij}\phi \\
[A_\mu, A_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\left[A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{i}{}_{s\nu}A^{sj}{}_{\mu}\right]\Sigma_{ij}\phi \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

nous remplaçons $(3.92)\,,(3.91)$ et (3.93) dans (3.90) il vient

$$\begin{aligned}
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\left[\partial_\mu A^{ij}{}_{\nu}-\partial_\nu A^{ij}{}_{\mu}+A^{i}{}_{s\mu}A^{sj}{}_{\nu}-A^{i}{}_{s\nu}A^{sj}{}_{\mu}\right]\phi \\
[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\,\phi &= \frac{1}{2}\Sigma_{ij}F^{ij}{}_{\mu\nu}\phi
\end{aligned}$$

le commutateur (3.87) devient

$$\begin{aligned}
[\nabla_k,\nabla_l]\,\phi &= \nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi+\frac{1}{2}\Sigma_{ij}h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}F^{ij}{}_{\mu\nu}\phi \\
[\nabla_k,\nabla_l]\,\phi &= \nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi+\frac{1}{2}\Sigma_{ij}F^{ij}{}_{kl}\phi \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

il rest de simplifier les deux premiers termes ; on a $b^{k}{}_{\mu}, h_i{}^{\mu}$ et $\delta^{k}{}_{i}$ sont des champs scalaires et donc

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\left(h_k{}^{\nu}b^{i}{}_{\nu}\right) &= \partial_\mu\delta^{i}{}_{k}=0 \\
\left(\nabla_\mu h_k{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu} &= -h_k{}^{\nu}\left(\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right) \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

d'une autre part

$$\begin{aligned}
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= \left(\nabla_k h_l{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu}\nabla_i\phi-\left(\nabla_l h_k{}^{\mu}\right)b^{i}{}_{\mu}\nabla_i\phi \\
&= h_k{}^{\mu}\left(\nabla_\mu h_l{}^{\nu}\right)b^{i}{}_{\nu}\nabla_i\phi-h_l{}^{\nu}\left(\nabla_\nu h_k{}^{\mu}\right)b^{i}{}_{\mu}\nabla_i\phi
\end{aligned}$$

à partir du résultat (3.95) nous abtenons

$$\begin{aligned}
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= h_k{}^{\mu}\left(-h_l{}^{\nu}\left(\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right)\right)\nabla_i\phi-h_l{}^{\nu}\left(-h_k{}^{\mu}\left(\nabla_\nu b^{i}{}_{\mu}\right)\right)\nabla_i\phi \\
&= h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}\left[\nabla_\nu b^{i}{}_{\mu}-\nabla_\mu b^{i}{}_{\nu}\right]\nabla_i\phi \\
&= -h_l{}^{\nu}h_k{}^{\mu}F^{i}{}_{\mu\nu}\nabla_i\phi \\
\nabla_k h_l{}^{\nu}\nabla_\nu\phi-\nabla_l h_k{}^{\mu}\nabla_\mu\phi &= -F^{i}{}_{kl}\nabla_i\phi \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

remplaçons (3.96) dans (3.94) nous trouvons finalement

$$[\nabla_k, \nabla_l]\,\phi = \frac{1}{2} F^{ij}{}_{kl} \Sigma_{ij} \phi - F^{i}{}_{kl} \nabla_i \phi \tag{3.97}$$

avec

$$F^{ij}{}_{kl} = F^{ij}{}_{\mu\nu} h_k{}^{\mu} h_l{}^{\nu} \tag{3.98}$$

$$F^{i}{}_{kl} = F^{i}{}_{\mu\nu} h_k{}^{\mu} h_l{}^{\nu} \tag{3.99}$$

$$F^{ij}{}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^{ij}{}_{\nu} - \partial_\nu A^{ij}{}_{\mu} + A^{i}{}_{s\mu} A^{sj}{}_{\nu} - A^{i}{}_{s\nu} A^{sj}{}_{\mu} \tag{3.100}$$

$$F^{i}{}_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu b^{i}{}_{\nu} - \nabla_\nu b^{i}{}_{\mu} \tag{3.101}$$

$F^{ij}{}_{\mu\nu}$ et $F^{i}{}_{\mu\nu}$ sont des quantités physiques qui représentent les forces du champ de Lorentz et de translation respectivement et qui se transforment comme des tenseurs.

Finalement, la forme complète du lagrangien des champs de matière et de jauge est donnée comme suit

$$\widetilde{\mathcal{L}} = b\mathcal{L}_G \left(F^{ij}{}_{kl}, F^{i}{}_{kl} \right) + b\mathcal{L}_M \left(\phi, \nabla_k \phi \right) \tag{3.102}$$

le premier terme repose uniquement sur des forces du champs et il s'appel le lagrangien libre (free lagrangian)$\mathcal{L}_G$.

3.4.3 Interprétation de théorie de jauge de Poincaré

Géometrie de Riemann-Cartan

La théorie d'Einstein-Cartan est une théorie non métrique de la gravitation, car elle admet une hypothèse selon laquelle la connexion affine a une partie antisymétrique non-nulle $\Gamma^{\mu}{}_{[\lambda\rho]} \neq 0$, de sorte que la courbure de l'espace-temps est non seulement couplée à l'énergie de masse et la quantité de mouvement de la matière, mais aussi à son moment angulaire et son spin. Dans ce cas la géométrie de Riemann-Cartan est caractérisée par un triple $(M, g, \bigtriangledown)$, où (M, g) est une variéte pseudo-Riemannienne à n-dimensions $(n \geq 2)$, avec une connexion linéaire ∇ ,un tenseur de torsion non-nul $Q^{\mu}{}_{\lambda\rho} \neq 0$ et la condition de la compatibilité métrique $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Deux éléments nécessaires dans la géométrie de Riemann-Cartan sont ;

Le tenseur de torsion

$$Q^{\mu}{}_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda} \right) = \Gamma^{\mu}{}_{[\lambda\rho]} \tag{3.103}$$

et le tenseur de Riemann

$$R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} \tag{3.104}$$

dans cette partie nous définirons une autre connexion appelée la connexion de spin.

Connexion de spin

Le choix de la base dans un espace tangent T_P n'est pas unique. Un système de coordonnées est déterminé par un ensemble de quatre vecteurs $\widehat{e}_\mu(x)$, tangents aux lignes de coordonnées. En U_4, nous pouvons également introduire une base de Lorentz orthonormée, déterminée par quatre vecteurs $\widehat{e}_i(x)$ (tétrade), tels que

$$\widehat{e}_i(x) = e^\mu{}_i(x)\widehat{e}_\mu(x) \tag{3.105}$$

et

$$g(\widehat{e}_i, \widehat{e}_j) = \eta_{ij}. \tag{3.106}$$

Chaque vecteur tangent u peut être exprimé dans les deux bases

$$u = u^\mu \widehat{e}_\mu = u^i \widehat{e}_i \tag{3.107}$$

L'existence de référentiels de Lorentz entraîne des conséquences très importantes. En particulier, ils sont utilisés pour introduire des spineurs finis dans la théorie U_4.

Si nous voulons comparer les vecteurs $u^i(x)$ et $u^i(x+dx)$ aux points x et $x+dx$, déterminés respectivement par rapport aux référentiels de Lorentz $\widehat{e}_i(x)$ et $\widehat{e}_i(x+dx)$, nous devons connaître la règle du transport parallèle

$$\delta u^i = -\omega^i{}_{j\mu} u^j dx^\mu \tag{3.108}$$

où le 64 éléments $\omega^i{}_{j\mu}$ sont les connexions de spin. Le transport parallèle de v_i peut être déterminé en exigeant $\delta(u^i v_i) = 0$,

$$\delta v_i = \omega^j{}_{i\mu} v_j dx^\mu \tag{3.109}$$

Exigeant que le champ tensoriel η_{ij} soit invariant sous transport parallèle,

$$\delta\eta_{ij} = \left(\omega^s{}_{j\mu}\eta_{is} + \omega^s{}_{i\mu}\eta_{sj}\right) dx^\mu = 0 \tag{3.110}$$

implique que la connexion est antisymétrique

$$\omega_{ij\mu} + \omega_{ji\mu} = 0. \tag{3.111}$$

Après avoir établi la règle du transport parallèle, nous pouvons définir les dérivées ω-covariantes de u^i et v_i

$$Du^i = \left(\partial_\mu u^i + \omega^i{}_{j\mu} u^j\right) dx^\mu = D_\mu(\omega)\, u^i dx^\mu \tag{3.112}$$

$$D_\mu(\omega)\, u^i = \partial_\mu u^i + \omega^i{}_{j\mu} u^j \tag{3.113}$$

$$D_\mu(\omega)\, v_i = \partial_\mu v_i - \omega^j{}_{i\mu} v_j. \tag{3.114}$$

Puisque η est un tenseur constant, la condition $\delta\eta_{ij}$ donne

$$D_\mu(\omega)\,\eta_{ij} = 0. \tag{3.115}$$

Relation entre ω et Γ

Jusqu'à présent, nous n'avons supposé aucune relation entre la connexion de spin ω et Γ. Il est naturel d'exiger que les composantes tétrades d'un vecteur $u(x)$, transporté parallèlement de x vers $x+dx$, soient égales à

$$u^i + \delta u^i = e^i{}_\mu(x+dx)\,(u^\mu + \delta u^\mu)$$

car le transport parallèle est une opération géométrique unique, indépendante du choix de référentiel. En d'autres termes, ω et Γ représentent le même objet géométrique dans deux référentiels différents. De ce fait, nous obtenons la relation

$$D_\mu(\omega+\Gamma)\,e^i{}_\nu \equiv D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}e^i{}_\rho = 0 \tag{3.116}$$

avec

$$D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu = \partial_\mu e^i{}_\nu + \omega^i{}_{j\mu}e^j{}_\nu \tag{3.117}$$

à partir de ces équations nous pouvons avoir la condition de métricité

$$D_\mu(\Gamma)\,g_{\mu\nu} = D_\mu(\omega+\Gamma)\,g_{\mu\nu} = D_\mu(\omega+\Gamma)\left(\eta_{ij}e^i{}_\mu e^j{}_\nu\right) = 0. \tag{3.118}$$

Dans une représentation quelconque du groupe de Lorentz, la dérivée w-covariante d'une quantité ϕ peut être généralisé comme

$$D_\mu(\omega)\,\phi = (\partial_\mu + \omega_\mu)\,\phi,\ \omega_\mu \equiv \frac{1}{2}\omega^{ij}{}_\mu\Sigma_{ij} \tag{3.119}$$

Σ_{ij} est relié au matrice de spin.

Interprétation

La théorie de jauge de Poincaré est basée sur la symétrie globale de Poincaré, la localisation de cette symétrie conduit à la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation comme on a déja vu dans la partie précédente, et nous avons obtenu le champ de Lorentz $F^{ij}{}_{\mu\nu}$ et de translation $F^i{}_{\mu\nu}$ qui sont définis par les relations (3.100) et (3.101)

Notre objectif maintenant est d'écrire les tenseurs représentés dans les relations (3.103) et (3.104) en fonction de connexion de spin ω au lieu de Γ.

à partir de (3.116) nous avons

$$D_\mu(\omega)\,e^i{}_\nu = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}e^i{}_\rho \tag{3.120}$$

nous multiplions (3.103) par $e^{i}{}_{\rho}$ il vient

$$\begin{aligned}
2Q^{\rho}{}_{\mu\nu}e^{i}{}_{\rho} &= \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}e^{i}{}_{\rho}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}e^{i}{}_{\rho} \\
&= D_{\mu}(\omega)\, e^{i}{}_{\nu}-D_{\nu}(\omega)\, e^{i}{}_{\mu}\equiv 2Q^{i}{}_{\mu\nu}(\omega) \qquad (3.121)\\
Q^{i}{}_{\mu\nu}(\omega) &= Q^{\rho}{}_{\mu\nu}e^{i}{}_{\rho} \qquad (3.122)
\end{aligned}$$

multiplions aussi (3.104) par $e^{i}{}_{\lambda}$

$$e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}=e^{i}{}_{\lambda}\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}\right)-e^{i}{}_{\lambda}\left(\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}\right)+e^{i}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}-e^{i}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}$$

en tenant en compte que

$$\begin{aligned}
e^{i}{}_{\lambda}\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}\right) &= \partial_{\mu}\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}e^{i}{}_{\lambda}\right)-\left(\partial_{\mu}e^{i}{}_{\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu} \\
&= \partial_{\mu}\left(D_{\nu}(\omega)\, e^{i}{}_{\rho}\right)-\left(\partial_{\mu}e^{i}{}_{\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} = {} & \partial_{\mu}\left(D_{\nu}(\omega)\, e^{i}{}_{\rho}\right)-\left(\partial_{\mu}e^{i}{}_{\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}-\partial_{\nu}\left(D_{\mu}(\omega)\, e^{i}{}_{\rho}\right)+\left(\partial_{\nu}e^{i}{}_{\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu} \\
&+\left(D_{\mu}(\omega)\, e^{i}{}_{\sigma}\right)\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}-\left(D_{\nu}(\omega)\, e^{i}{}_{\sigma}\right)\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}
\end{aligned}$$

dans ce cas $D_{\nu}(\omega)\, e^{i}{}_{\rho}=\partial_{\nu}e^{i}{}_{\rho}+\omega^{i}{}_{j\nu}e^{j}{}_{\rho}$, nous trouvons

$$e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}=\partial_{\mu}\left(\omega^{i}{}_{j\nu}e^{j}{}_{\rho}\right)-\partial_{\nu}\left(\omega^{i}{}_{j\mu}e^{j}{}_{\rho}\right)+\omega^{i}{}_{j\mu}e^{j}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\nu}-\omega^{i}{}_{j\nu}e^{j}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}$$

de même $\partial_{\mu}\left(\omega^{i}{}_{j\nu}e^{j}{}_{\rho}\right)=\left(\partial_{\mu}\omega^{i}{}_{j\nu}\right)e^{j}{}_{\rho}+\omega^{i}{}_{j\nu}\left(\partial_{\mu}e^{j}{}_{\rho}\right)$, nous simplifions nous obtenons

$$\begin{aligned}
e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} &= \left(\partial_{\mu}\omega^{i}{}_{j\nu}\right)e^{j}{}_{\rho}-\left(\partial_{\nu}\omega^{i}{}_{j\mu}\right)e^{j}{}_{\rho}+\omega^{i}{}_{j\mu}\omega^{j}{}_{k\nu}e^{k}{}_{\rho}-\omega^{i}{}_{j\nu}\omega^{j}{}_{k\mu}e^{k}{}_{\rho} \\
e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} &= \left[\partial_{\mu}\omega^{ij}{}_{\nu}-\partial_{\nu}\omega^{ij}{}_{\mu}+\omega^{i}{}_{k\mu}\omega^{kj}{}_{\nu}-\omega^{i}{}_{k\nu}\omega^{kj}{}_{\mu}\right]e_{j\rho}
\end{aligned}$$

donc

$$e^{j\rho}e^{i}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}=\left[\partial_{\mu}\omega^{ij}{}_{\nu}-\partial_{\nu}\omega^{ij}{}_{\mu}+\omega^{i}{}_{k\mu}\omega^{kj}{}_{\nu}-\omega^{i}{}_{k\nu}\omega^{kj}{}_{\mu}\right]\equiv R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega)\,, \qquad (3.123)$$

la relation (3.121) peut être résolu pour la connexion ω avec

$$\begin{aligned}
\omega_{ij\mu} &= \triangle_{ij\mu}+K_{ij\mu} \\
\triangle_{ij\mu} &\equiv \frac{1}{2}\left(c_{ijm}-c_{mij}+c_{jmi}\right)e^{m}{}_{\mu}
\end{aligned}$$

où $c^{i}{}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}e^{i}{}_{\nu}-\partial_{\nu}e^{i}{}_{\mu}$ est appelé l'objet de l'anholonomité, K représente le tenseur de contorsion.

Lorsque nous comparons ces derniers résultats avec lesquels ils sont représentés dans les relations (3.121) et (3.123) on peut remarquer ;

-Le champ de Lorentz $A^{ij}{}_{\mu}$ est équivalente à la connexion du spin $\omega^{ij}{}_{\mu}$.

-La force du champs de Lorentz $F^{ij}{}_{\mu\nu}$ peut être identifié par le tenseur de la courbure de Riemann $R^{ij}{}_{\mu\nu}(\omega)$.

-La force du champ de translation $F^{i}{}_{\mu\nu}$ est équivalente au tenseur du torsion $Q^{i}{}_{\mu\nu}\left(\omega\right)$.

-Le champ de jauge de translation $b^{i}{}_{u}$ peut être identifié par le champ tetrad $e^{i}{}_{\mu}$.

-La dérivée covariante $\nabla_{\mu}(A)$ est équivalente à la dérivée w-covariante $D_{\mu}\left(\omega\right)$.

-La condition de métricité $\nabla_{\mu}\eta_{ij} = 0 \Leftrightarrow D_{\mu}\left(\Gamma\right)g_{\mu\nu} = 0$.

Nous constatons que la théorie de jauge de Poincaré a la structure géométrique de Riemann-Cartan U_4 dans laquelle la torsion et la courbure ont été utilisées pour caractériser les phénomènes gravitationnels.

3.4.4 Lagrangien quadratique

Le champ gravitationnel dans la théorie de jauge de Poincaré est déterminé par le lagrangien $\mathcal{L}_G$ [40]

$$\mathcal{L}_G = b\left(-\alpha R + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_R + \lambda\right) \tag{3.124}$$

Nous nous intéressons au lagrangien quadratique dans lequel les équations de mouvement sont tout au plus de second ordre de dérivée de champ $A^{ij}{}_{\mu}$ et $b^{i}{}_{u}$, et donc $\mathcal{L}_G$ peut être au plus quadratique en torsion $Q^{i}{}_{\mu\nu}$ et courbure $R^{ij}{}_{\mu\nu}$ et en tenant en compte la conservation de parité du théorie de jauge de Poincaré, alors

$$\mathcal{L}_T \equiv a\left(AQ_{ijk}Q^{ijk} + BQ_{ijk}Q^{jik} + CQ_iQ^i\right) \tag{3.125}$$

avec $Q_i = Q^{j}{}_{ij}$

$$\mathcal{L}_R \equiv b_1R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2R_{ijkl}R^{klij} + b_3R_{ij}R^{ij} + b_4R_{ij}R^{ji} + b_5R^2 + b_6\left(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl}\right)^2 \tag{3.126}$$

la forme de Lagrangien $\mathcal{L}_G$ devient

$$\mathcal{L}_G = b\begin{pmatrix} -\alpha R + a\left(AQ_{ijk}Q^{ijk} + BQ_{ijk}Q^{jik} + CQ_iQ^i\right) \\ +b_1R_{ijkl}R^{ijkl} + b_2R_{ijkl}R^{klij} + b_3R_{ij}R^{ij} \\ b_4R_{ij}R^{ji} + b_5R^2 + b_6\left(\varepsilon_{ijkl}R^{ijkl}\right)^2 + \lambda \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

où

λ est la constante cosmologique.

α, A, B, C et b_i sont des paramètres sans dimensions.

$a = \frac{1}{2\kappa}$, κ la constante gravitationnel d'Einstein.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit une théorie de jauge de la gravitation en considérant le groupe de Poincaré. Après avoir introduit, un champ de matière dans l'espace de Minkowski, nous avons montré comment l'invariance de la théorie sous les transformations de Poincaré locale nous impose la modification de la dérivée partielle à une dérivée covariante avec une connexion de spin. L'interpretation géométrique de la théorie nous a conduit à une théorie de la gravitation quadratique avec torsion.

Chapitre 4

Elimination des degrès de liberté fantômes

"A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data"
Paul Dirac

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que la géométrie de Riemann-Cartan est le cadre géométrique des théories de jauge de Poincaré locales, dont les transformations de Lorentz génèrent la courbure de l'espace-temps et les translations donne lieu à une torsion. Le lagrangien qui décrit ces théories de jauge est quadratique. La théorie est donc susceptible d'avoir des degrès de liberté fantômes (ghosts). L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence des ghosts dans le secteur vectoriel est comment les éliminer.

En premier lieu, nous faisons une décomposition irréductible pour le tenseur de torsion et de contorstion pour pouvoir séparé le secteur vectoriel. Ensuite, nous analysons l'existence des ghosts.

4.2 Torsion et Contorsion

Dans le cas général, la connexion $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique. Elle contient donc une partie antisymétrique qui représente le champ de torsion. Le tenseur de torsion $Q^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ est défini par [41]

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} = 2Q^{\mu}{}_{\alpha\beta}. \tag{4.1}$$

Il est clair que

$$Q^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -Q^{\mu}{}_{\beta\alpha}.$$

4.2.1 Connexions

Dans cette partie, nous voulons exprimer les connexions (supposées métriques) en fonction des symboles de Christofell et des composantes du tenseur de torsion en utilisant la condition de la compatibilité métrique

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \tag{4.2}$$

Comme

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} \tag{4.3}$$

nous obtenons

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = 0. \tag{4.4}$$

Maintenant, nous décomposons $\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$ en deux parties symétrique et antisymétrique

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} = \Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)} + \Gamma^\lambda{}_{[\mu\alpha]}, \tag{4.5}$$

où $\Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)}$ est la partie symétrique

$$\Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)} = \Gamma^\lambda{}_{(\alpha\mu)}$$

et $\Gamma^\lambda{}_{[\mu\alpha]}$ est la partie antisymétrique

$$\Gamma^\lambda{}_{[\mu\alpha]} = -\Gamma^\lambda{}_{[\alpha\mu]} = Q^\lambda{}_{\mu\alpha}. \tag{4.6}$$

Dans ce cas nous pouvons écrire la relation (4.4) comme suit

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - (\Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)} + \Gamma^\lambda{}_{[\mu\alpha]}) g_{\lambda\nu} - (\Gamma^\lambda{}_{(\nu\alpha)} + \Gamma^\lambda{}_{[\nu\alpha]}) g_{\mu\lambda} = 0.$$

Il vient alors

$$\Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda{}_{(\nu\alpha)} g_{\mu\lambda} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - Q^\lambda{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - Q^\lambda{}_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda}. \tag{4.7}$$

En introduisant le tenseur $G_{\alpha\mu\nu}$ qui est défini par

$$G_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu\alpha} - Q_{\mu\nu\alpha}$$

et

$$\Gamma^\lambda{}_{(\mu\alpha)} g_{\lambda\nu} = \Gamma_{\nu/\mu\alpha}$$

nous obtenons

$$\Gamma_{\nu/\mu\alpha} + \Gamma_{\mu/\nu\alpha} = G_{\alpha\mu\nu} \tag{4.8}$$

$$\Gamma_{\mu/\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha/\mu\nu} = G_{\nu\alpha\mu} \tag{4.9}$$

et

$$\Gamma_{\alpha/\nu\mu} + \Gamma_{\nu/\alpha\mu} = G_{\mu\nu\alpha}. \tag{4.10}$$

A partir de (4.8) + (4.10) − (4.9) nous trouvons

$$2\Gamma_{\nu/\mu\alpha} = G_{\alpha\mu\nu} + G_{\mu\nu\alpha} - G_{\nu\alpha\mu}$$

il vient

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\left(G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu}\right)$$

nous obtenons le resultat

$$\Gamma^{\alpha}{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu}\right), \tag{4.11}$$

d'une autre part

$$G_{\nu\mu\lambda} = \partial_\nu g_{\mu\lambda} - Q_{\lambda\mu\nu} - Q_{\mu\lambda\nu} \tag{4.12}$$

$$G_{\lambda\nu\mu} = \partial_\lambda g_{\nu\mu} - Q_{\mu\nu\lambda} - Q_{\nu\mu\lambda} \tag{4.13}$$

et

$$G_{\mu\lambda\nu} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - Q_{\nu\lambda\mu} - Q_{\lambda\nu\mu} \tag{4.14}$$

en faisant (4.12) + (4.14) − (4.13) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu} &= \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu} - Q_{\lambda\mu\nu} \\ &\quad - Q_{\mu\lambda\nu} - Q_{\nu\lambda\mu} - Q_{\lambda\nu\mu} + Q_{\mu\nu\lambda} + Q_{\nu\mu\lambda} \end{aligned}$$

compte tenu du fait que

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -Q_{\mu\lambda\nu}$$

alors

$$G_{\nu\mu\lambda} + G_{\mu\lambda\nu} - G_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu} + 2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda} \tag{4.15}$$

nous remplaçons ce dernier resultat dans la relation (4.11)

$$\Gamma^{\alpha}{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda}\right) \tag{4.16}$$

nous avons précédemment la relation (4.5), et d'après les relations (4.6) et (4.16) , il vient alors

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(2Q_{\mu\nu\lambda} + 2Q_{\nu\mu\lambda}\right) + Q^{\alpha}{}_{\mu\nu},$$

finalement, nous écrivons

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\mu}{}^{\alpha} + Q^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{4.17}$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + T^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

avec

$\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ est le symbole de Christoffel qui est symétrique, où

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda} g_{\nu\mu} \right) \tag{4.19}$$

$T^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ est le tenseur de contorsion

$$T^{\alpha}{}_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\mu}{}^{\alpha} + Q^{\alpha}{}_{\mu\nu}. \tag{4.20}$$

4.2.2 Décomposition du tenseur de torsion $Q^{\nu\rho}{}_{\alpha}$

Puisque les tenseurs fondamentaux en U_4 ont un grand nombre de composantes indépendantes (24 pour la torsion et 36 pour la courbure) et il est pratique de décomposer ces objets géométriques en pièces irréductibles L_6 (où $L_6 \equiv SO(3,1)$ est le groupe de lorentz).

En premier lieu, nous devons décomposer le tenseur de torsion et pour cela nous écrivons $Q_{\lambda\mu\nu}$ comme suit

$$Q_{\lambda\mu\nu} = q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g_{\mu\nu} Q_{\lambda} + a_2 g_{\mu\lambda} Q_{\nu} + a_3 g_{\nu\lambda} Q_{\mu} + b_1 \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^{\rho} \tag{4.21}$$

où

$Q_{\mu} = Q^{\alpha}{}_{\mu\alpha}$ est la trace de tenseur du torsion

$\widetilde{Q}^{\rho}$ est la partie axiale de torsion avec $\varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = \widetilde{Q}^{\beta}$

$q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ est la composante du tenseur de torsion qui satisfait ; $q^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = 0$ et $\varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} q_{\lambda\mu\nu} = 0$.

Nous savons que $Q_{\lambda\mu\nu} = -Q_{\lambda\nu\mu}$, alors si nous changeons $\mu \longleftrightarrow \nu$ dans la relation (4.21)

$$\begin{aligned} Q_{\lambda\nu\mu} &= q_{\lambda\nu\mu} + a_1 g_{\nu\mu} Q_{\lambda} + a_2 g_{\nu\lambda} Q_{\mu} + a_3 g_{\mu\lambda} Q_{\nu} + b_1 \varepsilon_{\lambda\nu\mu\rho} \widetilde{Q}^{\rho} \\ &= -Q_{\lambda\mu\nu} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Rightarrow 2a_1 g_{\mu\nu} Q_{\lambda} + (a_2 + a_3)\, g_{\mu\lambda} Q_{\nu} + (a_2 + a_3)\, g_{\nu\lambda} Q_{\mu} = 0$$

il vient donc

$$a_1 = 0 \tag{4.22}$$

$$a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_3 \tag{4.23}$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned} Q_{\mu} &= g^{\lambda\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = g^{\lambda\nu} q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g^{\lambda\nu} g_{\mu\nu} Q_{\lambda} + a_2 g^{\lambda\nu} g_{\mu\lambda} Q_{\nu} \\ &\quad + a_3 g^{\lambda\nu} g_{\nu\lambda} Q_{\mu} + b_1 g^{\lambda\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^{\rho} \end{aligned}$$

donc

$$Q_\mu = a_1 Q_\mu + a_2 Q_\mu + 4a_3 Q_\mu \tag{4.24}$$

comme $a_1 = 0$ il vient

$$a_2 + 4a_3 = 1 \tag{4.25}$$

avec $a_2 = -a_3 \Longrightarrow$

$$a_3 = \frac{1}{3},\ a_2 = -\frac{1}{3}.$$

Cherchons maintenant la valeur de b_1,en utilisant les propriétés du tenseur de Levi-Cevita représentées dans $(A.6)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^\beta &= \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} q_{\lambda\mu\nu} + a_1 g_{\mu\nu} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\lambda + a_2 g_{\mu\lambda} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\nu \\ &\quad + a_3 g_{\nu\lambda} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} Q_\mu + b_1 \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^\rho\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\widetilde{Q}^\beta = 6 b_1 \delta^\beta_\rho \widetilde{Q}^\rho,$$

il vient

$$b_1 = \frac{1}{6}$$

en remplaçant $a_i (i = 1, 3)$ et b_1 par ses valeurs dans la relation (4.21), nous obtenons

$$Q_{\lambda\mu\nu} = q_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{3} g_{\nu\lambda} Q_\mu - \frac{1}{3} g_{\mu\lambda} Q_\nu + \frac{1}{6} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^\rho. \tag{4.26}$$

La décomposition du tenseur de torsion en trois parties irréductibles L_6 se lit comme suit

$$Q^\lambda{}_{\mu\nu} = q^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{2}{3} \delta^\lambda_{[\nu} Q_{\mu]} + \frac{1}{6} \varepsilon^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^\rho. \tag{4.27}$$

En tenant en compte de l'isotropie et de l'homogénéité de l'univers qui impliquent $q_{\lambda\mu\nu} = 0$, la décomposition du tenseur de torsion finale est

$$Q_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3} g_{\nu\lambda} Q_\mu - \frac{1}{3} g_{\mu\lambda} Q_\nu + \frac{1}{6} \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \widetilde{Q}^\rho. \tag{4.28}$$

4.3 Tenseurs de Riemann, Ricci et le scalaire de Ricci

4.3.1 Commutateur de deux dérivées covariantes

La dérivée covariante d'un vecteur est donnée par

$$\nabla_\mu V^\alpha = T^\alpha{}_\mu = V^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho \tag{4.29}$$

nous avons le commutateur de deux dérivées covariantes

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\mu (\nabla_\nu V^\alpha) - \nabla_\nu (\nabla_\mu V^\alpha)$$

nous écrivons

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\mu T^\alpha{}_\nu - \nabla_\nu T^\alpha{}_\mu, \tag{4.30}$$

la dérivée covariante d'un tenseur de type $\binom{1}{1}$

$$\nabla_\mu T^\alpha{}_\nu = T^\alpha{}_{\nu;\mu} = T^\alpha{}_{\nu,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_\sigma \tag{4.31}$$

nous obtenons donc

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = T^\alpha{}_{\nu,\mu} - T^\alpha{}_{\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} T^\sigma{}_\mu + \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} T^\alpha{}_\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} T^\alpha{}_\sigma, \tag{4.32}$$

avec

$$T^\alpha{}_{\nu,\mu} = (V^\alpha{}_{,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} V^\rho)_{,\mu} = V^\alpha{}_{,\nu\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} V^\rho + \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} V^\rho{}_{,\mu}$$

et

$$T^\alpha{}_{\mu,\nu} = (V^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho)_{,\nu} = V^\alpha{}_{,\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} V^\rho + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu} V^\rho{}_{,\nu},$$

dans ce cas nous remplaçons ces dernières dérivées dans la relation (4.32)

$$\begin{aligned}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha &= [\Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}] V^\rho \\ &\quad + (\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu})(V^\alpha{}_{,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma} V^\rho)\end{aligned}$$

il vient

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} V^\rho + 2Q^\sigma{}_{\mu\nu}(V^\alpha{}_{,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma} V^\rho)$$

finalement, nous obtenons

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} V^\rho + 2Q^\sigma{}_{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\alpha, \tag{4.33}$$

où

$$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}$$

et

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} = 2Q^\sigma{}_{\mu\nu}$$

$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann (de la courbure) et $Q^\sigma{}_{\mu\nu}$ est le tenseur de torsion, dans ce cas la géométrie est dit la géométrie de Riemann-Cartan U_4.

4.3.2 Décomposition du tenseur de Riemann $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$

Le tenseur de Riemann est défini comme

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\rho\mu}\Gamma^\rho{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu}\Gamma^\rho{}_{\beta\mu} \tag{4.34}$$

nous remplaçons les connexions $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$ par la relation (4.18)

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \left(\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\nu} + T^{\alpha}{}_{\beta\nu}\right)_{,\mu} - \left(\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu} + T^{\alpha}{}_{\beta\mu}\right)_{,\nu} \\ &+ \left(\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu} + T^{\alpha}{}_{\rho\mu}\right)\left(\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu} + T^{\rho}{}_{\beta\nu}\right) - \left(\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu} + T^{\alpha}{}_{\rho\nu}\right)\left(\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu} + T^{\rho}{}_{\beta\mu}\right) \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu} + T^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - T^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + T^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} \\ &- T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} + \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu}T^{\alpha}{}_{\rho\nu} \end{aligned}$$

nous ajoutons et nous soustrayons le terme $\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\rho}$ dans cette dernière expression et en tenant en compte les relations $(A.1)\,, (A.2)$ et $(A.3)$ et que $\overline{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ est symétrique nous obtenons

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + T^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu}T^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\rho} \\ &- (T^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\rho}) + T^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} \end{aligned}$$

finalement, le tenseur de Riemann en fonction du tenseur de contorsion est

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \overline{\nabla}_{\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \overline{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\mu} + T^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu}, \qquad (4.35)$$

notons que $\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann (ordinaire) en absence du torsion.

Ici, nous devons exprimer $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ en fonction de tenseur du torsion $Q^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, nous savons que

$$T^{\alpha}{}_{\beta\nu} = Q^{\alpha}{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\beta}{}^{\alpha},$$

la relation (4.35) devient

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \overline{\nabla}_{\mu}\left(Q^{\alpha}{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\beta}{}^{\alpha}\right) - \overline{\nabla}_{\nu}\left(Q^{\alpha}{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^{\alpha} + Q_{\mu\beta}{}^{\alpha}\right) \\ &+ \left(Q^{\alpha}{}_{\rho\mu} + Q_{\rho\mu}{}^{\alpha} + Q_{\mu\rho}{}^{\alpha}\right)\left(Q^{\rho}{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^{\rho} + Q_{\nu\beta}{}^{\rho}\right) \\ &- \left(Q^{\alpha}{}_{\rho\nu} + Q_{\rho\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\rho}{}^{\alpha}\right)\left(Q^{\rho}{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^{\rho} + Q_{\mu\beta}{}^{\rho}\right), \qquad (4.36) \end{aligned}$$

qui est le tenseur de Riemann en fonction du torsion, nous devons maintenant décomposer aussi les tenseurs de torsion en des termes irréductibles ;

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \overline{\nabla}_{\mu}\left(Q_{\alpha\beta\nu} + Q_{\beta\nu\alpha} + Q_{\nu\beta\alpha}\right) - \overline{\nabla}_{\nu}\left(Q_{\alpha\beta\mu} + Q_{\beta\mu\alpha} + Q_{\mu\beta\alpha}\right) \\ &+ \left(Q_{\alpha\rho\mu} + Q_{\rho\mu\alpha} + Q_{\mu\rho\alpha}\right)\left(Q^{\rho}{}_{\beta\nu} + Q_{\beta\nu}{}^{\rho} + Q_{\nu\beta}{}^{\rho}\right) \\ &- \left(Q^{\alpha}{}_{\rho\nu} + Q_{\rho\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\rho}{}^{\alpha}\right)\left(Q^{\rho}{}_{\beta\mu} + Q_{\beta\mu}{}^{\rho} + Q_{\mu\beta}{}^{\rho}\right) \qquad (4.37) \end{aligned}$$

nous avons

$$Q_{\alpha\beta\nu} + Q_{\beta\nu\alpha} + Q_{\nu\beta\alpha} = \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}Q_{\beta} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}Q_{\alpha} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma},$$

donc la relation (4.37) devient

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \overline{\nabla}_{\mu}\left(\frac{2}{3}g_{\alpha\nu}Q_{\beta} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}Q_{\alpha} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&\quad -\overline{\nabla}_{\nu}\left(\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}Q_{\beta} - \frac{2}{3}g_{\mu\beta}Q_{\alpha} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&\quad +\left(\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}Q_{\rho} - \frac{2}{3}g_{\mu\rho}Q_{\alpha} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right)\left(\frac{2}{3}\delta^{\rho}_{\nu}Q_{\beta} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}Q^{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right) \\
&\quad -\left(\frac{2}{3}g_{\alpha\nu}Q_{\rho} - \frac{2}{3}g_{\nu\rho}Q_{\alpha} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right)\left(\frac{2}{3}\delta^{\rho}_{\mu}Q_{\beta} - \frac{2}{3}g_{\mu\beta}Q^{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

nous simplifions, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
&\quad -\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta} \\
&\quad -\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha} - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu} - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\rho}Q_{\rho} \\
&\quad +\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\sigma}Q_{\alpha}\widetilde{Q}^{\sigma} \\
&\quad +\frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}Q_{\rho} - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\rho}\widetilde{Q}^{\sigma} + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} \\
&\quad -\frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} + \frac{1}{36}\left(\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} - \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}\right)\widetilde{Q}^{\sigma}\widetilde{Q}^{\gamma}
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

nous devons simplifier le dernier terme, donc nous calculons le produit $\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\varepsilon}g_{\nu\pi}g_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho\varepsilon\pi\lambda} = -g_{\beta\varepsilon}g_{\nu\pi}g_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\rho\alpha\mu\gamma}\varepsilon^{\rho\varepsilon\pi\lambda} \\
&= +6g_{\beta\varepsilon}g_{\nu\pi}g_{\sigma\lambda}\delta^{\varepsilon}_{[\alpha}\delta^{\pi}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\gamma]}
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

nous avons la propriété

$$
T_{[abc]} = \frac{1}{3!}\left(T_{abc} - T_{bac} + T_{bca} - T_{cba} + T_{cab} - T_{acb}\right) \tag{4.40}
$$

à partir de (4.40) la relation (4.39) devient

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\varepsilon}g_{\nu\pi}g_{\sigma\lambda}\begin{pmatrix} \delta^{\varepsilon}_{\alpha}\delta^{\pi}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\gamma} - \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\pi}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\gamma} + \delta^{\varepsilon}_{\mu}\delta^{\pi}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\alpha} \\ -\delta^{\varepsilon}_{\gamma}\delta^{\pi}_{\mu}\delta^{\lambda}_{\alpha} + \delta^{\varepsilon}_{\gamma}\delta^{\pi}_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\mu} - \delta^{\varepsilon}_{\alpha}\delta^{\pi}_{\gamma}\delta^{\lambda}_{\mu} \end{pmatrix} \\
\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} &= g_{\beta\alpha}g_{\nu\mu}g_{\sigma\gamma} - g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}g_{\sigma\gamma} + g_{\beta\mu}g_{\nu\gamma}g_{\sigma\alpha} \\
&\quad -g_{\beta\gamma}g_{\nu\mu}g_{\sigma\alpha} + g_{\beta\gamma}g_{\nu\alpha}g_{\sigma\mu} - g_{\beta\alpha}g_{\nu\gamma}g_{\sigma\mu}
\end{aligned}
$$

de même

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma} &= g_{\beta\alpha}g_{\nu\mu}g_{\sigma\gamma} - g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}g_{\sigma\gamma} + g_{\beta\nu}g_{\mu\gamma}g_{\sigma\alpha} \\
&\quad - g_{\beta\gamma}g_{\nu\mu}g_{\sigma\alpha} + g_{\beta\gamma}g_{\mu\alpha}g_{\sigma\nu} - g_{\beta\alpha}g_{\mu\gamma}g_{\sigma\nu}
\end{aligned}$$

donc nous écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{36}\left(\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma} - \varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}\right)\widetilde{Q}^{\sigma}\widetilde{Q}^{\gamma} &= \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
&\quad + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\widetilde{Q}_{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu} \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

en remplaçant (4.41) dans (4.38) nous obtenons le résultat final de la décomposition du tenseur de Riemann

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
&\quad - \frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta} \\
&\quad - \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha} - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu} - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\rho}Q_{\rho} \\
&\quad + \frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\sigma}Q_{\alpha}\widetilde{Q}^{\sigma} \\
&\quad + \frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}Q_{\rho} - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\rho}\widetilde{Q}^{\sigma} + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} \\
&\quad - \frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\rho} + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
&\quad + \frac{1}{36}g_{\beta\mu}\widetilde{Q}_{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\alpha} + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu}. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

4.3.3 Décomposition du tenseur de Ricci $R_{\beta\nu}$

A partir du tenseur de Riemann $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ (4.35) nous pouvons conclure la formule du tenseur de Ricci $R_{\beta\nu}$ en fonction de contorsion

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = \overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} + \overline{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \overline{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\alpha}$$

alors

$$R_{\beta\nu} = \overline{R}_{\beta\nu} + \overline{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \overline{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\alpha}, \qquad (4.43)$$

dans ce cas $\overline{R}_{\beta\nu}$ est le tenseur de Ricci en absence du torsion.

De même, à partir de la relation (4.36) nous obtenons le tenseur de Ricci en fonction de torsion

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu} &= \overline{R}_{\beta\nu} + \overline{\nabla}_{\alpha}(Q_{\beta\nu}{}^{\alpha} + Q_{\nu\beta}{}^{\alpha} + Q^{\alpha}{}_{\beta\nu}) - 2\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} \\ &\quad +2Q_{\rho}\left(Q_{\beta\nu}{}^{\rho} + Q_{\nu\beta}{}^{\rho} + Q^{\rho}{}_{\beta\nu}\right) \\ &\quad +2Q^{\alpha}{}_{\nu\rho}Q_{\beta\alpha}{}^{\rho} + Q_{\nu\alpha\rho}Q_{\beta}{}^{\alpha\rho} \end{aligned} \tag{4.44}$$

il reste de trouver la formule du tenseur de Ricci en fonction des termes irréductibles, compte tenu de la ralation (4.42) $\times\, g^{\mu\alpha}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu} &= \overline{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{4}{3}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) \\ &\quad +\frac{8}{9}Q_{\nu}Q_{\beta} - \frac{8}{9}g_{\nu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{18}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} - \frac{1}{18}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu} \end{aligned} \tag{4.45}$$

et

$$\begin{aligned} R^{\beta\nu} &= \overline{R}^{\beta\nu} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\lambda}Q^{\lambda} - \frac{4}{3}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\beta} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\lambda}\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right) \\ &\quad +\frac{8}{9}Q^{\nu}Q^{\beta} - \frac{8}{9}g^{\nu\beta}Q_{\sigma}Q^{\sigma} + \frac{1}{18}g^{\nu\beta}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma} - \frac{1}{18}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.3.4 Décomposition du scalaire de Ricci R

De même, le scalaire de Ricci R est donné par

$$R = g^{\beta\nu}R_{\beta\nu} = g^{\beta\nu}\overline{R}_{\beta\nu} + g^{\beta\nu}\overline{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} - g^{\beta\nu}\overline{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\alpha} + g^{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - g^{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\alpha}$$

$$R = \overline{R} + \overline{\nabla}_{\alpha}T^{\alpha\beta}{}_{\beta} - \overline{\nabla}_{\beta}T^{\alpha\beta}{}_{\alpha} + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho\nu}{}_{\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho\nu}{}_{\alpha}$$

avec $\overline{R} = g^{\beta\nu}\overline{R}_{\beta\nu}$

$$R = \overline{R} + \overline{\nabla}_{\alpha}(T^{\alpha\nu}{}_{\nu} - T^{\nu\alpha}{}_{\nu}) + T^{\alpha}{}_{\rho\alpha}T^{\rho\nu}{}_{\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho\nu}{}_{\alpha} \tag{4.47}$$

$\overline{R}$ représente le scalaire de Ricci en absence du torsion.

Nous trouvons la formule du scalaire de Ricci en fonction du torsion à partir du (4.44)

$$R = \overline{R} - 4\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} - 4Q_{\rho}Q^{\rho} + 2Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\mu\rho} + Q^{\mu\nu\rho}Q_{\mu\nu\rho}. \tag{4.48}$$

Afin de trouver la formule du scalaire de Ricci en fonction des termes irréductibles, nous utilisons la relation (4.45)

$$R = \overline{R} - 4\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{8}{3}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{6}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}. \tag{4.49}$$

4.4 Décomposition des termes quadratiques en $Q^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

4.4.1 Décomposition de $Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho}$

Nous calculons le produit

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} &= \left[\frac{1}{3}g_{\rho\mu}Q_{\nu} - \frac{1}{3}g_{\nu\mu}Q_{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\widetilde{Q}^{\beta}\right] \times \left[\frac{1}{3}g^{\rho\mu}Q^{\nu} - \frac{1}{3}g^{\nu\mu}Q^{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}\right] \\
&= \frac{4}{9}Q_{\nu}Q^{\nu} - \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{18}\varepsilon_{\rho}{}^{\nu\rho\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\nu} - \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{4}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{18}\varepsilon_{\nu}{}^{\nu\rho\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\rho} \\
&\quad + \frac{1}{18}\varepsilon^{\rho}{}_{\nu\rho\beta}\widetilde{Q}^{\beta}Q^{\nu} - \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\nu\rho\beta}Q^{\rho}\widetilde{Q}^{\beta} + \frac{1}{36}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\beta}
\end{aligned}$$

Comme

$$g_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0,\ \ \varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\gamma} = -6\delta^{\gamma}_{\beta}$$

nous obtenons

$$Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} = \frac{2}{3}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}. \tag{4.50}$$

4.4.2 Décomposition de $Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu}$

Nous calculons aussi

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} &= \left[\frac{1}{3}g_{\rho\mu}Q_{\nu} - \frac{1}{3}g_{\nu\mu}Q_{\rho} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\widetilde{Q}^{\beta}\right] \times \left[\frac{1}{3}g^{\mu\nu}Q^{\rho} - \frac{1}{3}g^{\rho\nu}Q^{\mu} + \frac{1}{6}\varepsilon^{\nu\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}\right] \\
&= \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{9}Q_{\nu}Q^{\nu} + \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\mu}{}^{\mu\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\nu} - \frac{4}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{9}Q_{\rho}Q^{\rho} \\
&\quad - \frac{1}{18}\varepsilon_{\mu}{}^{\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\rho} + \frac{1}{18}\varepsilon^{\nu}{}_{\nu\rho\beta}\widetilde{Q}^{\beta}Q^{\rho} - \frac{1}{18}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\nu}{}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}Q^{\mu} \\
&\quad + \frac{1}{36}\varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}\varepsilon^{\nu\rho\mu\gamma}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\beta}
\end{aligned}$$

$$Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} = -\frac{1}{3}Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta} \tag{4.51}$$

alors

$$AQ_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} + BQ_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} + CQ_{\mu}Q^{\mu} = \frac{1}{3}\left(2A - B + 3C\right)Q_{\rho}Q^{\rho} - \frac{1}{6}\left(A + B\right)\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}. \tag{4.52}$$

4.5 Décomposition des termes quadratiques en $R_{\alpha\beta\mu\nu}$

4.5.1 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$

Nous avons le produit

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} &= \left[\begin{array}{c}
\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right)-\frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right)+\frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta}\\
-\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta}+\frac{2}{3}g_{\mu\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha}-\frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}+\frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta}\\
-\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta}+\frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha}-\frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu}-\frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\gamma}Q_{\gamma}\\
+\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\gamma}Q^{\gamma}+\frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\gamma}+\frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_{\alpha}\widetilde{Q}^{\gamma}\\
+\frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}Q_{\gamma}-\frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\gamma}\widetilde{Q}^{\sigma}+\frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma}\\
-\frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma}+\frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}-\frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\\
+\frac{1}{36}g_{\beta\mu}\widetilde{Q}_{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha}-\frac{1}{36}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\alpha}+\frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu}-\frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu}
\end{array}\right]\\
&\times\left[\begin{array}{c}
\overline{R}^{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)-\frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\nu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)+\frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\beta}\\
-\frac{2}{3}g^{\alpha\mu}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\beta}+\frac{2}{3}g^{\mu\beta}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\alpha}-\frac{2}{3}g^{\nu\beta}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\alpha}+\frac{4}{9}g^{\alpha\mu}Q^{\nu}Q^{\beta}\\
-\frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^{\mu}Q^{\beta}+\frac{4}{9}g^{\nu\beta}Q^{\mu}Q^{\alpha}-\frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^{\alpha}Q^{\nu}-\frac{4}{9}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho}\\
+\frac{4}{9}g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho}+\frac{2}{9}\varepsilon^{\alpha\nu\mu}{}_{\rho}Q^{\beta}\widetilde{Q}^{\rho}+\frac{2}{9}\varepsilon^{\nu\beta\mu}{}_{\rho}Q^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho}\\
+\frac{1}{9}g^{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho\beta\nu}{}_{\theta}\widetilde{Q}^{\theta}Q_{\rho}-\frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho\beta\mu}{}_{\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}^{\theta}+\frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\nu\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta}\\
-\frac{1}{9}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\mu\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta}+\frac{1}{36}g^{\nu\beta}g^{\alpha\mu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}-\frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\\
+\frac{1}{36}g^{\mu\beta}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\alpha}-\frac{1}{36}g^{\nu\beta}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\alpha}+\frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\mu}-\frac{1}{36}g^{\alpha\mu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu}
\end{array}\right]
\end{aligned}$$

En tenant en compte les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) &= \overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\alpha\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)=0,\ \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\alpha\rho}=0\\
g^{\beta\mu}\overline{R}_{\mu\beta\alpha\nu} &= \overline{R}^{\beta}{}_{\beta\alpha\nu}=0,\ \overline{R}_{\mu\beta\alpha}{}^{\alpha}=0\\
\overline{R}^{\mu}{}_{\gamma\beta\nu}Q^{\nu}Q^{\beta} &= 0,\ \overline{R}^{\mu}{}_{\gamma\beta\nu}\tilde{Q}^{\nu}\tilde{Q}^{\beta}=0\\
\varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu} &= 0,\ \varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\tilde{Q}_{\theta}Q_{\beta}Q_{\mu}=0\\
Q^{\nu}Q^{\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\mu}{}_{\nu\beta\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) &= 0,\ \tilde{Q}^{\nu}\tilde{Q}^{\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\mu}{}_{\nu\beta\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)=0\\
\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) &= \varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\left(\overline{\nabla}^{\mu}\widetilde{Q}^{\rho}\right)\left(\overline{\nabla}_{\mu}\widetilde{Q}^{\gamma}\right).
\end{aligned}\tag{4.53}$$

Nous remarquons que nous obtenons 625 termes nous passons par plusieurs étapes de simplification, nous trouvons finalement 24 termes ;

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = {} & \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{R}^{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{3}\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) + \frac{8}{3}\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\beta} \\
& + \frac{32}{9}\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}Q^{\nu}Q^{\beta} - \frac{16}{9}\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\alpha} \\
& + \frac{1}{9}\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} + \frac{1}{18}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
& - \frac{1}{18}\overline{\nabla}^{\nu}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\mu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{8}{9}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\alpha}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) \\
& + \frac{16}{9}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} + \frac{32}{9}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} + \frac{128}{27}Q_{\rho}Q^{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu} \\
& - \frac{128}{27}Q^{\mu}Q^{\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} - \frac{8}{27}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu} + \frac{8}{27}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} \\
& + \frac{88}{81}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}Q_{\gamma}Q^{\gamma} - \frac{48}{81}Q^{\mu}Q^{\beta}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\beta} + \frac{192}{81}Q_{\gamma}Q^{\gamma}Q_{\alpha}Q^{\alpha} \\
& + \frac{1}{108}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} + \frac{8}{9}\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^{\beta}\widetilde{Q}_{\rho} + \frac{8}{9}\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}_{\theta} \\
& + \frac{8}{27}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^{\beta}\widetilde{Q}_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{4}{27}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}_{\theta}\overline{\nabla}^{\mu}\left(\varepsilon_{\mu\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

4.5.2 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta}$

Le produit de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ est donné par

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta} = {} & \begin{bmatrix}
\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
-\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta} \\
-\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha} - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu} - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\gamma}Q_{\gamma} \\
+\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\gamma}Q^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_{\alpha}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
+\frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}Q_{\gamma} - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\gamma}\widetilde{Q}^{\sigma} + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma} \\
-\frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma} + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
+\frac{1}{36}g_{\beta\mu}\widetilde{Q}_{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\alpha} + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu}
\end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix}
\overline{R}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\beta}\left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) + \frac{2}{3}g^{\mu\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\nu} \\
-\frac{2}{3}g^{\alpha\mu}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\nu} + \frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\mu} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\mu} + \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}Q^{\nu}Q^{\beta} \\
-\frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^{\alpha}Q^{\nu} + \frac{4}{9}g^{\nu\beta}Q^{\mu}Q^{\alpha} - \frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^{\mu}Q^{\beta} - \frac{4}{9}g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} \\
+\frac{4}{9}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon^{\mu\beta\alpha}{}_{\rho}Q^{\nu}\widetilde{Q}^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon^{\beta\nu\alpha}{}_{\rho}Q^{\mu}\widetilde{Q}^{\rho} \\
+\frac{1}{9}g^{\alpha\mu}\varepsilon^{\rho\nu\beta}{}_{\theta}\widetilde{Q}^{\theta}Q_{\rho} - \frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\rho\nu\alpha}{}_{\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}^{\theta} + \frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\mu\theta\beta\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta} \\
-\frac{1}{9}g^{\nu\beta}\varepsilon^{\mu\theta\alpha\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta} + \frac{1}{36}g^{\nu\beta}g^{\alpha\mu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} - \frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} \\
+\frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\mu} - \frac{1}{36}g^{\nu\beta}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\alpha} + \frac{1}{36}g^{\mu\beta}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\alpha} - \frac{1}{36}g^{\alpha\mu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu}
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Après simplification et compte tenu les propriétés (4.53), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\mu\nu\alpha\beta} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{R}^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{2}{3}\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) + \frac{16}{3}\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\nu} \\
&+\frac{32}{9}\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}Q^{\nu}Q^{\beta} + \frac{16}{9}\overline{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{9}\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} \\
&+\frac{2}{9}\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\mu} + \frac{1}{9}\overline{\nabla}^{\alpha}\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&+\frac{16}{9}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q^{\nu} + \frac{32}{9}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} + \frac{104}{27}Q_{\rho}Q^{\rho}\overline{\nabla}_{\nu}Q^{\nu} \\
&-\frac{128}{27}Q_{\alpha}Q_{\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\nu} - \frac{7}{27}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu} + \frac{8}{27}\widetilde{Q}_{\alpha}\widetilde{Q}_{\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\nu} \\
&-\frac{40}{81}Q^{\alpha}Q^{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha}\widetilde{Q}_{\nu} + \frac{16}{81}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}Q_{\gamma}Q^{\gamma} + \frac{192}{81}Q_{\rho}Q^{\rho}Q_{\beta}Q^{\beta} \\
&+\frac{1}{108}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta} + \frac{8}{9}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}\overline{\nabla}^{\nu}\left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\right) + \frac{8}{9}\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\mu\beta\alpha\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q^{\nu} \\
&+\frac{8}{9}\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\widetilde{Q}_{\theta}Q_{\rho} + \frac{4}{27}\varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&+\frac{4}{27}\varepsilon^{\mu\beta\alpha\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q^{\nu}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{4}{27}\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\widetilde{Q}_{\theta}Q_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon^{\mu}{}_{\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

4.5.3 Décomposition de $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu}$

Finalement, nous calculons le dernier produit

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu} &= \left[\begin{array}{c}
\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{2}{3}g_{\alpha\nu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
-\frac{2}{3}g_{\alpha\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{2}{3}g_{\mu\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\alpha} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha} + \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}Q_{\nu}Q_{\beta} \\
-\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{4}{9}g_{\nu\beta}Q_{\mu}Q_{\alpha} - \frac{4}{9}g_{\mu\beta}Q_{\alpha}Q_{\nu} - \frac{4}{9}g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta}Q^{\gamma}Q_{\gamma} \\
+\frac{4}{9}g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}Q_{\gamma}Q^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\alpha\nu\mu\gamma}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\gamma} + \frac{2}{9}\varepsilon_{\nu\beta\mu\gamma}Q_{\alpha}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
+\frac{1}{9}g_{\alpha\mu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}Q_{\gamma} - \frac{1}{9}g_{\alpha\nu}\varepsilon^{\gamma}{}_{\beta\mu\sigma}Q_{\gamma}\widetilde{Q}^{\sigma} + \frac{1}{9}g_{\mu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma} \\
-\frac{1}{9}g_{\nu\beta}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}Q^{\sigma} + \frac{1}{36}g_{\beta\nu}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} - \frac{1}{36}g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma} \\
+\frac{1}{36}g_{\beta\mu}\widetilde{Q}_{\nu}\widetilde{Q}_{\alpha} - \frac{1}{36}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\mu}\widetilde{Q}_{\alpha} + \frac{1}{36}g_{\nu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\mu} - \frac{1}{36}g_{\mu\alpha}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu}
\end{array}\right] \\
&\times\left[\begin{array}{c}
\overline{R}^{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\beta}\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) - \frac{1}{6}\overline{\nabla}^{\nu}\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) + \frac{2}{3}g^{\alpha\nu}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\mu} \\
-\frac{2}{3}g^{\alpha\beta}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\mu} + \frac{2}{3}g^{\mu\beta}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\alpha} - \frac{2}{3}g^{\nu\mu}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\alpha} + \frac{4}{9}g^{\alpha\beta}Q^{\nu}Q^{\mu} \\
-\frac{4}{9}g^{\alpha\nu}Q^{\mu}Q^{\beta} + \frac{4}{9}g^{\nu\mu}Q^{\beta}Q^{\alpha} - \frac{4}{9}g^{\mu\beta}Q^{\alpha}Q^{\nu} - \frac{4}{9}g^{\alpha\beta}g^{\nu\mu}Q_{\rho}Q^{\rho} \\
+\frac{4}{9}g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon^{\alpha\nu\beta}{}_{\rho}Q^{\mu}\widetilde{Q}^{\rho} + \frac{2}{9}\varepsilon^{\nu\mu\beta}{}_{\rho}Q^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho} \\
+\frac{1}{9}g^{\alpha\beta}\varepsilon^{\rho\mu\nu}{}_{\theta}\widetilde{Q}^{\theta}Q_{\rho} - \frac{1}{9}g^{\alpha\nu}\varepsilon^{\rho\mu\beta}{}_{\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}^{\theta} + \frac{1}{9}g^{\mu\beta}\varepsilon^{\alpha\theta\nu\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta} \\
-\frac{1}{9}g^{\nu\mu}\varepsilon^{\alpha\theta\beta\rho}\widetilde{Q}_{\rho}Q_{\theta} + \frac{1}{36}g^{\nu\mu}g^{\alpha\beta}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} - \frac{1}{36}g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} \\
+\frac{1}{36}g^{\mu\beta}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\alpha} - \frac{1}{36}g^{\nu\mu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\alpha} + \frac{1}{36}g^{\alpha\nu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\mu} - \frac{1}{36}g^{\alpha\beta}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\nu}
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Nous trouvons dans ce dernier cas la résultat suivant

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu\beta\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{R}^{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{2}{3}\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) + \frac{8}{3}\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\mu} \\
&-\frac{20}{9}\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}Q^{\mu}Q^{\beta} + \frac{8}{9}\overline{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{9}\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\alpha} \\
&-\frac{1}{18}\overline{R}^{\nu\mu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} + \frac{8}{9}\overline{R}_{\alpha\beta\nu\mu}\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}Q^{\mu}\widetilde{Q}_{\rho} - \frac{4}{9}\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\mu\beta\rho\theta}Q_{\rho}\widetilde{Q}_{\theta} \\
&+\frac{1}{12}\overline{\nabla}^{\beta}\left(\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{1}{36}\overline{\nabla}^{\nu}\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\right)\overline{\nabla}_{\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&+\frac{4}{27}\varepsilon^{\nu\mu\beta\rho}Q^{\alpha}\widetilde{Q}_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) + \frac{2}{27}\varepsilon^{\alpha\nu\beta\rho}Q^{\mu}\widetilde{Q}_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}\right) \\
&+\frac{8}{9}\overline{\nabla}^{\beta}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} + \frac{8}{9}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} + \frac{8}{9}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\mu} - \frac{88}{27}Q^{\mu}Q^{\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
&+\frac{56}{27}Q_{\alpha}Q^{\alpha}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu} - \frac{4}{27}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}Q^{\mu} + \frac{4}{27}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\beta}\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\beta} \\
&-\frac{4}{81}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}Q_{\mu}Q^{\mu} + \frac{16}{81}\widetilde{Q}^{\mu}\widetilde{Q}^{\beta}Q_{\mu}Q_{\beta} + \frac{96}{81}Q_{\mu}Q^{\mu}Q_{\alpha}Q^{\alpha} \\
&+\frac{1}{216}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\widetilde{Q}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

4.5.4 Décomposition de $R_{\beta\nu}R^{\beta\nu}$

Le produit de deux tenseurs de Ricci est donné par

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu}R^{\beta\nu} = &\left[\begin{array}{l} \overline{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{4}{3}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right) \\ +\frac{8}{9}Q_{\nu}Q_{\beta} - \frac{8}{9}g_{\nu\beta}Q_{\rho}Q^{\rho} + \frac{1}{18}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_{\rho}\widetilde{Q}^{\rho} - \frac{1}{18}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}_{\nu} \end{array}\right] \\
\times &\left[\begin{array}{l} \overline{R}^{\beta\nu} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\overline{\nabla}_{\lambda}Q^{\lambda} - \frac{4}{3}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\beta} + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_{\lambda}\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right) \\ +\frac{8}{9}Q^{\nu}Q^{\beta} - \frac{8}{9}g^{\nu\beta}Q_{\sigma}Q^{\sigma} + \frac{1}{18}g^{\nu\beta}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma} - \frac{1}{18}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu}R^{\beta\nu} &= \overline{R}_{\beta\nu}\overline{R}^{\beta\nu} - \frac{4}{3}\overline{R}\overline{\nabla}_{\lambda}Q^{\lambda} - \frac{8}{3}\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\beta} + \frac{16}{9}\overline{R}_{\beta\nu}Q^{\nu}Q^{\beta} \\
&-\frac{16}{9}\overline{R}Q_{\sigma}Q^{\sigma} + \frac{1}{9}\overline{R}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma} - \frac{1}{9}\overline{R}_{\beta\nu}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu} + \frac{32}{9}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha}\overline{\nabla}_{\lambda}Q^{\lambda} \\
&+\frac{160}{27}Q_{\sigma}Q^{\sigma}\overline{\nabla}_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{10}{27}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\overline{\nabla}_{\nu}Q^{\nu} + \frac{16}{9}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta}\overline{\nabla}^{\nu}Q^{\beta} \\
&-\frac{64}{27}Q^{\nu}Q^{\beta}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{4}{27}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta} + \frac{192}{81}Q_{\rho}Q^{\rho}Q_{\beta}Q^{\beta} \\
&-\frac{16}{81}Q_{\nu}Q^{\nu}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma} - \frac{8}{81}Q_{\nu}Q_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}^{\nu} + \frac{1}{108}\widetilde{Q}_{\beta}\widetilde{Q}^{\beta}\widetilde{Q}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma} \\
&-\frac{4}{9}\overline{\nabla}_{\nu}Q_{\beta}\overline{\nabla}_{\lambda}\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right) + \frac{1}{36}\overline{\nabla}_{\lambda}\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_{\sigma}\widetilde{Q}^{\sigma}\right)\overline{\nabla}_{\alpha}\left(\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^{\rho}\right). \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

4.5.5 Décomposition de $R_{\beta\nu}R^{\nu\beta}$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu}R^{\nu\beta} &= \left[\begin{array}{l} \overline{R}_{\beta\nu} - \frac{2}{3}g_{\nu\beta}\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{4}{3}\overline{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^\rho\right) \\ +\frac{8}{9}Q_\nu Q_\beta - \frac{8}{9}g_{\nu\beta}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{18}g_{\beta\nu}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho - \frac{1}{18}\widetilde{Q}_\beta\widetilde{Q}_\nu \end{array}\right] \\ &\quad \times \left[\begin{array}{l} \overline{R}^{\nu\beta} - \frac{2}{3}g^{\nu\beta}\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{4}{3}\overline{\nabla}^\beta Q^\nu + \frac{1}{6}\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\right) \\ +\frac{8}{9}Q^\nu Q^\beta - \frac{8}{9}g^{\nu\beta}Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{18}g^{\nu\beta}\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma - \frac{1}{18}\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu \end{array}\right] \end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu}R^{\nu\beta} &= \overline{R}_{\beta\nu}\overline{R}^{\nu\beta} - \frac{4}{3}\overline{R}\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{8}{3}\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^\beta Q^\nu + \frac{16}{9}\overline{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta \\ &\quad -\frac{16}{9}\overline{R}Q_\sigma Q^\sigma + \frac{1}{9}\overline{R}\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma - \frac{1}{9}\overline{R}_{\beta\nu}\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu + \frac{32}{9}\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda \\ &\quad +\frac{160}{27}Q_\sigma Q^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{10}{27}\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{16}{9}\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\overline{\nabla}^\beta Q^\nu \\ &\quad -\frac{64}{27}Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{4}{27}\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{192}{81}Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\ &\quad -\frac{16}{81}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta - \frac{8}{81}Q_\nu Q_\beta\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu + \frac{1}{108}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu \\ &\quad -\frac{4}{9}\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\right) + \frac{1}{36}\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\nu\beta}{}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\right)\overline{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^\alpha{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^\rho\right). \end{aligned} \tag{4.58}$$

4.5.6 Décomposition de R^2

Nous calculons le produit

$$\begin{aligned} R^2 &= \left[\overline{R} - 4\overline{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{8}{3}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{6}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\right] \\ &\quad \times\left[\overline{R} - 4\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \frac{8}{3}Q_\gamma Q^\gamma + \frac{1}{6}\widetilde{Q}_\gamma\widetilde{Q}^\gamma\right] \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$\begin{aligned} R^2 &= \overline{R}^2 - 8\overline{R}\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha + 16\overline{\nabla}_\mu Q^\mu\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{64}{3}Q_\gamma Q^\gamma\overline{\nabla}_\mu Q^\mu \\ &\quad -\frac{4}{3}\widetilde{Q}_\gamma\widetilde{Q}^\gamma\overline{\nabla}_\mu Q^\mu - \frac{16}{3}\overline{R}Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{3}\overline{R}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho \\ &\quad +\frac{64}{9}Q_\rho Q^\rho Q_\gamma Q^\gamma - \frac{8}{9}Q_\rho Q^\rho\widetilde{Q}_\gamma\widetilde{Q}^\gamma + \frac{1}{36}\widetilde{Q}_\gamma\widetilde{Q}^\gamma\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho. \end{aligned} \tag{4.59}$$

4.6 Le lagrangien total

Dans la théorie de jauge de Poincaré le lagrangien L_G quadratique est défini par la forme suivante [42]

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{1}{2}M_{Pl}^2 R + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \left(a_1 Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} + a_2 Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} + a_3 Q_\mu Q^\mu\right) \\ &\quad + b_1 R^2 + b_2 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + b_3 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\mu\nu} \\ &\quad + b_4 R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\rho\nu\sigma} + b_5 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + b_6 R_{\mu\nu}R^{\nu\mu} \end{aligned} \tag{4.60}$$

où M_{Pl}^2 est la masse de Planck, a_i,et b_i sont des paramètres sans dimensions.

Afin d'obtenir le terme de Gauss-Bonnet et qui est défini par

$$G \ltimes R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

nous devons faire la limite $Q = 0$, et qu'il implique

$$R = \overline{R}, R_{\mu\nu} = \overline{R}_{\mu\nu} = \overline{R}_{\nu\mu}, R_{\mu\nu\rho\sigma} = \overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \overline{R}_{\rho\sigma\mu\nu} et \overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{R}^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{1}{2}\overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{R}^{\mu\nu\rho\sigma},$$

le lagrangien L_G devient alors

$$L_G\mid_{Q=0} = \frac{1}{2}M_{Pl}^2\overline{R} + b_1\overline{R}^2 + (b_5 + b_6)\overline{R}_{\mu\nu}\overline{R}^{\mu\nu} + \left(b_2 + b_3 + \frac{b_4}{2}\right)\overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{R}^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{4.61}$$

Donc il faut les contraintes $b_5 = -4b_1 - b_6$ et $b_4 = 2\left(b_1 - b_2 - b_3\right).$

Dans notre travail, nous dénotons le terme de Gauss-Bonnet $\overline{G}$ par

$$\overline{G} = b_1\left(\overline{R}^2 - 4\overline{R}_{\mu\nu}\overline{R}^{\mu\nu} + \overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$$

b_1 représente la constante de couplage de ce terme.

4.7 Elimination des fantômes

Soit le lagrangien obtenue à partir de résultat $(A.17)$

$$\begin{aligned} L_G &= -\frac{8}{9}(\kappa-\beta)\Upsilon_{\mu\alpha}\Upsilon^{\mu\alpha}+\frac{1}{18}(\kappa-2\beta)S_{\nu\gamma}S^{\nu\gamma}+\frac{1}{2}m_T^2Q^2+\frac{1}{2}m_S^2\widetilde{Q}^2 \\ &+\frac{24}{81}\beta\widetilde{Q}^2Q^2+\frac{8}{81}(4\beta-9b_2)\left[\left(\widetilde{Q}^\nu Q_\nu\right)^2+3\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\right] \\ &+\frac{1}{27}\beta\widetilde{Q}^2\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{8}{27}(\beta-3b_2)\widetilde{Q}_\mu Q_\gamma\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma+\frac{1}{3}(\beta-3b_2)\left(\overline{\nabla}_\nu\widetilde{Q}^\nu\right)^2 \\ &+\frac{1}{9}\beta\left(2\overline{G}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma+\overline{R}\widetilde{Q}^2\right)+... \end{aligned} \tag{4.62}$$

Pour que la théorie donne des résultats précis, les fantômes doivent être éliminés. La composante axiale $\widetilde{Q}_\nu$ présente des termes très inquiétants en contairement à la trace du torsion Q_ν, et qui apparaissent sous trois formes;

1-Le terme le plus pathologique est $\left(\overline{\nabla}_\nu\widetilde{Q}^\nu\right)^2$ qui introduit les fantômes associé principalement à la composante temporelle $\widetilde{Q}^0$ (la composante temporelle parceque on s'interesse au terme donc il faut que $\beta-3b_2=0\Rightarrow\beta=3b_2$ cette contrainte a déjà été retrouvée dans la littérature afin de garantir un spectre stable sur Minkowski.

2-La présence des instabilités relie au terme $2\overline{G}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma+\overline{R}\widetilde{Q}^2$ est apparente dans les équations du champ métrique où à nouveau la composante temporelle entrera avec des dérivées secondes, l'écriture du couplage $\overline{G}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma$ est due à la condition de continuité ou de divergence $\bigtriangledown^\nu\overline{G}_{\nu\gamma}=0$ et donc elle élimine directement les fantômes. Il reste le terme $\overline{R}\widetilde{Q}^2$ alors nous devons imposer $\beta=0$

Nous avons précédemment $\beta=3b_2$ et maintenant $\beta=0$ donc

$$\beta=b_2=0 \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} \beta &= b_1+b_2-b_3=0 \\ &\Rightarrow b_1=b_3 \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$L_{G|\beta=b_2=0}=-\frac{8}{9}\kappa\Upsilon_{\mu\alpha}\Upsilon^{\mu\alpha}+\frac{1}{18}\kappa S_{\nu\gamma}S^{\nu\gamma}+\frac{1}{2}m_T^2Q^2+\frac{1}{2}m_S^2\widetilde{Q}^2+...$$

3-Il ya d'autre termes pathologiques comme $\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha,\widetilde{Q}_\gamma Q_\mu\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma,\overline{\nabla}_\mu Q_\beta\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)...$ qu'ils doivent être éliminés.

4-Nous remarquons que les deux termes cinétiques $\Upsilon_{\mu\alpha}\Upsilon^{\mu\alpha},S_{\nu\gamma}S^{\nu\gamma}$ sont en fonctions de $-\kappa$ et $+\kappa$ respectivement (nous posons $\beta=0$) et donc nous ne savons pas s'ils sont positifs ou négatifs, il faut donc poser

$$\kappa=0 \tag{4.65}$$

$$\kappa = 0 \Rightarrow b_6 = -4b_1 \tag{4.66}$$

5-Les termes $\overline{\nabla}_\nu V^\nu$ et $\overline{\nabla}_\nu \widetilde{V}^\nu$ sont des termes de surface nous les néglige.

Pour une théorie libre de ghosts, le lagrangien L_G s'écrit alors

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{1}{2}M_{Pl}^2 R + \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \left(a_1 Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} + a_2 Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\rho\mu} + a_3 Q_\mu Q^\mu\right) \\ &\quad + b_1 \left(R^2 + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\nu\mu}\right). \end{aligned}$$

Nous concluons que la théorie libre de ghosts est celle de Gauss-Bonnet avec torsion.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'existence des ghosts dans le secteur vectoriel et comment les éliminer. Nous avons vu que les termes cinétiques pour Q_μ et $\tilde{Q}_\mu$ ont des signes opposés, en montrant ainsi que la présence d'un fantôme est inévitable. La seule possibilité d'une théorie stable est d'annuler exactement les deux termes cinétiques et, par conséquent, tout le secteur vectoriel devient non dynamique.

Chapitre 5

Cosmologie avec torsion

"Cosmology is among the oldest subjects to captivate our species. And it's no wonder. We're storytellers, and what could be more grand than the story of creation ?"
Brian Green

5.1 Introduction

La cosmologie est la branche de l'astrophysique qui décrit la formation et l'évolution de l'univers à travers le modèle standard de la cosmologie ou le modèle ΛCDM qui suppose que l'univers a été créé dans le "Big Bang ". Ce modèle a prouvé une certaine concordance avec les résultats obtenus par les collaborations PLANCK [7] et WMAP [8]. Cependant, malgré le succé qu'il a connu, ce modèle souffre de plusieurs problèmes comme par exemple le problème de l'énergie noire et de sa nature.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'introduction de la torsion constitue une alternative à l'inflation. La prise en compte de la torsion est une simple généralisation pour implémenter des concepts comme le spin dans la relativité générale. Cependant, il est vite apparu que la torsion, telle que considérée par exemple dans la théorie d'Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECKS), ne semble pas donner d'effets pertinents sur les structures astrophysiques observées. Néanmoins, il a été constaté que pour des densités de l'ordre de 10^{44}Kg/cm^3 pour les électrons et de 10^{51}Kg/cm^3 pour les protons et les neutrons, la torsion pouvait donner des conséquences observables si tous les spins des particules sont alignés. Ces énormes densités ne peuvent être atteintes que dans l'univers primordial, de sorte que la cosmologie est la seule approche viable pour tester les effets de torsion. Cependant aucun test confirmant l'existence de la de torsion n'a été réalisé jusqu'à présent et il reste encore à débattre si l'espace temps est Riemannien ou non. Compte tenu du point de vue cosmologique et, en particulier des transitions de phase primordiales et de l'inflation, il semble très probable que, dans certaines régions du premier univers, la présence de champs magnétiques locaux aurait pu aligner les spins de particules. A des densités très élevées, cet effet pourrait influencer l'évolution des perturbations primordiales restant comme une empreinte dans les structures à grande échelle observées aujourd'hui. En d'autres termes, un objectif principal pourrait être de sélectionner des échelles de perturbation liées à la présence de torsion aux premières époques qui donnent des effets cosmologiques observables aujourd'hui.

5.2 Modèle standard de la cosmologie

5.2.1 Principe cosmologique

Le principe cosmologique sur lequel est basé le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker stipule que l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion, ce qui a pour conséquence mathématique l'existence d'un système de coordonnées comobiles (t, r, θ, ϕ) dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2\right] \tag{5.1}$$

où t est le temps cosmique. C'est la métrique générale qui nous permet de décrire la géométrie et la dynamique de l'univers. La fonction $a(t)$ est dite facteur d'echelle qui représente l'expansion de l'univers. La constante K représente la courbure spatiale et elle ne peut prendre que l'une des trois valeurs suivantes :

pour un univers fermé	;	$K = +1$
pour un univers plat	;	$K = 0$
pour un univers ouvert	;	$K = -1$

5.2.2 Equations de Friedmann

En relativité générale, les connexions affines (symboles de Christoffel) liées à la métrique (5.1) sont définies par

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}\right). \tag{5.2}$$

Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^{0}{}_{ij} = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \tag{5.3}$$

$$\Gamma^{i}{}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{5.4}$$

$$\Gamma^{i}{}_{jl} = K\tilde{g}_{ij}x^i \tag{5.5}$$

avec

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1 - Kr^2},\ x^i \equiv (r, \theta, \phi). \tag{5.6}$$

En présence du fluide cosmique, les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.7}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmique.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont, dans ce cas

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2K)\tilde{g}_{ij}. \tag{5.8}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi G T, \tag{5.9}$$

ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{5.10}$$

Par analogie avec un gaz parfait de pression P et de densité ρ, le fluide cosmique a le tenseur energie-impulsion suivant

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho)\, u_\mu u_\nu$$

où $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho\,(t) \quad , \; T^{0i} = 0 \;\; , \;\; T^{ij} = \delta_{ij} a^{-2} p\,(t) \tag{5.11}$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p. \tag{5.12}$$

En substituant les équations (5.8) , (5.11) et (5.12) dans l'équation d'Einstein (5.10), nous obtenons les deux équations

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\,(\rho + 3p) \tag{5.13}$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{K}{a^2} = 4\pi G\,(\rho - p)\,. \tag{5.14}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous obtnons l'équation

$$8\pi G \rho(t) = 3 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right]. \tag{5.15}$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui régit l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la dynamique de l'univers en fonction de son contenu.

5.2.3 Solutions pour quelques cas particuliers

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$, nous obtenons l'équation differentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p+\rho) = 0, \tag{5.16}$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \tag{5.17}$$

où ω c'est le paramètre d'état indépendant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \tag{5.18}$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de ω on déstingue différentes situations :

Univers dominé par le rayonnement

Le rayonnement est constitué de photons (rayonnement électromagnétique), de neutrinos (pour $k_B T \geq mc^2$) et des ondes gravitationnelles. Il est caractérisé par l'équation d'état $\omega = \frac{1}{3}$. Dans ce cas, nous avons

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{5.19}$$

Pour un univers plat dominé par le rayonnement, l'équation (5.15) devient

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^4}{a^4}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\dot{a}a = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}}a_0^2, \tag{5.20}$$

où la solution est de la forme

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \tag{5.21}$$

Univers dominé par la matière

En cosmologie, la matière non relativiste est souvent appelée "poussière". Sa pression est considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue. Comme la pression de la matière est négligeable, nous avons l'équation l'équation d'état $\omega = 0$ et

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \quad (5.22)$$

Dans ce cas, nous avons l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^3}{a^3}, \quad (5.23)$$

où la solution est e la forme

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \quad (5.24)$$

Univers dominé par la constante cosmologique

La constante cosmologique Λ est l'énergie du vide caractérisée par $\omega = -1$ et

$$\rho = \Lambda = cste. \quad (5.25)$$

Dans un univers plat dominé par la constante cosmologique, l'équation de Fiedmann s'écrit

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\Lambda}{3} \quad (5.26)$$

et le facteur d'échelle est donc $a(t) = e^{Ht}$, où $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$ est le paramètre de Hubble qi est dans ce cas constant.

5.2.4 Problèmes du modèle standard

Le modèle standard de la cosmologie suppose que l'univers a été créé dans le "Big-Bang ". La découverte du fond cosmique des micro-ondes était une énorme victoire pour la théorie du Big-Bang et l'origine chaude de l'univers. Cependant, il y a quelques questions laissées sans réponse dans le modèle standard.

Problème de la platitude Si nous prenons en compte la courbure dans la métrique et les équations de Friedmann, la densité de la courbure est donnée par [43]

$$\Omega_K(t) = \frac{1}{1 + \frac{\sum_i \Omega_i}{\Omega_K}}$$

Au début de l'univers, il était dominé par les rayonnements c'est à dire $\sum_i \Omega_i \sim \Omega_{rad}$, nous trouvons

$$\Omega_K = \frac{\Omega_K^0}{\Omega_{rad}^0}\left(\frac{1}{1+z}\right)^2$$

Le résultat est qu'il faut avoir un univers proche du plat qui était encore plus plat dans le passé. au temps de Planck $t_{Pl} = 10^{-43}s$, la courbure doit être $|\Omega_K(t_{Pl})| < 10^{-62}$, cette petite valeur est la cause du problème de platitude.

Problème de l'horizon La distance χ (comoving distance) est donnée par **??**

$$\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{d\ln a}{aH}, \;\; H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{5.27}$$

Pendant l'univers primordial où il est dominé par des rayonnements et da matière, le rayon de Hubble $\frac{1}{H}$ augmente plus vite que le facteur d'échelle, c'est à dire $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)H(t)}\right) > 0$. L'intégrale (5.27) est donc dominé par des contributions tardives, Dans de tels cas, le temps conforme entre le CMB et nous est beaucoup plus long que le temps entre le CMB et la singularité initiale, qui ne laisse pas se dérouler les processus causaux.

Problème d'origine de structure Le modèle standard de la cosmologie basé sur l'homogénéité et l'isotropie de l'univers ne fournit aucun mécanisme capable de les prédire les petites inhomogénéités dans l'univers.

5.2.5 L'inflation

Devant ces problèmes, plusieurs scénarios ont été proposés, mais aucun n'a encore été approuvé à l'unanimité. Les modèles les plus intéressants sont les modèles d'inflation. L'idée de l'inflation est de supposer que l'univers ait subi dans son passé lointain, une courte période d'expansion très accélérée. Ici, nous nous trouvons devons une autre question ; Quel type de matière peut provoquer une telle d'expansion très accélérée. Certainement, ce ne peut être de la matière ordinaire. Par ailleurs, il a été constaté l'évolution de l'univers primordial en présence d'un champ scalaire peut suivre une phase d'inflation.

Alan Guth était le premier à modéliser un scénario inflationniste par un champ scalaire, en 1981. Il proposa le champ de Higgs des théories de la grande unification pour guidé une période d'inflation. Néanmoins, il a été constaté le scénario basé sur les champs scalaires issus des théories de la grande unification n'est pas viable. En 1983, Linde suggéra l'existence d'un champ scalaire libre et massif, appelé inflaton. C'est le champ responsable de l'inflation.

Bien entendu, le scénario de Linde peut être amélioré en considérant un potentiel plus complexe, plusieurs inflatons ...etc.

L'idée principale de l'inflation est de postuler que le rayon de Hubble $\frac{1}{H}$ en mouvement diminue même si la taille physique de l'univers est croissante, dans ce cas l'intégrale (5.27) est dominée par les contributions des premiers temps, étend le temps conforme aux valeurs négatives [43]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a(t)H(t)}\right) = -\frac{1}{a(t)}\left(\frac{\dot{H}}{H^2}+1\right) \prec 0,$$

cela permet au processus causal de se produire et donc les objets, informations, perturbations sortent de l'horizon. Le mécanisme permet donc un lissage de l'univers décrivant l'homogénéité à grande échelle de notre univers. Nous introduisons

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{H}}{H^2}, \tag{5.28}$$

pour qu'une phase de transition se soit produite il faut avoir $\epsilon \prec 1$, la condition de roulis lent est $\epsilon << 1$ et la limite $\epsilon = 0$ correspond à l'espace de de-sitter, l'espace dans ce cas augmente de façon exponentielle $a(t) = \exp(Ht)$.

En tenant en compte les équations de Friedmann représentés dans (5.14), (5.15) nous supposons que $K = 0$, nous obtenons

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

et

$$\frac{3}{4\pi G}\left(\dot{H} + H^2\right) = -\left(\rho + 3P\right).$$

A partir de ces deux derniers résultats et (5.28), nous trouvons

$$\epsilon = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{P}{\rho}\right). \tag{5.29}$$

Donc pour que l'inflation se produise, il faut que $P < -\frac{1}{3}\rho$.C'est à dire qu'un fluide parfait dans une métrique FLRW plate aurait besoin d'avoir une pression négative.

Durant une phase d'expansion accélérée, la courbure deviendra une fonction du temps décroissante et donnant lieu au réchauffage, l'inflation devrait durer à moins autant de temps conforme que le temps de réchauffage à nous.

Si nous définissons [43]

$$\frac{|\Omega_K(t_f)|}{|\Omega_K(t_i)|} = \left(\frac{a_f}{a_i}\right)^{-2} \equiv e^{-2N}$$

t_i et t_f représentent le temps initiale et finale de la phase d'expansion accélérée, N repésente le nombre de e-fold il caractérise la durée de l'inflation, pour résoudre le problème de la platitude nous devons supposer que $\Omega_K(t_i) \sim O(1)$ et $|\Omega_K(t_f)| \sim 10^{-62}$ cela arriverait si $N > 71$.

L'expansion accélérée éliminerait tout défaut topologique qui conduisant à un effet presque homogène et univers isotrope. Après une période d'inflation suffisamment longue, le seul phénomène physique non trivial est les fluctuations quantiques étendues à de grandes échelles causé par l'accélération de l'expansion. Ces fluctuations correspondent aux petites perturbations observées dans le CMB et finira par s'effondrer en galaxies, galaxies d'amas. Ce qui implique la résolution de l'origine du problème d'origine de strusture [43].

L'inflation agit comme une force répulsive, en opposition à la force gravitationnelle, alors qu'une force attractive tend à freiner l'expansion de l'univers, une force répulsive tend à l'accélérer. L'expansion peut devenir exponentielle.

5.3 Equations de mouvement en présence de torsion

Nous allons chercher les équations de mouvement par la méthode de Palatini en deux cas, pour le premier cas dans le vide et dans le deuxième cas en présence de la matière. Pour cela nous écrivons l'action S sous la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L} \left(g_{\mu\nu}, Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}, R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \right) + S_M \tag{5.30}$$

où S_M représente l'action de la matière et

$$\mathcal{L} \left(g_{\mu\nu}, Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}, R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \right) = g^{\mu\nu} \delta^{\rho}{}_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\mu\rho\nu} + G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta} R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\beta} + \widetilde{G}_{\sigma\gamma}{}^{\rho\mu\alpha\beta} Q_{\mu\alpha\beta} Q_{\rho}{}^{\sigma\gamma} \tag{5.31}$$

avec

$$G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta} = b_1 \delta^{\sigma}{}_{\rho} \delta^{\gamma}{}_{\lambda} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + b_3 \delta^{\gamma}{}_{\rho} \delta^{\sigma}{}_{\lambda} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} + b_6 \delta^{\sigma}{}_{\rho} \delta^{\gamma}{}_{\lambda} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}$$

et

$$\widetilde{G}_{\sigma\gamma}{}^{\rho\mu\alpha\beta} = a_1 g^{\rho\mu} \delta^{\alpha}{}_{\sigma} \delta^{\beta}{}_{\gamma} + a_2 g^{\rho\alpha} \delta^{\beta}{}_{\sigma} \delta^{\mu}{}_{\gamma} + a_3 g^{\beta\mu} \delta^{\alpha}{}_{\sigma} \delta^{\rho}{}_{\gamma}$$

le terme $G_{\rho\lambda}{}^{\mu\sigma\nu\alpha\gamma\beta} R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} R^{\lambda}{}_{\alpha\gamma\beta}$ représente le terme de Gauss-Bonnet généralisé.

L'avantage d'écrire le lagrangien (5.31) en fonction du tenseur métrique $g^{\mu\nu}$, du tenseur de Riemann $R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$ et de tenseur de torsion qui sont en fonction de la connexion $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ $\left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + T^{\alpha}{}_{\mu\nu} \right)$, est pour simplifier le calcul surtout nous utiliserons la méthode du formalisme de Palatini.

5.3.1 Equations de mouvement dans le vide

Calcul de la variation $\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$

Nous avons

$$\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} \frac{\delta\,|g|}{|g|}$$

et

$$\frac{\delta |g|}{|g|} = g^{\varepsilon\theta} \delta g_{\varepsilon\theta} = -g_{\varepsilon\theta} \delta g^{\varepsilon\theta},$$

il vient alors

$$\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{5.32}$$

Calcul de la variation de $R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$

Nous avons le tenseur de Riemann

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}. \tag{5.33}$$

La variation de $\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$ est par définition

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}\left(\Gamma + \delta\Gamma\right) - R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}\left(\Gamma\right)$$

dans ce cas, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} \quad = \quad & \partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} \\
& + \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right)\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\right) - \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\right)\left(\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\right) \\
& -\partial_{\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

en ajoutant et en soustraiyant le terme $\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} \quad = \quad & \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} \\
& - \left(\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\right) + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous écrivons $\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$ sous la forme

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} = \left(\Gamma^{\lambda}{}_{(\nu\sigma)} + \Gamma^{\lambda}{}_{[\nu\sigma]}\right)\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}$$

pour avoir le résultat final

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + 2Q^{\kappa}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa}. \tag{5.34}$$

Ici, nous avons utilisé la dérivé covariante de $\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$

$$\nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}.$$

Calcul de la variation de $Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$

Le calcul de $\delta Q^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ est direct. En fait, à partir de

$$2Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$$

il vient directement

$$\delta Q^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \tag{5.35}$$

La dérivée covariante $\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right)$

A partir d la propriété

$$\ln(\det A) = tr(\ln A)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\ln(\det g) &= tr(\ln g)\\
\partial_\mu \ln(\det g) &= \partial_\mu tr(\ln g)\\
\partial_\mu \ln(\det g) &= \mathrm{tr}\,\partial_\mu(\ln g),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\partial_\mu \det g = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}. \tag{5.36}$$

La même procedure, nous donne également

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\nabla_\mu\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\frac{1}{\det g}\nabla_\mu \det g = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\mu g_{\alpha\beta} \tag{5.37}$$

en soustrayant $\partial_\mu\sqrt{|g|}$ de $\nabla_\mu\sqrt{|g|}$ et tenant compte du fait que

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}g_{\alpha\lambda}$$

nous obtenons

$$\nabla_\mu\sqrt{|g|} = \partial_\mu\sqrt{|g|} - \sqrt{|g|}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu},$$

d'une autre part, à partir de la définition de la dérivé covariante d'un vecteur

$$\nabla_\mu V^\alpha = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}V^\lambda$$

nous écrivons

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\alpha\right) &= V^\alpha\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}\right) + \sqrt{|g|}\nabla_\mu(V^\alpha)\\
&= \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right) - \sqrt{|g|}V^\mu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \sqrt{|g|}V^\lambda\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu}\\
&= \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right) - \sqrt{|g|}V^\nu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu} + \sqrt{|g|}V^\nu\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda}.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\nabla_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right) = \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right) + 2\sqrt{|g|}V^\nu Q^\tau{}_{\nu\tau} \tag{5.38}$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{|g|}\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}V^\mu\right) + 2\sqrt{|g|}V^\mu Q^\tau{}_{\mu\tau} - V^\mu\left(\nabla_\mu\sqrt{|g|}\right). \tag{5.39}$$

Variation de $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$

Comme

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}$$

nous pouvons facilement voir que

$$\delta\left(\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right) = \partial_\rho\left(\delta g_{\mu\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\right) g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\left(\delta g_{\lambda\nu}\right) - \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\right) g_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\left(\delta g_{\mu\lambda}\right). \quad (5.40)$$

Variation de l'action S

Nous avons la variation de l'action (5.30)

$$\delta S = \int d^4x \left[\left(\delta\sqrt{|g|}\right)\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + \sqrt{|g|}\left(\delta\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right)\right)\right]$$

nous définissons

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \\ K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}} \Rightarrow K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} = -K_\kappa{}^{\lambda\nu\mu} \\ P_\lambda{}^{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\lambda{}_{\mu\nu}} \Rightarrow P_\lambda{}^{\mu\nu} = -P_\lambda{}^{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu}, Q^\lambda{}_{\mu\nu}, R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + H_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\left(\delta R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right) + P_\lambda{}^{\mu\nu}\delta Q^\lambda{}_{\mu\nu}\right)$$

à partir de $(5.32), (5.34)$ et (5.35) nous trouvons

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2}P_\lambda{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}P_\lambda{}^{\nu\mu} - 2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) \\ &\quad + \int d^4x\sqrt{|g|}\left(K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu} - K_\kappa{}^{\lambda\nu\mu}\right)\nabla_\mu\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu} + \left(P_\lambda{}^{\mu\nu} - 2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) \\ &\quad + 2\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu\left[K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}\right] - 2\int d^4x\sqrt{|g|}\left[\nabla_\mu\left(K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\right)\right]\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} \end{aligned}$$

en tenant en compte la relation (5.39)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}+\left(P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right)\\
&+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(4K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}Q^\tau{}_{\mu\tau}-2K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\frac{\left(\nabla_\mu\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}-2\nabla_\mu K_\kappa{}^{\lambda\mu\nu}\right)\delta\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}\\
&+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^\tau{}_{\alpha\tau}\right.\\
&\left.-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}-2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\right)\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}+\delta S_M. \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

Equations de mouvement dans le vide

Dans le vide $S_M = 0$, nous obtenons les équations de mouvement à partir de la variation de l'action par rapport à la métrique et à la connexion nous suivons le formalisme de Palatini, il vient

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}=0$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}} &= P_\lambda{}^{\mu\nu}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^\nu{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^\tau{}_{\alpha\tau}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\\
&-2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}=0\ .
\end{aligned}$$

5.3.2 Equations de mouvement en présence de la matière

Dans le cas où $S_M \neq 0$, nous ajoutons au lagrangien un terme $f^{\rho\mu\nu}\nabla_\rho g_{\mu\nu}$ (multiplicateur de lagrange)

$$S=\int d^4x\sqrt{|g|}\left[\mathcal{L}\left(g_{\mu\nu},Q^\lambda{}_{\mu\nu},R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right)+f^{\rho\mu\nu}\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right]+S_M$$

il suffit de calculer la variation de multiplicateur de lagrange

$$\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right)=\sqrt{|g|}\left[\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}+\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)\nabla_\lambda g_{\mu\nu}+f^{\rho\mu\nu}\delta\left(\nabla_\rho g_{\mu\nu}\right)\right]$$

à partir de (5.32) et (5.40) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right) &= -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}+f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho}+f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)-\sqrt{|g|}\left(f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}+g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\right)\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\\ &+\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)-\delta g^{\mu\nu}\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{|g|}f^{\lambda\mu\nu}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\right) &= -\sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}+f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho}+\right.\\ &\left.+f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho}+\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)-\sqrt{|g|}\left(f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}+g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\right)\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{5.42}$$

La variation de l'action est donc

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}+f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}\right)-f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho}\right.\\ &\left.-f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho}-\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &+\int d^4x\sqrt{|g|}\left(\begin{array}{c}P_\lambda{}^{\mu\nu}-K_\lambda{}^{\mu\alpha\beta}Q^{\nu}{}_{\alpha\beta}+4K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}Q^{\tau}{}_{\alpha\tau}-2K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_\alpha\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\\ -2\nabla_\alpha K_\lambda{}^{\mu\alpha\nu}-f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa}-g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu}\end{array}\right)\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\\ &+\sqrt{|g|}\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\left(\delta f^{\lambda\mu\nu}\right)+\delta S_M.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Les équations de mouvement sont alors

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \sqrt{|g|}\left(H_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}+f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_\lambda g_{\alpha\beta}\right)-f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho}\right.\\ &\left.-f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho}-\frac{\partial_\rho\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}}\right)+\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}=0\end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\left(\begin{array}{c} P_{\lambda}{}^{\mu\nu} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\beta}Q^{\nu}{}_{\alpha\beta} + 4K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}Q^{\tau}{}_{\alpha\tau} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}\frac{\left(\nabla_{\alpha}\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}} \\ -2\nabla_{\alpha}K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu} - f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa} - g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu} \end{array}\right)$$
$$+\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = 0$$

aussi

$$\frac{\delta S}{\delta f^{\lambda\mu\nu}} = \sqrt{|g|}\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$$

la dernière équation nous donne la condition de la compatibilité métrique.

Bien que

$$\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{\mu\nu}$$

et

$$\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} = -\sqrt{|g|}I_{\lambda}{}^{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'energie-impulsion, $I_{\lambda}{}^{\mu\nu}$ représente la densité de spin.

Nous obtenons les équations de mouvement finales suivantes

$$H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L} + f^{\lambda\alpha\beta}\nabla_{\lambda}g_{\alpha\beta}\right) - f^{\rho\kappa}{}_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa\rho} - f^{\rho}{}_{\mu}{}^{\kappa}\Gamma_{\nu\kappa\rho} - \frac{\partial_{\rho}\left(\sqrt{|g|}f^{\rho}{}_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \quad (5.44)$$

et

$$\begin{aligned} &P_{\lambda}{}^{\mu\nu} - 2K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\beta}Q^{\nu}{}_{\alpha\beta} + 4K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}Q^{\tau}{}_{\alpha\tau} - \left[\frac{2}{\sqrt{|g|}}\nabla_{\alpha}\left(\sqrt{|g|}K_{\lambda}{}^{\mu\alpha\nu}\right)\right] \\ &-f^{\nu\mu\kappa}g_{\lambda\kappa} - g_{\kappa\lambda}f^{\nu\kappa\mu} = I_{\lambda}{}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.4 Univers de Friedmann avec torsion

Dans une cosmologie de type FRW, nous avons

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{1-Kr^2}dr^2 + a^2r^2d\theta^2 + a^2r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

c'est à dire

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

nous allons chercher les solutions des équations de Friedmann en présence de torsion afin de voir l'effet de la torsion, il faut tout d'abord trouver les champs de torsion correspondants.

5.4.1 Champ de torsion

Dérivation du champ de torsion à partir de la dérivée de Lie

La géométrie de Riemann-Cartan est défini par la métrique et la torsion, par conséquant il y a un champ cosmique de tenseur supplémentaire qui est la champ de tenseur de torsion, nous allons donc chercher les composantes de ce champ supplémentaire.

Dans cette partie nous suivons la référence[44]. Il a été mentionné précédemment que le principe cosmologique est basé sur l'homogénéité et l'isotropie de l'univers, la formulation mathématique de ce principe et comme suit ;

-Il existe des sous-espaces tridimensionnels d'espace-temps à symétrie maximale qui sont identifiés comme les hypersurfaces du temps cosmique constant, six vecteurs de Killing générant ces isométries spacio-temporelles tangentes à ces hypersurfaces.

-L'invariance de tous les champs de tenseurs cosmiques $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$...etc par rapport à toutes les isométries. Nous supposons que le principe cosmologique est étendu à un espace-temps de Riemann-Cartan et nous examinons les restrictions imposées au tenseur de torsion, ces restrictions relient à la condition

$$L_{\xi^{\mu}} Q^{\mu}{}_{\nu\alpha} = 0 \tag{5.47}$$

avec L est la dérivée de Lie, ξ^{μ} champ de vecteurs (6 vecteurs de Killing), $Q^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ champ de tenseur de torsion.

Le principe cosmologique implique que la métrique doit être la métrique de Robertson-Walker en raison qu'ils sont de même nature qui ceux imposés à la métrique.

Soit M une variété symétrique à n dimensions dotée d'une métrique $g_{\mu\nu}$,et $\overline{M}$ une sous-variété symétrique de M de dimensions $m\,(3 \preceq m \preceq n)$, la notation utilisée est $i, j, k, l = 1, 2, 3, ..., m$ et $a, b, c, d = m + 1, m + 2, ..., n$ et soit u^i des fonctions de coordonnées dans $\overline{M}$ et v^{α} des fonctions de coordonnées dans $M/\overline{M}$.

Le choix des coordonnées u^i est toujours possibles, telle que la métrique $g_{\mu\nu}$ de M a la forme

$$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{ab}\,(v)\, dv^a dv^b + \phi\,(v)\, \overline{g}_{ij}\,(u)\, du^i du^j \tag{5.48}$$

$\overline{g}_{ij}\,(u)$ est la métrique de la symétrie maximale d'espace $\overline{M}$. $\phi\,(v)$ est une fonction scalaire, nous avons aussi

$$g_{ai} = 0, \ \frac{\partial \xi^i}{\partial v^a} = 0 \tag{5.49}$$

Théorème Soit le tenseur de torsion $Q^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ un champ de tenseur dans M qui est au maximum invariant de forme dans $\overline{M}$, c'est à dire

$$L_{\xi^i} Q^{\mu}{}_{\nu\alpha} = 0$$

dans le cadre de coordonnées dans lequel la métrique a la forme (5.48), les composantes du tenseur de torsion non-nulles sont
(i) $m = 3$, $n \succeq 4$
$Q_{abc}(v)$, $Q_{[ijk]}$, $Q^1{}_{1a} = Q^2{}_{2a} = ... = Q^m{}_{ma}$ (pas de sommation sur m)
(ii) $3 \prec m \prec n$
$Q_{abc}(v)$, $Q^1{}_{1a} = Q^2{}_{2a} = ... = Q^m{}_{ma}$ (pas de sommation sur m)
(iii) $n = m \succ 3$ tout disparaît.

Preuve Considérons un système de coordonnées spatiales dans lequel la métrique a la forme (5.48) , il est clair que

$$L_{\xi^i} Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\sigma} L_{\xi^i} Q^{\sigma}{}_{\nu\alpha} = 0$$

en tenant en compte les six cas suivants

$$\begin{aligned} L_{\xi^s} Q_{ijk} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{ija} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{iab} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{abc} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{abi} &= 0 \\ L_{\xi^s} Q_{aij} &= 0, \end{aligned} \tag{5.50}$$

en raison de l'isotropie de $\overline{M}$ on choisit ξ^i à tout moment $p \in \overline{M}$ tel que $\xi^i(p) = 0$, $\xi_{[i,j]}(p)$ est arbitraire, ensuite (5.50) implique

$$\xi_{s;r}\left[\delta^r{}_i Q^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_i{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{ij}\right] = 0$$

puisque $\xi_{[s;r]} = \xi_{[r;s]}$ est arbitraire, il vient

$$\delta^r{}_i Q^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_i{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{ij} = \delta^s{}_i Q^r{}_{jk} + \delta^s{}_j Q_i{}^r{}_k + \delta^s{}_k Q^r{}_{ij}$$

nous contractons r avec i

$$mQ^s{}_{jk} + \delta^r{}_j Q_r{}^s{}_k + \delta^r{}_k Q^s{}_{rj} = \delta^s{}_r Q^r{}_{jk} + \delta^s{}_j Q_r{}^r{}_k + \delta^s{}_k Q^r{}_{rj} \tag{5.51}$$

encore une fois nous contractons s avec j

$$Q^r{}_{rs} = 0$$

(5.51) implique

$$\begin{aligned} Q_{ijk} &= \phi\,(v)\,\epsilon_{ijk},\ \text{pour } m=3 \\ &= 0 \qquad\qquad \text{pour } m\neq 3 \end{aligned}$$

de la même manière nous prouvons que

$$\begin{aligned} Q^{1}{}_{1a} &= Q^{2}{}_{2a} = \ldots = Q^{m}{}_{ma} \\ Q_{iab} &= 0,\ Q_{abc} = Q_{abc}\,(v) \\ Q_{abi} &= 0,\ Q_{aij} = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

considérons maintenant l'espace-temps de Riemann-Cartan à $4D$ qui est rempli par la congruence tangente au champ de $4-$vitesses $u_a\,(-1,0,0,0)$, la torsion prend la forme[45]

$$Q_{abc} = 2\phi h_{a[b}u_{c]} \tag{5.53}$$

avec ϕ est une fonction scalaire dépend du temps seulement $\phi \equiv \phi(t)$
et

$$g_{ab} = h_{ab} - u_a u_b \tag{5.54}$$

h_{ab} est symétrique et orthogonal à u^b

$$\begin{aligned} h_{ab} &= h_{(ab)} \\ h_{ab}u^b &= 0 \\ h_a{}^a &= 3 \end{aligned}$$

nous touvons finalement

$$\begin{aligned} Q^a{}_{bc} &= 2\phi h^a{}_{[b}u_{c]} = \phi\,(h^a{}_b u_c - h^a{}_c u_b) \\ Q^a{}_{ba} &= \phi\,(h^a{}_b u_a - h^a{}_a u_b) = -3\phi u_b. \end{aligned} \tag{5.55}$$

5.4.2 Tenseurs de Ricci

En présence de torsion les composantes du tenseur de Ricci sont données par

$$R_{00} = -3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{\phi} + 2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] \quad (5.56)$$

$$R_{11} = \frac{2a^2}{1-Kr^2}\left[\frac{\ddot{a}}{2a} + \dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^2 + \frac{K}{a^2}\right] \quad (5.57)$$

$$R_{22} = 2a^2r^2\left[\frac{\ddot{a}}{2a} + \dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^2 + \frac{K}{a^2}\right] \quad (5.58)$$

$$R_{33} = 2a^2r^2\sin^2\theta\left[\frac{\ddot{a}}{2a} + \dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^2 + \frac{K}{a^2}\right] \quad (5.59)$$

à partir du tenseur de Ricci nous trouvons le scalaire de Ricci

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^2 + \frac{K}{a^2}\right] \quad (5.60)$$

5.4.3 Solutions des équations de Friedmann dans le vide

Dans le vide nous avons $R_{\alpha\beta} = 0$, donc à partir de (5.59) nous avons

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\dot{\phi} + 6\phi\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (5.61)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{\phi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 10\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 8\phi^2 + 2\frac{K}{a^2} = 0 \quad (5.62)$$

faisons (5.62) – (5.61) nous obtenons

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -2\dot{\phi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 2\phi^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{a^2} \quad (5.63)$$

dans le cas particulier si nous posons $\phi(t) = Cte \Rightarrow \dot{\phi} = 0$, l'équation (5.61) devient

$$\ddot{a} + 2\phi\dot{a} = 0$$

nous définissons $X = \dot{a}$

$$\begin{aligned} \dot{X} + 2\phi X &= 0 \\ \int \frac{\dot{X}}{X}dt &= -2\phi\int dt \\ &\Rightarrow X = e^{-2\phi t} \end{aligned}$$

il vient

$$\frac{da}{dt} = e^{-2\phi t}$$

et donc

$$a = -\frac{a_0}{2\phi} e^{-2\phi t} = c e^{-2\phi t},$$

nous avons alors une solution de type de-Sitter avec une expansion accéléré exponentiellement, ce qui montre que la torsion constante $\phi < 0$, joue le rôle d'une constante cosmologique.

5.4.4 Solutions des équations de Friedmann en présence de la matière

En présence de la matière nous avons

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.64}$$

avec

$$T_{00} = \rho, \ T_{ii} = P g_{ii}$$

nous remplaçons (5.46) , (5.59) et (5.60) dans (5.64) ce qui nous donne les équations suivantes

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} - 4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 4\phi^2 \tag{5.65}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G P - 2\dot{\phi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 4\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 2\phi^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{a^2} \tag{5.66}$$

nous remplaçons (5.65) dans (5.66), nous obtenons

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) - 2\dot{\phi} - 2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \tag{5.67}$$

les équations (5.65) et (5.67) sont appelées les équations de Friedmann en présence de la matière.

En utilisant la loi de conservation d'impulsion-énergie en présence de torsion[46]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -4\phi T^{\nu\mu} u_\mu \tag{5.68}$$

avec

$$T^{00} = \rho, \ T^{11} = \left(\frac{1 - Kr^2}{a^2}\right) P, \ T^{22} = \frac{1}{a^2 r^2} P \text{ et } T^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta} P$$

et

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} T^{\mu\alpha}$$

pour $\nu = 0$ nous trouvons

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \dot{\rho}(t) + 3(H + 2\phi)(\rho + P) = -4\phi T^{0\mu} u_\mu \tag{5.69}$$

avec $P = w\rho$, nous obtenons finalement l'équation de continuité

$$\dot{\rho}(t) + 3(H + 2\phi)(1 + w)\rho = 4\phi\rho \tag{5.70}$$

dans ce cas

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho} = -3(1+w)\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\phi\right) + 4\phi.$$

la solution de cette dernière équation est donnée par

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} e^{-2(1+3w)\int_0^t \phi\left(t'\right) dt'},$$

ces résultats nous montre qu'une sorte d'énergie noire (un terme de torsion) peut être obtenue sans considérer des champs scalaires supplémentaires dans la dynamique mais en supposant seulement que l'espace-temps est de Riemann-Cartan.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations d'Einstein en présence de torsion, pour un univers en expansion. Nous avons montré que l'effet de la torsion est l'introduction d'un terme supplémentaire dans la densité et la pression de matière fluide qui est capable de donner lieu à un comportement accéléré du fluide cosmique.

Chapitre 6

Solution à symétrie sphérique en présence de torsion

"Things can get out of a black hole both on the outside and possibly to another universe So if you feel you are in a black hole don't give up-there's is a way "out""
Stephan Hawking

6.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions à une symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide. En premier lieu nous considérons le théorème de Birkhoff dans la géométrie Riemannienne où nous rappelons les solutions de Schwarzschild. Ensuite, nous nous intéressons à la solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein en présence de torsion. Pour déterminer la masse du trou noir obtenu ainsi, nous utilisons le rayonnement de Hawking pour calculer la température correspondante et le second principe de la thermodynamique pour calculer la masse.

6.2 Rappel des solutions de Kerl Schwarzschild

Avant de chercher une solution en présence du torsion, nous rappelons la solution d'Einstein dans le vide appelée solution de Schwarzschild qu'elle décrit un trou noir caractérisé par deux singularités ; une singularité nécessaire et une singularité de coordonnées. Suivant le théorème de Birkhoff il est important d'obtenir $f = g$ que nous expliquerons en détail.

En premier lieu soit une métrique à symétrie sphérique et statique

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{g} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \tag{6.1}$$

f et g sont des fonctions quelconques dépendent de la coordonnée r seulement, il faut tout d'abord calculer les connexions métriques et les tenseurs de Ricci pour résoudre les équations d'Einstein dans le vide.

6.2.1 Connexions de Christoffel $\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$

Nous avons la connexion de Christoffel

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_{\nu} g_{\mu\lambda} + \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda} g_{\nu\mu} \right) \tag{6.2}$$

à partir de la métrique (6.1), nous obtenons les composantes suivantes

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{0}{}_{01} &= \overline{\Gamma}^{0}{}_{10} = \frac{1}{2}\frac{f'}{f} \\
\overline{\Gamma}^{1}{}_{00} &= \frac{1}{2} g\ f',\ \overline{\Gamma}^{1}{}_{11} = -\frac{1}{2}\frac{g'}{g} \\
\overline{\Gamma}^{1}{}_{22} &= -gr,\ \overline{\Gamma}^{1}{}_{33} = -gr\sin^2(\theta) \\
\overline{\Gamma}^{2}{}_{12} &= \overline{\Gamma}^{2}{}_{21} = \frac{1}{r},\ \overline{\Gamma}^{2}{}_{33} = -\cos(\theta)\,\sin(\theta) \\
\overline{\Gamma}^{3}{}_{13} &= \overline{\Gamma}^{3}{}_{31} = \frac{1}{r}, \overline{\Gamma}^{3}{}_{23} = \overline{\Gamma}^{3}{}_{32} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

les autres termes sont nuls.

6.2.2 Tenseurs de Ricci $\bar{R}_{\alpha\beta}$

En absence du torsion, le tenseur de Ricci est donné par

$$\bar{R}_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} \bar{R}_{\mu\beta\alpha\nu} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} \tag{6.4}$$

nous obtenons donc les composantes du tenseur de Ricci à partir de la contraction des résultats représentés dans $(C.1)$ et nous savons que les équations d'Einstein dans le vide impliquent que $\overline{R}_{\alpha\beta} = 0$, ce qui nous arrive aux résultats suivants

$$\bar{R}_{00} = \frac{1}{4} f'g' + \frac{1}{2} g f'' - \frac{1}{4} g \frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r} f' = 0 \tag{6.5}$$

$$\bar{R}_{11} = \frac{1}{4} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} = 0 \tag{6.6}$$

$$\bar{R}_{22} = 1 - g - \frac{1}{2} r \frac{1}{f} \left(f g' + g f' \right) = 0 \tag{6.7}$$

$$\bar{R}_{33} = \left[1 - g - \frac{1}{2} r \frac{1}{f} \left(f g' + g f' \right) \right] \sin^2 (\theta) = 0. \tag{6.8}$$

à partir de $(6.5) + fg \times (6.6) = 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{r} \left(g f' - f g' \right) = 0$$

multiplions cette dernière relation par $\frac{g^2}{r} \neq 0$, nous arrivons à

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{f}{g} \right) = 0$$

ce qui nous donne

$$f = C_{st} g \tag{6.9}$$

cherchons la constante C_{st} à partir de la platitude asymptotique ; $\lim_{r \longrightarrow \infty} g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$

il vient
$\lim_{r \longrightarrow \infty} g_{00} = \eta_{00} = -1 = -f \Rightarrow f = 1$
$\lim_{r \longrightarrow \infty} g_{11} = \eta_{11} = 1 = \frac{1}{g} \Rightarrow g = 1$
et donc $C_{st} = 1$
nous obtenons

$$f = g \tag{6.10}$$

à partir de l'équation (6.7) et que $f = g$ nous obtenons

$$1 - f - r f' = 0$$

qui est équivalent à

$$\frac{d}{dr} (r f) = 1$$

ce qui nous donne

$$r f = r + C_1$$

et donc

$$f = 1 + \frac{C_1}{r} \tag{6.11}$$

dans ce cas $C_1 = -2M$ (ici nous prenons $G = 1$) et

$$f = g = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \tag{6.12}$$

finalement, nous obtenons

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \tag{6.13}$$

qui est la solution de Schwarzschild.

Si $r \longrightarrow \infty$ nous avons la platitude asymptotique c'est à dire

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} ds^2_{Schwar} = ds^2_{Mink}$$

nous remarquons qu'il existe deux singularités

$|g_{00}|_{r \longrightarrow 0} \longrightarrow \infty$

$(g_{11})_{r \longrightarrow 2M} \longrightarrow \infty$

la première singularité $r \longrightarrow 0$ est une singularité nécessaire d'un trou noir et la deuxième singularité $r \longrightarrow 2M$ est une singularité de coordonnée.

6.3 Solutions à symétrie sphérique en présence de torsion

Dans le cas général il n'est pas nécessaire de trouver $f = g$, nous allons étudier le cas d'une symétrie sphérique en présence de torsion, avant cela nous définirons les composantes de torsion et de contorsion afin d'obtenir les nouveaux tenseurs de Ricci.

6.3.1 Torsion $Q^{\alpha}{}_{\beta\mu}$

Les composantes non nulles du tenseurs de torsion sont

$$Q^1{}_{01} = -Q^1{}_{10} = \phi_1(r),\, Q^2{}_{02} = -Q^2{}_{20} = \phi_2(r),\, Q^3{}_{03} = -Q^3{}_{30} = \phi_3(r) \tag{6.14}$$

6.3.2 Contorsion $T^{\alpha}{}_{\beta\nu}$

Nous utilisons la définition de contorsion en fonction de torsion

$$T_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta\gamma} + Q_{\beta\gamma\alpha} + Q_{\gamma\beta\alpha} \tag{6.15}$$

ce qui nous conduit à trouver les composantes suivantes

$$\begin{aligned} T^0{}_{11} &= \frac{2}{fg}\phi_1,\ T^0{}_{22} = \frac{2r^2}{f}\phi_2,\ T^0{}_{33} = \frac{2r^2\sin^2(\theta)}{f}\phi_3 \\ T^1{}_{01} &= 2\phi_1,\ T^2{}_{02} = 2\phi_2,\ T^3{}_{03} = 2\phi_3 \end{aligned} \tag{6.16}$$

les autres termes sont nuls.

6.3.3 Tenseurs de Ricci $R_{\beta\nu}$

De la même manière de la partie précédente nous obtenons les composantes du tenseur de Ricci à partir de la contraction des résultats représentés dans $(C.2)$, et en tenant en compte que les équations d'Einstein dans le vide dans ce cas impliquent $R_{\beta\nu} = 0$, nous trouvons donc

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{4}f'g' + \frac{1}{2}gf'' - \frac{1}{4}g\frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r}f' = 0 && (6.17)\\ R_{11} &= \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} + \frac{4}{fg}\phi_1\left(\phi_2+\phi_3\right) = 0 && (6.18)\\ R_{22} &= 1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}\left(fg' + gf'\right) + 4\frac{r^2}{f}\phi_2\left(\phi_1+\phi_3\right) = 0 && (6.19)\\ R_{33} &= \left[1 - g - \frac{1}{2}r\frac{1}{f}\left(fg' + gf'\right) + 4\frac{r^2}{f}\phi_3\left(\phi_1+\phi_2\right)\right]\sin^2(\theta) = 0 && (6.20) \end{aligned}$$

en calculant $(6.20) - (6.19) \times \sin^2(\theta)$, ce qui nous conduit à obtenir

$$\phi_2\phi_1 = \phi_3\phi_1$$

bien que $\phi_1 \neq 0$, alors

$$\phi_2 = \phi_3 \tag{6.21}$$

remplaçons l'équation (6.21) dans (6.18) nous obtenons

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'g'}{fg} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} - \frac{1}{r}\frac{g'}{g} + \frac{8}{fg}\phi_1\phi_2 = 0 \tag{6.22}$$

maintenant, nous multiplions l'équation (6.22) par fg et nous l'ajoutons à l'équation (6.17), il vient

$$\frac{1}{r}\left(gf' - fg'\right) + 8\phi_1\phi_2 = 0 \tag{6.23}$$

nous multiplions cette dernière relation par $\frac{r}{g^2}$, nous trouvons

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{g}\right) = -8\frac{r}{g^2}\phi_1\phi_2$$

et donc

$$\frac{f}{g} = -8\int\frac{r}{g^2}\phi_1\phi_2 dr \tag{6.24}$$

nous remarquons qu'il est impossible de trouver $f = g$ en présence du torsion.

Nous avons $\frac{f}{g} \neq 1$ et pour cela, nous supposons une solution de type Lifshitz qui est défini comme[47]

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}}F\left(r\right)dt^2 + \frac{l^2}{r^2}\frac{dr^2}{F\left(r\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\left(\theta\right)d\varphi^2 \tag{6.25}$$

nous allons chercher la formule de $\phi_1\phi_2$ en fonction de $F(r)$, nous avons

$$\frac{f}{g} = \left(\frac{r}{l}\right)^{2z-2}$$

nous faisons la dérivée de cette dernière par rapport à la cordonnée spatiale

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{g}\right) = -8\frac{r}{g^2}\phi_1\phi_2$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\phi_1\phi_2 &= -\frac{1}{8r}\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{g}\right)g^2 \\ \phi_1\phi_2 &= \frac{(1-z)}{4l^2}\left(\frac{r}{l}\right)^{2z-4}g^2\end{aligned}$$

donc la formule des champs $\phi_1\phi_2$ est donné par

$$\phi_1\phi_2 = \frac{(1-z)}{4l^2}\left(\frac{r}{l}\right)^{2z}F^2$$

maintenant, nous allons chercher la solution de l'équation d'Einstein, à partir de la relation (6.17)

$$\frac{1}{4}f'g' + \frac{1}{2}gf'' - \frac{1}{4}g\frac{(f')^2}{f} + \frac{g}{r}f' = 0$$

et que

$$g' = \left(\frac{r}{l}\right)^{2-2z}f' + \frac{2-2z}{l^{2-2z}}r^{1-2z}f$$

nous obtenons

$$\frac{1}{4}f'\left[\left(\frac{r}{l}\right)^{2-2z}f' + \frac{2-2z}{l^{2-2z}}r^{1-2z}f\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^{2-2z}ff'' - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^{2-2z}(f')^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{r}{l}\right)^{2-2z}ff' = 0$$

nous simplifions l'équation, nous trouvons facilement

$$rf'' + (3-z)f' = 0 \tag{6.26}$$

multiplions cette équation par r^{2-z}

$$\frac{r^{z-3}f'' - (z-3)r^{z-4}f')}{r^{2z-6}} = 0$$

il vient

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f'}{r^{z-3}}\right) = 0$$

ce qui nous donne

$$f' = Cr^{z-3}$$

et donc

$$\int df = \int Cr^{z-3}dr$$

alors

$$f = A + \frac{B}{r^{2-z}}, \tag{6.27}$$

la constante A se détemine à partir de la condition de platitude asymptotique pour $r \longrightarrow \infty$. Nous avons

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} g_{00} = \lim_{r\longrightarrow\infty} (-f) = -A \tag{6.28}$$

ce qui implique que $A = 1$. Pour la constante B nous posons $B = -(2m)^{2-z}$. La forme finale de l'élément ds^2 est donc

$$ds_T^2 = -\left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right)dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}}\left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2.$$

Dans le cas où $z = 1$, nous trouvons la solution de Schwarzschild

$$\lim_{z=1} ds_T^2 = ds_{Schwa}^2.$$

6.3.4 Rayonnements de Hawking à $(1+1)$ dimensions

D'après la relativité générale, les trous noirs isolés sont des objets noirs et immuables, des choses peuvent rentre dans le trou noir mais la gravité est tellement forte que la matière et la lumière ne peuvent pas s'échapper des trous noirs.

Stephan Hawking a compris que les trous noirs produisent un rayonnement et donc la lumière qui peut amener à l'évaporation des trous noirs, l'émission des rayonnements est due à la creation des pairs des particules-antiparticules générées par le vide , des effets de ces fluctuations du vide peuvent être mis en évidence par divers phénomènes est parmi ces phénomènes l'effet tunnel que nous allons l'étudier pour trouver la température de Hawking. Puisque toute la physique est contenue dans le plan (t, r), nous étudions le rayonnement de Hawking à $(1+1)$ dimensions.

Soit un espace temps à $(1+1)$ dimensions décrit par la métrique suivante

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 \tag{6.29}$$

$f(r)$ et $g(r)$ sont des fonctions arbitraires, nous supposons qu'ils s'anullent à un certain $r = r_0$ (le point $r = r_0$ indique l'horizon).

Equation de Klein-Gordon

Considérons un champ scalaire ϕ à couplage minimale de masse m se propage dans l'espace temps représenté par la métrique (6.29)

$$\left(\Box - m^2\right)\phi(r) = 0$$

où le D'alembertien $\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\nu\mu}\partial_\nu\right)$ l'équation devient

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\nu\mu}\partial_\nu\right) - m^2\right)\phi(r) = 0 \tag{6.30}$$

avec $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|} = \sqrt{\frac{f}{g}}$

$$-\frac{1}{f}\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial t^2} + \sqrt{\frac{g}{f}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{fg}\frac{\partial}{\partial r}\right)\phi(r) - m^2\phi(r) = 0$$

écrivons $\phi(r) \equiv e^{iwt}\psi(r)$ nous obtenons

$$\left(w^2 + \sqrt{fg}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{fg}\frac{\partial}{\partial r}\right) - m^2 f\right)\psi(r) = 0$$

nous posons $\sqrt{fg} = B(r)$ il vient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{B'}{B}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{w^2}{B^2} - \frac{m^2 f}{B^2}\right)\psi(r) = 0 \tag{6.31}$$

supposons aussi $\psi(r) \equiv \chi(r)\varphi(r)$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi(r)}{\partial r^2} &= \chi(r)\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2} + \varphi(r)\frac{\partial^2\chi(r)}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\chi(r)}{\partial r}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} \\
\frac{\partial\psi(r)}{\partial r} &= \chi(r)\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} + \varphi(r)\frac{\partial\chi(r)}{\partial r}
\end{aligned}$$

nous remplaçons ces deux dernières dans (6.31) ,nous trouvons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{B'}{B}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{w^2}{B^2}-\frac{m^2 f}{B^2}+\frac{1}{\varphi(r)}\frac{\partial^2\varphi(r)}{\partial r^2}+\frac{2}{\varphi(r)}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{B'}{B}\frac{1}{\varphi(r)}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\right]\chi(r)=0 \tag{6.32}$$

pour obtenir une équation qui resemble à l'équation de Schrodinger, nous posons

$$\frac{2}{\varphi(r)}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\frac{\partial\chi(r)}{\partial r}+\frac{B'}{B}\frac{\chi(r)}{\varphi(r)}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}=0$$

nous concluons donc

$$\chi(r)=B^{-\frac{1}{2}},$$

remplaçons ce dernier résultat dans l'équation (6.32) , nous obtenons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{4}\frac{B'}{B^2}+\frac{w^2}{B^2}-\frac{m^2}{g}-\frac{1}{2}\frac{B''}{B}\right]\varphi(r)=0$$

dans le cas $r=r_0\Rightarrow B\ll 1$ et donc $\frac{1}{B^2}\gg 1$, les termes de $\left(\frac{1}{B^2}\right)$ sont dominants, l'équation devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+K^2\right]\varphi(r)=0 \tag{6.33}$$

avec $\overline{w}^2=\frac{1}{4}B'+w^2$ et $K^2=\frac{\overline{w}^2}{B^2}$.

Nous considérons une solution $\varphi(r)$ sous le forme

$$\varphi(r)=A(r)\,e^{\frac{i}{\hbar}S(r)}$$

en l'injectant dans l'équation (6.33), et en tenant en compte que $\hbar\ll 1$ nous obtenons donc les équations suivantes

$$2A'(r)\,S'(r)+A(r)\,S''(r)=0 \tag{6.34}$$

et

$$-\left(S'(r)\right)^2+\hbar^2K^2=0 \tag{6.35}$$

la solution pour $S(r)$ est donc

$$\begin{aligned} S'(r) &= \hbar\,|K(r)| \\ S(r) &= \hbar\int^r \left|K\left(r'\right)\right| dr'. \end{aligned}$$

Si nous mettons $S^{'}(r) = H(r)$ la solution de l'équation se ramène à

$$2A^{'}(r)\,H(r) + A(r)\,H^{'}(r) = 0$$

ce qui nous donne

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} = \frac{1}{\sqrt{S'(r)}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\,|K(r)|}}$$

finalement, en posant $\hbar \equiv 1$, il vient

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{|K(r)|}} e^{i\int^{r} K\left(r'\right)_{[imaginaire]} dr'}. \tag{6.36}$$

Effet tunnel et trous noirs

Etant donné le système de coordonnées (6.29), dans une région R (l'horizon) où il n'y a pas des singularités, il est possible de montrer que la probabilité pour une particule d'énergie E qui a quitté la région R en fonction de la probabilité qu'une particule d'énergie E soit entrée dans la région R est donnée par la relation[48]

$$P_{[emission]} = e^{-\beta E} P_{[absorption]} \tag{6.37}$$

cela revient à supposer que la région R est baignée de rayonnement à la température β^{-1}.

La probabilité d'emission ou d'absorption des particules est donnée par le module caré de la fonction $\varphi(r)$

$$P \ltimes e^{2i\int^{r} K\left(r'\right)_{[imaginaire]} dr'} = e^{2i\int^{r} \frac{\overline{w}}{B\left(r'\right)} dr'},$$

l'intégrale est bien défini est réel mais si les points sont situés sur des côtés opposés de l'horizon, l'intégrale n'existe pas en raison de la divergence de $B^{-1}(r)$ à $r = r_0$.

Pour évaluer cet intégrale nous devons utiliser une prescription $i\varepsilon$ appropriée pour spécifier le contour complexe sur lequel l'integrale doit être effectuer autour de $r = r_0$. Ca veut dire, nous devons prendre le contour pour définir l'intégrale comme étant un demi-cercle infinitésimal au dessus du pôle à $r = r_0$ pour les particules sortantes à gauche de l'horizon et les particlues entrantes sur la droite $r = r_0 - i\varepsilon$. dans le cas des particules entrantes à gauche et les particules sortantes à droite de l'horizon $r = r_0 + i\varepsilon$ (qui correspond à une situation inversée dans le temps des cas précédents), le contour doit être un demi-cercle infini sous le pôle à $r = r_0$, et donc cela revient à pousser la singularité à $r = r_0$ vers $r = r_0 \pm i\varepsilon$[48].

Bien que nous utilisons la partie imaginaire $K\left(r'\right)_{[imaginaire]}$, nous choisissons le contour pour qu'il se trouve dans le plan complexe supérieur.

La probabilité d'émission des particules est donc

$$P_{[emision]} \ltimes e^{-2i\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\overline{w}}{B(r)} dr}.$$

Nous faisons le développement de $B(r) = B'(r_0)(r-r_0) + O\left[(r-r_0)^2\right] = R(r_0)(r-r_0)$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\overline{w}}{B(r)} dr = -\frac{i\pi E}{R(r_0)}$$

avec $E = \overline{w}$, nous obtenons

$$P_{[emision]} \ltimes \exp\left(-\frac{2\pi E}{R(r_0)}\right) \tag{6.38}$$

de même la probabilité d'absorption des particules est

$$P_{[absorption]} \ltimes e^{-2i \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{r_0 - i\varepsilon}^{r_0 + i\varepsilon} \frac{\overline{w}}{B(r)} dr}$$

et donc

$$P_{[absorption]} \ltimes \exp\left(\frac{2\pi E}{R(r_0)}\right) \tag{6.39}$$

Nous écrivons finalement

$$P_{[emision]} = \exp\left(-\frac{4\pi E}{R(r_0)}\right) P_{[absorption]} \tag{6.40}$$

nous savons que dans un système avec une température β^{-1} les probabiltés d'absorption et d'emission sont liées par la relation (6.37), En comparant (6.40) et (6.37) nous identifions la température de l'horizon en fonction de $R(r_0)$, la formule générale de la température à l'horizon est

$$\beta^{-1} = \frac{|R(r_0)|}{4\pi} \tag{6.41}$$

pour notre cas où il y a la torsion

$$ds_T^2 = -\left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right) dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}} \left(1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right)^{-1} dr^2$$

avec

$R(r) = \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial\left(\sqrt{fg}\right)}{\partial r} = \frac{l^{z-1}}{r^z}\left[1 - z + \left(\frac{2m}{r}\right)^{2-z}\right]$

et

$R(r_0) = R(2m) = \frac{(2-z)l^{z-1}}{(2m)^z}$.

La température de Hawking est donc

$$T_h = \beta^{-1} = \frac{(2-z)\, l^{z-1}}{4\pi (2m)^z} \tag{6.42}$$

pour $z = 1$

$$\beta^{-1} = T_{Sch} = \frac{1}{8\pi m} \tag{6.43}$$

qui est la température d'un trou noir de Schwarzschild.

Pour trouver la vraie masse M du trou noir dans ce cas, nous partons de la deuxième loi de la thermodynamique

$$dM = T_h dS_{Bh} \tag{6.44}$$

où S_{Bh} est l'entropie de Bekenstein-Hawking donné par

$$S_{Bh} = \frac{1}{4}A = \pi {r_h}^2 = 4\pi m^2$$

en remplaçant $dS = 8\pi m dm$ et la température obtenue dans la deuxième loi, nous arrivons à

$$dM = \frac{(2-z)\, l^{z-1}}{2} (2m)^{1-z}\, d\,(2m)\,. \tag{6.45}$$

après intégration, nous obtenons la masse du trou noir

$$M = \frac{l^{z-1}}{2} (2m)^{2-z}\,, \tag{6.46}$$

et

$$(2m)^{2-z} = (2M)\, l^{1-z}$$

finalement, la solution peut s'écrire sous la forme

$$ds_T^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r^{2-z}} l^{1-z}\right) dt^2 + \frac{r^{2z-2}}{l^{2z-2}} \left(1 - \frac{2M}{r^{2-z}} l^{1-z}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2. \tag{6.47}$$

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu les équations d'Einstein en présence de torsion, pour une métrique à symétrie sphérique. Nous avons utilisé le mécanisme de Hawking (le rayonnement des trous noirs) et la deuxième loi de la thermodynamique pour calculer la masse du trou noir trouvé.

Chapitre 7

Conclusion générale

"Once you stop learning you start dying"
Albert Einstein

Dans ce mémoire nous avons voulu étudier quelques aspects de la théorie de jauge de Poincaré de la gravitation. Dans cette théorie, l'espace temps est l'espace de Riemann-Cartan où les connexions ne sont pas symétriques et portent ainsi un tenseur de torsion.

En présence de torsion, il a été question de voir les problèmes suivants :

1) l'existence des degrées de liberté fantômes
2) la solution FRW
3) la solution à symétrie sphérique

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé un bref rappel sur la théorie de la relativité générale. D'abord nous avons énoncé le principe d'équivalence et, ensuite, nous avons exposé quelques propriétés de l'espace-temps (considéré comme une variété pseudo-Riemannienne). Finalement, nous avons montré comment dériver les équations d'Einstein par l'approche habituelle et par la méthode de Palatini.

Dans le troisième chapitre, nous avons pu construire une théorie de jauge de Poincaré locale, où nous avons trouvé deux ensembles du champ de jauge, à savoir les champs de translation et de jauge de Lorentz qui sont associés à la torsion et à la courbure respectivement. Puis nous fixons le lagrangien décrivant la gravitation et qu'il contient 10 termes quadratiques, trois termes quadratiques dans le champ de jauge de translation et les six autres termes quadratiques dans le champ de jauge de Lorentz avec des paramètres libres $(a_1, a_2, a_3, b_1, ..., b_6)$, afin de revenir à la relativité générale nous devons juste de poser $Q = 0$.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié la stabilité de la théorie décrite au chapitre précédent à cause des degrés de liberté fantômes (ghosts). Dans le cas considéré, nous avons montré que la théorie libre de ghosts est celle de Gauss-Bonnet avec torsion.

Dans le cinquième chapitre, nous avons établi les équations de Friedmann en présence de torsion. Dans ce cas nous avons montré que la présence de torsion peut jouer le role d'une constante cosmologique effective donnant lieu à une expansion accélérée exponentiellement. Dans cette image, l'inflation est due à un effet géométrique plutôt qu'à un champ scalaire.

Dans le sixième chapitre, nous somme intéressés aux solutions à symétrie sphérique en présence de torsion. Suivant le théorème de Birkhoff il est important d'obtenir $f = g$, néanmoin en présence de torsion nous avons trouver un cas particulier où $f \neq g$, donc il est intéressant d'étudier les propriétés de ce cas, en utilisant l'espace temps de Lifshitz car il vérifie la condition $f \neq g$, puis nous calculons les quantités thermodynamiques en utilisant l'effet tunnel en raison de la création des particules dans la région de l'horizon, nous trouvons la température du Hawking en présence de torsion $T_h = \frac{\left|(2-z)l^{z-1}\right|}{4\pi(2m)^z}$ et la masse du trou noir $2M = l^{z-1}(2m)^{2-z}$,pour revenir à le cas ordinaire (trou noir de Schwarzschild) il suffit juste de poser $z = 1$.

Annexe A

Décomposition de $\mathcal{L}_G$

-Le tenseur de Riemann $\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ en absence du torsion est défini par

$$\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu} \tag{A.1}$$

la dérivée covariante d'un tenseur de type $\binom{1}{2}$

$$\overline{\nabla}_{\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\nu} = T^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu}T^{\alpha}{}_{\rho\nu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\rho} \tag{A.2}$$

$$\overline{\nabla}_{\nu}T^{\alpha}{}_{\beta\mu} = T^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu}T^{\alpha}{}_{\beta\rho}, \tag{A.3}$$

la notation $\overline{\nabla}$ représente la dérivée covariante en fonction de la connexion de Levi-Cevita (Christoffel) seulement.

-Quelques propriétés sur le tenseur de Levi-Civita ;

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\beta\lambda\mu\nu} &= -\varepsilon^{\lambda\beta\mu\nu} & \text{(A.4)}\\ \varepsilon^{\alpha\ \mu_1.....\mu_N}\varepsilon_{\beta\ \mu_1.....\mu_N} &= -(N-1)!\delta^{\alpha}_{\beta}. & \text{(A.5)}\end{aligned}$$

-Ces calculs suivants sont utilisés dans le cas du Lagrangien total $\mathcal{L}_G$;

Nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma} &= 6\delta^{\rho}_{\gamma} \\ \varepsilon^{\mu\nu\beta\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= 2\left(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\alpha}\right) \\ \varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho} &= -2\left(\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\rho} - \delta^{\lambda}_{\rho}\delta^{\sigma}_{\alpha}\right) \\ \varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\varepsilon_{\mu\beta\nu\gamma} &= 2\left(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\theta}_{\gamma} - \delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\theta}_{\mu}\right) \\ \varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= -6\delta^{\rho}_{\gamma} \\ \varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma} &= 2\left(\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\beta}\right), \end{aligned} \tag{A.6}$$

dans cette partie nous allons présenter la décomposition du lagrangien quadratique $\mathcal{L}_G$. Remplaçons les résultats (4.54) , (4.55),(4.56) , (4.58) , (4.57) , (4.59) , (4.49) et (4.52) dans la formule du lagrangien (4.60), la formule de Lagrangien $\mathcal{L}_G$ devient après décomposition

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= +\frac{8}{9}\left(4b_2+b_4+2b_5\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{8}{9}\left(2b_6+4b_3+b_4\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
&\quad +\frac{8}{9}\left(18b_1+2b_2+2b_3+b_4+4b_5+4b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
&\quad +\frac{1}{36}\left(b_4-2b_2\right)\overline{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\widetilde{Q}_\rho\right)\overline{\nabla}_\nu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&\quad +\frac{1}{36}\left(4b_3-3b_4+2b_2\right)\overline{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta}{}_{\rho}\widetilde{Q}^\rho\right)\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&\quad +\frac{1}{36}\left(b_5-b_6\right)\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu}{}_{\sigma}\widetilde{Q}^\sigma\right)\overline{\nabla}_\alpha\left(\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^\rho\right) \\
&\quad +\frac{4}{9}\left(b_5-b_6+2b_2-2b_3\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\beta \overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{4}{3}\left(6b_1+b_5+b_6\right)\overline{R}\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda - 2M_{Pl}^2\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda - \frac{8}{3}\left(b_5+b_6\right)\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^\nu Q^\beta \\
&-\frac{1}{27}\left[36b_1+8b_2-7b_3+4b_4+10b_5+10b_6\right]\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
&-\frac{8}{27}\left(16b_2+16b_3+11b_4+8b_5+8b_6\right)Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta \\
&+\frac{2}{3}\left(b_2+b_3-b_4\right)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_{\rho}\widetilde{Q}^\rho\right) + \frac{8}{3}\left(b_2+2b_3+b_4\right)\overline{R}^{\nu}{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu Q^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{3}\left(2a_1-a_2+3a_3-8\right)Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{6}\left(1-a_1-a_2\right)\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu \\
&+\frac{4}{81}\left(-18-4b_5-4b_6+4b_3-b_4+22b_2\right)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta \\
&-\frac{8}{81}\left(b_5+5b_3-2b_4-6b_2+b_6\right)Q_\nu\widetilde{Q}^\nu Q_\beta\widetilde{Q}^\beta \\
&+\frac{4}{27}\left(2b_2+2b_3+b_4+b_5+b_6\right)\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta \\
&+\frac{8}{27}\left(72b_1+16b_2+13b_3+7b_4+20b_5+20b_6\right)Q_\rho Q^\rho\overline{\nabla}_\mu Q^\mu \\
&+\frac{4}{27}\left(b_2-b_3\right)\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\widetilde{Q}_\theta Q_\rho\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon^{\mu}{}_{\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&+\frac{2}{27}\left(2b_3-b_4\right)\varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}Q^\mu\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&+\frac{4}{27}\left(2b_2+b_3-b_4\right)\varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&+\frac{1}{9}\left(3b_1+b_5+b_6\right)\overline{R}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho - \frac{1}{9}\left(b_5+b_6\right)\overline{R}_{\beta\nu}\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\overline{R}+b_1\overline{R}^2+(b_5+b_6)\,\overline{R}_{\mu\nu}\overline{R}^{\mu\nu}+\left(b_2+b_3+\frac{b_4}{2}\right)\overline{R}_{\mu\nu\rho\sigma}\overline{R}^{\mu\nu\rho\sigma}\\
&+\frac{96}{81}\,(6+2b_2+2b_3+b_4+2b_5+2b_6)\,Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma\\
&-\frac{16}{9}\,(3b_1+b_5+b_6)\,\overline{R}Q_\rho Q^\rho+\frac{16}{9}\,(b_5+b_6)\,\overline{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta\\
&+\frac{1}{216}\,(6+2b_2+2b_3+b_4+2b_5+2b_6)\,\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu\\
&+\frac{2}{9}\,(16b_2+16b_3+5b_4)\,\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta-\frac{8}{9}\,(2b_2+2b_3+b_4)\,\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho\\
&+\frac{1}{9}\,(2b_2+2b_3+b_4)\,\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\nu}\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{Q}^\nu+\frac{1}{18}\,(2b_2+2b_3+b_4)\,\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\\
&+\frac{8}{9}\,(b_2+b_3-b_4)\,\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho+\frac{4}{9}\,(2b_2+2b_3-b_4)\,\overline{R}^{\mu}{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho\widetilde{Q}_\theta.
\end{aligned}
$$

Si nous utilisons les contraintes $b_5 = -4b_1 - b_6$, $b_4 = 2b_1 - b_2 - b_3$ la formule de lagrangien devient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_G \;=\;& -\frac{16}{9}\,(3b_1-b_2+b_3+b_6)\,\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha\overline{\nabla}^\mu Q^\alpha+\frac{16}{9}\,(b_1-b_2+b_3+b_6)\,\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha\overline{\nabla}^\alpha Q^\mu\\
&+\frac{32}{9}b_1\overline{\nabla}_\mu Q^\mu\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{1}{18}\,(b_1-2b_2-b_3)\,\overline{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\widetilde{Q}_\rho\right)\overline{\nabla}_\nu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right)\\
&+\frac{1}{18}\,(5b_3-3b_1+4b_2)\,\overline{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon^{\mu\nu\beta\rho}\widetilde{Q}_\rho\right)\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right)\\
&-\frac{1}{18}\,(2b_1+b_6)\,\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\beta\nu\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)\overline{\nabla}^\alpha\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho}\widetilde{Q}^\rho\right)\\
&+\frac{4}{27}\,(b_2-b_3)\,\varepsilon^{\rho\nu\beta\theta}\widetilde{Q}_\theta Q_\rho\overline{\nabla}^\mu\left(\varepsilon_{\mu\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right)\\
&-\frac{4}{27}\,(b_1-b_2-2b_3)\,\varepsilon^{\beta\nu\alpha\rho}Q^\mu\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right)\\
&+\frac{4}{27}\,(-2b_1+4b_2+3b_3)\,\varepsilon^{\mu\alpha\nu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\left(\varepsilon_{\alpha\beta\nu\gamma}\widetilde{Q}^\gamma\right)
\end{aligned}
\qquad\text{(A.7)}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{8}{9}\left(2b_1-b_2+b_3+b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\beta \overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)-\frac{8}{3}b_1\overline{R\nabla}_\lambda Q^\lambda-2M_{Pl}^2\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda\\
&-\frac{1}{27}\left(4b_1-15b_3\right)\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{16}{27}\left(5b_1+3b_2+3b_3\right)Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\\
&-\frac{1}{27}\left(4b_1-15b_3\right)\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{16}{27}\left(5b_1+3b_2+3b_3\right)Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\\
&+\frac{2}{3}\left(-2b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho\widetilde{Q}^\rho\right)+\frac{8}{3}\left(2b_1-b_2\right)\overline{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu Q^\beta\\
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{3}\left(2a_1-a_2+3a_3-8\right)Q_\rho Q^\rho+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\frac{1}{6}\left(1-a_1-a_2\right)\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu\\
&+\frac{8}{81}\left(-9+7b_1+12b_2+3b_3\right)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta+\frac{32}{3}b_1\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^\nu Q^\beta\\
&-\frac{8}{81}\left(-8b_1+4b_2+9b_3\right)Q_\nu\widetilde{Q}^\nu Q_\beta\widetilde{Q}^\beta-\frac{8}{27}b_1\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\\
&+\frac{8}{27}\left(6b_1+2b_2-b_3\right)Q_\rho Q^\rho\overline{\nabla}_\mu Q^\mu-\frac{1}{9}b_1\overline{R}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho+\frac{4}{9}b_1\overline{R}_{\beta\nu}\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\overline{R}+b_1\overline{G}+\frac{64}{9}\left(1-b_1\right)Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma+\frac{16}{9}b_1\overline{R}Q_\rho Q^\rho\\
&-\frac{16}{9}b_1\overline{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{1}{36}\left(1-b_1\right)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu\\
&+\frac{4}{9}\left(5b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta-\frac{16}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho\\
&+\frac{2}{9}b_1\overline{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{Q}^\nu+\frac{8}{9}\left(-2b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho\\
&+\frac{1}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho+\frac{8}{9}\left(-b_1+2b_2+2b_3\right)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho\widetilde{Q}_\theta.
\end{aligned}
$$

La dérivée covariante du tenseur de Levi-Civita est nulle $\overline{\nabla}^\nu\left(\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\widetilde{Q}_\rho\right)=\varepsilon^{\alpha\mu\beta\rho}\overline{\nabla}^\nu\widetilde{Q}_\rho$, nous avons aussi les propriétés représentés dans l'équation $(A.6)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= -\frac{16}{9}\left(3b_1 - b_2 + b_3 + b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9}\left(b_1 - b_2 + b_3 + b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
&+\frac{32}{9} b_1 \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{3}\left(b_1 - 2b_2 - b_3\right)\overline{\nabla}^\nu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}^\gamma \\
&+\frac{1}{9}\left(5b_3 - 3b_1 + 4b_2\right)\left(\overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\gamma - \overline{\nabla}^\alpha \widetilde{Q}_\alpha \overline{\nabla}_\gamma \widetilde{Q}^\gamma\right) \\
&+\frac{1}{9}\left(2b_1 + b_6\right)\left(\overline{\nabla}_\alpha \widetilde{Q}_\rho \overline{\nabla}^\alpha \widetilde{Q}^\rho - \overline{\nabla}_\rho \widetilde{Q}_\alpha \overline{\nabla}^\alpha \widetilde{Q}^\rho\right) \\
&+\frac{8}{27}\left(b_2 - b_3\right)\left(\widetilde{Q}_\gamma Q_\mu \overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}^\gamma - \widetilde{Q}_\mu Q_\gamma \overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}^\gamma\right) + \frac{8}{9}\left(b_1 - b_2 - 2b_3\right) Q^\mu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\gamma \\
&+\frac{8}{27}\left(-2b_1 + 4b_2 + 3b_3\right)\left(Q^\mu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\gamma - Q^\rho \widetilde{Q}_\rho \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\mu\right) \qquad \text{(A.8)} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= -\frac{16}{9}\left(3b_1 - b_2 + b_3 + b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha + \frac{16}{9}\left(b_1 - b_2 + b_3 + b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu \\
&+\frac{32}{9} b_1 \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{9}\left(2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6\right)\overline{\nabla}^\nu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}^\gamma \\
&-\frac{1}{9}\left(5b_3 - 3b_1 + 4b_2\right)\overline{\nabla}^\nu \widetilde{Q}_\nu \overline{\nabla}_\gamma \widetilde{Q}^\gamma - \frac{1}{9}\left(2b_1 + b_6\right)\overline{\nabla}_\rho \widetilde{Q}_\alpha \overline{\nabla}^\alpha \widetilde{Q}^\rho \\
&+\frac{8}{27}\left(b_2 - b_3\right)\left(\widetilde{Q}_\gamma Q_\mu \overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}^\gamma - \widetilde{Q}_\mu Q_\gamma \overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}^\gamma\right) + \frac{8}{9}\left(b_1 - b_2 - 2b_3\right) Q^\mu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\gamma \\
&+\frac{8}{27}\left(-2b_1 + 4b_2 + 3b_3\right)\left(Q^\mu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\gamma - Q^\rho \widetilde{Q}_\rho \overline{\nabla}_\mu \widetilde{Q}^\mu\right) \qquad \text{(A.9)} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\mu \left(Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \overline{\nabla}_\alpha Q^\mu\right) &= \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \overline{\nabla}_\mu Q^\alpha \overline{\nabla}_\alpha Q^\mu + Q^\mu \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\mu \\
&= \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha \overline{\nabla}_\mu Q^\alpha \\
&= \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu \left[\overline{\nabla}_\mu, \overline{\nabla}_\alpha\right] Q^\alpha \\
&= \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu + Q^\mu \overline{R}^\alpha{}_{\rho\mu\alpha} Q^\rho \\
&= \overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu - \overline{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu
\end{aligned}$$

posons $Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha - Q^\alpha \overline{\nabla}_\alpha Q^\mu = V^\mu$ nous obtenons alors

$$\overline{\nabla}_\mu Q^\mu \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha = \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu + \overline{R}_{\rho\mu} Q^\rho Q^\mu + \overline{\nabla}_\mu V^\mu \qquad \text{(A.10)}$$

de même

$$\overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}^\nu \overline{\nabla}_\gamma \widetilde{Q}^\gamma = \overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}^\gamma \widetilde{Q}^\nu + \overline{R}_{\nu\gamma} \widetilde{Q}^\nu \widetilde{Q}^\gamma + \overline{\nabla}_\nu \widetilde{V}^\nu \qquad \text{(A.11)}$$

où

$$\widetilde{Q}^{\nu}\overline{\nabla}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\gamma}-\widetilde{Q}^{\gamma}\overline{\nabla}_{\gamma}\widetilde{Q}^{\nu}=\widetilde{V}^{\nu}$$

remplaçons les relations $(A.10)$ et $(A.11)$ dans $(A.9)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G \;=\; & -\frac{16}{9}\left(3b_1-b_2+b_3+b_6\right)\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\alpha}+\frac{16}{9}\left(3b_1-b_2+b_3+b_6\right)\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\mu}\\ & +\frac{1}{9}\left(2b_1-2b_2+2b_3+b_6\right)\overline{\nabla}^{\nu}\widetilde{Q}_{\gamma}\overline{\nabla}_{\nu}\widetilde{Q}^{\gamma}-\frac{1}{9}\left(2b_1-2b_2+2b_3+b_6\right)\overline{\nabla}_{\rho}\widetilde{Q}_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho}\\ & -\frac{1}{3}\left(2b_2+b_3-b_1\right)\overline{\nabla}_{\rho}\widetilde{Q}_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho}+\frac{8}{27}\left(b_1+2b_2-4b_3\right)\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\mu}\overline{\nabla}^{\mu}\widetilde{Q}^{\gamma}\\ & -\frac{8}{27}\left(b_2-b_3\right)\widetilde{Q}_{\mu}Q_{\gamma}\overline{\nabla}^{\mu}\widetilde{Q}^{\gamma}-\frac{8}{27}\left(-2b_1+4b_2+3b_3\right)Q^{\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\widetilde{Q}^{\mu}\\ & +\frac{32}{9}b_1\left(\overline{R}_{\rho\mu}Q^{\rho}Q^{\mu}+\overline{\nabla}_{\mu}V^{\mu}\right)-\frac{1}{9}\left(5b_3-3b_1+4b_2\right)\left(\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\gamma}+\overline{\nabla}_{\nu}\widetilde{V}^{\nu}\right)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{A.12}$$

il vient donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G \;=\; & +\frac{16}{9}\left(3b_1-b_2+b_3+b_6\right)\left[\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}Q^{\mu}-\overline{\nabla}_{\mu}Q_{\alpha}\overline{\nabla}^{\mu}Q^{\alpha}\right]\\ & -\frac{1}{9}\left(2b_1-2b_2+2b_3+b_6\right)\left[\overline{\nabla}_{\rho}\widetilde{Q}_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho}-\overline{\nabla}^{\nu}\widetilde{Q}_{\gamma}\overline{\nabla}_{\nu}\widetilde{Q}^{\gamma}\right]\\ & -\frac{1}{3}\left(2b_2+b_3-b_1\right)\overline{\nabla}_{\rho}\widetilde{Q}_{\alpha}\overline{\nabla}^{\alpha}\widetilde{Q}^{\rho}+\frac{8}{27}\left(b_1+2b_2-4b_3\right)\widetilde{Q}_{\gamma}Q_{\mu}\overline{\nabla}^{\mu}\widetilde{Q}^{\gamma}\\ & -\frac{8}{27}\left(b_2-b_3\right)\widetilde{Q}_{\mu}Q_{\gamma}\overline{\nabla}^{\mu}\widetilde{Q}^{\gamma}-\frac{8}{27}\left(-2b_1+4b_2+3b_3\right)Q^{\rho}\widetilde{Q}_{\rho}\overline{\nabla}_{\mu}\widetilde{Q}^{\mu}\\ & +\frac{32}{9}b_1\left(\overline{R}_{\rho\mu}Q^{\rho}Q^{\mu}+\overline{\nabla}_{\mu}V^{\mu}\right)-\frac{1}{9}\left(5b_3-3b_1+4b_2\right)\left(\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^{\nu}\widetilde{Q}^{\gamma}+\overline{\nabla}_{\nu}\widetilde{V}^{\nu}\right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Calculons $\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha$

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha &= \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \left(\overline{\nabla}^\alpha Q^\mu - \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha\right) \\
&= \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha \left(\overline{\nabla}_\alpha Q_\mu - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha\right) \\
&= \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha \left(\partial_\alpha Q_\mu - \overline{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\alpha} Q_\lambda - \partial_\mu Q_\alpha + \overline{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda\right) \\
&= \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha \left(\partial_\alpha Q_\mu - \partial_\mu Q_\alpha\right) \\
&= \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \left(\partial^\alpha Q^\mu - \partial^\mu Q^\alpha\right) \\
&= \left(\partial_\mu Q_\alpha - \overline{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda\right) \left(\partial^\alpha Q^\mu - \partial^\mu Q^\alpha\right) \\
&= \left(\partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha - \overline{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \partial^\alpha Q^\mu + \overline{\Gamma}^\lambda{}_{\alpha\mu} Q_\lambda \partial^\mu Q^\alpha\right) \\
&= \left(\partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha\right) \\
&= -\frac{1}{2} 2 \left(\partial_\mu Q_\alpha \partial^\mu Q^\alpha - \partial_\mu Q_\alpha \partial^\alpha Q^\mu\right) \\
\overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\alpha Q^\mu - \overline{\nabla}_\mu Q_\alpha \overline{\nabla}^\mu Q^\alpha &= -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu Q_\alpha - \partial_\mu Q_\alpha\right) \left(\partial^\mu Q^\alpha - \partial^\alpha Q^\mu\right) = -\frac{1}{2} \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

notons que

$$\Upsilon_{\mu\alpha} = 2\partial_{[\mu} Q_{\alpha]}$$

de la même manière

$$\overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}^\gamma \widetilde{Q}^\nu - \overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}_\gamma \overline{\nabla}^\nu \widetilde{Q}^\gamma = -\frac{1}{2} \left(\partial_\nu \widetilde{Q}_\gamma - \partial_\nu \widetilde{Q}_\gamma\right) \left(\partial^\nu \widetilde{Q}^\gamma - \partial^\gamma \widetilde{Q}^\nu\right) = -\frac{1}{2} S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} \quad \text{(A.15)}$$

avec

$$S_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} \partial_{[\nu} \widetilde{Q}_{\gamma]}$$

nous remplaçons les résultats $(A.14)$ et $(A.15)$ dans $(A.13)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_G = & -\frac{8}{9} \left(3b_1 - b_2 + b_3 + b_6\right) \Upsilon_{\mu\alpha} \Upsilon^{\mu\alpha} + \frac{1}{18} \left(2b_1 - 2b_2 + 2b_3 + b_6\right) S_{\nu\gamma} S^{\nu\gamma} \\
& -\frac{1}{2} M_{Pl}^2 \frac{1}{3} \left(2 - 2a_1 + a_2 - 3a_3\right) Q_\rho Q^\rho + \frac{1}{24} \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \left(1 - 4a_1 - 4a_2\right) \widetilde{Q}_\nu \widetilde{Q}^\nu \\
& + \frac{24}{81} \left(b_1 + b_2 - b_3\right) \widetilde{Q}_\rho \widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta + \frac{8}{81} \left(4b_1 - 5b_2 - 4b_3\right) Q_\nu \widetilde{Q}^\nu Q_\beta \widetilde{Q}^\beta \\
& + \frac{8}{81} 3 \left(4b_1 - 5b_2 - 4b_3\right) \widetilde{Q}^\beta \widetilde{Q}^\nu \overline{\nabla}_\nu Q_\beta + \frac{1}{27} \left(b_1 + b_2 - b_3\right) \widetilde{Q}_\sigma \widetilde{Q}^\sigma \overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha \\
& + \frac{8}{27} \left(b_1 - 2b_2 - b_3\right) \widetilde{Q}_\mu Q_\gamma \overline{\nabla}^\mu \widetilde{Q}^\gamma + \frac{1}{3} \left(b_1 - 2b_2 - b_3\right) \overline{\nabla}_\nu \widetilde{Q}^\nu \overline{\nabla}_\gamma \widetilde{Q}^\gamma \\
& + \frac{1}{9} \left(b_1 + b_2 - b_3\right) 2 \overline{R}_{\nu\gamma} \widetilde{Q}^\nu \widetilde{Q}^\gamma + \frac{1}{9} \left(b_1 + b_2 - b_3\right) \left(-g_{\nu\gamma} \overline{R} \widetilde{Q}^\nu \widetilde{Q}^\gamma + \overline{R} \widetilde{Q}_\gamma \widetilde{Q}^\gamma\right) \quad \text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\overline{R}+b_1\overline{G}-\frac{8}{3}b_1\overline{R\nabla}_\lambda Q^\lambda-2M_{Pl}^2\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda+\frac{32}{3}b_1\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^\nu Q^\beta\\
&-M_{Pl}^2Q_\rho Q^\rho+\frac{1}{16}M_{Pl}^2\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu+\frac{16}{9}b_1\overline{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{16}{9}b_1\overline{R}Q_\rho Q^\rho\\
&+\frac{8}{81}\left(-9+4b_1+9b_2+6b_3\right)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta+\frac{32}{9}b_1\overline{\nabla}_\mu V^\mu-\frac{1}{9}b_1\overline{R}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\\
&+\frac{1}{9}\left(-3b_3+5b_1-6b_2\right)\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma-\frac{1}{9}\left(5b_3-3b_1+4b_2\right)\overline{\nabla}_\nu\widetilde{V}^\nu\\
&+\frac{8}{81}\left(4b_1+b_2-5b_3\right)Q_\nu\widetilde{Q}^\nu Q_\beta\widetilde{Q}^\beta-\frac{8}{27}\left(-2b_1+4b_2+3b_3\right)Q^\rho\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\widetilde{Q}^\mu\\
&+\frac{8}{27}\left(-5b_1+5b_2+4b_3\right)\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{27}\left(b_2-b_1+2b_3\right)\widetilde{Q}_\mu Q_\gamma\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma\\
&+\frac{1}{27}\left(-5b_1-b_2+16b_3\right)\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{64}{9}\left(1-b_1\right)Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma\\
&+\frac{16}{27}\left(5b_1+3b_2+3b_3\right)Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{3}\left(2b_1-b_2\right)\overline{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu Q^\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{36}\left(1-b_1\right)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu+\frac{8}{27}\left(6b_1+2b_2-b_3\right)Q_\rho Q^\rho\overline{\nabla}_\mu Q^\mu\\
&+\frac{4}{9}\left(5b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{8}{27}\left(b_1+2b_2-4b_3\right)\widetilde{Q}_\gamma Q_\mu\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma\\
&+\frac{1}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho-\frac{16}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho+\frac{2}{9}b_1\overline{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{Q}^\nu\\
&+\frac{1}{3}\left(2b_2+b_3-b_1\right)\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma+\frac{1}{3}\left(2b_2+b_3-b_1\right)\overline{\nabla}_\nu\widetilde{V}^\nu\\
&-\frac{8}{9}\left(2b_1-b_2+b_3+b_6\right)\overline{\nabla}_\mu Q_\beta\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)+\frac{8}{9}\left(-2b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho\\
&+\frac{8}{9}\left(-b_1+2b_2+2b_3\right)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho\widetilde{Q}_\theta+\frac{2}{3}\left(-2b_1+3b_2+3b_3\right)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho\widetilde{Q}^\rho\right).
\end{aligned}
$$

Nous définissons les paramètres

$$
\begin{aligned}
\kappa &= 4b_1+b_6\\
\beta &= b_1+b_2-b_3\\
m_T^2 &= -\frac{1}{3}\left(2-2a_1+a_2-3a_3\right)M_{Pl}^2\\
m_S^2 &= \frac{1}{24}\left(1-4a_1-4a_2-3a_3\right)M_{Pl}^2
\end{aligned}
$$

donc la formule finale de lagrangien quadratique $\mathcal{L}_G$ après décomposition est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_G &= -\frac{8}{9}(\kappa-\beta)\Upsilon_{\mu\alpha}\Upsilon^{\mu\alpha}+\frac{1}{18}(\kappa-2\beta)S_{\nu\gamma}S^{\nu\gamma}+\frac{1}{2}m_T^2Q^2+\frac{1}{2}m_S^2\widetilde{Q}^2 \\
&\quad+\frac{24}{81}\beta\widetilde{Q}^2Q^2+\frac{8}{81}(4\beta-9b_2)\left[\left(\widetilde{Q}^\nu Q_\nu\right)^2+3\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta\right] \\
&\quad+\frac{1}{27}\beta\widetilde{Q}^2\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{8}{27}(\beta-3b_2)\widetilde{Q}_\mu Q_\gamma\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma+\frac{1}{3}(\beta-3b_2)\left(\overline{\nabla}_\nu\widetilde{Q}^\nu\right)^2 \\
&\quad+\frac{1}{9}\beta\left(2\overline{G}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma+\overline{R}\widetilde{Q}^2\right) \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{Pl}^2\overline{R}+b_1\overline{G}-\frac{8}{3}b_1\overline{R}\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda-2M_{Pl}^2\overline{\nabla}_\lambda Q^\lambda+\frac{32}{3}b_1\overline{R}_{\beta\nu}\overline{\nabla}^\nu Q^\beta \\
&-M_{Pl}^2Q_\rho Q^\rho+\frac{1}{16}M_{Pl}^2\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu+\frac{16}{9}b_1\overline{R}_{\beta\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{16}{9}b_1\overline{R}Q_\rho Q^\rho \\
&+\frac{8}{81}(-9+4b_1+9b_2+6b_3)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho Q_\beta Q^\beta+\frac{32}{9}b_1\overline{\nabla}_\mu V^\mu-\frac{1}{9}b_1\overline{R}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho \\
&+\frac{1}{9}(-3b_3+5b_1-6b_2)\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma-\frac{1}{9}(5b_3-3b_1+4b_2)\overline{\nabla}_\nu\widetilde{V}^\nu \\
&+\frac{8}{81}(4b_1+b_2-5b_3)Q_\nu\widetilde{Q}^\nu Q_\beta\widetilde{Q}^\beta-\frac{8}{27}(-2b_1+4b_2+3b_3)Q^\rho\widetilde{Q}_\rho\overline{\nabla}_\mu\widetilde{Q}^\mu \\
&+\frac{8}{27}(-5b_1+5b_2+4b_3)\widetilde{Q}^\beta\widetilde{Q}^\nu\overline{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{27}(b_2-b_1+2b_3)\widetilde{Q}_\mu Q_\gamma\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma \\
&+\frac{1}{27}(-5b_1-b_2+16b_3)\widetilde{Q}_\sigma\widetilde{Q}^\sigma\overline{\nabla}_\alpha Q^\alpha+\frac{64}{9}(1-b_1)Q_\rho Q^\rho Q_\sigma Q^\sigma \\
&+\frac{16}{27}(5b_1+3b_2+3b_3)Q^\nu Q^\beta\overline{\nabla}_\nu Q_\beta+\frac{8}{3}(2b_1-b_2)\overline{R}^\nu{}_{\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu Q^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{36}(1-b_1)\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho\widetilde{Q}_\nu\widetilde{Q}^\nu+\frac{8}{27}(6b_1+2b_2-b_3)Q_\rho Q^\rho\overline{\nabla}_\mu Q^\mu \\
&+\frac{4}{9}(5b_1+3b_2+3b_3)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}Q^\nu Q^\beta+\frac{8}{27}(b_1+2b_2-4b_3)\widetilde{Q}_\gamma Q_\mu\overline{\nabla}^\mu\widetilde{Q}^\gamma \\
&+\frac{1}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}\widetilde{Q}_\rho\widetilde{Q}^\rho-\frac{16}{9}b_1\overline{R}^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}Q_\rho Q^\rho+\frac{2}{9}b_1\overline{R}_{\alpha\beta}{}^\beta{}_\nu\widetilde{Q}^\alpha\widetilde{Q}^\nu \\
&+\frac{1}{3}(2b_2+b_3-b_1)\overline{R}_{\nu\gamma}\widetilde{Q}^\nu\widetilde{Q}^\gamma+\frac{1}{3}(2b_2+b_3-b_1)\overline{\nabla}_\nu\widetilde{V}^\nu \\
&-\frac{8}{9}(2b_1-b_2+b_3+b_6)\overline{\nabla}_\mu Q_\beta\overline{\nabla}_\lambda\left(\varepsilon^{\lambda\mu\beta\sigma}\widetilde{Q}_\sigma\right)+\frac{8}{9}(-2b_1+3b_2+3b_3)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\nu\mu\rho}Q^\beta\widetilde{Q}_\rho \\
&+\frac{8}{9}(-b_1+2b_2+2b_3)\overline{R}^\mu{}_{\beta\mu\nu}\varepsilon^{\rho\beta\nu\theta}Q_\rho\widetilde{Q}_\theta+\frac{2}{3}(-2b_1+3b_2+3b_3)\overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\overline{\nabla}^\mu\left(\varepsilon^{\alpha\beta\nu}{}_\rho\widetilde{Q}^\rho\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\overline{G}_{\nu\gamma}=\overline{R}_{\nu\gamma}-\frac{1}{2}g_{\nu\gamma}\overline{R}.$$

Annexe B

Cosmologie avec torsion

A partir de (5.46) nous pouvons calculer les connexions et les tenseurs de torsion, contorsion, Riemann, Ricci et le scalaire de Ricci.

Notons que $(0 \equiv t, 1 \equiv r, 2 \equiv \theta, 3 \equiv \varphi)$

B.1 Connexions de Christoffel $\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}$

Nous avons la connexion de Christoffel qui est défini comme suit

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\mu} \right) \tag{B.1}$$

dans le cas de la métrique de type (5.46) nous obtenons les composantes suivantes

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{0}{}_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2},\ \overline{\Gamma}^{0}{}_{22} = a\dot{a}r^2,\ \overline{\Gamma}^{0}{}_{33} = a\dot{a}r^2\sin^2\theta \\
\overline{\Gamma}^{1}{}_{01} &= \overline{\Gamma}^{1}{}_{10} = \frac{\dot{a}}{a},\ \overline{\Gamma}^{1}{}_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2} \\
\overline{\Gamma}^{1}{}_{22} &= -r\left(1-Kr^2\right),\ \overline{\Gamma}^{1}{}_{33} = -r\left(1-Kr^2\right)\sin^2\theta \\
\overline{\Gamma}^{2}{}_{02} &= \overline{\Gamma}^{2}{}_{20} = \frac{\dot{a}}{a},\ \overline{\Gamma}^{2}{}_{12} = \overline{\Gamma}^{2}{}_{21} = \frac{1}{r} \\
\overline{\Gamma}^{2}{}_{33} &= -\cos\theta\sin\theta,\ \overline{\Gamma}^{3}{}_{03} = \overline{\Gamma}^{3}{}_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \\
\overline{\Gamma}^{3}{}_{13} &= \overline{\Gamma}^{3}{}_{31} = \frac{1}{r},\ \overline{\Gamma}^{3}{}_{23} = \overline{\Gamma}^{3}{}_{32} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{B.2}$$

les autres termes sont nuls.

B.2 Tenseurs de torsion $Q^a{}_{bc}$

La définition du champ de torsion est

$$Q_{abc} = 2\phi h_{a[b}u_{c]} \tag{B.3}$$

avec ϕ est une fonction scalaire dépend du temps seulement $\phi \equiv \phi(t)$.

Ce qui nous donne les composantes suivantes

$$\begin{aligned} Q^1{}_{01} &= Q^2{}_{02} = Q^3{}_{03} = \phi \\ Q^1{}_{10} &= Q^2{}_{20} = Q^3{}_{30} = -\phi \end{aligned} \tag{B.4}$$

les autres termes sont nuls.

B.3 Tenseurs de contorsion $T^a{}_{bc}$

Nous avons le tenseur de contorsion qui est défini par

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}{}^\alpha + Q_{\nu\mu}{}^\alpha + Q^\alpha{}_{\mu\nu} \tag{B.5}$$

alors, les composantes non nulles sont

$$\begin{aligned} T^0{}_{11} &= \frac{2a^2}{1-Kr^2}\phi,\ T^0{}_{22} = 2a^2r^2\phi \\ T^0{}_{33} &= 2a^2r^2\phi\sin^2\theta,\ T^1{}_{01} = 2\phi \\ T^2{}_{02} &= 2\phi,\ T^3{}_{03} = 2\phi. \end{aligned} \tag{B.6}$$

B.4 Partie symétrique du connexion $\Gamma^a{}_{(bc)}$

Nous avons la définition de la connexion dans le cas du torsion

$$\Gamma^a{}_{bc} = \overline{\Gamma}^a{}_{bc} + T^a{}_{bc}$$

avec

$$T_{abc} = Q_{abc} + Q_{bca} + Q_{cba} = Q_{abc} + 2Q_{(ab)c}$$

donc la partie symétrique du connexion est donné par

$$\begin{aligned} \Gamma^a{}_{(bc)} &= \overline{\Gamma}^a{}_{bc} + T^a{}_{(bc)} \\ \Gamma^a{}_{(bc)} &= \overline{\Gamma}^a{}_{bc} + 2Q^{(a}{}_{b)c} \end{aligned}$$

à partir de cette dernière relation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{(11)} &= \frac{a\dot{a}+2\phi a^2}{1-Kr^2},\ \Gamma^0{}_{(22)} = r^2\left(a\dot{a}+2\phi a^2\right) \\
\Gamma^0{}_{(33)} &= r^2\sin^2\theta\left(a\dot{a}+2\phi a^2\right),\ \Gamma^1{}_{(01)} = \frac{\dot{a}}{a}+\phi \\
\Gamma^1{}_{(11)} &= \frac{Kr}{1-Kr^2},\ \Gamma^1{}_{(22)} = -r\left(1-Kr^2\right) \\
\Gamma^1{}_{(33)} &= -r\left(1-Kr^2\right)\sin^2\theta,\ \Gamma^2{}_{(02)} = \frac{\dot{a}}{a}+\phi \\
\Gamma^2{}_{(12)} &= \frac{1}{r},\ \Gamma^2{}_{(33)} = -\cos\theta\sin\theta \\
\Gamma^3{}_{(03)} &= \frac{\dot{a}}{a}+\phi,\ \Gamma^3{}_{(13)} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3{}_{(23)} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{B.7}$$

les autres termes sont nuls.

B.5 Connexions $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$

Nous savons que

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \overline{\Gamma}^{a}{}_{bc} + T^{a}{}_{(bc)} + T^{a}{}_{[bc]} \\
\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \Gamma^{a}{}_{(bc)} + Q^{a}{}_{bc}
\end{aligned}$$

nous obtenons les composantes non nulles suivantes

$$\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{11} &= \frac{a\dot{a}+2\phi a^2}{1-Kr^2},\ \Gamma^0{}_{22} = r^2\left(a\dot{a}+2\phi a^2\right) \\
\Gamma^0{}_{33} &= r^2\sin^2\theta\left(a\dot{a}+2\phi a^2\right),\ \Gamma^1{}_{01} = \frac{\dot{a}}{a}+2\phi \\
\Gamma^1{}_{10} &= \frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^1{}_{11} = \frac{Kr}{1-Kr^2},\ \Gamma^1{}_{22} = -r\left(1-Kr^2\right) \\
\Gamma^1{}_{33} &= -r\left(1-Kr^2\right)\sin^2\theta,\ \Gamma^2{}_{02} = \frac{\dot{a}}{a}+2\phi \\
\Gamma^2{}_{20} &= \frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2{}_{33} = -\cos\theta\sin\theta \\
\Gamma^3{}_{03} &= \frac{\dot{a}}{a}+2\phi, \Gamma^3{}_{30} = \frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^3{}_{13} = \Gamma^3{}_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3{}_{23} = \Gamma^3{}_{32} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

B.6 Tenseurs de Riemann $\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$

En absence du torsion, nous savons que le tenseur de Riemann est défini par

$$\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}\overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu}$$

à partir des connexions du Christoffel trouvées précedement nous obtenons

$$\begin{aligned}
\bar{R}^{0}{}_{101} &= \frac{a\,\ddot{a}}{1-k\,r^{2}} \\
\bar{R}^{0}{}_{202} &= a\,\ddot{a}\,r^{2} \\
\bar{R}^{0}{}_{303} &= a\,\ddot{a}\,r^{2}\sin^{2}\theta \\
\bar{R}^{1}{}_{212} &= \left(k+\dot{a}^{2}\right)\,r^{2} \\
\bar{R}^{1}{}_{313} &= \left(k+\dot{a}^{2}\right)\,r^{2}\sin^{2}\theta \\
\bar{R}^{2}{}_{323} &= \left(k+\dot{a}^{2}\right)\,r^{2}\sin^{2}\theta
\end{aligned} \tag{B.9}$$

les autres termes sont nuls.

B.7 Tenseurs de Riemann $R^{a}{}_{\beta\mu\nu}$

Dans le cas où il y a la torsion , nous écrivons le tenseur de Riemann comme suit

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + T^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - T^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + T^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} - T^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} \\
&\quad + \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\mu}T^{\rho}{}_{\beta\nu} + \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\nu}T^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \overline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\nu}T^{\rho}{}_{\beta\mu} - \overline{\Gamma}^{\rho}{}_{\beta\mu}T^{\alpha}{}_{\rho\nu}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

notons que

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= -R^{\alpha}{}_{\beta\nu\mu} \\
R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= -R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu} \\
R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{[\alpha\beta][\mu\nu]}
\end{aligned}$$

il vient donc

$$
\begin{aligned}
R^{0}{}_{101} &= \frac{2a^2}{1-Kr^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}}{a}\phi+\dot{\phi}\right) \\
R^{0}{}_{202} &= 2a^2r^2\left(\frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}+\dot{\phi}+\frac{\dot{a}}{a}\phi\right) \\
R^{0}{}_{303} &= 2a^2r^2\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}\frac{\ddot{a}}{a}+\dot{\phi}+\frac{\dot{a}}{a}\phi\right) \\
R^{1}{}_{313} &= 4a^2r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K}{a^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{\dot{a}}{a}\phi+\phi^2\right] \\
R^{1}{}_{212} &= 4a^2r^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K}{a^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{\dot{a}}{a}\phi+\phi^2\right] \\
R^{2}{}_{323} &= 4a^2r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{4}\left(\frac{K}{a^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)+\frac{\dot{a}}{a}\phi+\phi^2\right]
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

les autres termes sont nuls.

B.8 Tenseurs de Ricci $R_{\beta\nu}$

Nous obtenons le tenseur de Ricci à partir de la contraction du tenseur de Riemann directement, nous avons

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} \tag{B.12}$$

c'est à dire

$$R_{00} = R^{1}{}_{010} + R^{2}{}_{020} + R^{3}{}_{030},\ \ldots$$

nous obtenons les composantes suivantes

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\left[\frac{\ddot{a}}{a}+2\dot{\phi}+2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] \\
R_{11} &= \frac{2a^2}{1-Kr^2}\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] \\
R_{22} &= 2a^2r^2\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right] \\
R_{33} &= 2a^2r^2\sin^2\theta\left[\frac{\ddot{a}}{2a}+\dot{\phi}+\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)+4\phi^2+\frac{K}{a^2}\right].
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

B.9 Scalaire de Ricci R

A partir du tenseur de Ricci nous trouvons le scalaire de Ricci

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} = R^{0}{}_{0} + R^{1}{}_{1} + R^{2}{}_{2} + R^{3}{}_{3}$$

et donc

$$\begin{aligned} R^{0}{}_{0} &= 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{\phi} + 2\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\right] \\ R^{1}{}_{1} &= R^{2}{}_{2} = R^{3}{}_{3} = 2\left[\frac{\ddot{a}}{2a} + \dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + 5\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^{2} + \frac{K}{a^{2}}\right] \end{aligned}$$

nous obtenons finalement

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\dot{\phi} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} + 6\phi\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 4\phi^{2} + \frac{K}{a^{2}}\right]. \tag{B.14}$$

Annexe C

Le cas d'une métrique statique à symétrie sphérique

Nous passons presque par les mêmes étapes du calcul de la partie de la cosmologie, sauf dans ce cas la métrique, les composantes de torsion et contorion se changent et qui sont représentées dans (6.1) , (6.3) , (6.14) et (6.16) .

C.1 Tenseurs de Riemann $\overline{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ en absence de torsion

Les composantes non nulles du tenseur de Riemann sont

$$\begin{aligned}
\bar{R}^0{}_{101} &= \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{f'\,g'}{f\,g} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f} \\
\bar{R}^0{}_{202} &= -\frac{1}{2}gr\left(\frac{f'}{f}\right) \\
\bar{R}^0{}_{303} &= -\frac{1}{2}gr\left(\frac{f'}{f}\right)\sin^2(\theta) \\
\bar{R}^1{}_{212} &= -\frac{1}{2}rg' \\
\bar{R}^1{}_{313} &= -\frac{1}{2}rg'\sin^2(\theta) \\
\bar{R}^2{}_{323} &= (1-g)\sin^2(\theta)\,.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

C.2 Tenseurs de Riemann $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ en pésence de torsion

Nous trouvons dans ce cas

$$\begin{aligned}
R^{0}{}_{101} &= \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^{2} - \frac{1}{4}\frac{f'\,g'}{f\,g} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f}\right) \\
R^{0}{}_{202} &= -\frac{1}{2}gr\left(\frac{f'}{f}\right) \\
R^{0}{}_{303} &= -\frac{1}{2}gr\left(\frac{f'}{f}\right)\sin^{2}(\theta) \\
R^{1}{}_{212} &= -\frac{1}{2}rg' + 4\frac{r^{2}}{f}\phi_1\phi_2 \\
R^{1}{}_{313} &= -\frac{1}{2}rg'\sin^{2}(\theta) + \frac{4r^{2}\sin^{2}(\theta)}{f}\phi_1\phi_3 \\
R^{2}{}_{323} &= (1-g)\,\sin^{2}(\theta) + \frac{4r^{2}\sin^{2}(\theta)}{f}\phi_2\phi_3
\end{aligned} \tag{C.2}$$

les autres termes sont nuls.

Bibliographie

[1] C.M. Will, The confrontation between GR and experiment. Living Rev. Rel 9 (2006)

[2] B.P. Abbott et al., (LIGO and VIRGO collaboration). Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)

[3] B.P. Abbott et al., (LIGO and VIRGO collaboration). Phys. Rev. Lett. 119, 141101 (2017)

[4] B.P. Abbott et al., (LIGO and VIRGO collaboration). J. Astrophys. 851, L35 (2017)

[5] K. Akiyama et al., (EHT collaboration) : Event horizon telescope. Astrophys. J. 875 (2019) L1

[6] K. Akiyama et al., (EHT collaboration) : Event horizon telescope. Astrophys. J. 875 (2019) L4

[7] P.A.R. Ade et al., (Planck Collaboration) : Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. Astron. Astrophys. 571 A1 (2014)

[8] C.L. Bennett et al.,(WMAP Collaboration) : nine-year WilkinsonMicrowave Anisotropy Probe (WMAP) observations : final maps and results. Astrophys. J. Suppl. 208, 20 (2013)

[9] D. W. Sciama, On the analogy between charge and spin in general relativity, Recent developments in general relativity (1962) 415.

[10] T. W. B. Kibble, Lorentz invariance and the gravitational field, J. Math. Phys. 2 (1961) 212.

[11] M. Blagojevic, F. W. Hehl and T. W. B. Kibble, Gauge Theories of Gravitation. Imperial College Press, 2013.

[12] V. N. Ponomarev, A. Barvinsky and Y. Obukhov, Gauge approach and quantization methods in gravity theory. Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, Nauka, 2017.

[13] Y. N. Obukhov, Poincaré gauge gravity : An overview, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 15 (2018) 1840005.

[14] D.E. Neville, Gravity theories with propagating torsion. Phys. Rev. D 21, 867 (1980)

[15] J. M. Stewart and P. Hajicek, Can spin avert singularities ?, Nature 244 (1973) 96.

[16] A. Trautman, Spin and torsion may avert gravitational singularities, Nature 242 (1973) 7.

[17] J. A. R. Cembranos, J. Gigante Valcarcel and F. J. M. Torralba, Singularities and n-dimensional black holes in torsion theories, JCAP 1704 (2017) 021.

[18] A. de la Cruz-Dombriz, F. J. Maldonado Torralba and A. Mazumdar, Nonsingular and ghost-free infinite derivative gravity with torsion, Phys. Rev. D 99 (2019) 104021

[19] D. E. Neville, Birkhoff Theorems for R + R2 Gravity Theories With Torsion, Phys. Rev. D21 (1980) 2770.

[20] R. Rauch and H. T. Nieh, Birkhoff's Theorem for General Riemann-Cartan Type R + R2 Theories of Gravity, Phys. Rev. D24 (1981) 2029.

[21] A. de la Cruz-Dombriz and F. J. Maldonado Torralba, Birkhoff's theorem for stable torsion theories, JCAP 1903 (2019) 002.

[22] M. Blagojevic and B. Cvetkovic, Conformally flat black holes in Poincaré gauge theory, Phys. Rev. D93 (2016) 044018.

[23] J. A. R. Cembranos and J. G. Valcarcel, New torsion black hole solutions in Poincaré gauge theory, JCAP 1701 (2017) 014.

[24] Y. N. Obukhov, Exact Solutions in Poincaré Gauge Gravity Theory, Universe 5 (2019) 127.

[25] H.-J. Yo and J. M. Nester, Dynamic Scalar Torsion and an Oscillating Universe, Mod. Phys. Lett. A22 (2007) 2057.

[26] K.-F. Shie, J. M. Nester and H.-J. Yo, Torsion Cosmology and the Accelerating Universe, Phys. Rev. D78 (2008) 023522.

[27] H. Chen, F.-H. Ho, J. M. Nester, C.-H. Wang and H.-J. Yo, Cosmological dynamics with propagating Lorentz connection modes of spin zero, JCAP 0910 (2009) 027.

[28] P. Baekler, F. W. Hehl and J. M. Nester, Poincare gauge theory of gravity : Friedman cosmology with even and odd parity modes. Analytic part, Phys. Rev. D83 (2011) 024001.

[29] F.-H. Ho, H. Chen, J. M. Nester and H.-J. Yo, General Poincaré Gauge Theory Cosmology, Chin. J. Phys. 53 (2015) 110109.

[30] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov and D. Puetzfeld, On Poincaré gauge theory of gravity, its equations of motion, and Gravity Probe B, Phys. Lett. A377 (2013) 1775.

[31] J. A. R. Cembranos, J. G. Valcarcel and F. J. M. Torralba, Fermion dynamics in torsion theories, JCAP 1904 (2019) 039.

[32] D.-C. Chern, J. M. Nester and H.-J. Yo, Positive energy test of Poincare gauge theory, Int. J.Mod. Phys. A7 (1992) 1993.

[33] H.-j. Yo and J. M. Nester, Hamiltonian analysis of Poincaré gauge theory scalar modes, Int. J. Mod. Phys. D8 (1999) 459.

[34] H.-J. Yo and J. M. Nester, Hamiltonian analysis of Poincaré gauge theory : Higher spin modes, Int. J. Mod. Phys. D11 (2002) 747.

[35] T. B. Vasilev, J. A. R. Cembranos, J. G. Valcarcel and P. Martin-Moruno, Stability in quadratic torsion theories, Eur. Phys. J. C77 (2017) 755.

[36] Jeffrey Yepez, Einstein's vierbein field theory of curved space, arXiv : gr-qc/1106.2037v1.

[37] Tomás Ortín, Gravity and Strings. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. (2004).

[38] Jayant V. Narlikar, T. Padmanabhan, Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology. D. Reidel Publishing Company. (1986)

[39] Milutin Blagojević, Three lectures on Poincaré gauge theory, arXiv : gr-qc/0302040v1.

[40] Milutin Blagojević, GRAVITATION AND GAUGE SYMMETRIES. INSTITUTE OF PHYSICS. (2002).

[41] Friedrich W. Hehl, Paul von der Heyde, G. David Kerlick, and James M. Nester, General relativity with spin and torsion : Foundations and prospects. REVIEWS OF MODERN PHYSICS. (1976).

[42] J. B. Jiménez, Francisco José Maldonado Torralba. Revisiting the stability of quadratic Poincaré gauge gravity. The European Physical Journal C. (2020).

[43] Clément Stahl, On early and late phases of acceleration of the expansion of the universe, arXiv :gr-qc/1702.05630v1.

[44] Michael Tsamparlis, Cosmological principle and torsion. Physics Letters A. (1979).

[45] D. Kranas, C. G. Tsagas, J. D. Barrow, D. Iosifidis, Friedmann-like universes with torsion. The European Physical Journal. (2019).

[46] Ramkumar Radhakrishnan, A study on the Friedmann like Universe with Torsionusing Noether Symmetry. Physics Letters A. (2019).

[47] P. A. González, Yerko Vásquez, Ruth Noemi Villalobos, Fermionic field perturbations of a three-dimensional Lifshitz black hole in conformal gravity. The European Physical Journal C. (2017).

[48] K. Srinivasan, T. Padmanabhan, Facets of Tunneling : Particle production in external fields. arXiv :gr-qc/9807064v1.