

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Série :

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Master en physique

Spécialité : **Physique théorique**

Par

Laribi Amina

Intitulé

Equation de Dirac sur une surface courbe

Soutenu le :
Devant le jury:

27 /11 /2020

Président:
Rapporteur:
Examineur:

A. Bounames
N Ferkous
T.Boudjedaa

Prof. Univ. de Jijel
MCA. Univ. de Jijel
Prof. Univ. de Jijel

Table des matières

1	Introduction générale	5
2	Quelques notions de géométrie	7
2.1	Introduction	7
2.2	Surfaces dans \mathbb{R}^3	7
2.3	Première forme quadratique	9
2.4	Deuxième forme quadratique	10
2.5	Relations entre la première et la deuxième forme quadratique	12
2.5.1	Formules de Gauss et de Weingarten	12
2.6	Les dérivées courbures sur une surface	16
2.6.1	Formule de Meusnier	16
2.6.2	Courbure de Gauss et courbure moyenne	16
2.7	Tenseur de Riemann et courbure de Gauss	19
2.7.1	Tenseur de Riemann	19
2.7.2	Le scalaire de Ricci et la courbure de Gauss pour une surface à 2 dimensions	21
3	Mécanique quantique d'une particule non relativiste confinée une surface : méthode de confinement	25
3.1	Introduction	25
3.2	Particule liée à une surface	26
3.3	Application	33
4	Mécanique quantique d'une particule relativiste sur une surface	37
4.1	Introduction	37
4.2	Equation de Dirac dans un espace-temps courbe	38

TABLE DES MATIÈRES	2
4.3 Particule de Dirac sur une surface	41
4.4 Limite non relativiste	50
5 Conclusion générale	51

Remerciements

Louange à **Allah** pour sa bénédiction infinie.

Je veux exprimer ici mes remerciements les plus vifs à tous les membres du jury de ce mémoire.

En premier lieu, un grand merci à mon directeur Mr **N. Ferkous** Docteur à l'université de Jijel, pour leur grande patience, pour leur aide, leur soutien, leurs explications méticuleuses, leurs exemples, leurs idées, leurs conseils et pour m'avoir toujours fait tout écrire jusqu'au dernier détail. Je leur en serai toujours reconnaissante.

Je remercie chaleureusement Mr **A. Bounames** Professeur à l'université de Jijel. Je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury.

J'exprime mes sincères remerciements à Mr **T. Boudjedaa** Professeur à l'université de Jijel qui m'a fait l'honneur d'examiner et juger ce travail. Je tiens vivement à lui exprimer mes remerciements pour trouver le temps de lire ce mémoire, questions et ses remarques.

Mes plus vifs remerciements à toute **ma famille**, spécialement et surtout mon père, ma mère et frères et sœurs, pour leur soutien permanent et à tous ceux qui m'ont aidés pour accomplir cette tâche.

A.Laribi

Chapitre 1

Introduction générale

En 1981, Da Costa [1] a développé un formalisme théorique pour étudier la dynamique quantique d'une particule confinée sur une surface courbe. Le processus de confinement, d'après Da Costa, est réalisé en introduisant un potentiel de pression qui est constant à la surface mais augmente brusquement pour chaque petit déplacement dans la direction normale. La contrainte sera alors considérée comme la limite d'un potentiel attractif infiniment fort (une barrière) qui maintient la particule attachée de façon permanente à cette surface. Pour que cette limite soit indépendante du type de potentiel attractif, il faut qu'on arrive, comme on le verra au troisième chapitre à éliminer la variable transversale apparaissant dans le potentiel de confinement de l'équation de Schrödinger de la partie surfacique.

L'équation de Dirac sur une surface a été considérée en 1993 par Burgess et Jensen [2] pour des surfaces à courbure intrinsèque (la courbure de Gauss) nulle. Dans cette étude le potentiel de confinement a été introduit sous forme d'un couplage minimal. Ce sujet a été considéré aussi par Brandt et Sanchez [3] où le potentiel de pression a été introduit sous forme d'un couplage scalaire. Ces auteurs ont effectué un développement perturbatif au premier ordre par rapport au coordonnée normale à surface et ont montré que l'équation de Dirac ainsi obtenue a perdu toute information sur les propriétés extrinsèques de la surface. Cependant, si les termes du second ordre sont conservés dans le développement perturbatif, la limite non relativiste est bien obtenue. Cela est dû au fait que le potentiel géométrique dans l'équation de Schrödinger, provient de termes d'ordre deux.

Dans le présent travail, on va adopter une méthode très simple basée sur la modélisation du potentiel de confinement par un puits infini introduit comme un couplage minimal, ce qui

nous permet de découpler l'équation de Dirac et de trouver la limite non relativiste d'une façon très simple. On va considérer ici l'exemple d'une particule sur un cylindre, qui est un exemple simple, juste pour montrer la démarche de la méthode, bien que cette technique peut être appliquée à plusieurs autres systèmes physiques.

Ainsi, le reste de ce mémoire est organisé comme suit : Le deuxième chapitre sera notamment un rappel de quelques notions de géométrie, en particulier les formes de Gauss, les courbures d'une surface et le tenseur de Riemann et son relation avec la courbure de Gauss pour une surface bidimensionnelle. Au troisième chapitre, on va exposer la méthode de confinement pour une particule non relativiste du point de vue de Da Costa avec une application sur une particule liée à un cylindre. Le quatrième chapitre sera consacré à l'étude d'une particule de Dirac sur une surface courbe. Enfin, nous terminerons ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 2

Quelques notions de géométrie

2.1 Introduction

La géométrie différentielle sur une surface bidimensionnelle émergée dans un espace tridimensionnel est riche en idées et admet une vaste généralisation pour une surface multidimensionnelle [4, 5, 7, 8]. Nous considérons dans ce chapitre quelques notions fondamentales nécessaires pour traiter les chapitres suivants. Nous nous concentrons essentiellement sur la géométrie de Gauss. Nous commençons par la première forme quadratique qui introduit une métrique. Puis, la deuxième forme quadratique qu'on utilise pour calculer la courbure de lignes se trouvant sur la surface. Nous introduisons les formules de Gauss et de Weingarten qui décrivent la relation entre la première et la deuxième forme. Nous exposons également le tenseur de Riemann et ses propriétés, nous déduisons le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure. Nous donnons la relation entre le scalaire de courbure et la courbure de Gauss. Pour éclaircir ces notions, nous considérons, à travers ce chapitre, l'exemple d'une surface sphérique bidimensionnelle plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 .

2.2 Surfaces dans \mathbb{R}^3

Il existe différentes façons de représenter une surface 2-dimensionnelle (S) dans l'espace 3-dimensionnel \mathbb{R}^3 . L'une est la représentation familière dans laquelle la surface est définie via une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$, où x , y et z exprimant les coordonnées cartésiennes et f est une fonction scalaire. On peut également représenter une surface avec les coordonnées cartésiennes x , y et z comme étant des fonctions réelles de deux paramètres réels indépendants

q^1 et q^2 parcourant un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$;

$$\begin{cases} x = x(q^1, q^2) \\ y = y(q^1, q^2) \\ z = z(q^1, q^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici les lettres supérieures sont des indices, pas des exposants.

Il est possible de remplacer les équations (2.1) par une équation vectorielle (vecteur de position) de façon que :

$$\mathbf{r} = (x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)) = \mathbf{r}(q^1, q^2) \quad (2.2)$$

Formellement, il est possible qu'à deux points paramétriques différents (q^1, q^2) et $(q^{1'}, q^{2'})$ il corresponde un même point de la surface (S). Mais, pour éviter les auto-intersections, on ne considère pas de telles situations. Pour garantir la bi-univocité, on doit exiger de plus que le *rang* de la matrice de Jacobi suivante

$$M = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q^1, q^2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q^1} & \frac{\partial y}{\partial q^1} & \frac{\partial z}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x}{\partial q^2} & \frac{\partial y}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial q^2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Soit égale à 2. Il en résulte que les deux vecteurs

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \text{ et } \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \quad (2.4)$$

en un point P de la surface (S) sont *linéairement indépendants*. Ces deux vecteurs sont disposés dans le *plan tangent* de la surface (S) au point correspondant P . Notons ici que ces vecteurs de base \mathbf{r}_i , $i = 1, 2$ ne sont pas nécessairement des vecteurs unitaires. On peut écrire donc

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}_i dq^i, \quad (2.5)$$

L'indice répété indique une sommation.

Exemple :

Une surface sphérique de rayon r_0 émergée dans un espace 3-dimensionnel est déterminée par le rayon vecteur :

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (r_0 \sin \theta \cos \varphi, r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \cos \theta) \quad , \quad r_0 = \text{cte} \quad (2.6)$$

soit

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r_0 \cos \theta \cos \varphi, r_0 \cos \theta \sin \varphi, -r_0 \sin \theta) \quad (2.7)$$

et aussi

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0) \quad (2.8)$$

Ainsi, $|\mathbf{r}_\varphi| = r_0 \sin \theta \neq 1$.

2.3 Première forme quadratique

Soit une surface (S) bidimensionnelle paramétrée par q^1 et q^2 et soit le vecteur position $\mathbf{r}(q^1, q^2)$ d'un point P sur cette surface. La distance ds entre P et certain point P' , qui est au voisinage de P , s'écrit comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = (d\mathbf{r}, d\mathbf{r}) \\ &= g_{ij} dq^i dq^j, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $g_{ij} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. La forme quadratique dans le second membre de (2.9) est appelée *première forme quadratique* de la surface (S) notée aussi $G(q, dq)$. Cette forme s'écrit explicitement comme suit :

$$\begin{aligned} G(q, dq) &= g_{ij} dq^i dq^j \\ &= E (dq^1)^2 + 2F dq^1 dq^2 + G (dq^2)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

où E , F et G sont les coefficients de la première forme donnés par les expressions

$$E = g_{11} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1), \quad F = g_{12} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad G = g_{22} = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \quad (2.11)$$

g_{ij} est la *métrique* de la première forme qui est un tenseur d'ordre 2, symétrique. Si de plus cette métrique est diagonale, la base $\{\mathbf{r}_i, i = 1, 2\}$ est orthogonale (i.e; $F = 0$). L'inverse du tenseur g_{ij} est le tenseur g^{ik} de façon qu'on a :

$$g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k \quad (2.12)$$

où δ_j^k est le symbole de Kronecker.

Notons le tenseur g_{ij} par la matrice \mathbf{g} (ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique \mathbf{g} est noté g tels que :

$$g = \det(\mathbf{g}) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = EG - F^2 \quad (2.13)$$

Les composantes de l'inverse de \mathbf{g} sont données par l'expression

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

L'équation (2.9) détermine complètement la *géométrie intrinsèque* de la surface (S).

Exemple : si on considère l'exemple de la surface de la sphère précédente, les coefficients de la première forme quadratique de cette sphère, d'après Gauss sont désignés comme suit :

$$g_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\theta) \quad , \quad g_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi) \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi) \quad (2.15)$$

Après quoi la première forme quadratique, s'exprime :

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{\theta\varphi} d\theta d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \quad (2.16)$$

Ainsi, on obtient

$$g_{\theta\theta} = r_0^2 \quad , \quad g_{\theta\varphi} = 0 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r_0^2 \sin^2 \theta \quad (2.17)$$

d'où la métrique s'écrit sous la forme

$$ds^2 = r_0^2 d\theta^2 + r_0^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.18)$$

le tenseur métrique g_{ij} est désigné par la matrice diagonale \mathbf{g} comme

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

2.4 Deuxième forme quadratique

Les combinaisons linéaires des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 peuvent être utilisées pour exprimer tous les vecteurs tangents à (S) en P . Ils forment donc naturellement une base pour ces vecteurs. Cela signifie que le plan tangent à (S) en P est engendré par ces vecteurs. Lorsqu'un vecteur \mathbf{n} perpendiculaire à (S) en P est ajouté à la base naturelle considérée, on obtient une autre base pour \mathbb{R}^3 . De cette façon, au moins les points dans le voisinage immédiat de la surface (S) peuvent être exprimés en utilisant cette base.

On peut introduire le vecteur unitaire normal \mathbf{n} à la surface (S) au point P qui peut être déterminé comme le produit vectoriel des vecteurs de base du plan tangent ;

$$\mathbf{n}(q^1, q^2) = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \quad (2.20)$$

ce vecteur s'écrit aussi pour une surface définie par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$ comme

$$\mathbf{n}(q^1, q^2) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (2.21)$$

Soit (L) une courbe définie sur une surface (S) passant par un certain point P . On sait que, pour une courbe paramétrée avec s , qui est la longueur de cette courbe, on a la formule

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} \quad (2.22)$$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent à la courbe (L) au point P . Si $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \neq 0$, alors

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{\nu} \quad (2.23)$$

avec $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur unitaire orthogonal à \mathbf{t} et se trouvant dans le plan osculateur (plan contenant les vecteurs $\boldsymbol{\nu}$ et \mathbf{t}) et κ la courbure de la ligne (L) . Ainsi, d'après (2.5) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^i}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{d^2q^i}{ds^2}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

utilisons les abréviations

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \mathbf{r}_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{r}_i \quad (2.25)$$

et multiplions scalairement par le vecteur unitaire \mathbf{n} , nous obtenons :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^i}{ds} \quad (2.26)$$

puisque $(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}) = 0$. On pose $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij}$, la forme

$$B(q, dq) = b_{ij} dq^i dq^j \quad (2.27)$$

s'appelle *deuxième forme quadratique* de la surface (S) . Cette forme s'écrit explicitement comme suit :

$$B(q, dq) = L (dq^1)^2 + 2M dq^1 dq^2 + N (dq^2)^2 \quad (2.28)$$

où $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$ et $b_{22} = N$. Ainsi, d'après (2.9) et (2.27), le produit scalaire (2.26) s'écrit :

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = \frac{B(q, dq)}{G(q, dq)}. \quad (2.29)$$

Le tenseur b_{ij} est un tenseur d'ordre 2, symétrique, on le note par la matrice \mathbf{b} (de même ici le caractère gras du tenseur indique sa représentation matricielle). Le déterminant de la métrique \mathbf{b} est noté b tels que :

$$b = \det(\mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = LN - M^2 . \quad (2.30)$$

L'équation (2.27) détermine la *géométrie extrinsèque* de la surface (S).

Exemple : on considère toujours l'exemple de la surface de la sphère, les coefficients de la deuxième forme sont

$$b_{\theta\theta} = (\mathbf{r}_{\theta\theta}, \mathbf{n}) \quad , \quad b_{\theta\varphi} = (\mathbf{r}_{\theta\varphi}, \mathbf{n}) \quad \text{et} \quad b_{\varphi\varphi} = (\mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{n}) , \quad (2.31)$$

où le vecteur normal \mathbf{n} est :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\varphi}}{\|\mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\varphi}\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) , \quad (2.32)$$

Ainsi, on arrive à :

$$L = b_{\theta\theta} = -r_0 \quad , \quad M = b_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{et} \quad N = b_{\varphi\varphi} = -r_0 \sin^2 \theta , \quad (2.33)$$

la deuxième forme quadratique, s'exprime

$$B = -r_0 d\theta^2 - r_0 \sin^2 \theta d\varphi^2 , \quad (2.34)$$

Ainsi, le *tenseur de courbure extrinsèque* b_{ij} est désigné par la matrice diagonale \mathbf{b} associée à B comme

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r_0 & 0 \\ 0 & -r_0 \sin^2 \theta \end{pmatrix} , \quad (2.35)$$

2.5 Relations entre la première et la deuxième forme quadratique

2.5.1 Formules de Gauss et de Weingarten

Les formules ainsi dénommées décrivent la variation des vecteurs \mathbf{r}_i $i = 1, 2$ et \mathbf{n} lorsque le point P se déplace sur la surface (S), tout comme les formules de Frénet. Puisque ces vecteurs sont linéairement indépendants, on peut exprimer alors les dérivées de ces vecteurs comme combinaisons de ces mêmes vecteurs avec des coefficients qui sont fonctions des coefficients

de la première et la deuxième forme quadratique. Autrement dit, on peut écrire les égalités suivantes

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + \beta_{ij} \mathbf{n}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (4 \text{ équations}) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{n}_i = \alpha_i^k \mathbf{r}_k + \gamma_i \mathbf{n}, \quad i, k = 1, 2 \quad (2 \text{ équations}) \quad (2.37)$$

où les coefficients Γ_{ij}^k , β_{ij} , α_i^k et γ_i sont à déterminer. En effet, En multipliant scalairement l'équation (2.37) par \mathbf{n} , on obtient directement

$$\gamma_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.38)$$

et en multipliant par \mathbf{n} les équations (2.36), on obtient

$$\beta_{ij} = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij} \quad (2.39)$$

Puis, en dérivant le produit scalaire nul $(\mathbf{n}, \mathbf{r}_i)$ par rapport au q^j , on obtient

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ij}) + (\mathbf{n}_j, \mathbf{r}_i) = 0$$

mais $(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{n}) = b_{ij}$, il vient

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_j) = -b_{ij}$$

Maintenant multiplions l'équation (2.37) par \mathbf{r}_j , on obtient

$$(\mathbf{r}_j, \mathbf{n}_i) = \alpha_i^k (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) \quad (2.40)$$

on aura

$$\alpha_i^k g_{kj} = -b_{ji}, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.41)$$

multiplions par $g^{j\ell}$ on a

$$\alpha_i^k g_{kj} g^{j\ell} = -b_{ji} g^{j\ell},$$

comme $g_{kj} g^{j\ell} = \delta_k^\ell$ il vient

$$\alpha_i^\ell = -b_{ji} g^{j\ell},$$

c'est-à-dire

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell, \quad (2.42)$$

donc (2.37) devient

$$\mathbf{n}_i = -b_i^k \mathbf{r}_k \quad (2.43)$$

Les équations (2.41) s'écrivent sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

ou bien

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{g} = - \mathbf{b} \quad (2.45)$$

c'est-dire

$$\boldsymbol{\alpha} = - \mathbf{b} \mathbf{g}^{-1} \quad (2.46)$$

ou explicitement

$$\alpha_1^1 = \frac{1}{g} (b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}) \quad , \quad \alpha_1^2 = \frac{1}{g} (b_{11}g_{21} - b_{12}g_{11}) \quad (2.47)$$

$$\alpha_2^1 = \frac{1}{g} (b_{22}g_{12} - b_{21}g_{22}) \quad , \quad \alpha_2^2 = \frac{1}{g} (b_{21}g_{21} - b_{22}g_{11}) \quad , \quad (2.48)$$

Ces formules sont appelées *formules de Weingarten*.

Déterminons maintenant les coefficients Γ_{ij}^k , multiplions (2.36) par \mathbf{r}_ℓ on obtient

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_\ell) \quad (2.49)$$

comme $\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_\ell = g_{k\ell}$ on aura

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \quad (2.50)$$

Les quantités $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij\ell}$ sont appelées *symboles de Christoffel de première espèce*. On peut écrire

$$\Gamma_{ijm} g^{mn} = \Gamma_{ij}^k g_{km} g^{mn} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^n = \Gamma_{ij}^n \quad (2.51)$$

les coefficients Γ_{ij}^k connus aussi comme *symboles de Christoffel de deuxième espèce*, sont alors donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell) g^{\ell k}$$

ou bien

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}^k \quad (2.52)$$

avec $\mathbf{r}_\ell g^{\ell k} = \mathbf{r}^k$. Soit $g_{ij} = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)$ dérivons par rapport à q^k

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = (\mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jk})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \quad (2.53)$$

de même

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} \quad (2.54)$$

et

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} \quad (2.55)$$

comme $\Gamma_{ijl} = \Gamma_{jil}$ (puisque $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$) on détermine les Γ_{ijk} en considérons (2.55)+(2.54)-(2.53)

comme

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

En fin, les coefficients (les connexions) $\Gamma_{ij}^k = g^{\ell k} \Gamma_{ij\ell}$ sont

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{\ell k}}{2} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^\ell} \right) \quad (2.56)$$

Ainsi, les coefficients Γ_{ij}^k s'expriment seulement par les coefficients de la première forme quadratique et leurs dérivées. C'est un fait bien important qui montre que les coefficients Γ_{ij}^k , contrairement à β_{ij} et α_i^k appartiennent à la géométrie intrinsèque de la surface. Les équations (2.36) avec les coefficients Γ_{ij}^k et β_{ij} donnés par (2.56) et (2.39) sont appelées *formules de Gauss*.

On a donné ici deux formules pour calculer les coefficients Γ_{ij}^k à savoir (2.56) et (2.52).

Exemple : calculons, par exemple, le coefficient $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi$ pour la surface de la sphère précédente en utilisant la formule (2.52)

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{r}^\varphi \quad (2.57)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= (r_0 \cos \theta \cos \varphi, r_0 \cos \theta \sin \varphi, -r_0 \sin \theta) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}_\theta}{\partial \varphi} &= (-r_0 \cos \theta \sin \varphi, r_0 \cos \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi i} \mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r}^\varphi = g^{\varphi\varphi} \mathbf{r}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{g_{\varphi\varphi}} \quad (\text{puisque la métrique est diagonale})$$

comme

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

il vient

$$\mathbf{r}^\varphi = \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} (-r_0 \sin \theta \sin \varphi, r_0 \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} (r_0^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi + r_0^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta\end{aligned}\quad (2.58)$$

On peut également utiliser la formule (2.56).

2.6 Les déférentes courbures sur une surface

2.6.1 Formule de Meusnier

Soit (L) une courbe définie sur une surface (S) passant par un certain point P et paramétrée en s . On peut développer le vecteur $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ comme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \mathbf{s} \quad (2.59)$$

où κ_n et κ_g sont les courbures normales et géodésiques respectivement et \mathbf{s} est un vecteur unitaire orthogonal à \mathbf{n} . Ainsi, on obtient

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \mathbf{n} \right) = (\kappa_n \mathbf{n} + \kappa_g \mathbf{s}, \mathbf{n}) = \kappa_n \quad (2.60)$$

et d'après (2.29), on aura *la formule de Meusnier*

$$\kappa_n = \frac{B(q, dq)}{G(q, dq)} \quad (2.61)$$

2.6.2 Courbure de Gauss et courbure moyenne

Réécrivons maintenant la courbure normale (2.61) comme fonction de la variable $\lambda = dq_2/dq_1$ de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (2.62)$$

On veut rechercher les extremums de κ_n , pour ce but on considère la dérivée

$$\frac{d\kappa_n}{d\lambda} = 0 \quad (2.63)$$

d'où on déduit

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(N\lambda + M) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(G\lambda + F) = 0 \quad (2.64)$$

cela veut dire que

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \quad (2.65)$$

notons qu'on peut écrire les égalités

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + (F + G\lambda)\lambda \\ L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= (L + M\lambda) + (M + N\lambda)\lambda \end{aligned}$$

A l'aide de ces deux dernières relations l'équation (2.64) s'écrit ainsi comme

$$[(E + F\lambda) + (F + G\lambda)\lambda](N\lambda + M) - [(L + M\lambda) + (M + N\lambda)\lambda](G\lambda + F) = 0 \quad (2.66)$$

qui peut se simplifier comme suit

$$(E + F\lambda)(N\lambda + M) = (L + M\lambda)(G\lambda + F) \quad (2.67)$$

Donc la courbure normale donnée par (2.65) s'écrit aussi d'après (2.67) de la façon suivante

$$\kappa_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (2.68)$$

Ainsi, on peut former le système suivant

$$\begin{aligned} (F\kappa_n - M)\lambda + (E\kappa_n - L) &= 0 \\ (G\kappa_n - N)\lambda + (F\kappa_n - M) &= 0 \end{aligned}$$

mais $\lambda = dq_2/dq_1$ c'est-à-dire on a

$$\begin{aligned} (E\kappa_n - L) dq_1 + (F\kappa_n - M) dq_2 &= 0 \\ (F\kappa_n - M) dq_1 + (G\kappa_n - N) dq_2 &= 0 \end{aligned}$$

pour avoir une solution non nulle, il faut que le déterminant soit nul, alors

$$\begin{vmatrix} L - E\kappa_n & M - F\kappa_n \\ M - F\kappa_n & N - G\kappa_n \end{vmatrix} = 0 \quad (2.69)$$

d'où on tire l'équation de deuxième ordre suivante

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} = 0 \quad (2.70)$$

réécrivons la dernière relation sous la forme

$$\kappa_n^2 - \frac{(EN + LG - 2MF)}{(EG - F^2)}\kappa_n + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \quad (2.71)$$

notons que $EG - F^2 = g$ et $b = LN - M^2$. On peut écrire la dernière équation sous forme simplifiée comme suit

$$\kappa_n^2 - 2H\kappa_n + \kappa = 0 \quad (2.72)$$

où

$$\kappa = \frac{b}{g} \quad \text{et} \quad H = \frac{EN + LG - 2MF}{2g} = \frac{g_{11}b_{22} + b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12}}{2g} \quad (2.73)$$

κ est la courbure de Gauss (totale) et H la courbure moyenne. Ces deux quantités peuvent s'écrire aussi en tenant compte des relations (2.47) et (2.48) de la façon suivante

$$H = -\frac{1}{2g}(b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}) - \frac{1}{2g}(b_{21}g_{21} - b_{22}g_{11}) = -\frac{1}{2}(\alpha_1^1 + \alpha_2^2)$$

c'est-à-dire

$$H = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.74)$$

et aussi on a

$$\kappa = \frac{\det(\mathbf{b})}{\det(\mathbf{g})} = \det(\mathbf{b}) \det(\mathbf{g}^{-1}) = \det(\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1})$$

et d'après (2.46) on obtient

$$\kappa = \det(-\boldsymbol{\alpha}) = (-1)^2 \det(\boldsymbol{\alpha}) = \det(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.75)$$

Revenons maintenant aux extremums de κ_n qui peuvent être donnés en résolvant l'équation algébrique (2.72), on aboutit à

$$(\kappa_n)_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.76)$$

$$(\kappa_n)_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.77)$$

Notons ainsi que la courbure de Gauss et la courbure moyenne peuvent être exprimées en fonction de $(\kappa_n)_{\max}$ et $(\kappa_n)_{\min}$

$$\kappa = (\kappa_n)_{\max} (\kappa_n)_{\min} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2}[(\kappa_n)_{\max} + (\kappa_n)_{\min}] \quad (2.78)$$

Ainsi, la courbure moyenne H est la moyenne des courbures minimale et maximale, c'est un nombre réel, dont le signe dépend du choix fait pour orienter la surface (S).

Exemple : On veut calculer la courbure de Gauss κ et la courbure moyenne H pour la surface de la sphère précédente. Pour cela, calculons d'abord la matrice α donnée par (2.46) comme

$$\alpha = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \quad (2.79)$$

on a déjà calculer les matrices \mathbf{g} et \mathbf{b} pour la sphère, ainsi on aura

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

donc suite aux formules (2.75) et (2.74) on obtient

$$\kappa = \det(\alpha) = \frac{1}{r_0^2} \quad (2.81)$$

et

$$H = -\frac{1}{2}Tr(\alpha) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r_0}\right) = -\frac{1}{r_0} \quad (2.82)$$

2.7 Tenseur de Riemann et courbure de Gauss

2.7.1 Tenseur de Riemann

Le *tenseur de courbure de Riemann* ou *tenseur de Riemann* est le moyen le plus couramment utilisé pour exprimer la courbure des variétés riemanniennes. Il nous montre dans quelle mesure le tenseur métrique n'est pas localement isométrique à celui de l'espace euclidien. C'est une quantité *intrinsèque*, il peut être calculé sans aucune référence à la façon dont la surface est émergée dans l'espace ambiant. Le tenseur de courbure peut également être défini pour toute variété pseudo-riemannienne. Ce tenseur est calculé uniquement en termes du tenseur métrique et ses dérivées comme suit

$$R_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \quad (2.83)$$

ses indices a, b, c et d prennent les valeurs 1 à n ou (0 à $n-1$) pour un espace n -dimensionnel. Le nombre total des composantes est n^4 . Il n'est pas difficile de montrer que le tenseur de Riemann

vérifie les propriétés de symétrie suivantes :

$$R_{abcd} = g_{ae} R_{bcd}^e \quad (2.84)$$

$$R_{aaaa} = 0, \quad \forall a = 1, n \quad (2.85)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (2.86)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (2.87)$$

$$R_{abcd} = R_{dcab} \quad (2.88)$$

et la permutation cyclique (identité de Bianchi) :

$$R_{bcd}^a + R_{abc}^a + R_{cdb}^a = 0 \quad (2.89)$$

En raison de ces propriétés de symétrie, les composantes du tenseur de Riemann ne sont pas toutes indépendantes. En effet, on peut montrer que le nombre des composantes indépendantes est $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$. Le tableau suivant donne le nombre de ces composantes pour quelques dimensions :

Dimension de l'espace (n)	1	2	3	4
Nombre de composantes (n^4)	1	16	81	256
Nombre de composantes indépendantes ($\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$)	0	1	6	20

Si toutes les composantes du tenseur de Riemann sont nulles alors l'espace est plat (pas de courbure dans n'importe quelle direction dans cet espace). Le tenseur de Riemann R_{bcd}^a peut être contracté (faire une sommation) pour produire le tenseur de Ricci. C'est les propriétés de symétrie qui vont nous aider à connaître quels sont les deux indices qui peuvent être contractés. En effet, si nous contractons le premier indice (a) avec le deuxième (b) on va obtenir un tenseur nul ;

$$R_{acd}^a = g^{ai} R_{iacd} = -g^{ia} R_{aicd} = -R_{icd}^i = -R_{acd}^a \Rightarrow R_{acd}^a = 0 \quad (2.90)$$

Il reste deux contractions ; le premier indice avec le troisième ou le premier avec le quatrième. Cependant, remarquons que

$$R_{bad}^a = -R_{bda}^a \quad (2.91)$$

c'est-à-dire qu'il ya une seule contraction intéressante du tenseur de Riemann. Cette contraction produit le tenseur de Ricci R_{ab} et on écrit

$$R_{ab} = R_{aib}^i = -R_{abi}^i \quad (2.92)$$

R_{ab} est un tenseur symétrique. En effet, considérons l'identité de Bianchi

$$R_{bcd}^a + R_{dbc}^a + R_{cdb}^a = 0 \quad (2.93)$$

et on pose $d = a$, il vient

$$R_{bca}^a + R_{abc}^a + R_{cab}^a = 0 \quad (2.94)$$

mais comme $R_{abc}^a = 0$ et $R_{bca}^a = -R_{bac}^a$ on obtient

$$-R_{bac}^a + R_{cab}^a = 0 \quad (2.95)$$

c'est-à-dire

$$R_{cb} = R_{bc} \quad (2.96)$$

A ce stade, on peut définir la *courbure scalaire* (ou le *scalaire de Ricci*) \mathcal{R} comme la trace du tenseur de Ricci

$$\mathcal{R} = g^{ab} R_{ab} = Tr(R_{ab}) \quad (2.97)$$

Pour une surface bidimensionnelle (espace à 2 dimensions), le tenseur de Riemann n'a qu'une seule composante indépendante, ce qui signifie que le scalaire de Ricci \mathcal{R} détermine complètement le tenseur de Riemann. De plus, ce scalaire est directement proportionnel à la courbure de Gauss κ de cette surface. On va montrer cette proportionnalité dans la suite.

Dans les dimensions supérieures, la courbure de Riemann généralisée la courbure de Gauss, mais on a besoin dans ce cas de toutes les composantes du tenseur de Riemann.

2.7.2 Le scalaire de Ricci et la courbure de Gauss pour une surface à 2 dimensions

On considère une surface (S) bidimensionnelle paramétrée par q^1 et q^2 et soit à nouveau le vecteur position $\mathbf{r}(q^1, q^2)$ d'un point P sur cette surface. Les équations de Gauss dans ce cas sont

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{n} \quad , \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.98)$$

on doit alors avoir l'égalité

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial q^\ell} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i\ell}}{\partial q^j} \quad , \quad i, j, \ell = 1, 2 \quad (2.99)$$

cela est dû à la commutativité des dérivées partielles. La dernière relation s'écrit aussi comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \mathbf{r}_{i\ell j} \quad (2.100)$$

donc à partir de (2.98) on a

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^\ell} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \mathbf{n} + b_{ij} \mathbf{n}_\ell$$

tenons compte des relations (2.98) et (2.43) on aura

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^\ell} \mathbf{r}_k + \Gamma_{ij}^k (\Gamma_{k\ell}^s \mathbf{r}_s + b_{k\ell} \mathbf{n}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \mathbf{n} - b_{ij} b_\ell^k \mathbf{r}_k$$

cette dernière égalité s'écrit en changeant quelques indices de sommation comme

$$\mathbf{r}_{ij\ell} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - b_{ij} b_\ell^s \right) \mathbf{r}_s + \left(\Gamma_{ij}^k b_{k\ell} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} \right) \mathbf{n} \quad (2.101)$$

inter changeant maintenant j et ℓ on obtient

$$\mathbf{r}_{i\ell j} = \left(\frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s - b_{i\ell} b_j^s \right) \mathbf{r}_s + \left(\Gamma_{i\ell}^k b_{kj} + \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^j} \right) \mathbf{n} \quad (2.102)$$

Les vecteurs \mathbf{r}_s et \mathbf{n} sont linéairement indépendants, la relation $\mathbf{r}_{ij\ell} - \mathbf{r}_{i\ell j} = 0$ donne pour le coefficient de \mathbf{n}

$$\Gamma_{ij}^k b_{k\ell} - \Gamma_{i\ell}^k b_{kj} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial q^\ell} - \frac{\partial b_{i\ell}}{\partial q^j} = 0 \quad (2.103)$$

Cette dernière équation est connue comme équation de *Mainardi-Codazzi*. Pour le coefficient de \mathbf{r}_s on obtient l'équation intéressante suivante

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s - b_{ij} b_\ell^s + b_{i\ell} b_j^s = 0 \quad (2.104)$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$R_{i\ell j}^s = b_{ij} b_\ell^s - b_{i\ell} b_j^s \quad (2.105)$$

où $R_{i\ell j}^s$ est le tenseur de Riemann, discuté précédemment, il est donné par

$$R_{i\ell j}^s = \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial q^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^s}{\partial q^j} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\ell}^s - \Gamma_{i\ell}^k \Gamma_{kj}^s \quad (2.106)$$

le tenseur de Ricci dans ce cas est

$$R_{ij} = R_{isj}^s = b_{ij} b_s^s - b_{is} b_j^s \quad (2.107)$$

par conséquent, la courbure scalaire est

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} b_{ij} b_s^s - g^{ij} b_{is} b_j^s \quad (2.108)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{R} = b_j^j b_s^s - b_s^j b_j^s \quad (2.109)$$

on a vu dans (2.42) que

$$\alpha_i^\ell = -b_i^\ell,$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \alpha_i^i \alpha_s^s - \alpha_s^j \alpha_j^s = \alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^1 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &\quad - \alpha_1^1 \alpha_1^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 - \alpha_2^1 \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \alpha_2^2 \\ &= 2 (\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) = 2 \det(\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Donc d'après (2.75), on obtient le résultat général important pour une surface bidimensionnelle

$$\mathcal{R} = 2\kappa \quad (2.111)$$

Comme on l'a déjà constaté, le scalaire de courbure \mathcal{R} est proportionnel à la courbure de Gauss κ .

La relation (2.111) est d'une importance fondamentale. Pour une surface bidimensionnelle, le scalaire de Ricci \mathcal{R} détermine complètement le tenseur de Riemann qui dépend du tenseur métrique g_{ij} et ses dérivées; c'est-à-dire de la première forme. Il s'ensuit, à travers l'égalité (2.111) que la courbure de Gauss κ est indépendante de la deuxième forme. C'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la manière dont la surface est plongée dans l'espace tridimensionnel. Ce résultat constitue le théorème remarquable de Gauss (*Theorema egregium*).

Exemple :

On considère toujours l'exemple précédent de la surface de la sphère définie par le vecteur position $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$. On veut déterminer le scalaire de courbure \mathcal{R} en contractant le tenseur de Ricci correspondant, puis on vérifie la relation (2.111). Considérons le tenseur de Ricci

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R_{isj}^s \\ &= R_{i\theta j}^\theta + R_{i\varphi j}^\varphi \end{aligned} \quad (2.112)$$

soit

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{\theta\theta} & R_{\theta\varphi} \\ R_{\varphi\theta} & R_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{ij} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \quad (2.114)$$

donc on n'a pas besoin de calculer $R_{\theta\varphi}$ puisque notre métrique g_{ij} est diagonale ;

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} r_0^2 & 0 \\ 0 & r_0^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.115)$$

Ainsi,

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta\theta\theta}^\theta + R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$$

et

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi}^\theta + R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi = R_{\varphi\theta\varphi}^\theta$$

puisque $R_{\theta\theta\theta}^\theta = R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi = 0$ (voir propriété (2.85)). Donc on aura

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r_0^2} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi + \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta$$

mais

$$\begin{aligned} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= g_{\varphi i} R_{\theta\varphi\theta}^i = g_{\varphi\varphi} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi \\ R_{\theta\varphi\theta}^\varphi &= g_{\theta i} R_{\varphi\theta\varphi}^i = g_{\theta\theta} R_{\varphi\theta\varphi}^\theta \end{aligned}$$

comme $R_{\varphi\theta\varphi}^\theta = R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$ (suite au (2.88)) il vient

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2} R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$$

il suffit donc de calculer l'élément $R_{\theta\varphi\theta}^\varphi$. En effet

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta\theta}^e \Gamma_{e\varphi}^\varphi - \Gamma_{\theta\varphi}^e \Gamma_{e\theta}^\varphi$$

on obtient après un calcul

$$R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = 1$$

Donc le scalaire de courbure est

$$\mathcal{R} = \frac{2}{r_0^2} \quad (2.116)$$

on a calculé précédemment la courbure de Gauss pour cette surface et on a obtenu $\kappa = 1/r_0^2$.

Donc on a bien vérifié la relation

$$\mathcal{R} = 2\kappa. \quad (2.117)$$

Chapitre 3

Mécanique quantique d'une particule non relativiste confinée une surface : méthode de confinement

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons décrire la dynamique d'une particule rigidement liée à une surface par l'action d'un potentiel externe qu'on l'appelle potentiel de confinement en se basant sur la référence [1]. Ce potentiel devrait être nul (ou constant) le long de la surface, mais pour chaque petit déplacement de la particule vers la direction normale, ce potentiel augmente fortement et tend vers l'infini. En raison du confinement latéral, les énergies d'excitation quantique dans la direction normale deviennent beaucoup plus élevées que dans la direction tangentielle. Désormais, on peut ignorer le mouvement des particules dans la direction normale. Dans ce cas, on constate qu'en raison de la courbure de la surface, un potentiel scalaire de nature purement quantique apparaît dans l'équation de Schrödinger bidimensionnelle. Ce potentiel s'écrit en fonction de la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Ainsi, nous allons expliquer en détail cette méthode de confinement pour une particule non relativiste et nous donnons une application sur une particule confinée entre deux cylindres coaxiaux.

3.2 Particule liée à une surface

On considère une particule de masse m liée à une surface (S) bidimensionnelle d'équations paramétriques $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$. Le voisinage très proche de cette surface est paramétrisé par le vecteur :

$$\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{r}(q^1, q^2) + q^3 \mathbf{n}(q^1, q^2) \quad (3.1)$$

où \mathbf{n} est un vecteur normal à la surface (S) en un point donné. La coordonnée q^3 indique la distance entre ce point de la surface et un point Q de coordonnées (q^1, q^2, q^3) . Comme évoqué dans l'introduction, on va considérer maintenant le potentiel de confinement qui est modélisé en général par la forme suivante :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_\lambda(q^3) = \begin{cases} 0 & \text{si } q^3 = 0 \\ \infty & \text{si } q^3 \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où λ est un paramètre introduit pour assurer la forme indiquée ci-dessus. Par exemple, on peut penser à un potentiel de confinement harmonique $V_\lambda(q^3) = \frac{1}{2}m\lambda^2(q^3)^2$ où $\lambda \rightarrow \infty$.

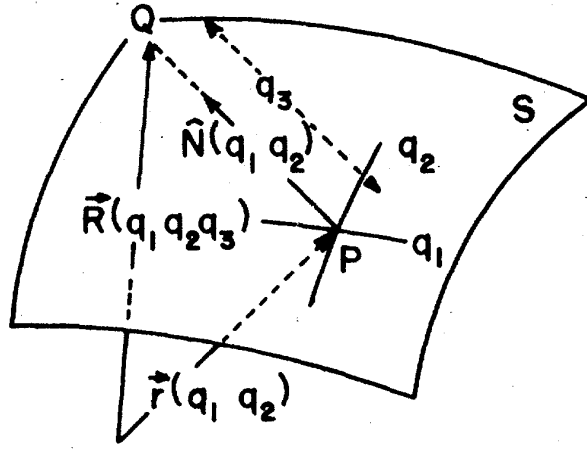


FIG 3-2 : Le voisinage très proche d'une particule liée sur une surface

On commence par rappeler l'équation (2.37) :

$$\mathbf{n}_i = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i} = \alpha_i^k \mathbf{r}_k, \quad i, k = 1, 2 \quad (3.3)$$

où les coefficients α_i^k sont donnés explicitement dans le chapitre précédent par les formules de Weignarten (2.47) et (2.48). Dérivons l'équation (3.1) par rapport à q^i

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} + q^3 \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

tenir compte (3.3), il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} = (\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k, \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} = \mathbf{n} \quad (3.6)$$

Dans un voisinage tri-dimensionnelle de (S), la composante covariante du tenseur métrique est :

$$G_{ij} = G_{ji} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

Montrons maintenant pour $i, j = 1, 2$ on a :

$$G_{ij} = g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj} (q^3)^2 \quad (3.8)$$

En effet,

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^j} = (\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k \cdot (\boldsymbol{\delta}_j^s + q^3 \alpha_j^s) \mathbf{r}_s \\ &= (\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) (\boldsymbol{\delta}_j^s + q^3 \alpha_j^s) \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s \\ &= \boldsymbol{\delta}_i^k \boldsymbol{\delta}_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s + [\boldsymbol{\delta}_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s + \alpha_i^k \boldsymbol{\delta}_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s (q^3)^2 \\ &= \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j + [\alpha_j^s \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_s + \alpha_i^k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_j] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s (q^3)^2 \\ &= g_{ij} + [\alpha_j^s g_{is} + \alpha_i^k g_{kj}] q^3 + \alpha_i^k \alpha_j^s g_{ks} (q^3)^2 \end{aligned}$$

on a d'après (2.42) :

$$\begin{aligned} \alpha_j^s g_{is} &= -g_{is} b_j^s = -b_{ij} \\ \alpha_i^k g_{kj} &= -g_{kj} b_i^k = -b_{ji} = -b_{ij} \\ \alpha_i^k \alpha_j^s g_{ks} &= b_i^k b_j^s g_{ks} = g^{ks} b_{si} b_{kj} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_{ij} = g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj} (q^3)^2 \quad (3.9)$$

et de plus pour $i, j = 3$ on a

$$G_{i3} = G_{3i} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} \right) = ((\boldsymbol{\delta}_i^k + q^3 \alpha_i^k) \mathbf{r}_k, \mathbf{n}) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.10)$$

$$G_{33} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} \right) = 1 \quad (3.11)$$

la matrice \mathbf{G} s'écrit donc

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

la première forme quadratique est

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{ij} dq^i dq^j \\ &= \left[g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks} b_{si} b_{kj} (q^3)^2 \right] dq^i dq^j + (dq^3)^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donc on a :

$$\det(\mathbf{G}) = \det(G_{ij}) \quad \text{avec } i, j = 1, 2 \quad (3.14)$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \quad (3.15)$$

$$\det(\mathbf{G}) = \det\left(\mathbf{g} - 2\mathbf{b}q^3 + \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}(q^3)^2\right) \quad (3.16)$$

rappelons aussi d'après (2.46) qu'on a

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1} \quad (3.17)$$

on peut donc simplifier de plus la dernière relation en écrivant

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= \det\left[\left(\mathbf{g}\mathbf{g}^{-1} - 2\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}q^3 + \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}(q^3)^2\right)\mathbf{g}\right] \\ &= \det\left[\left(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha}q^3 + \boldsymbol{\alpha}^2(q^3)^2\right)\mathbf{g}\right] \\ &= \det\left(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\alpha}q^3 + \boldsymbol{\alpha}^2(q^3)^2\right) \det(\mathbf{g}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\det(\mathbf{G}) = g \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q^3)^2 \quad (3.18)$$

si on note $\det(\mathbf{G}) = G$ on a donc

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q^3)$$

reste à calculer l'expression

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha}q^3) &= (1 + \alpha_1^1 q^3)(1 + \alpha_2^2 q^3) - \alpha_1^2 \alpha_2^1 (q^3)^2 \\ &= 1 + (\alpha_1^1 + \alpha_2^2) q^3 + (\alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1) (q^3)^2 \\ &= 1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

c'est-à-dire on a finalement la relation

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} \left[1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2 \right] \quad (3.20)$$

Tournons notre attention maintenant à l'équation de Schrödinger pour la particule de masse m liée à la surface courbe (S) au moyen du potentiel de confinement $V_\lambda(q^3)$ donné ci-dessus :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.21)$$

avec ∇^2 est l'opérateur tri-dimensionnel de Laplace-Beltrami donné par (voir Annexe) :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_i \left[\sqrt{G} G^{ij} \partial_j \psi \right] \quad (3.22)$$

avec l'abréviation $\partial_i = \partial / \partial q^i$. Ainsi, on a l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_i \left[\sqrt{G} G^{ij} \partial_j \psi \right] + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \partial_t \psi \quad (3.23)$$

où la métrique \mathbf{G} introduite dans l'équation de Schrödinger est donnée par (3.12). La structure de cette métrique, nous permet de séparer le Laplacien en deux parties ; une partie surfacique notée $\mathfrak{D}(q^1, q^2)$ donnée par $i, j = 1, 2$ et une partie normale définie par $i = j = 3$. En effet,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2G} (\partial_i G) G^{ij} \partial_j \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i (G^{ij}) \partial_j \psi - \frac{\hbar^2}{2m} G^{ij} \partial_{ji} \psi \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2G} (\partial_3 G) G^{33} \partial_3 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_3 (G^{33}) \partial_3 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} G^{33} \partial_{33} \psi + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \partial_t \psi \end{aligned} \quad (3.24)$$

$i, j = 1, 2$. Mais $G^{33} = 1$, l'équation précédente se réduit à :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{2G} (\partial_i G) G^{ij} \partial_j \psi - \partial_i (G^{ij}) \partial_j \psi - G^{ij} \partial_{ji} \psi \right\} \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2G} (\partial_3 G) \partial_3 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_{33} \psi + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \partial_t \psi \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ainsi, on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathfrak{D}(q^1, q^2) \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(\partial_3 G)}{2G} \partial_3 \psi + \partial_{33} \psi \right] + V_\lambda(q^3) \psi = i\hbar \partial_t \psi \quad (3.26)$$

avec

$$\mathfrak{D}(q^1, q^2) = \frac{1}{2G} (\partial_i G) G^{ij} \partial_j - \partial_i (G^{ij}) \partial_j - G^{ij} \partial_{ji} \quad (3.27)$$

Comme on espère d'obtenir une fonction d'onde surfacique qui dépend seulement des coordonnées q^1 et q^2 , on est naturellement amené à introduire une nouvelle fonction d'onde χ pour

laquelle on peut écrire la séparation $\chi(q^1, q^2, q^3) = \chi_t(q^1, q^2) \chi_n(q^3)$ et nous pouvons définir ainsi la densité de probabilité surfacique :

$$\rho = |\chi_t| \int |\chi_n|^2 dq^3 \quad (3.28)$$

La transformation adéquate est :

$$\chi(q^1, q^2, q^3) = \sqrt{f(q^1, q^2, q^3)} \psi(q^1, q^2, q^3) \quad (3.29)$$

puisque l'élément de volume associé est donné par :

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 \\ &= f dS dq^3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec : $dS = \sqrt{g} dq^1 dq^2$ et du fait :

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} \left[1 + Tr(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2 \right] \quad (3.31)$$

ainsi la fonction f est

$$f = 1 + Tr(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) (q^3)^2 \quad (3.32)$$

introduisons la transformation (3.29) dans (3.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \mathfrak{D}(\chi/\sqrt{f}) - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(\partial_3 G)}{2G} \partial_3(\chi/\sqrt{f}) + \partial_{33}(\chi/\sqrt{f}) \right] \\ + V_\lambda(q^3) (\chi/\sqrt{f}) = i\hbar \partial_t (\chi/\sqrt{f}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

multiplions par \sqrt{f} les deux membres, il vient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D}(\chi/\sqrt{f}) - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\sqrt{f} \frac{(\partial_3 G)}{2G} \partial_3(\chi/\sqrt{f}) + \sqrt{f} \partial_{33}(\chi/\sqrt{f}) \right] \\ + V_\lambda(q^3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.34)$$

notons que :

$$\partial_3(\chi/\sqrt{f}) = \frac{\partial_3(\chi)}{\sqrt{f}} - \frac{\chi \partial_3(f)}{2f^{3/2}} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \partial_{33}(\chi/\sqrt{f}) &= \partial_3 \left(\frac{\partial_3 \chi}{\sqrt{f}} \right) - \frac{1}{2} \partial_3 \left(\frac{\chi}{f^{3/2}} \partial_3(f) \right) \\ &= \frac{(\partial_{33} \chi)}{\sqrt{f}} - \frac{(\partial_3 \chi)}{f^{3/2}} (\partial_3 f) + \frac{3}{4} \frac{\chi}{f^{5/2}} [\partial_3(f)]^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{f^{3/2}} \partial_{33}(f) \end{aligned} \quad (3.36)$$

et d'après (3.18) et (3.32) on a :

$$G = gf^2 \quad \text{et} \quad \partial_3 G = 2g (\partial_3 f) f \quad (3.37)$$

il vient

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D} \left(\chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{(\partial_3 f)}{f} \partial_3 (\chi) - \frac{[\partial_3 (f)]^2}{2f^2} \chi \right. \\ & \left. + (\partial_{33} \chi) - \frac{(\partial_3 \chi)}{f} (\partial_3 f) + \frac{3}{4} \frac{\chi}{f^2} [\partial_3 (f)]^2 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{f} \partial_{33} (f) \right\} + V_\lambda (q_3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.38)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D} \left(\chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ (\partial_{33} \chi) + \frac{1}{4} \frac{(\partial_3 f)^2}{f^2} \chi \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\chi}{f} \partial_{33} (f) \right\} + V_\lambda (q_3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.39)$$

qui s'écrit aussi comme

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{f} \mathfrak{D} \left(\chi / \sqrt{f} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \partial_{33} \chi + \frac{1}{4f^2} [(\partial_3 f)^2 - 2f \partial_{33} (f)] \chi \right\} \\ & + V_\lambda (q^3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \end{aligned} \quad (3.40)$$

on est maintenant prêt à tenir compte de l'effet du potentiel de confinement $V_\lambda (q^3)$. A la limite $\lambda \rightarrow \infty$ la fonction d'onde voit deux barrières de potentiel sur les deux côtés de la surface. Comme on ne s'intéresse qu'à la surface, on peut prendre la limite $q^3 \rightarrow 0$ c'est-à-dire $f \rightarrow 1$ et par suite, on a :

$$\lim_{q^3 \rightarrow 0} \partial_3 f = Tr(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{et} \quad \lim_{q^3 \rightarrow 0} \partial_{33} (f) = 2 \det(\boldsymbol{\alpha})$$

de plus on a :

$$\lim_{q^3 \rightarrow 0} G = g$$

et on a d'après (3.8)

$$\lim_{q^3 \rightarrow 0} G_{ij} = g_{ij} \quad \text{et} \quad \lim_{q^3 \rightarrow 0} G^{ij} = g^{ij}$$

Donc la partie surfacique (3.27) se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{1}{2g} (\partial_i g) g^{ij} \partial_j - \partial_i (g^{ij}) \partial_j - g^{ij} \partial_{ji} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Par conséquent l'équation (3.40) a la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \chi) - \frac{\hbar^2}{8m} \{[Tr(\boldsymbol{\alpha})]^2 - 4 \det(\boldsymbol{\alpha})\} \chi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_{33} \chi + V_\lambda(q^3) \chi = i\hbar \partial_t \chi \quad (3.42)$$

avec $i, j = 1, 2$. Cette dernière équation peut maintenant facilement séparée en partie normale et tangentielle :

$$\chi = \chi_t(q^1, q^2, t) \chi_n(q^3, t) \quad (3.43)$$

pour laquelle on a les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial (q^3)^2} + V_\lambda(q^3) \chi_n = i\hbar \frac{\partial \chi_n}{\partial t} \quad (\text{éq. normale}) \quad (3.44)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \chi_t}{\partial q^j} \right) + V_s(q^1, q^2) \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t} \quad (\text{éq. tangentielle}) \quad (3.45)$$

l'expression (3.44) est juste l'équation de Schrödinger pour une particule confinée par le potentiel $V_\lambda(q^3)$. L'équation (3.45) est la plus intéressante en raison du présence du terme lié à la géométrie du surface

$$V_s(q^1, q^2) = -\frac{\hbar^2}{8m} \{[Tr(\boldsymbol{\alpha})]^2 - 4 \det(\boldsymbol{\alpha})\} \quad (3.46)$$

et peut affecter la dynamique de la particule. Notons en premier lieu que ce terme peut s'écrire, en utilisant les relations (2.74) et (2.75) comme

$$V_s(q^1, q^2) = -\frac{\hbar^2}{2m} (H^2 - \kappa) \quad (3.47)$$

où H et κ sont respectivement la courbure moyenne et la courbure de Gauss. Il est important de noter aussi que ce potentiel dépend de la courbure intrinsèque et extrinsèque de la surface. Par conséquent, ce terme n'est pas le même pour deux surfaces isométriques.

Il a été expliqué dans la référence [1] que ce résultat est en désaccord avec le résultat de la mécanique classique où le Lagrangien d'une particule libre sur une surface

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) &= (1/2) m (ds/dt)^2 = (1/2) m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ \text{avec } \dot{q}^3 &= 0 \quad \text{et } \dot{q}^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

dépend uniquement de la métrique de la surface g_{ij} . En effet, en mécanique classique on peut complètement éliminer le degré de liberté dans la direction normale à la surface. Alors que, en mécanique quantique, ce n'est pas un problème trivial en raison de l'existence du principe d'incertitude. Naïvement, si nous prenons $\Delta q^3 \rightarrow 0$ alors $\Delta p^3 \rightarrow \infty$, ce qui signifie que l'hamiltonien contient un terme divergent. C'est un peu étrange! Cependant, ce résultat n'est pas

inattendu, car, indépendamment de la petitesse supposée de q^3 , l'onde se propage toujours dans une portion tridimensionnelle de l'espace, de sorte que la particule est " au courant " des propriétés externes de la surface (S).

3.3 Application

Comme un exemple des notions données plus haut, on considère une particule confinée sur la surface d'un cylindre de rayon R et d'équations paramétriques

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \quad (3.49)$$

la métrique sur la surface est

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On introduit les coordonnées normales de Gauss (φ, z, τ) définies au voisinage très proche de cette surface dont le vecteur position est

$$\mathbf{R}(\varphi, z, \tau) = \mathbf{r}(\varphi, z) + \tau \mathbf{n}(\varphi, z) \quad (3.50)$$

où \mathbf{n} est un vecteur normale à cette surface au point $P(\varphi, z)$. Cette particule est confinée sur la surface au moyen d'un potentiel de confinement $V(\tau)$ qu'on va définir explicitement dans la suite. L'équation de Schrödinger pour cette particule est

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\tau) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.51)$$

Suite à l'étude précédente, on peut écrire directement les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial \tau^2} + V(\tau) \chi_n = i\hbar \frac{\partial \chi_n}{\partial t}, \quad (\text{éq. normale}) \quad (3.52)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial z^2} + V_s \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}, \quad (\text{éq. tangentielle}) \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \chi \\ \text{et } \chi &= \chi_t(\varphi, z, t) \chi_n(\tau, t), \end{aligned}$$

ici la courbure moyenne $H = -1/2R$ et la courbure de Gauss et $\kappa = 0$. Le potentiel géométrique V_s est donc

$$V_s = -\frac{\hbar^2}{8mR^2}. \quad (3.54)$$

On peut proposer un modèle du potentiel $V(\tau)$ si on suppose que cette particule est confinée entre deux cylindres coaxiaux de rayon $R \pm d/2$, c'est-à-dire ;

$$V_\lambda(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau| < d/2 \\ \infty & \text{si } |\tau| \geq d/2. \end{cases} \quad (\lambda = \frac{1}{d}) \text{ pour } \begin{cases} \lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.55)$$

De plus, on peut obtenir le potentiel géométrique V_s de l'équation (3.54) en écrivant l'équation de Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi, \quad (3.56)$$

avec

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \end{aligned}$$

et E est l'énergie de la particule. La fonction d'onde doit satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\Psi(r = R \pm d/2, \varphi, z) = 0. \quad (3.57)$$

Posons $\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}}\Phi$ l'équation (3.56) devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4r^2}\right)\Phi = E\Phi, \quad (3.58)$$

notons que dans la région entre les deux cylindres on a $r = R + \tau$, ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial \tau}, \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{(R + \tau)^2} \simeq \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

où on a négligé les termes linéaires en τ puisque $\tau \ll R$. On écrit alors

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4R^2}\right)\Phi = E\Phi. \quad (3.59)$$

Puis, considérons la séparation des variables suivante :

$$\Phi = \chi(\tau)\psi(\varphi, z), \quad (3.60)$$

il vient

$$-\psi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial \tau^2} - \chi\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \varphi^2} - \chi\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{8mR^2}\chi\psi = E\chi\psi \quad (3.61)$$

divisons par $\chi\psi$ les deux côtés, on aura

$$-\frac{\hbar^2}{2m\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{8mR^2} = E \quad (3.62)$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2mR^2\psi(\varphi, z)} \frac{\partial^2 \psi(\varphi, z)}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2m\psi(\varphi, z)} \frac{\partial^2 \psi(\varphi, z)}{\partial z^2} \\ &-\frac{\hbar^2}{8mR^2} - E = \frac{\hbar^2}{2m\chi(\tau)} \frac{\partial^2 \chi(\tau)}{\partial \tau^2} = -\varepsilon = \text{Ctes} \end{aligned} \quad (3.63)$$

donc on a les deux équations

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi(\varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi(\varphi, z)}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{8mR^2} \psi(\varphi, z) = (E - \varepsilon) \psi(\varphi, z) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial^2 \chi(\tau)}{\partial \tau^2} + k^2 \chi(\tau) = 0, \quad (3.65)$$

avec $k^2 = 2m\varepsilon/\hbar^2$ et $\varepsilon > 0$. L'équation (3.64) est similaire à (3.53) où $(E - \varepsilon)$ représente l'énergie surfacique de la particule. On pose donc

$$E_S = E - \varepsilon. \quad (3.66)$$

On doit garder à l'esprit que l'énergie E l'énergie totale de la particule et ε l'énergie dû à la barrière transversale soumise sur la particule. On peut calculer ε en appliquant les conditions aux limites à la solution

$$\chi(\tau) = A \cos k\tau + B \sin k\tau$$

c'est-à-dire

$$\chi(\pm d/2) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} A \cos \frac{kd}{2} + B \sin \frac{kd}{2} &= 0 \\ A \cos \frac{kd}{2} - B \sin \frac{kd}{2} &= 0 \end{aligned}$$

ce système n'admet de solutions non nulles que si son déterminant est nul, il vient

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{kd}{2} &= 0 \Rightarrow \sin kd = 0 = \sin n\pi \\ \Rightarrow k &= \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

on aura donc l'énergie

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2md^2} \quad (3.67)$$

avec la solution transverse

$$\chi(\tau) = A \cos k\tau$$

l'équation tangentielle (3.64) devient

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{8mR^2} \right) \psi(\varphi, z) = E_S \psi(\varphi, z) \quad (3.68)$$

avec

$$E_S = \left(E - \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2md^2} \right) \quad (3.69)$$

Notons que si on passe à la limite $d \rightarrow 0$, on a un terme divergent au 2^{ème} membre de l'équation précédente. Cependant, pour des valeurs très petites de d mais pas nulles, cette équation décrit bien une particule quasi-bidimensionnelle avec E est l'énergie totale de la particule.

Chapitre 4

Mécanique quantique d'une particule relativiste sur une surface

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons décrire la dynamique d'une particule relativiste confinée sur une surface, par l'action d'un potentiel de confinement. L'idée est d'écrire correctement l'équation de Dirac dans un espace courbe 4-dimensionnel en utilisant le formalisme *des tétrades* ou *vierbein*. On commence donc par écrire une métrique de l'espace-temps, puis on choisit des tétrades correspondantes. Ces tétrades vont nous aider à déterminer les connexions affines spinorielles et on écrit ensuite l'équation de Dirac. Pour décrire une particule relativiste sur une surface, on va introduire un potentiel de confinement sous forme d'un couple minimal. En effet, on va choisir le 4-potentiel ($A_0 \equiv V_\lambda$, $A = 0$), cette idée, qui a été utilisée dans la référence [2], est justifiée du fait que le potentiel de confinement a des caractéristiques semblables à un puits infini. L'équation de Dirac ainsi obtenue va nous permettre d'écrire un système d'équations couplées dont le problème majeur est l'expression du potentiel de confinement lui-même. On se limite ici à un exemple simple déjà vu dans le chapitre précédent juste pour expliquer la démarche de la méthode.

4.2 Equation de Dirac dans un espace-temps courbe

Même dans un espace plat euclidien, il pourrait être utile d'utiliser des coordonnées curvilignes ; par exemple, dans les problèmes à symétrie sphérique à 3d, nous obtenons une simplification importante lorsque l'élément $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est remplacé par $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Dans un espace courbe, nous n'avons pas d'autre choix, car les coordonnées cartésiennes ne peuvent exister que localement, c'est-à-dire dans un voisinage infinitésimal. Un exemple est la surface d'une sphère de rayon R . Les coordonnées sphériques avec r fixé égal au rayon R de la sphère font le travail. Dans ce dernier cas, nous avons affaire à un sous-espace courbe à 2d intégré dans un espace euclidien à 3d. Les coordonnées courbes sont intrinsèques à la surface, et on peut ignorer l'existence d'une dimension radiale.

Dans cette section, nous verrons comment écrire l'équation de Dirac dans un espace courbe. En réalité, ce que nous voulons écrire, c'est l'équation de Dirac covariante pour une métrique arbitraire. Puisque cette équation est écrite pour une métrique arbitraire, nous pouvons également l'utiliser pour écrire l'équation de Dirac pour un espace plat dans n'importe quel système de coordonnées.

Commençons par écrire l'équation de Dirac dans un espace-temps plat [6] pour une particule de masse m et de spin $1/2$ en coordonnées cartésienne $x^a = 0, 1, 2, 3$ de la façon suivante

$$(i\hbar\gamma^a\partial_a - mc)\psi = 0, \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

où les γ^a sont des matrices constantes liées à la métrique de Minkowski $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ par

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}, \quad (4.2)$$

dans cet espace, l'élément ds^2 est

$$ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b, \quad a, b = 0, 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

On peut étendre l'équation de Dirac de l'espace-temps plat à un espace-temps courbe en utilisant le formalisme des tétrades. Ces tétrades (e^a_μ) et ses inverses (e_a^μ) nous permettent de transformer entre un référentiel inertiel local et un référentiel global. En effet, dans ce formalisme la métrique $g_{\mu\nu}$ d'un espace-temps courbe et reliée à la métrique de Minkowski par la relation

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} \quad (4.4)$$

puisque η_{ab} est une matrice constante, ces tétrades dépendent forcément des coordonnées de l'espace-temps. De plus, ces tétrades vérifient les relations d'orthogonalité

$$e_{\mu}^a e_a^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad , \quad e_{\mu}^a e_b^{\mu} = \delta^a_b \quad (4.5)$$

et aussi on peut augmenter et baisser les indices comme

$$e_{a\mu} = g_{\mu\nu} e_a^{\nu} \quad , \quad e_{\mu}^a = \eta^{ab} e_{b\mu} \quad (4.6)$$

d'où on tire la relation

$$\eta_{ab} = e_a^{\mu} e_b^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Ainsi, les tétrades sont utilisées pour transformer les quantités physiques du référentiel plat au référentiel courbe et vice versa.

Pour écrire l'équation de Dirac (4.1) dans un espace-temps courbe, les matrices constantes γ^a doivent être remplacées par des matrices dépendantes des coordonnées $\tilde{\gamma}^{\mu}$ comme

$$\gamma^a \rightarrow \tilde{\gamma}^{\mu} = e_a^{\mu} \gamma^a, \quad (4.8)$$

et on doit également mettre *la dérivée covariante* au lieu de la dérivée partielle parce que la dérivée partielle d'un spineur ne se transforme pas comme un spineur. La dérivée covariante d'un spineur est donnée par

$$\partial_a \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}, \quad (4.9)$$

où la connexion affine spinorielle Γ_{μ} satisfait la relation suivante en termes de matrices de Dirac

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b, \quad (4.10)$$

la quantité $\omega_{ab\mu}$ s'appelle la connexion de spin et peut être calculée à partir de la relation suivante

$$\omega_{ab\mu} = \eta_{ac} e_{\beta}^c \nabla_{\mu} e_b^{\beta} \quad (4.11)$$

où

$$\nabla_{\mu} e_b^{\beta} = \partial_{\mu} e_b^{\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\beta} e_b^{\lambda}. \quad (4.12)$$

les $\Gamma_{\mu\lambda}^{\beta}$ sont les symboles de Christoffel. Notons que les $\omega_{ab\mu}$ sont antisymétrique par rapport aux indices a et b c'est-à-dire

$$\omega_{ab\mu} = -\omega_{ba\mu} \quad (4.13)$$

Ainsi l'équation de Dirac généralisée pour un espace-temps courbe peut s'écrire

$$(i\hbar\tilde{\gamma}^\mu D_\mu - mc)\psi = 0. \quad (4.14)$$

Exemple 1 : Comme déjà évoqué dans cette section, on va profiter de l'équation (4.14), qui est une équation assez générale, pour écrire explicitement la forme de cette équation pour un espace-temps plat à $(2+1)$ dimensions. En utilisant les coordonnées polaires (r, φ) , la métrique est $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2)$. Les tétrades et leurs inverses sont

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \Rightarrow e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

En dimension $(2+1)$, les matrices 4×4 de Dirac sont réduites aux matrices de Pauli et l'un des choix pour les matrices γ^a , $a = 0, 1, 2$ est

$$\gamma^0 = \sigma_z, \quad \gamma^1 = i\sigma_y, \quad \gamma^2 = -i\sigma_x \quad (4.16)$$

donc les matrices de Dirac $\tilde{\gamma}$ d'après (4.8) sont

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 = \sigma_z, \quad \tilde{\gamma}^1 = \gamma^1 = i\sigma_y, \quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^2 = -\frac{i}{r}\sigma_x \quad (4.17)$$

les symboles de Christoffel non nuls

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = \frac{g^{rr}}{2} \left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = -r \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad (4.19)$$

les connections spinorielles $\omega_{ab\mu}$ non nulles sont

$$\omega_{12\varphi} = -\omega_{21\varphi} = 1 \quad (4.20)$$

les connections affines spinorielles

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_r = 0, \quad (4.21)$$

$$\Gamma_\varphi = \frac{1}{4}\omega_{12\varphi}\gamma^1\gamma^2 + \frac{1}{4}\omega_{21\varphi}\gamma^2\gamma^1 = \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2 = -\frac{i}{2}\sigma_z \quad (4.22)$$

L'équation de Dirac (4.14) devient

$$\left\{ \sigma_z \partial_0 + i\sigma_y \partial_r - \frac{i}{r}\sigma_x \left(\partial_\varphi - \frac{i}{2}\sigma_z \right) - \frac{mc}{i\hbar} \right\} \psi = 0. \quad (4.23)$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \sigma_z \partial_0 + i \sigma_y \partial_r - \frac{i}{r} \sigma_x \partial_\varphi + \frac{i}{2r} \sigma_y - \frac{mc}{i\hbar} \right\} \psi = 0. \quad (4.24)$$

Exemple 2 : dans un espace-temps plat, l'élément ds^2 en coordonnées sphériques a l'expression

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.25)$$

puisque la métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$ est diagonale, il est facile de déduire les tétrades et leurs inverses comme

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow e_a{}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

d'après la relation (4.11), les connexions de spin non nulles sont

$$\omega_{21\theta} = -1 \quad (4.27)$$

$$\omega_{31\varphi} = -\sin \theta \quad (4.28)$$

$$\omega_{32\varphi} = -\cos \theta \quad (4.29)$$

ainsi, les connexions affines spinorielles se calculent suivant (4.10) comme

$$\Gamma_{ct} = \Gamma_r = 0 \quad (4.30)$$

$$\Gamma_\theta = \frac{1}{4} \omega_{21\theta} \gamma^2 \gamma^1 + \frac{1}{4} \omega_{12\theta} \gamma^1 \gamma^2 = \frac{1}{2} \gamma^1 \gamma^2 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\varphi &= \frac{1}{4} \omega_{31\varphi} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{1}{4} \omega_{13\varphi} \gamma^1 \gamma^3 + \frac{1}{4} \omega_{32\varphi} \gamma^3 \gamma^2 + \frac{1}{4} \omega_{23\varphi} \gamma^2 \gamma^3 \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta \gamma^1 \gamma^3 + \frac{1}{2} \cos \theta \gamma^2 \gamma^3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3 Particule de Dirac sur une surface

On considère une particule de masse m liée à une surface (S) bidimensionnelle d'équations paramétriques $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2)$. Dans un espace ambiant euclidien tridimensionnel, le voisinage très proche de cette surface est décrit par le vecteur

$$\mathbf{R}(q, q^3) = \mathbf{r}(q) + q^3 \mathbf{n}(q), \quad q = (q^1, q^2) \quad (4.33)$$

un point de l'espace-temps est caractérisé par les coordonnées $(q^0 = ct, q, q^3)$. Ainsi, l'espace-temps très proche de la surface (S) est décrit par la métrique $\gamma_{\mu\nu}$

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.34)$$

avec

$$\gamma_{00} = \eta_{00} = 1, \quad \gamma_{33} = \eta_{33} = -1 \quad (4.35)$$

$$\gamma_{ij} = -G_{ij}(q, q_3), \quad i, j = 1, 2 \quad (4.36)$$

où $G_{ij}(q, q_3)$ est la métrique de l'espace décrit dans le troisième chapitre par (3.8) à savoir

$$G_{ij}(q, q^3) = g_{ij} - 2b_{ij}q^3 + g^{ks}b_{si}b_{kj}(q^3)^2 \quad (4.37)$$

ou sous forme matricielle

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{g} - 2\mathbf{b}q^3 + \mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}(q^3)^2 \quad (4.38)$$

avec

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Explicitement ;

$$ds^2 = (dq^0)^2 - G_{ij}(q, q^3) dq^i dq^j - (dq^3)^2, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.40)$$

avec $dq^0 = cdt$. La matrice γ s'écrit donc

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

où la matrice \mathbf{G} est donnée par (3.12). Donc $\det(\gamma) = -\det(\mathbf{G}) = -G$. Notons ici que la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ n'est pas diagonale. Elle est reliée à la métrique η_{ab} au moyen des tétrades qui sont choisis de façon qu'on a

$$\gamma_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \quad (4.42)$$

Sous forme matricielle, cette relation s'écrit

$$\gamma = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{e} \quad (4.43)$$

suite aux expressions (4.35) et (4.36) on peut poser

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

où a, b, c et d sont des composantes (des tétrades) à déterminer. Ainsi, on aura directement de (4.43)

$$G_{11} = a^2 + c^2 \quad (4.45)$$

$$G_{22} = b^2 + d^2 \quad (4.46)$$

$$G_{12} = G_{21} = ab + cd \quad (4.47)$$

pour simplifier, on choisit $c = 0$ avec $G_{11} \neq 0$, on obtient

$$a = \sqrt{G_{11}}, \quad b = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}}, \quad d = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_{11}}} \quad (4.48)$$

Ainsi, les tétrades et leurs inverses sont

$$e^a_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{G_{11}} & \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_{11}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} & -\frac{G_{12}}{\sqrt{G}\sqrt{G_{11}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

les matrices de Dirac d'espace courbe $\tilde{\gamma}^{\mu}$ sont données en terme des matrices constantes γ^a suite au (4.8) comme

$$\tilde{\gamma}^0 = e_a^0 \gamma^a = \gamma^0 \quad (4.50)$$

$$\tilde{\gamma}^3 = e_a^3 \gamma^a = \gamma^3 \quad (4.51)$$

$$\tilde{\gamma}^1 = e_a^1 \gamma^a = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \gamma^1 - \frac{G_{12}}{\sqrt{G}\sqrt{G_{11}}} \gamma^2 \quad (4.52)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = e_a^2 \gamma^a = \frac{\sqrt{G_{11}}}{\sqrt{G}} \gamma^2 \quad (4.53)$$

avec

$$\sqrt{G} = \sqrt{g} [1 + Tr(\boldsymbol{\alpha}) q^3 + \det(\boldsymbol{\alpha}) q_3^2] \quad (4.54)$$

Passons maintenant à l'équation de Dirac relative à la métrique (4.40)

$$(i\hbar\tilde{\gamma}^\mu\mathcal{D}_\mu - mc)\psi = 0. \quad (4.55)$$

le potentiel de confinement $V_\lambda(q^3)$ vu au chapitre précédent est introduit ici comme couplage minimale

$$A_0 \equiv V_\lambda(q_3), \quad A = 0 \quad (4.56)$$

de façon qu'on a

$$\mathcal{D}_\nu = \partial_\nu + \Gamma'_\nu \quad (4.57)$$

et

$$\Gamma'_\nu = \Gamma_\nu + \frac{iq}{c}A_\nu \quad (4.58)$$

montrons d'abord que la connections $\Gamma_0 = 0$. En effet,

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4}\omega_{ab0}\gamma^a\gamma^b, \quad (4.59)$$

avec

$$\omega_{ab0} = \eta_{ac}e^c_\beta\nabla_0e_b^\beta \quad (4.60)$$

puisque les tétrades ne dépendent pas du temps, on aura

$$\omega_{ab0} = \eta_{ac}e^c_\beta\Gamma_{0\lambda}^\beta e_b^\lambda \quad (4.61)$$

mais

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\lambda}^\beta &= \frac{\gamma^{\ell\beta}}{2} \left(\frac{\partial\gamma_{\lambda\ell}}{\partial q^0} + \frac{\partial\gamma_{\ell 0}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial\gamma_{0\lambda}}{\partial q^\ell} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

donc

$$\Gamma_0 = 0 \quad (4.63)$$

Ainsi, l'équation de Dirac devient

$$(i\hbar\gamma^0\gamma^3D_3 + i\hbar\gamma^0\tilde{\gamma}^iD_i - \gamma^0mc)\psi = -i\hbar\left(\partial_0 + \frac{iq}{c}V_\lambda(q_3)\right)\psi \quad (4.64)$$

Une représentation standard des matrices de Dirac constantes est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.65)$$

où I est la matrice unité 2×2 et σ^i sont les matrices de Pauli. Cette représentation est particulièrement pratique car elle met en évidence le caractère spinoriel de la fonction d'onde de la particule et elle sépare les composantes d'énergie positive et négative. Ce but sera en principe achever en écrivant la fonction d'onde comme un bispineur

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (4.66)$$

Cependant, le calcul dans le cas général est très long et assez compliqué, mais c'est faisable. Cela est dû à la présence des connexions Γ_i qui sont fonctions des matrices de Dirac. C'est pourquoi qu'on va considérer ici un exemple assez simple juste pour montrer la démarche de la méthode. L'exemple est celui d'une particule confinée sur la surface d'un cylindre de rayon R où l'équation paramétrique est

$$\mathbf{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \quad (4.67)$$

donc on déduit

$$\mathbf{r}_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) \quad (4.68)$$

$$\mathbf{r}_z = (0, 0, 1) \quad (4.69)$$

d'où la métrique sur la surface est

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

le vecteur normal à la surface du cylindre est

$$\mathbf{n}(\varphi, z) = \frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z|} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (4.71)$$

donc la deuxième forme est représentée par la matrice

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

la matrice $\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{b}\mathbf{g}^{-1}$ est donc

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Remarquons que $Tr(\boldsymbol{\alpha}) = 1/R$ et $\det(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. La métrique de l'espace "euclidien" est

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{\varphi\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & G_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

avec

$$\begin{aligned} G_{\varphi\varphi} &= (R + \tau)^2 \\ G_{zz} &= 1 \\ G_{\varphi z} &= G_{z\varphi} = 0 \end{aligned}$$

τ représente la coordonnée de l'espace voisinage ($\tau \equiv q^3$) le déterminant G est donc

$$\sqrt{G} = R + \tau = R \left(1 + \frac{\tau}{R}\right) = R(1 + Tr(\boldsymbol{\alpha})\tau)$$

la métrique de l'espace-temps pour un point de l'espace voisinage (ct, φ, z, τ) très proche de la surface est

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (R + \tau)^2 d\varphi^2 - dz^2 - (d\tau)^2, \quad \tau \ll R \quad (4.75)$$

$\det(\boldsymbol{\gamma}) = \gamma = -(R + \tau)^2$. Les tétrades sont

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R + \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R + \tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

c'est-à-dire, les e_a^{μ} non nulles sont $e_0^0 = 1$, $e_1^{\varphi} = 1/(R + \tau)$, $e_2^z = 1$ et $e_3^{\tau} = 1$. Les matrices gamma $\tilde{\gamma}^{\mu}$ sont

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 \quad (4.77)$$

$$\tilde{\gamma}^{\varphi} = \frac{1}{R + \tau} \gamma^1 \quad (4.78)$$

$$\tilde{\gamma}^z = \gamma^2 \quad (4.79)$$

$$\tilde{\gamma}^{\tau} = \gamma^3 \quad (4.80)$$

Ainsi, l'équation de Dirac (4.64) se réduit à

$$\left(i\hbar\gamma^0\gamma^3 D_{\tau} + \frac{i\hbar}{R + \tau} \gamma^0\gamma^1 D_{\varphi} + i\hbar\gamma^0\gamma^2 D_z - \gamma^0 mc \right) \psi = \left(-i\hbar\partial_0 + \frac{q\hbar}{c} V(\tau) \right) \psi \quad (4.81)$$

Maintenant, reste à calculer les connections Γ_τ , Γ_φ et Γ_z . En effet,

$$\Gamma_\tau = \frac{1}{4}\omega_{ab\tau}\gamma^a\gamma^b, \quad (4.82)$$

on a

$$\omega_{ab\tau} = \eta_{ac}e^c_\beta \nabla_\tau e_b^\beta \quad (4.83)$$

où

$$\nabla_\tau e_b^\beta = \partial_\tau e_b^\beta + \Gamma_{\tau\lambda}^\beta e_b^\lambda. \quad (4.84)$$

on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau\lambda}^\beta &= \frac{\gamma^{\ell\beta}}{2} \left(\frac{\partial\gamma_{\lambda\ell}}{\partial\tau} + \frac{\partial\gamma_{\ell\tau}}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial\gamma_{\tau\lambda}}{\partial q^\ell} \right) \\ &= \frac{\gamma^{\varphi\varphi}}{2} \left(\frac{\partial\gamma_{\varphi\varphi}}{\partial\tau} \right) = \frac{1}{2G_{\varphi\varphi}} \left(\frac{\partial G_{\varphi\varphi}}{\partial\tau} \right) \\ &= \frac{1}{R+\tau} = \Gamma_{\tau\varphi}^\varphi \end{aligned} \quad (4.85)$$

donc

$$\begin{aligned} \nabla_\tau e_1^\varphi &= \partial_\tau e_1^\varphi + \Gamma_{\tau\varphi}^\varphi e_1^\varphi. \\ &= -\frac{1}{(R+\tau)^2} + \frac{1}{(R+\tau)^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

c'est-à-dire

$$\Gamma_\tau = 0 \quad (4.87)$$

calculons Γ_φ :

$$\Gamma_\varphi = \frac{1}{4}\omega_{ab\varphi}\gamma^a\gamma^b, \quad (4.88)$$

on a :

$$\begin{aligned} \omega_{ab\varphi} &= \eta_{ac}e^c_\beta \nabla_\varphi e_b^\beta \\ &= \eta_{ac}e^c_\beta \left(\partial_\varphi e_b^\beta + \Gamma_{\varphi\lambda}^\beta e_b^\lambda \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$= \eta_{ac}e^c_\beta \left(\Gamma_{\varphi\lambda}^\beta e_b^\lambda \right) = 0 \quad (4.90)$$

puisque $\Gamma_{\varphi\lambda}^\beta = 0$. Donc

$$\Gamma_\varphi = 0 \quad (4.91)$$

de même

$$\Gamma_z = \frac{1}{4}\omega_{abz}\gamma^a\gamma^b, \quad (4.92)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{abz} &= \eta_{ac}e^c{}_\beta \nabla_z e_b{}^\beta \\ &= \eta_{ac}e^c{}_\beta \left(\partial_z e_b{}^\beta + \Gamma_{z\lambda}^\beta e_b{}^\lambda \right) \\ &= \eta_{ac}e^c{}_\beta \left(\Gamma_{z\lambda}^\beta e_b{}^\lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

donc

$$\Gamma_z = 0 \quad (4.94)$$

avec la matrice γ est explicitement

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{\varphi\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

l'équation de Dirac (4.81) devient

$$\left(i\hbar\alpha^3 \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{i\hbar}{R+\tau}\alpha^1 \frac{\partial}{\partial\varphi} + i\hbar\alpha^2 \frac{\partial}{\partial z} - \gamma^0 mc \right) \psi = -i\hbar \left(\partial_0 + \frac{iq}{c}V(\tau) \right) \psi \quad (4.96)$$

Ensuite, on pose

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad (4.97)$$

on obtient le système

$$i\hbar\sigma^3 \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} + \frac{i\hbar}{R+\tau}\sigma^1 \frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + i\hbar\sigma^2 \frac{\partial\psi_2}{\partial z} - mc\psi_1 = \left(\frac{E}{c} + \frac{q\hbar}{c}V(\tau) \right) \psi_1 \quad (4.98)$$

$$i\hbar\sigma^3 \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} + \frac{i\hbar}{R+\tau}\sigma^1 \frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} + i\hbar\sigma^2 \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + mc\psi_2 = \left(\frac{E}{c} + \frac{q\hbar}{c}V(\tau) \right) \psi_2 \quad (4.99)$$

Dans le but de continuer notre analyse, on peut proposer à ce stade un modèle du potentiel $V(\tau)$ comme dans le chapitre précédent. On suppose donc que cette particule est confinée entre deux cylindres coaxiaux de rayon $R \pm d/2$, c'est-à-dire ;

$$V(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau| < d/2 \\ \infty & \text{si } |\tau| \geq d/2. \end{cases} \quad (4.100)$$

Le système précédent devient

$$i\hbar c\sigma^3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} + \frac{i\hbar c}{R+\tau} \sigma^1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + i\hbar c\sigma^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = (E + mc^2) \psi_1 \quad (4.101)$$

$$i\hbar c\sigma^3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + \frac{i\hbar c}{R+\tau} \sigma^1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + i\hbar c\sigma^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = (E - mc^2) \psi_2 \quad (4.102)$$

il est facile de vérifier que la composante ψ_1 satisfait l'équation

$$-\frac{\hbar^2 c^2}{(R+\tau)^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau^2} + \frac{i\hbar^2 c^2}{(R+\tau)^2} \sigma^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = (E^2 - m^2 c^4) \psi_1 \quad (4.103)$$

ensuite, on considère la transformation unitaire suivante pour éliminer le terme proportionnel à σ^2 ;

$$\psi_1 = e^{i\frac{1}{2}\sigma^2 \varphi} \phi \quad (4.104)$$

l'équation (4.103) se transforme à

$$-\frac{\hbar^2 c^2}{(R+\tau)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{\hbar^2 c^2}{4(R+\tau)^2} \phi = (E^2 - m^2 c^4) \phi \quad (4.105)$$

Comme on ne s'intéresse qu'à la surface, on peut prendre la limite $\tau \rightarrow 0$ et par suite, on a :

$$-\frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{\hbar^2 c^2}{4R^2} \phi = (E^2 - m^2 c^4) \phi \quad (4.106)$$

Cette dernière équation peut maintenant facilement séparée en partie normale et surfacique :

$$\phi = \phi_s(\varphi, z) \phi_n(\tau) \quad (4.107)$$

on obtient

$$-\frac{\hbar^2 c^2}{\phi_s(\varphi, z) R^2} \frac{\partial^2 \phi_s(\varphi, z)}{\partial \varphi^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi_s(\varphi, z)}{\phi_s(\varphi, z) \partial z^2} - \frac{\hbar^2 c^2}{4R^2} - E^2 + m^2 c^4 = \frac{\hbar^2 c^2}{\phi_n(\tau)} \frac{\partial^2 \phi_n(\tau)}{\partial \tau^2} = -\varepsilon = \text{Ctes} \quad (4.108)$$

on pose

$$E^2 - \varepsilon = E_s^2 \quad (4.109)$$

on a donc

$$\left(-\frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2 c^2}{4R^2} + m^2 c^4 \right) \phi_s = E_s^2 \phi_s \quad \text{Eq. tangentielle} \quad (4.110)$$

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \phi_n(\tau)}{\partial \tau^2} = \varepsilon \phi_n(\tau) \quad \text{Eq. normale} \quad (4.111)$$

où

$$\varepsilon = E_n^2 - m^2 c^4 \quad (4.112)$$

4.4 Limite non relativiste

A la limite non relativiste ; $E_s^2 - m^2c^4 \simeq 2mc^2E_N$ l'équation (4.110) s'écrit

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{8mR^2} \right) \phi_s = E_N \phi_s \quad (4.113)$$

donc on a bien le potentiel géométrique (3.54) et l'équation surfacique du chapitre précédent à savoir

$$V_s = -\frac{\hbar^2}{8mR^2}. \quad (4.114)$$

L'étude ci-dessus est un exemple simple pour traiter une particule relativiste sur une surface. Il est donc intéressant de traiter d'autres problèmes, par exemple, une particule sur une sphère et sur un cône. Cependant, le problème qu'on peut rencontrer est la modélisation du potentiel de confinement pour permettre de découpler l'équation de Dirac.

on a calculé précédemment la courbure de Gauss pour cette surface et on a obtenu $\kappa = 1/r_0^2$. Donc on a bien vérifié la relation.

Chapitre 5

Conclusion générale

La dynamique quantique d'une particule non relativiste confinée sur une surface courbe par l'action d'un potentiel de confinement est basée principalement sur la séparation de l'équation de Schrödinger en deux parties ; une partie normale qui ne dépend que de la coordonnée normale et l'autre tangentielle qui dépend des coordonnées intrinsèques de la surface en plus d'un potentiel de nature géométrique qui est fonction des courbures caractéristiques de cette surface (courbure de Gauss et courbure moyenne).

Pour une particule relativiste, ce problème n'est pas trivial. En effet, la forme générale du potentiel de confinement $V_\lambda(q_3)$ rend l'équation de Dirac difficile à découpler. C'est pour cette raison qu'on a adopté une forme simple de ce potentiel comme un puits infini introduit comme un couplage minimal. Ce choix nous a aidé i) à découpler l'équation de Dirac. ii) séparer la partie surfacique de la partie normale. iii) obtenir la limite non relativiste.

On a considéré un exemple simple qui est une particule sur un cylindre, juste pour montrer la démarche de la méthode, mais sans doute cette technique peut être appliquée à plusieurs autres systèmes physiques.

Annexe

Les symboles de Christoffel s'écrivent :

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right)$$

on peut noter, en changeant les indices, que le premier terme se simplifier avec le troisième, il vient :

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{g^{im}}{2} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

Suite à la formule :

$$\begin{aligned} \det A &= \exp(\text{tr} \ln A) \\ \Rightarrow d(\det A) &= \text{tr} (A^{-1} dA \det A) \end{aligned}$$

alors pour $A \equiv g_{im}$ avec $\det(g_{im}) = g$ il vient :

$$dg = gg^{im} dg_{im}$$

cela veut dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k &= gg^{im} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right) dx^k \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x^k} &= gg^{im} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour g négatif :

$$\frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} \right)$$

c-à-d :

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k}$$

i) La divergence d'un tenseur une fois contravariant A^i s'écrit :

$$\begin{aligned} D_i A^i &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^i A^k = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^k} A^k \\ &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^i} A^i \\ \text{ou bien } D_i A^i &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i} \end{aligned}$$

ii) Le laplacien $\nabla^2\varphi$ d'une fonction φ est défini comme $\text{div}(\text{grad } \varphi) = D_i(\text{grad } \varphi)^i$. En déduire que :

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= D_i(\text{grad } \varphi)^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} (\text{grad } \varphi)^i \right)}{\partial x^i}\end{aligned}$$

mais $(\text{grad } \varphi)^i = g^{ij} (\text{grad } \varphi)_j = g^{ij} \partial_j \varphi = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$, il vient :

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)$$

Bibliographie

- [1] R. C. T. Da Costa, *phys. Rev.* **A 23**, 1982 (1981).
- [2] M. Burgess, B. Jensen, *Phys. Rev.* **A 48** (1993) 1861.
- [3] F.T.Brandt, J.A.Sanchez-Monroy, *Phys. Lett.* **A 380** (2016) 3036 –3043.
- [4] G. Chilov, *Analyse mathématique : Fonctions de plusieurs variables réelles*, Edition Mir, Moscou (1975).
- [5] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, Dover, Mineola, NY, 1991.
- [6] The Dirac equation in a curved space time A Guide calculations, Peter Colles, David Klien. Springer Briefs in Physics. (AG 2019).
- [7] S. Fentazi, *Mémoire de Master*, Université de Jijel (2018).
- [8] Martin Libschutz, *Differential geometry, McGraw-Hill, USA* (1969).

في هذه الأطروحة ندرس ديناميكيات الجسيمات على الأسطح المنحنية، وفقًا لشكلية الحجز للتعامل مع المشكلة، نعطي بعض مفاهيم الهندسة. بعدها نقدم طريقة الحصر لجسيم غير نسبي (معادلة شرودنجر) وفق وجهة نظر دا كستا مع إعطاء تطبيق (جسيمة محصورة على سطح أسطوانة). بالنسبة للجسيمات النسبية (معادلة ديراك) على سطح منحني، فإننا نستخدم طريقة بسيطة للغاية تعتمد على نمذجة إمكانات الحبس من خلال بئر لانهاضي مقدم باعتباره اقتراح أصغري، مما يسمح لنا بفصل معادلة ديراك وإيجاد النهاية غير النسبية لمعادلة ديراك بطريقة بسيطة.

الكلمات المفتاحية: هندسة غوس، طريقة الحبس، الكمون الهندسي، معادلة شرودنجر، معادلة ديراك.

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions la dynamique des particules sur les surfaces courbes, d'après le formalisme de confinement. Pour traiter le problème, nous donnons quelques notions de Géométrie. Ensuite, nous exposons la méthode de confinement pour une particule non relativiste (l'équation de Schrödinger) du point de vue de Da Costa avec une application (une particule liée à un cylindre). Pour les particules relativistes (l'équation de Dirac) sur une surface courbe, on adopte une méthode très simple basée sur la modélisation du potentiel de confinement par un puits infini introduit comme un couplage minimal, ce qui nous permet de découpler l'équation de Dirac et de trouver la limite non relativiste d'une façon très simple.

Mots clés : Géométrie de Gauss, Méthode de confinement, Potentiel géométrique, L'équation de Schrödinger, L'équation de Dirac.

Abstract

In this thesis, we study the dynamics of particles on curved surfaces, according to the confinement formalism. To deal with the problem, we give some notions of Geometry. Then, we have exposed the method of confinement for a no relativistic particle (the Schrödinger equation) from the point of view of Da Costa with an application on a particle bound to a cylinder. For relativistic particles (Dirac's equation) on a curved surface, we adopt a very simple method based on the modeling of the confinement potential by an infinite well introduced as a minimal coupling, which allows us to decouple the equation of Dirac and find the non-relativistic limit in a very simple way. Finally, we consider the example of a particle on a cylinder, which is a simple example, just to show the approach of the method.

Keywords: Gaussian geometry, thin layer method, Geometric potential, Schrödinger's equation, Dirac's equation.