REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N°d'ordre :
Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de master
Filière : physique

Spécialité : Physique Théorique

Présentée par

Kehal Abir

Intitulé

Effet Schwinger et courant induit dans l'espace de de-Sitter

Soutenue le : 27 /10/2020

Devant le jury:

Président :	Boudjedaa Tahar	Prof.	Univ. de Jijel
Rapporteur :	Haouat Salah	Prof.	Univ. de Jijel
Examinateurs:	Rekioua Raja	MAA.	Univ. de Jijel

Remerciements

Je loue Dieu de m'avoir donné la vie, la santé et d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui . C'est grâce a lui ce présent travail a vu le jour.

J'adresse mes remerciements à mon encadreur Monsieur Salah Haouat professeur à l'université de Jijel pour ses aides qu'il m'a guidé dans mon travail, il m'a aidé à trouver des solutions pour avancer et a fait prouve d'une très grande compréhension et patience avec moi.

Je remercie sincèrement Monsieur Boudjedaa Tahar qui m'a fait l'honneur d'être le président de Jury ainsi que Madamme Rekioua Raja qui a accepté d'examiner et de juger ce travail.

Enfin je ne peux passer outre mes parents mes sœurs, mes frère, mes collège et sans oublier la secrétaire Houria Lamri pour leur confiance en moi et leur soutien constant qui m'assurent des bases solides me permettant de persévérer et de me surpasser.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons voulu étudier la création de particules à partir du vide dans l'univers de de-Sitter à (d+1) dimensions en présences d'un champ électrique, en utilisant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out". Après avoir montré comment calculer la probabilité de création d'une paire de particules et le nombre moyen des particules créées dans un univers en expansion, nous avons considéré comme exemple la création de particules dans l'espace de de-Sitter. Ensuite, nous avons étudié l'effet du champ électrique sur la création de particules scalaires, où nous avons d'abord trouvé des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon correspondante. Ces solutions nous ont permis de trouver l'expression exacte de la probabilité de création d'une paire. En faisant la somme sur tout les états possibles, nous pu calculer l'action effective de Schwinger et le nombre des particules créées par unité de temps et de volume. Nous avons aussi montré comment calculé le courant induit par l'effet de Schwinger. Le résultat essentiel de cette étude est que le champ électrique amplifie la densité des particules créées. En dernière étape, nous avons considéré la création de particules de Dirac dans l'univers de de-Sitter en présence d'un champ électrique. Plusieurs cas particuliers ont été considérés.

Mots clés

Effet de Schwinger, Espace de de-Sitter, courant induit, Théorie de champs dans espace courbe

ملخص

قمنا في هذه الأطروحة بدراسة تكوين الجسيمات من الفراغ في كون ديستر ذي بعد كيفي في وجود مجال كهربائي ، باستخدام تحويل بوجوليوبوف الذي يربط بين الحالات الداخلة و الحالات الخارجة. بعد توضيح كيفية حساب احتمال تكوين زوج من الجسيمات ومتوسط عدد الجسيمات التي تم إنشاؤها في الكون الآخذ في الاتساع ، أخذنا في الاعتبار تكوين الجسيمات في فضاء دي-سيتر كمثال. بعد ذلك ، درسنا تأثير المجال الكهربائي على تكوين الجسيمات السلمية ، حيث وجدنا أولاً الحلول الدقيقة لمعادلة كلاين جوردون الموافقة . سمحت لنا هذه الحلول بإيجاد العبارة الدقيقة لاحتمال تكوين زوج من الجسيمات. من خلال جمع جميع الحالات الممكنة ، تمكنا من حساب الفعل الفعال ل شوينغر وعدد الجسيمات التي تم إنشاؤها لكل وحدة زمن وحجم. لقد بينا أيضًا كيف يتم حساب التيار الناجم عن تأثير شوينجر. النتيجة الأساسية لهذه الدراسة هي أن المجال الكهربائي يضخم كثافة الجسيمات المتكونة. في الخطوة الأخيرة ، درسنا تكوين جسيمات ديراك في كون دي-سيتر في وجود مجال كهربائي. عدة حالات خاصة تمت مناقشتها.

الكلمات المفتاحية

تأثير شوينغر ، فضاء دي سيتر ، التيار المستحث ، نظرية المجال في الفضاء المنحني

Abstract

In this work, we have studied the particle creation from vacuum in the presence of an electric field in the (d + 1) dimensional de-Sitter universe by the use of the canonical method based on the Bogoliubov transformation connecting the "in" with the "out" states. After showing how to calculate the probability of creating a pair of particles and the average number of created particles in an expanding universe, we considered the particle creation in de-Sitter space as an example. Next, we studied the effect of the electric field on the creation of scalar particles, where we have found exact solutions for the corresponding Klein Gordon equation. These solutions enabled us to find the exact expression of the probability of creating a pair. By summing over all possible states, we were able to calculate the Schwinger effective action and the number of particles created per unit of time and volume. We have also shown how the current induced by the Schwinger effect is calculated. The essential result of this study is that the electric field amplifies the density of created particles. In the final stagep, we have considered the creation of Dirac particles in the de-Sitter universe in the presence of an electric field. Several particular cases were considered.

Keywords

Schwinger effect, de-Sitter space, induced current, Field theory in curved space

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Au cours des dernières décennies, un intérêt croissant s'est porté sur le problème de la construction d'une théorie unifiée des interactions fondamentales. Une telle théorie est capable d'expliquer la structure hiérarchique des forces physiques dans la nature. Cependant, le modèle qui a, jusqu'à présent, réussi à unifier au moins trois forces est le modèle standard des particules élémentaires si bien confirmé par les découvertes expérimentales des bosons de jauge et de la particule de Higgs. Ce modèle qui ne prend pas en compte la gravitation, ne doit donc être considéré qu'une approximation de l'unification de toutes les interactions qui pourraient avoir lieu à des échelles extrêmement petites, ou à des énergies et des températures très élevées, lorsque les effets gravitationnels devraient être significatifs. Dans ce contexte, la majorité des théories qui recherchent à unifier la gravitation avec les autres interactions suggère l'existence des dimensions supplémentaires et ainsi de nombreuses théories de la physique fondamentale à haute énergie sont formulées dans des espaces-temps de dimension supérieure à 4.

Actuellement, il n'existe pas d'observations claires en faveur des dimensions supplémentaires. Divers choix ont été faits pour le nombre de dimensions afin d'incorporer divers aspects de la physique. De plus nous ne savons ni la nature physique de ces dimensions supplémentaires ni comment elles interagissent avec les autres composants. La recherche de nouveaux effets évidents qui peuvent être testés pour pouvoir confirmer l'existence des dimensions supplémentaires.

D'autre part, devant l'inaptitude d'unifier la relativité générale avec le modèle standard de la physique des particules et les difficultés rencontrées dans la quantification de la gravitation par les mêmes méthodes utilisées avec succès pour les autres interactions fondamentales, la théorie quantique des champs dans un espace courbe reste le cadre fructueux pour décrie l'interaction des particules élémentaires avec le champ gravitationnel. Cette théorie est une théorie hybride dans laquelle les champs de la matière supposés quantifiés sont soumis à l'action du champ gravitationnel traité classiquement [1, 2, 3, 4].

La théorie quantique des champs dans un espace courbe a prédit la création des paires particule-antiparticule à partir du vide par les champs gravitationnels. Dans un univers en expansion, la création spontanée des particules aura lieu quand le vide devient instable [5] ; l'état du vide défini dans le passé se diffère de l'état du vide dans le future. De plus, dans un espace courbe, il n'y a pas de définition absolue de l'état du vide et la notion de particules n'est pas complètement claire. Du point de vue physique, c'est à cause du fait qu'en théorie quantique, une particule ne peut être localisée dans une région plus petite que sa longueur d'onde de de-Broglie [6]. Quand cette longueur d'onde devient suffisamment large, la notion de particule perd sa signification. Dans ce cas, l'amplitude de transition vide-vide porte une phase complexe, dont la partie imaginaire s'interprète comme la probabilité de création des particules.

L'effet de la création de particules a de nombreuses applications en cosmologie ; la création de particules a une influence sur l'évolution de l'univers et peut jouer un rôle très important dans l'issue de la phase d'inflation. En outre, comme il a été montré dans [7], la pression des particules créées est négative. Cette propriété ne dépend pas de la statistique des particules et elle est valable pour les fermions et les bosons. Les particules créées représentent alors un champ de matière répulsive provoque l'expansion accélérée de notre univers. Par conséquent, si la densité des particules créées est suffisamment grande, il est possible d'expliquer l'expansion accélérée de l'univers par le mécanisme de la création des particules sans avoir besoin d'introduire le concept d'énergie sombre.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier la création des particules par un champ électrique dans un univers de de-Sitter à D dimensions.

Comme le phénomène de la création des particules avec un champ extérieur ne peut y avoir lieu sauf si le champ extérieur est intense, le problème a une nature nonperturbative. C'est ainsi qu'il soit nécessaire de suivre une méthode d'analyse exacte. Ici, nous avons à utiliser plusieurs méthodes comme, par exemple, la technique de l'action effective de Schwinger [8, 9, 10, 11], la méthode des fonctions de Green [12, 13, 14, 15, 16], la diagonalisation de l'Hamiltonien [17, 18], l'approche adiabatique de Parker [19, 20, 21], la méthode semi-classique WKB [22, 23, 24, 25, 26], et la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" avec les états "out" [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov. Cette méthode consiste d'abord à chercher les solutions exactes de l'équation d'onde, à les classer en états "in" et "out" et à chercher en suite le lien entre ces états en calculant les coefficients de Bogoliubov. La probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées se calculent à partir de ces coefficients.

Ce mémoire se compose de six chapitres.

Dans le deuxième chapitre, par les principes de la thermodynamique, nous montrons comment le processus de création des particules influe la dynamique de l'univers en donnant lieu à une expansion accélérée exponentiellement.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons la méthode canonique de Bogoliubov pour déterminer la probabilité de création d'une paire de particules et le nombre de particules créées. Nous commençons, d'abord, par la quantification canonique du champ scalaire libre puis nous considérons le cas d'un champ scalaire dans un univers en expansion. Comme exemple d'illustration nous considérons l'espace de de-Sitter où l'équation de Klein Gordon admet des solutions exactes et analytiques. A partir des coefficients de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'effet du champ électrique sur la création de particules scalaires dans un univers de de-Sitter. En premier lieu, nous cherchons la solution de l'équation de Klein Gordon. Ensuite nous allons classer les solutions exactes en états "in" et "out", en admettant que les états d'énergie positive et négative se comporte comme les solutions semi-classique de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Dans le cinquième chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création de particules de spin 1/2 à partir du vide dans l'espace de-Sitter. En introduisant une transformation unitaire, nous pouvons obtenir les solutions exactes de l'équation de Dirac avec un champ électrique. A l'aide de la transformation de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création de paires particules et la densité de particules créées.

Le dernier chapitre est réservé pour une conclusion générale.

Chapitre 2

Création des particules en cosmologie

2.1 Introduction

Le modèle standard de la cosmologie ou le modèle ΛCDM suppose que l'univers a été créé dans le "big bang ". En fait, l'observation de la luminosité des supernovas de type Ia montre un décalage vers le rouge qui ne peut être expliqué que par une expansion accélérée de l'univers. Selon le principe de la conservation de la matière, cette accelération est accompanée d'une dilution de la matière et par conséquent, l'univers primordial était dense et chaud. L'accélération de l'expansion de l'univers s'interprète par la présence d'une force répulsive, à grande échelle, capable de surmonter la force gravitationnelle qui lie les différents constituants de l'univers. Cette interprétation suggère un champ d'énergie antigravitationnel -i.e. énergie du vide, connue sous le non d'énergie sombre. La nature de ce champ reste mystérieuse et le fameux candidat à l'énergie sombre est la constante cosmologique d'Einstein. Cependant, malgré le succé de ce modèle il présente des lacunes, notamment le problème de platitude, de l'horizon.....etc. Nous pouvons étendre le Modèle ΛCDM par l'inflation, en ajoutant d'autre éléments qui sont actuellement des domaines de recherche en cosmologie.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que la création des particules par le champ gravitationnel peut constitue une alternative à l'inflation.

2.2 Un univers isotrope en expansion

Le modèle standard de Friedmann-Robertson-Walker se repose essentiellement sur l'hypothèse (le principe cosmologique) suivante ; l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion. Une conséquence mathématique du principe cosmologique est l'existence d'un système de coordonnées comobiles dans lequel la métrique à quatre dimensions de l'espace-temps prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.1}$$

où t est le temps cosmique et le système de coordonnées (t, x, y, z) est appelé système de coordonnées comobiles. C'est la métrique générale utilisée pour la description de l'univers. Elle nous permet de décrire la géométrie et la dynamique de l'univers et de connaître l'évolution de sa taille en fonction du facteur d'echelle $a(t)$ qui représente l'expansion de l'univers.

Dans ce modèle les connexions affines (symboles de Christoffel) sont définies par

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda}\right) \tag{2.2}$$

Sans difficulté nous obtenons $\Gamma^0_{00} = 0$ et $\Gamma^i_{00} = 0$. Ce qui signifie qu'une particule au repos dans ce système de coordonnées, reste au repos, il résulte donc que le système de coordonnées comobiles suit le mouvement de l'observateur. Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{2.4}$$

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci defini par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa}. \tag{2.6}$$

et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur energie-impulsion du fluide cosmologique.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad R_{ij} = -(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad R_{0i} = 0. \tag{2.7}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT \tag{2.8}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{2.9}$$

Le fluide cosmique peut être étudié d'une manière analogique à un gaz parfait de pression P et de densité ρ. Dans ce cas nous avons

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p+\rho)\, u_\mu u_\nu$$

où u_μ est la quadri-vitesse. Les composantes du tenseur d'énergie-impulsion sont alors données par

$$T^{00} = \rho\,(t) \quad , \ T^{0i} = 0 \ \ , \ \ T^{ij} = \delta_{ij} a^{-2} p\,(t) \tag{2.10}$$

et

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \tag{2.11}$$

En remplaçant les équations $(2.7), (2.10)$ et (2.11) dans l'équation d'Einstein (2.9) nous obtenons les équations fandamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G\,(\rho + 3p) \tag{2.12}$$

et

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 4\pi G\,(\rho - p)\,. \tag{2.13}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G\rho(t) = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \tag{2.14}$$

Cette équation est l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers. Elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$, nous obtenons l'équation differentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\,(p+\rho) = 0, \tag{2.15}$$

qui peut être facilement résolue pour une équation d'état de la forme

$$p = \omega\rho, \tag{2.16}$$

où ω c'est le parmètre d'état independant du temps, dans ce cas nous obtenons

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)} \tag{2.17}$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ et $a_0 = a\,(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (l'indice 0 indique l'instant présent).

Suivant la valeur de ω nous pouvons déstinguer différentes situations :

a) Un univers dominé par la matière (matière non-relativiste) pour $\omega = 0$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \tag{2.18}$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée "poussière" et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue.

Dans un univers plat et d'aprés l'équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^3}{a^3} \tag{2.19}$$

le facteur d'éxpansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}. \tag{2.20}$$

b) Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = \frac{1}{3}$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{2.21}$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si $k_B T \geq mc^2$) et ondes gravitationnelles. Nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^4}{a^4} \tag{2.22}$$

ce qui nous donne

$$a(t) \sim \sqrt{t}. \tag{2.23}$$

c) Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de de Sitter) $\omega = -1$

$$\rho = \Lambda = cste \tag{2.24}$$

Λ est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\Lambda}{3} \tag{2.25}$$

le facteur d'échelle devient alors $a(t) = e^{Ht}$ avec $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$.

Nous pouvons résumer tout cela dans le tableau suivant :

fluide	équation du paramètre d'état	$\rho\,(a)$	$a\,(t)$
rayonnement	$\frac{1}{3}$	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{\frac{1}{2}}$
matière noire	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{\frac{2}{3}}$
constante cosmologique	-1	$\propto a^{0}$	$\propto \exp\,(Ht)$
courbure	$-\frac{1}{3}$	$\propto a^{-2}$	$\propto t$

(2.26)

2.3 L'inflation

La découverte du fond cosmique des micro-ondes est une énorme victoire pour la théorie du Big Bang et l'origine chaude de l'univers. Cependant d'un autre coté, cette découverte a également posé des problèmes majeurs et a mis la théorie du Big Bang dans sa forme standard face à un grand défi, car , comme mentionné auparavant, les cosmologistes ont constaté que la théorie du Big Bang était déficiente pour des raisons telles que le problème de convergence, de l'horizon et du monopole.

L'inflation pourait être une solution possible aux problèmes du modèle standard de la cosmologie dont le facteur d'echelle se développe exponentiellement. C'est un modèle cosmologique qui décrit une période d'expansion accélérée dans l'univers primordial à des énergies très élevées. En 1981, Guth [35] fut le premier théoricien à proposer les règles de base de l'inflation. Il a proposé un modèle basé sur la théorie de la surfusion lorsque les transitions de phase cosmiques au vrai vide coïncident avec l'inflation de-Sitter. Après la théorie de Guth plusieurs modèles modifiés de l'univers inflationniste ont été proposés.

2.4 Création de particules : Une altarnative à l'inflation

Dans ce paragraphe, nous montrons que la création des particules dans un univers de FRW est un mécanisme alternatif à l'inflation qui a une phase d'expansion exponentielle courte en suivant la référence [36]. La création des particules dans un univers en expansion est liée à la thermodynamique de l'espace-temps. C'est ainsi que nous partons de la première loi de la thermodynamique qui s'écrit

$$dQ = d(\rho V) + pdV. \tag{2.27}$$

Divisons la dernière équation par dt, pour obtenir la relation entre le taux de variation de la chaleur, de l'énergie et du volume de l'univers

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) + p\frac{dV}{dt} \tag{2.28}$$

Pour la métrique de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr} + r^2 d\Omega\right) \tag{2.29}$$

les équations de fridmann sont

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho, \tag{2.30}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p. \tag{2.31}$$

Puisque l'univers FRW est dépendant du temps, la définition de l'horizon des événements cosmologiques est subtile. Cependant, nous pouvons définir l'horizon apparent connaissant les propriétés locales de l'espace-temps. C'est pour ça que nous écrivons la métrique de FRW sous la forme

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b + \tilde{r}^2\left(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2\right) \tag{2.32}$$

où $\tilde{r} = a(t)r$ et $x^a = (t, r)$. La métrique bidimensionnelle réduite h_{ab} est donnée par

$$h_{ab} = diag\left(-c^2, \frac{a^2}{1-kr^2}\right).$$

La position de l'horizon apparent est donnée par la racine $(\tilde{r}_A)$ de l'équation

$$h^{ab}\partial_a\tilde{r}\partial_b\tilde{r} = 0, \tag{2.33}$$

ce qui nous donne

$$\tilde{r}_A = \frac{c}{\sqrt{H^2 + \frac{kc^2}{a^2}}} \tag{2.34}$$

où H est le parametre d'Hubble parameter défini par $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Il est bien connu que la création des particules dans univers en expansion est un phénomène de nature thermique avec la température de Hawking [38]

$$T = \frac{\hbar c \kappa}{2\pi k_B}, \tag{2.35}$$

où κ est donnée par

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{-h}}\partial_a(\sqrt{-h}h^{ab}\partial_b\tilde{r}). \tag{2.36}$$

Compte tenu du fait que

$$\dot{\tilde{r}}_A = -H\tilde{r}_A^3\left(\dot{H} - \frac{k}{a^2}\right) \tag{2.37}$$

nous pouvons écrire

$$\kappa = \frac{\tilde{r}_A}{2}\left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{1}{\tilde{r}_A}\left(1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A}\right). \tag{2.38}$$

Pendant la phase de l'inflation, le facteur d'échelle de l'Univers prend la forme $a(t) \propto \exp(Ht)$ de sorte que $H = \frac{\dot{a}}{a} = cst$. Pour $H^2 >> c^2/a^2$, nous pouvons voir que $\tilde{r}_A \approx \frac{c}{H} = cst$ et $\dot{\tilde{r}}_A \approx 0$. La température de Hawking devient alors

$$T = \frac{\hbar\sqrt{H^2 + kc^2/a^2}}{2\pi k_B} \approx \frac{\hbar H}{2\pi k_B}. \tag{2.39}$$

En raison de l'isotropie de l'espace-temps FRW, le rayonnement est isotrope dans toutes les directions. Le gain de puissance effective dans l'univers est alors donné par la loi de rayonnement de Stephan-Boltzman

$$P = +\frac{dQ}{dt} = \sigma A_H T^4, \tag{2.40}$$

où $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$ est Stephan-Boltzman. La loi (2.27) devient alors

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + p\frac{dV}{dt} = \sigma A_H \left(\frac{\hbar H}{2\pi k_B}\right)^4. \tag{2.41}$$

Le volume et la surface de l'univers sont $V = \frac{4\pi}{3}\tilde{r}_A^3$ et $A_H = 4\pi\tilde{r}_A^2$, respectivement. En remplaçant les expressions de V, A_H et $\tilde{r}_A \approx c/H$ dans (2.41), nous obtenons

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{3\sigma}{c}\left(\frac{\hbar}{2\pi k_B}\right)^4 H^5. \tag{2.42}$$

Maintenant, nous utilisons les équation de Fridmann pour écrire la dernière équation sous la forme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3(1+\omega)\frac{\dot{a}}{a} = 3\omega_c(t)\frac{\dot{a}}{a}\ , \tag{2.43}$$

où l'équation d'état pour la matière ordinaire est $p = \omega\rho$ et le paramètre d'équation d'état dépendant du temps dû à la création de particules est $\omega_c(t) = \alpha\rho(t)$ avec $\alpha = \frac{\hbar G^2}{45c^7}$.

L'équation (2.43) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\alpha\dot{\rho}}{\omega + 1 - \alpha\rho} = -3\left(\omega + 1\right)\frac{\dot{a}}{a} \tag{2.44}$$

qui intégrable. Le résultat est

$$\ln\rho - \ln\left(1 + \omega - \alpha\rho\right) = -3\left(\omega + 1\right)\ln a + A \tag{2.45}$$

où A est une constante. En posant

$$A = -3\left(\omega + 1\right)\ln C \tag{2.46}$$

et

$$D = \left(\omega + 1\right)C^{-3(\omega+1)} \tag{2.47}$$

nous obtenons

$$\rho = \frac{Da^{-3(\omega+1)}}{1 + \frac{\alpha D}{\omega+1}a^{-3(\omega+1)}}. \tag{2.48}$$

Considérons maintenant la matière ordinaire avec $\omega = \frac{1}{3}$ et les particules créées

$$\rho = \frac{Da^{-4}}{1 + \frac{3\alpha D}{4}a^{-4}} = \frac{D}{a^4 + \frac{3\alpha D}{4}} \tag{2.49}$$

Pour un univers dominé les particules créées, nous avons $a^4 << \frac{3\alpha D}{4}$ et , par conséquent,

$$\rho = \frac{4}{3\alpha} = \frac{60c^7}{\hbar G^2} \tag{2.50}$$

L'équation de Friedmann devient alors

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{32\pi G}{9c^2\alpha} \tag{2.51}$$

dont la solution est

$$a = e^{Ht} \tag{2.52}$$

avec

$$H = \left(\frac{32\pi G}{9c^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.53}$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré un mécanisme de création de particules proposé pour l'inflation qui donne lieu à un terme de pression négative effictif dans les équations d'évolution de la densité d'énergie. Ceci conduit à une modification de la densité d'énergie en fonction du temps. En considérant le cas où $H^2 >> c^2/a^2$, nous avons montré que l'univers primordial peut subir une expansion exponentielle. Dans cette image, l'inflation est due à un effet quantique plutôt qu'à un champ scalaire.

Chapitre 3

Champs quantiques dans un univers en expansion

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons la théorie quantique des champs dans un univers en expansion à $(d+1)$ dimension. En premier lieu, nous commençons par la quantification canonique d'un champ scalaire libre. Ensuite, nous considérons le cas d'un champ scalaire complexe en présence d'un champ extérieur de nature gravitationnelle généré par l'expansion de l'univers. Dans ce cas, comme nous allons le voir, notre système n'a pas un vide bien déterminé et la notion de particule n'est pas toute à fait claire. On dit alors que le vide est perturbé par le champ extérieur et donc instable [19, 20, 21]. Ils existent cependant des instants à lesquels l'interprétation en termes des particules est possible. Généralement ces instants sont le passé et le future lointains. Après avoir exposé la quantification du champ complexe, nous passons à la création de particules à partir du vide et comment exprimer la probabilité de création d'une paire particule-antiparticule et le nombre de particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov. A la fin, nous considérons comme application la création de particules dans un espace de de-Sitter.

3.2 Champs quantiques libres

D'abord, nous commençons par la quantification du champ scalaire complexe libre dans l'espace de Minkowski à $D = d + 1$ dimensions

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 \tag{3.1}$$

$$d\vec{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2. \tag{3.2}$$

La densité lagrangienne de ce système est donnée par

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{3.3}$$

Il est bien clair que la dynamique de ce système est régie par l'équation de Klein Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi(x,t) = 0 \tag{3.4}$$

où l'opérateur $\Box$ est donné par

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle. \tag{3.5}$$

Les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.4) sont $f_k(\vec{x},t)$ et $f_k^*(\vec{x},t)$ avec

$$f_k(\vec{x},t) = N e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}, \tag{3.6}$$

où $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ et $\vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_d^2$. La constante de normalisation N se détermine à partir de la condition

$$f_k^* \dot{f}_k - \dot{f}_k^* f_k = i, \tag{3.7}$$

qui exprime la conservation du courant. La solution générale de l'équation de Klein Gordon est donc la somme de tous les modes $f_k(\vec{x},t)$ et $f_k^*(\vec{x},t)$

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[A_k f_k(\vec{x},t) + B_k^* f_k^*(\vec{x},t)\right] \tag{3.8}$$

$$\varphi^*(\vec{x},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[B_k f_k(\vec{x},t) + A_k^* f_k^*(\vec{x},t)\right]. \tag{3.9}$$

où A_k et B_k sont des constantes. Avant de passer à la quantification, on note que les moments conjugués de $\varphi(\vec{x},t)$ et $\varphi^*(\vec{x},t)$ sont donnés par

$$\hat{\pi}_\varphi(\vec{x},t) = i\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 \left[A_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)} - B_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}\right] \tag{3.10}$$

$$\hat{\pi}_{\varphi^*}(\vec{x},t) = i\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 \left[B_k\ e^{i\left(k_0 t - \vec{k}\vec{x}\right)} - A_k^*\ e^{-i\left(k_0 t - \vec{k}\,\vec{x}\right)}\right]. \tag{3.11}$$

La procédure de la quantification canonique consiste à considérer le champ $\varphi(\vec{x},t)$ et leur moment conjugué comme des opérateurs qui vérifient les relations de commutations suivantes

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] = i\delta\left(\vec{x} - \vec{x}'\right) \tag{3.12}$$

et

$$\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\varphi}(\vec{x}',t)\right] = \left[\hat{\pi}(\vec{x},t)\ ,\ \hat{\pi}(\vec{x}',t)\right] = 0. \tag{3.13}$$

Par conséquent, les coefficients A_k, B_k, A_k^* et B_k^* doivent être des opérateurs et les champs $\varphi(\vec{x},t)$ et $\varphi^+(\vec{x},t)$ s'écrivent sous la forme

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\hat{a}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{b}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right] \tag{3.14}$$

$$\varphi^+(\vec{r},t) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\hat{b}_k f_k(\vec{r},t) + \hat{a}_k^+ f_k^*(\vec{r},t)\right]. \tag{3.15}$$

Compte tenu des relations de commutation (3.12) et (3.13), les opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^+$, $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^+$ vérifient les relations de commutation suivantes

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k\ ,\ \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^d\,\delta\left(\vec{k} - \vec{k}'\right) \tag{3.16}$$

et

$$\left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}^+_{k'}\right] = \left[\hat{a}_k\ ,\ \hat{b}_k\right] = 0. \tag{3.17}$$

Par définition le Hamiltonien de ce système est donné par

$$H = \int d^d x\ \left(\pi_\varphi \dot{\varphi} + \pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L}\right). \tag{3.18}$$

En faisant un calcul explicite, nous arrivons au résultat suivant

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_0 (\hat{a}^+_k\ \hat{a}_k\ + \hat{b}^+_k\ \hat{b}_k), \tag{3.19}$$

De la même manière, nous pouvons montrer que l'opérateur de charge est donné par

$$Q = e \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (\hat{a}^+_k\ \hat{a}_k\ - \hat{b}^+_k\ \hat{b}_k). \tag{3.20}$$

A ce néveau, nous remarquons que H et Q sont diagonals, ce qui nous permet d'interpréter les opérateurs $\hat{a}^+_k$ et a_k comme les opérateurs de création et d'annihilation de particules et les opérateurs b^+_k et b_k comme les opérateurs de création et d'annihilation des antiparticules. Les opérateurs $N_a = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{a}^+_k\ \hat{a}_k$ et $N_b = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{b}^+_k\ \hat{b}_k$ représentent, respectivement, le nombre de particules et le nombre d'antiparticules. L'état qui vérifie la condition $N_a \left|0\right\rangle = N_b \left|0\right\rangle$ est dit l'état du vide.

3.3 Champs quantiques dans l'univers de FRW

Considérons maintenant, un champ scalaire complexe dans un espace-temps de FRW à $(D = d + 1)$ dimensions décrit par la métrique

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2\right]. \tag{3.21}$$

Il est bien connu que l'action de ce système s'écrit sous la forme

$$S = \int d^D x \mathcal{L}. \tag{3.22}$$

où $\mathcal{L}$ est la densité lagrangienne du champ scalaire massif dans un espace courbe

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(-g^{\mu\nu}\partial_\mu \Phi \partial^*_\nu \Phi - m^2 \Phi\Phi^* - \xi R \Phi\Phi^*\right) \tag{3.23}$$

avec $\sqrt{-g} = \sqrt{-\left|\det g_{\mu\nu}\right|} = a^d(t)$. Les termes $g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu^*\Phi$ et $\xi R\Phi\Phi^*$, où R est le scalair de Ricci et ξ est une constante numérique, représentent le couplage entre le champ complexe et le champs gravitationnel.

En appliquant le principe du moindre action ($\delta S = 0$), nous obtenons

$$\delta S = \int d^{d+1}x \left[-\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\right) - \sqrt{-g}\left(m^2 + \xi R\right)\Phi\right]\delta\Phi^* = 0 \tag{3.24}$$

pour $\delta\Phi^*$quelconque. L'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ gravitationnel est donc

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\Phi\right) + \left(m^2 + \xi R\right)\Phi = 0. \tag{3.25}$$

Cette équation peut être écrite aussi sous la forme suivante

$$\left(\Box_g + m^2 + \xi R\right)\Phi = 0 \tag{3.26}$$

avec

$$\Box_g = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\right). \tag{3.27}$$

3.3.1 Transformation conforme

Pour transformer la métrique (**??**) en une forme conformément minkowskienne, nous utilisons le temps conforme η plutôt que le temps cosmique t avec

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \tag{3.28}$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ exprimé par la nouvelle variable η est noté $a(\eta)$, ce qui nous donne la forme suivante

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\vec{x}^2). \tag{3.29}$$

Avant de dériver l'équation de Klein Gordon par rapport au temps conforme, rappelons d'abord que les connexions de Christoffel pour l'espace temps de FRW sont données par

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{3.30}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.31}$$

$$\Gamma^i_{jl} = \Gamma^i_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{00} = 0, \tag{3.32}$$

ce qui donne les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{00} = d\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.33}$$

$$R_{ii} = (d-1)\,\dot{a}^2 + \ddot{a}a. \tag{3.34}$$

Le scalaire de Ricci R est alors

$$R = d\,(d-1)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2d\frac{\ddot{a}}{a} \tag{3.35}$$

ou bien, en termes du temps conforme,

$$R = d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a^3}$$

Notons que le point $(\cdot)$ indique la dérivée par rapport à t et le prime $(')$ indique la dérivée par rapport à η.

Pour obtenir l'équation de Klein Gordon avec le temps conforme η, nous essayons d'écrire la quantité $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0\left(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Phi\right) + \xi R\Phi$ sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0\left(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Phi\right) + \xi R\Phi = a^{-s+q}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(a^s\Phi\right) \tag{3.36}$$

Il vient alors

$$\left[a^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + (d-1)\,a^{-3}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\Phi + \xi\left(d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a^3}\right)\Phi =$$
$$\left[a^q\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2sa^{q-1}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\eta} + s\,(s-1)\,a^{q-2}\left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)^2 + sa^{q-1}\frac{\partial^2 a}{\partial\eta^2}\right]\Phi$$

ce qui nous impose de prendre

$$\begin{aligned} q &= -2 \\ s &= \frac{d-1}{2} \\ \xi &= \frac{d-1}{4d}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon se simplifie et devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + m^2a^2\right]\left(a^s\Phi\right) = 0. \tag{3.38}$$

Maintenant, nous introduisons le nouveau champ $\psi(\vec{x},\eta) = a^s\Phi$ pour écrire a dernière équation devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + m^2a^2\right]\psi(\vec{x},\eta) = 0 \tag{3.39}$$

Cette équation permet d'étudier le comportement et le mouvement des particules scalaires dans l'univers de FRW. Pour $\xi \neq \frac{d-1}{4d}$, l'équation de Klein Gordon devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \Delta + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right)\left(d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a}\right) + m^2a^2\right]\psi(\vec{x},\eta) = 0. \tag{3.40}$$

Dans le cas général, le champ $\psi(\vec{x},\eta)$ se décompose de la manière suivante

$$\psi\,(\vec{x},\eta) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[A_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k\,(\eta) + B_k^* \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^*\,(\eta)\right] \tag{3.41}$$

où $\varphi_k\,(\eta)$ et $\varphi_k^*\,(\eta)$ sont solutions à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \Omega_k^2\,(\eta)\right]\varphi(\eta) = 0, \tag{3.42}$$

où la fonction $\Omega_k^2\,(\eta)$ est donnée par

$$\Omega_k^2\,(\eta) = \omega^2\,(\eta) + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right)\left(d\,(d-3)\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2d\frac{a''}{a}\right), \tag{3.43}$$

avec

$$\omega^2\,(\eta) = k^2 + m^2a^2. \tag{3.44}$$

Les solutions $\varphi_k\,(\eta)$ et $\varphi_k^*\,(\eta)$ vérifient la condition de normalisation

$$\varphi_k^*\varphi_k' - \varphi_k\varphi'^*_k = i. \tag{3.45}$$

3.3.2 Quantification

Passons maintenant à la quantification, en remplaçant les champs $\psi(\vec{x},\eta)$ et $\pi(\vec{x},\eta)$ par les opérateurs $\hat{\psi}(\vec{x},\eta)$ et $\hat{\pi}(\vec{x},\eta)$ qui verifient les relations de commutations suivantes

$$\begin{aligned}\left[\hat{\psi}(\vec{x},\eta),\hat{\psi}(\vec{x}',\eta)\right] &= \left[\hat{\pi}(\vec{x},\eta),\hat{\pi}(\vec{x}',\eta)\right] = 0 \\ \left[\hat{\psi}(\vec{x},\eta),\hat{\pi}(\vec{x}',\eta)\right] &= i\delta^d\,(x-x')\,.\end{aligned} \tag{3.46}$$

En remplaçant les constantes A_k et B_k^* par les opérateurs $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k^+$, nous obtenons les expressions de $\hat{\psi}(\vec{x},\eta)$ et $\hat{\pi}(\vec{x},\eta)$

$$\hat{\psi}(\vec{x},\eta) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[\hat{a}_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^+(\eta) + \hat{b}_k^+ \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^-(\eta)\right] \quad (3.47)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x},\eta) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[\hat{a}_k \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k'^+(\eta) + \hat{b}_k^+ \exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right)\varphi_k^{-\prime}(\eta)\right] \quad (3.48)$$

avec $\varphi_k^+(\eta) = \varphi_k(\eta)$ et $\varphi_k^-(\eta) = \varphi_k^*(\eta)$. Grâce à (3.46), nous déterminons les relations de commutations des opérateurs $\hat{a}_k^+$,$\hat{b}_k^+$, $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+\right] = \left[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+\right] = (2\pi)^d\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right). \quad (3.49)$$

Tous les autres commutateurs sont nuls.

Comme l'équation (3.42) est de l'ordre deux, elle admet plusieurs ensembles $\left\{\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)\right\}$ de solutions linéairement indépendantes. Donc la décomposition (3.41) n'est pas unique. Pour choisir la bonne décomposition, considérons l'Hamiltonien qui s'écrit en fonction des opérateurs de créations et d'annihilations comme suit

$$H = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[E_k(\eta)\left(\hat{a}_k\hat{a}_k^+ + \hat{b}_k^+\hat{b}_k\right) + F_k^*(\eta)\,\hat{b}_k\hat{a}_k + F_k(\eta)\,\hat{a}_k^+\hat{b}_k^+\right] \quad (3.50)$$

avec

$$E_k(\eta) = \left|\varphi_k'(\eta)\right|^2 + \Omega_k^2(\eta)\left|\varphi_k(\eta)\right|^2 \quad (3.51)$$

$$F_k(\eta) = \varphi_k'^2(\eta) + \Omega_k^2(\eta)\,\varphi_k^2(\eta). \quad (3.52)$$

Il est bien clair que le Hamiltonien n'est pas diagonal en fonction des opérateurs de créations et d'annihilations des particules et des antiparticules, il contient des termes de mixtes $\hat{a}_k^+\hat{b}_k^+$ et $\hat{b}_k\hat{a}_k$.

3.3.3 Interprétation en termes de particules

Notons d'abord que pour une métrique de Minkowski, i.e. champ gravitationnel nul, $E_k(\eta)$ doit être constante et $F_k(\eta)$ doit être nul. Pour la métrique de FRW, nous pouvons voir qu'il existe deux couples $\left\{\varphi_k^+(\eta), \varphi_k^-(\eta)\right\}$ qui rendent le Hamiltonien diagonal. Le premier couple se comporte à $(-\infty)$ comme

$$\varphi_k^\pm(\eta) \underset{\eta\to-\infty}{\longrightarrow} e^{\mp i\int \Omega d\eta}, \quad (3.53)$$

En effet, on suppose que $a(\eta)$ prend des valeurs constantes pour $(\eta \to \pm\infty)$, donc tout les dérivées de a sont nulles. Dans ce cas nous avons

$$E_k(\eta \to -\infty) = \Omega_{in} \qquad \text{et} \qquad F_k(\eta \to -\infty) = 0 \tag{3.54}$$

et

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \Omega_{in}\, \left(\hat{a}_{k,in}\hat{a}^{+}_{k,in} + \hat{b}^{+}_{k,in}\hat{b}_{k,in} \right). \tag{3.55}$$

avec

$$\Omega_{in} = \sqrt{k^2 + m^2 a_1^2}, \tag{3.56}$$

où $a_1 = a(\eta \to -\infty)$. Le deuxième couple se comporte à $(\eta \to +\infty)$ comme

$$\varphi_k^{\pm}(\eta) \underset{\eta \to +\infty}{\to} e^{\mp i \int \Omega d\eta}, \tag{3.57}$$

Ici, nous obtenons

$$E_k(\eta \to +\infty) = 2\Omega_{out} \qquad \text{et} \qquad F_k(\eta \to +\infty) = 0 \tag{3.58}$$

et

$$H = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \Omega_{out} \left(\hat{a}_{k,out}\hat{a}^{+}_{k,out} + \hat{b}^{+}_{k,out}\hat{b}_{k,out} \right). \tag{3.59}$$

où

$$\Omega_{out} = \sqrt{k^2 + m^2 a_2^2}, \tag{3.60}$$

où $a_1 = a(\eta \to -\infty)$. Nous remarquons que le Hamiltonien est donc diagonal, pour deux états du vide $|0_{in}\rangle$ et $|0_{out}\rangle$, avec $\hat{a}_{k,in}|0_{in}\rangle = \hat{b}_{k,in}|0_{in}\rangle = 0$ et $\hat{a}_{k,out}|0_{out}\rangle = \hat{b}_{k,out}|0_{out}\rangle = 0$, où l'état $|0_{in}\rangle$ est un état du vide initial dans le passé lointain et $|0_{out}\rangle$ est un état du vide final dans le futur lointain. Ceci nous donne deux définitions des particules ; les particules "in" associées au vide $|0_{in}\rangle$ et le particules "out" associées au vide $|0_{out}\rangle$ et ainsi les particules créées spontanément sont des particules "out" par rapport au vide "in".

3.3.4 Création de particules

Nous pouvons passer facilement d'un vide à l'autre grâce à la transformations de Bogoliubov qui établi le lien entre les états in" et "out"

$$\varphi^{+}_{in}(\eta) = \alpha\varphi^{+}_{out}(\eta) + \beta\varphi^{-}_{out}(\eta). \tag{3.61}$$

$$\varphi^{-}_{in}(t) = \beta^{*}\varphi^{+}_{out}(t) + \alpha^{*}\varphi^{-}_{out}(\eta). \tag{3.62}$$

où α et β sont les coéfficients de Bogoliubov qui vérifient la condition suivante

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{3.63}$$

La relation entre les opérateurs de création et d'annihilation est

$$\hat{a}_{out} = \alpha \hat{a}_{in} + \beta \hat{b}_{in}^{+} \tag{3.64}$$

$$\hat{b}_{out}^{+} = \beta^{*} \hat{a}_{in} + \alpha^{*} \hat{b}_{in}^{+} \tag{3.65}$$

D'aprés ces dernières relations nous pouvons trouver le résultat suivant

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{in} \left| \hat{N}_{out} \right| 0_{in} \right\rangle &= \left\langle 0_{in} \left| a_{out}^{+} a_{out} \right| 0_{in} \right\rangle \\ &= |\beta|^2 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Ce qui signifie que le vide "in" peut contenir des particules "out" si $\beta \neq 0$. La densité des particules "out" dans l'état du vide "in" est donc $|\beta|^2$ et la probabilité de création d'une paire de particules "out" à partir du vide est

$$\begin{aligned} P_{créat} &= \frac{\left| \left\langle 0_{out} \left| a_{out} b_{out} \right| 0_{in} \right\rangle \right|^2}{\left| \left\langle 0_{out} \right| 0_{in} \right\rangle \right|^2} \\ &= \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2 . \end{aligned} \tag{3.67}$$

3.4 Application : l'espace de de-Sitter

Considérons comme application la création de particules scalaires dans l'espace de de-Sitter. En premier lieu, nous devons résoudre l'équation de Klein-Gordon. Ensuite, nous comparons les solutions obtenues avec les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobie, ce qui nous permet de classer ces solutions Klein Gordon en états "in" et "out". Finalement, à l'aide de la transformation de Bogoliubov nous calculons la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées.

3.4.1 Solutions exactes à l'équation de Klien Gordon

La métrique de de-Sitter représente un univers d'expansion accéléré où le facteur d'échelle est $a(t) = e^{Ht}$ et la métrique associé est définie comme

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht}(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2) \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{H^2\eta^2}(d\eta^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_d^2) \tag{3.69}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon se réduit à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+k^2+\frac{M^2}{H^2}\frac{1}{\eta^2}\right]\varphi_k\left(\eta\right)=0. \tag{3.70}$$

avec

$$M^2=m^2+\left(\xi-\frac{d-1}{4d}\right)d\left(d+1\right)H^2. \tag{3.71}$$

Pour trouver les solutions de cette équation nous faisons d'abord le changement $\rho=c\eta$, où c est un constante.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho^2}+\frac{M^2}{H^2}\frac{1}{\rho^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)=0 \tag{3.72}$$

Maintenant, nous écrivons $\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)$ sous la forme

$$\tilde{\varphi}_k\left(\rho\right)=\rho^s g\left(\rho\right) \tag{3.73}$$

pour obtenir l'équation différentielle

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2s}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{M^2}{H^2}+s\left(s-1\right)\right]+\frac{k^2}{c^2}\right\}g\left(\rho\right)=0 \tag{3.74}$$

Dans le cas ou $s=\frac{1}{2}$ et $c=-k$, la dernière équation prend la forme de l'équation de Bessel [43]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(1-\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)\right]g\left(\rho\right)=0$$

où le paramètre λ est donné par

$$\lambda=i\sqrt{\frac{M^2}{H^2}-\frac{1}{4}}=i\tilde{\lambda}.$$

L'équation de Bessel admet plusieurs couples de solutions. Le premier ensemble de solutions est formé des fonctions $J_\lambda\left(\rho\right)$ et $J_{-\lambda}\left(\rho\right)$ qui ont le comportement [43]

$$\lim_{\rho\to0}J_\lambda\left(\rho\right)\approx\rho^\lambda, \tag{3.75}$$

$$\lim_{\rho\to0}J_{-\lambda}\left(\rho\right)\approx\rho^{-\lambda}, \tag{3.76}$$

Nous pouvons également écrire les solutions de l'équation de Bessel en termes des fonctions de Hankel $H_\lambda^{(1)}\left(\rho\right)$ et $H_\lambda^{(2)}\left(\rho\right)$ qui se comportent à $\eta\to-\infty$ comme suit [43]

$$H_{\lambda}^{(1)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{i\left(-k\eta-\frac{\pi\lambda}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \text{pour } -\pi < \arg(-k\eta) < \pi \tag{3.77}$$
$$H_{\lambda}^{(2)}(-k\eta) \simeq \sqrt{-\frac{2}{\pi k\eta}} e^{-i\left(-k\eta-\frac{\pi\lambda}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \text{pour } -\pi < \arg(-k\eta) < \pi.$$

3.4.2 Les états "in" et "out"

Pour avoir le bon choix des états "in" et "out", nous déterminons d'abord les états semi-classiques solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi que l'on obtient à partir de l'équation de Klein Gordon

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\hbar^2\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\upsilon}\partial_\upsilon)+m^2\right]\varphi=0, \tag{3.78}$$

en écrivant $\varphi = e^{\frac{i}{\hbar}s}$ et en faisant la limite classique $\hbar \to 0$. Nous obtenons alors l'équation de Hamilton-Jacobi

$$-\left(\frac{dS}{d\eta}\right)^2+\left(\frac{dS}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dS}{dx_2}\right)^2+...+\left(\frac{dS}{dx_d}\right)^2+M^2a^2=0. \tag{3.79}$$

L'action S solution de cette équation s'écrit comme

$$S=\vec{k}.\vec{x}+\xi(\eta). \tag{3.80}$$

où la partie temporelle $\xi(\eta)$ vérifie l'équation suivante

$$\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2=k^2+M^2a^2. \tag{3.81}$$

La fonction $\xi(\eta)$ est alors donnée par

$$\xi(\eta)=\int\sqrt{k^2+\frac{M^2}{H^2\eta^2}}d\eta \tag{3.82}$$

Si nous faisons le changement de variable $\eta=\frac{1}{u}$, nous obtenons

$$\xi(\eta)=-\frac{M}{H}\int\frac{\sqrt{\frac{k^2H^2}{M^2}+u^2}}{u^2}du \tag{3.83}$$

A l'aide de l'intégrale suivante [43]

$$\int\frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u^2}du=-\frac{\sqrt{b^2+u^2}}{u}+\ln(u+\sqrt{b^2+u^2})+cst \tag{3.84}$$

nous obtenons

$$\xi\left(\eta\right)=-\left[-\frac{\sqrt{k^{2}+\frac{M^{2}}{H^{2}}u^{2}}}{u}+\frac{M}{H}\ln(u+\sqrt{\frac{k^{2}H^{2}}{M^{2}}+u^{2}})\right] \tag{3.85}$$

qui s'écrit aussi

$$\xi\left(\eta\right)=\sqrt{k^{2}\eta^{2}+\frac{M^{2}}{H^{2}}}+\ln\left(\frac{1}{\eta}+\sqrt{\frac{k^{2}H^{2}}{M^{2}}+\frac{1}{\eta^{2}}}\right)^{-\frac{m}{H}} \tag{3.86}$$

Les états d'énergie positive et négatives doivent alors se comporter comme

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta\to-\infty} e^{\mp\frac{i}{\hbar}\xi(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta} \tag{3.87}$$

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta\to 0} e^{\mp\frac{i}{\hbar}\xi(\eta)} \sim \eta^{\mp i\frac{m}{H}} \tag{3.88}$$

Grâce à ces données, nous pouvons écrire les états "in" et "out" comme suit

$$\varphi_{in}^{-} = N_1 H_{\lambda}^{1}\left(-k\eta\right) \tag{3.89}$$

$$\varphi_{in}^{+} = N_1^{*} H_{\lambda}^{2}\left(-k\eta\right) \tag{3.90}$$

et

$$\varphi_{out}^{+} = N_2 J_{-\lambda}\left(-k\eta\right) \tag{3.91}$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_2^{*} J_{\lambda}\left(-k\eta\right) \tag{3.92}$$

3.4.3 Création des particules

Maintenant, pour établir la transformation des Bogoliubov nous utilisons les relation entre les fonctions de Bessel et Hankel [43]

$$\begin{aligned} H_{\lambda}^{(1)}\left(-k\eta\right) &= \frac{J_{-\lambda}\left(-k\eta\right)-e^{-i\lambda\pi}J_{\lambda}\left(-k\eta\right)}{i\sin\left(\pi\lambda\right)} \\ H_{\lambda}^{(2)}\left(-k\eta\right) &= \frac{e^{i\lambda\pi}J_{\lambda}\left(-k\eta\right)-J_{-\lambda}\left(-k\eta\right)}{i\sin\left(\pi\lambda\right)} \end{aligned} \tag{3.93}$$

Nous obtenons alors

$$\varphi_{k,in}^{+}\left(\eta\right) = \alpha_k\varphi_{k,out}^{+}\left(\eta\right)+\beta_k\varphi_{k,out}^{-}\left(\eta\right) \tag{3.94}$$

$$\varphi_{k,in}^{-}\left(\eta\right) = \beta_k^{*}\varphi_{k,out}^{+}\left(\eta\right)+\alpha_k^{*}\varphi_{k,out}^{-}\left(\eta\right) \tag{3.95}$$

où les coefficients de Bogoliubov α_k et β_k sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{N_1}{N_2}\frac{1}{i\sin(\pi\lambda)} \tag{3.96}$$

$$\beta_k = -\frac{N_1}{N_2^*}\frac{e^{i\lambda\pi}}{i\sin(\pi\lambda)}. \tag{3.97}$$

La probabilité de créer une paire dans l'état $\vec{k}$ est alors

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = e^{-2\tilde{\lambda}\pi} \tag{3.98}$$

Pour la densité des particules créées nous obtenons l'expression

$$n(k) = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{2\tilde{\lambda}\pi} - 1} \tag{3.99}$$

qui se ressemble à la distribution de Bose-Einstien.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la théorie quantique des champs dans l'univers de FRW où nous avons prouvé que l'Hamiltonien d'un champ scalaires complexe en présence d'un champ exterieur n'est pas toujours diagonal. Nous avons montré aussi qu'il existent des modes pour lesquels l'Hamiltonien est diagonal. Ces modes sont appelés les modes "in" et "out". A partir de la relation entre ces modes (transformation de Bogoliubov) nous avons pu exprimer la probabilité de création d'une paire de particule et la densité des particules créees en termes des coefficients de Bogoliubov. Comme application, nous considérons la création des particules dans l'espace de-Sitter où l'équation de Klein Gordon associée admet des solutions exactes bien connues.

Chapitre 4

Création des particules scalaires dans un univers de de-Sitter en présence champ électrique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules scalaires dans un univers de de-Sitter à D dimensions à partir du vide. Comme dans le chapitre précédent, nous écrivons d'abord l'équation de Klein Gordon correspondante et nous cherchons ses solutions. Ensuite, nous utilisons les solutions semi-classiques de l'équation d'Hamilton-Jacobi pour classer les solutions de Klein Gordon en état "in" et "out". A partir de la relation de Bogolubov qui lie ces états nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des particules créées. Finalement, nous faisons la somme sur tous les états possibles pour obtenir le nombre total des particules créées et le Lagrangien effectif de Schwinger.

4.2 Equation de Klein Gordon en présence d'un champ électrique

Pour commencer, nous considérons un champ de matière scalaire de masse m et de charge e soumis à un champ gravitationnel décrit par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et à un champ électromagnétique externe représenté par le quadri-potentiel A_μ. La prescription de couplage minimal nous conduit à l'équation de Klein-Gordon suivante

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(i\partial_{\mu}-eA_{\mu}\right)\left[g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\left(i\partial_{\nu}-eA_{\nu}\right)\phi\right]+\left(m^{2}+\xi R\right)\phi=0 \tag{4.1}$$

Considérons la jauge

$$A_{\mu}=(0,0,...,A_{d}) \tag{4.2}$$

où la composante A_d ne dépend que du temps.

Maintenant, nous écrivons $\phi\left(\vec{x},\eta\right)$ sous la forme

$$\phi\left(\vec{x},\eta\right)=e^{i\vec{k}\vec{x}}\chi\left(\eta\right) \tag{4.3}$$

La fonction $\chi\left(\eta\right)$ vérifie alors l'équation

$$\left[\frac{1}{a^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial\eta^{2}}+\left(d-1\right)\frac{a'}{a^{3}}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1}{a^{2}}\left(k_{\perp}^{2}+\left(k_{d}-eA_{d}\right)^{2}\right)-\left(m^{2}+\xi R\right)\right]\chi\left(\eta\right)=0 \tag{4.4}$$

Nous posons encore

$$\chi\left(\eta\right)=\frac{1}{a^{\frac{d-1}{2}}}\varphi\left(\eta\right) \tag{4.5}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\eta^{2}}+\left(k_{\perp}^{2}+\left(k_{d}-eA_{d}\right)^{2}\right)+m^{2}a^{2}+\left(\xi-\frac{d-1}{4d}\right)\left(d\left(d-3\right)\left(\frac{a'}{a}\right)^{2}+2d\frac{a''}{a}\right)\right]\varphi\left(\eta\right)=0 \tag{4.6}$$

Pour l'espace de de-Sitter, le facteur d'échelle est

$$a\left(\eta\right)=-\frac{1}{H\eta} \tag{4.7}$$

et ainsi pour avoir des solutions analytiques nous choisissons pour le champ électrique la forme suivante

$$A_{d}\left(\eta\right)=-\frac{E_{0}}{H^{2}\eta}. \tag{4.8}$$

Dans ce cas l'équation de Klein Gordon pour la fonction $\varphi\left(\eta\right)$ devient

$$\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\eta^{2}}+k^{2}-2ek_{d}\frac{E_{0}}{H^{2}\eta}+\frac{\mathcal{M}^{2}}{H^{2}\eta^{2}}\right]\varphi\left(\eta\right)=0 \tag{4.9}$$

où

$$\mathcal{M}^2 = M^2 + \frac{e^2 E_0^2}{H^2} \tag{4.10}$$

et

$$M^2 = m^2 + \left(\xi - \frac{d-1}{4d}\right) d\,(d+1)\,H^2. \tag{4.11}$$

Pour resoudre cette equation, nous utilisons la changement de variable

$$\eta = a\rho \tag{4.12}$$

Nous obtenons alors l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + a^2 k^2 - \frac{2eE_0 k_d}{H^2}\frac{a}{\rho} + \frac{\mathcal{M}^2}{H^2 \rho^2}\right] \tilde{\varphi}\,(\rho) = 0 \tag{4.13}$$

qui prend la forme de whittaker pour $a = \frac{i}{2k}$[43],

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\rho^2}\right] \tilde{\varphi}\,(\rho) = 0 \tag{4.14}$$

où les constantes μ et λ sont donnée par :

$$\lambda = -\frac{ieE_0}{H^2}\frac{k_d}{k} = i\widetilde{\lambda} \tag{4.15}$$

et

$$\mu = i\sqrt{\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} - \frac{1}{4}} = i\widetilde{\mu} \tag{4.16}$$

L'équation de whittaker admets deux ensembles des solutions linéarement indépendantes qui peuvent etre écrites en termes des fonction de whittaker

$$M_{\lambda,\mu}\,(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} M\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho\right) \tag{4.17}$$

et

$$W_{\lambda,\mu}\,(\rho) = \rho^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} U\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \rho\right) \tag{4.18}$$

où $M\,(a, b, \rho)$ et $U\,(a, b, \rho)$ sont les fonction de Kummer.

4.3 Choix des état "in" et "out"

Maintenant, nous devons classer les solutions exactes obtenues en états "in" et "out" afin d'étudier la création des particules. Pour cela il faut solutionner l'équation de Hamilton-Jacobi. Nous cherchons d'abord, les solutions semi-classiques de l'équation d' Hamilton-Jacobi

$$g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu S + eA_\mu\right)\left(\partial_\nu S + eA_\nu\right) - m^2 = 0 \tag{4.19}$$

En séparant la partie dépendante de $\vec{r}$

$$S = G\left(\eta\right) + \vec{k}.\vec{r}, \tag{4.20}$$

nous obtenons pour $G\left(\eta\right)$ l'équation suivante

$$\left(\frac{dG}{d\eta}\right)^2 = k_\perp^2 + \left(k_d + \frac{E_0}{H^2\eta}\right)^2 + \frac{e^2E_0^2}{H^4\eta^2} + \frac{M^2}{H^2\eta^2} \tag{4.21}$$

dont une solution formelle est donnée par

$$G\left(\eta\right) = \int d\eta\sqrt{k_\perp^2 + \left(k_d + \frac{E_0}{H^2\eta}\right)^2 + \frac{e^2E_0^2}{H^4\eta^2} + \frac{M^2}{H^2\eta^2}} \tag{4.22}$$

A l'aide de l'intégrale [43]

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x} &= \sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} - \sqrt{\alpha}\,\mathrm{arg\,sinh}\left(\frac{2\alpha+\beta x}{x\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\right)\\ &\quad+\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\mathrm{arg\,sinh}\left(\frac{2\gamma x+\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

où α, β et γ sont des nombres réels, avec $\gamma > 0$ et $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}G\left(\eta\right) &= \sqrt{k^2\eta^2 + \frac{M^2}{H^2} + \frac{2k_d eE_0}{H^2}\eta}\\ &\quad-\frac{M}{H}\ln\left[\frac{\frac{M^2}{H^2}+\frac{k_d eE_0}{H^2}\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\frac{M^2}{H^2}+\frac{2k_d eE_0}{H^2}\eta}{\eta\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}\eta}}\right)^2+1}\right]\\ +\quad &\frac{eE_0k_d}{H^2k}\ln\left[\frac{k^2\eta+\frac{eE_0}{H^2}k_d}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}} + \sqrt{\left(\frac{k^2\eta+\frac{eE_0}{H^2}k_d}{\sqrt{\frac{M^2}{H^2}k^2-\frac{k_d^2e^2E_0^2}{H^2}}}\right)^2+1}\right]\end{aligned} \tag{4.24}$$

Nous pouvons alors voir que

$$G(\eta) \sim \left\{ \begin{array}{c} -\frac{M}{H}\ln(-\eta) + c^{st} \text{ pour } \eta \to 0 \\ k\eta + c^{st} \text{ pour } \eta \to -\infty \end{array} \right\} \tag{4.25}$$

Les solutions $\varphi_{in}^{\pm}$ et $\varphi_{out}^{\pm}$ doivent se comporter comme suit

$$\varphi_{in}^{\pm} = \lim_{\eta \to -\infty} e^{\mp iG(\eta)} \sim e^{\pm ik\eta} \tag{4.26}$$

et

$$\varphi_{out}^{\pm} = \lim_{\eta \to 0} e^{\mp iG(\eta)} \sim (k\eta)^{\mp i\frac{m}{H}} . \tag{4.27}$$

De l'autre coté, les fonctions $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ ont, à $\rho \to -\infty$, le comportement asymptotique

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) \sim (-\rho)^{\lambda} e^{-\frac{\rho}{2}} \sim e^{-ik\eta} \tag{4.28}$$

et les fonction $M_{\lambda,\mu}(\rho)$ ont au voisinage de $\rho \to 0$, le comportement asymptotique

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) \sim (\rho)^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \sim (k\eta)^{\mu} \tag{4.29}$$

Les états "in" sont alors données en fonction de $W_{\lambda,\mu}(\rho)$ et $W_{-\lambda,\mu}(-\rho)$

$$\varphi_{in}^{+} = N_{in} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{4.30}$$

$$\varphi_{in}^{-} = N_{in}^{*} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{4.31}$$

et les états "out" sont les fonctions $M_{\lambda,-\mu}(\rho)$ et $M_{-\lambda,\mu}(-\rho)$

$$\varphi_{out}^{+} = N_{out} M_{\lambda,-\mu}(\rho) \tag{4.32}$$

$$\varphi_{out}^{-} = N_{out}^{*} M_{-\lambda,\mu}(-\rho) . \tag{4.33}$$

4.4 Normalisation des solutions

Nous considérons maintenant le produit scalaire entre les deux champs $\phi_1\left(\vec{x},\eta\right)$ et $\phi_2\left(\vec{x},\eta\right)$ défini dans un espace à $D = d + 1$ dimensions par

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int d^d x \sqrt{|g|} g^{0\nu} \left(\varphi^+ \partial_\nu \varphi^- - \varphi^- \partial_\nu \varphi^+ \right). \tag{4.34}$$

La condition de normalisation des états "in" est

$$i \int d^d x \sqrt{|g|} g^{00} \left(\phi^+_{k,in} \partial_0 \phi^-_{k',in} - \phi^-_{k,in} \partial_0 \phi^+_{k',in} \right) = (2\pi)^d \, \delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \tag{4.35}$$

Compte tenu du fait que

$$\delta \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \exp \left[i\vec{x} \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \right],$$

la condition de normalisation se réduit à

$$\varphi^+_{k,in} \partial_0 \varphi^-_{k',in} - \varphi^-_{k,in} \partial_0 \varphi^+_{k',in} = i. \tag{4.36}$$

Comme le produit scalaire ne dépend pas du temps comforme η, nous pouvons utiliser les comportements asymtotiques pour calculer les constantes de normalisation. Nous prenons alors

$$\varphi^+_{in} = N_{in} \left(-2ik\eta \right)^\lambda e^{-ik\eta} \tag{4.37}$$

et

$$\varphi^-_{in} = N^*_{in} \left(2ik\eta \right)^\lambda e^{ik\eta} \tag{4.38}$$

En utilisant la propriété

$$(-i2k)^{-\lambda} (i2k)^\lambda = (-i)^{-\lambda} (i)^\lambda (2k)^{-\lambda} (2k)^\lambda = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{-\lambda} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^\lambda = e^{i\pi\lambda} \tag{4.39}$$

nous obtenons

$$|N_{in}|^2 = \frac{e^{-i\pi\lambda}}{2k} \tag{4.40}$$

et, alors

$$N_{in} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}}}{\sqrt{2k}}. \tag{4.41}$$

Pour les états "*out*" nous btenons

$$|N_{out}|^2 = \frac{i}{4\mu k} e^{-\pi\tilde{\mu}} \tag{4.42}$$

et

$$N_{out} = \sqrt{\frac{1}{4\tilde{\mu}k}} e^{-\frac{\pi}{2}\tilde{\mu}}. \tag{4.43}$$

4.5 Création des particules

Nous pouvons maintenant calculer la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées à l'aide de la transformation de Bogoliubov qui se déduit de la relation entre les fonctions de Whittaker [43]

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(2\mu-1)\,e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{\Gamma(2\mu+1)\,e^{i\pi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{4.44}$$

avec$-\frac{\pi}{2} < \arg\rho < \frac{3\pi}{2}$ et $2\mu \neq -1, -2, ...$

Les fonctions $\varphi_{in}^{+}(\eta)$ et $\varphi_{in}^{-}(\eta)$ peuvent être exprimé en termes des fonctions $\varphi_{out}^{+}(\eta)$ et$\varphi_{out}^{-}(\eta)$ comme suit

$$\varphi_{out}^{+}(\eta) = \alpha\varphi_{in}^{+}(\eta) + \beta\varphi_{in}^{-}(\eta) \tag{4.45}$$

$$\varphi_{out}^{-}(\eta) = \alpha^{*}\varphi_{in}^{-}(\eta) + \beta^{*}\varphi_{in}^{+}(\eta) \tag{4.46}$$

où les coefficients de Bogoliubov sont donnés par

$$\alpha = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(1+i2\widetilde{\mu})\,e^{-\pi\widetilde{\lambda}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)\right)} \tag{4.47}$$

et

$$\beta = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(1+i2\widetilde{\mu})\,e^{-\pi\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}\right)\right)} \tag{4.48}$$

avec la condition

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{4.49}$$

La probabilité de création de particules est alors

$$p_k = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\left(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}\right)\right)}\right|^2 e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{4.50}$$

En utilisant la propriété

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh\pi x} \tag{4.51}$$

nous obtenons

$$p_k = \frac{\cosh\pi\left(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)}{\cosh\pi\left(\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}\right)}e^{-2\pi|\tilde{\mu}|} \tag{4.52}$$

$$p_k = \frac{\cosh\pi\left(|\tilde{\mu}|+\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)}{\cosh\pi\left(|\tilde{\mu}|-\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)}e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}$$

Pour la densité des particules créées nous pouvons utiliser la condition $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, pour obtenir

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} = \frac{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2}{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2} \tag{4.53}$$

Après un calcul simple nous obtenons l'expresion de la densité des particules céées dans l'espace de de-Sitter avec un champ électrique

$$\begin{aligned} n(k) &= \frac{\cosh\pi\left(|\tilde{\mu}|+\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}}{\cosh\pi\left(|\tilde{\mu}|-\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)-\cosh\pi\left(|\tilde{\mu}|+\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)e^{-2\pi|\tilde{\mu}|}} \\ &= \frac{\exp\left(2\pi\frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)+\exp\left(-2\pi\left|\tilde{\mu}\right|\right)}{2\cos\left(2\pi\left|\tilde{\mu}\right|\right)}. \end{aligned}$$

Comme la création de particules est bien définie uniquement dans la limite adiabatique $M >> H$ la densité des particules devient

$$n\left(\vec{k}\right) = \exp\left[-2\pi\left(|\mu| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)\right]. \tag{4.54}$$

4.6 Nombre total des particules créées

Considéron maintenant le nombre de particules défini par

$$N = \int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)} n\left(\vec{k}\right) \tag{4.55}$$

$\frac{dV_d dk^d}{(2\pi)^d a^d(t)}$ est le nombre des états dans l'élément de l'espace des phase $dV_d dk^d$. Le facteur $a^d(t)$ au dénominateur exprime la dilution des particules par l'expansion de l'univers. Nous avons

$$dV_d = \prod_{i=1}^{d} dx_i \tag{4.56}$$

$$d^d k = \prod_{i=1}^{d} dk_i. \tag{4.57}$$

Nous définissons le coordonnées sphériques à $(d+1)$ dimension

$$\begin{aligned} k_1 &= k\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \\ k_2 &= k\cos\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \\ k_3 &= k\cos\theta_2\sin\theta_3...\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \\ &\vdots \\ k_d &= k\cos\theta_{d-1} \end{aligned}$$

avec

$$d^d k = \prod_{i=1}^{d} dk_i = k^{d-1}dkd\Omega \tag{4.58}$$

où l'angle solide est donnée par

$$d\Omega = \prod_{i=1}^{d-1}(\sin\theta_i)^{i-1}d\theta_i. \tag{4.59}$$

Dans ce cas nous avons

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{dV_d}{(2\pi)^d a^d(t)}k^{d-1}dkd\Omega\exp\left[-2\pi\left(|\mu| - \frac{k_d}{k}\frac{eE_0}{H^2}\right)\right] & (4.60) \\ &= \int \frac{dV_d}{(2\pi)^d a^d(t)}\int k^{d-1}dk\exp\left[-2\pi|\mu|\right]\int\prod_{i=1}^{d-1}(\sin\theta_i)^{i-1}d\theta_i\exp\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\cos\theta_{d-1}\right) & (4.61) \end{aligned}$$

Pour pouvoir effectuer les intégrations sur les angles θ_i avec $i = \overline{1, d-2}$, nous utilisons l'intégrale suivante [43]

$$\int_0^{\pi}(\sin\theta_i)^i d\theta_i = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} \tag{4.62}$$

Il suit alors

$$2\int_0^{\pi}\prod_{i=0}^{d-3}(\sin\theta_i)^i d\theta_i = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-2}\prod_{i=0}^{d-3}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \tag{4.63}$$

Pour l'intégrale sur θ_{d-1}, nous utilisons la formule [43]

$$\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{d-2}e^{\alpha\cos\theta}d\theta = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{d-2}{2}}I_{\frac{d-2}{2}}(\alpha) \tag{4.64}$$

où $I_\nu(\alpha)$ est la fonction de Bessel modifiée. Nous obtenons alors

$$N = \int \frac{dV_d}{a^d(t)} \int k^{d-1} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.65}$$

Comme $n(k)$ ne dépend pas de k, l'intégration sur k se diverge. L'origine de cette divergence est que le nombre des particules créées dans un temps infini est aussi infini. Par contre, le nombre de particules par unité de temps et par unité de volume $\frac{dN}{dtdV_d}$ doit être fini et, généralement, c'est la quantité qui est en lien avec les mesures expérimentales. Ainsi, nous pouvons écrire

$$N = \int dN = \int \frac{dN}{dtdV_d} dtdV_d. \tag{4.66}$$

La divergence de l'intégrale $\int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)}(.)$ doit être la même que celle de $\int dtdV_d(.)$. Comme il a été montré dans [7], la notion de particules ne peut avoir un sens sauf si

$$|k| < \mathcal{M} e^{Ht}. \tag{4.67}$$

Alors, pour un instant donné t, nous devons introduire un cut-off $\Lambda = \mathcal{M} e^{Ht}$.

$$N = \int dV_d \frac{1}{a^d(t)} \int_0^\Lambda k^{d-1} dk \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.68}$$

Pour une légère variation de cut-off, nous écrivons

$$\frac{dN}{d\Lambda dV_d} = \frac{1}{a^d(t)} \Lambda^{d-1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right], \tag{4.69}$$

avec

$$d\Lambda = \mathcal{M} H e^{Ht} dt. \tag{4.70}$$

Nous obtenons donc le nombre des particules créées par unité du temps et par unité de volume

$$\frac{dN}{dtdV_d} = \frac{\mathcal{M}^d H}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right] \tag{4.71}$$

Pour un champ gravitationnel pur ($E_0 = 0$), nous avons

$$\frac{dN}{dtdV_d} = \frac{\mathcal{M}^d H}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{H^2}{2\pi e E_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi e E_0}{H^2}\right) \exp\left[-2\pi |\mu|\right]. \tag{4.72}$$

4.7 Action effective de Schwinger

Maintenant, nous utilisons les résultats obtenus pour calculer la partie imaginaire de l'action éffective de Schwinger. L'action effective de Schwinger définit l'amplitude de transition vide-vide comme suit

$$\langle vid \mid vid\rangle = \exp\left(iS_{eff}\right) = \exp\left(i\int d^D x \mathcal{L}_{eff}\right) \tag{4.73}$$

où $\mathcal{L}_{eff}$ est dit le lagrangien effectif de Schwinger. La probabilité de transition vide-vide est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{vac-vac} &= \left|\langle vid \mid vid\rangle\right|^2 \\ &= \exp\left(-2\,\mathrm{Im}\, S_{eff}\right) \\ &= \exp\left(-\int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}\right). \end{aligned} \tag{4.74}$$

Dans ce cas, la probabilité de création des particules peut être donc extraite de la partie imaginaire de S_{eff}

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{Creat.} &= 1 - \mathcal{P}_{vac-vac} \\ &= 1 - \exp\left(-\int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}\right) \\ &\simeq \int d^D x\ 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Ici, $d^D x = dtdV_d$ et $2\,\mathrm{Im}\, L_{eff}$ est la probabilité par unité de temps par unité de volume de créer des particules à partir du vide.

Soit $C_{\vec{k}}$ la probabilité pour qu'il n'y ait pas de création de paires dans l'état $\vec{k}$. La quantité $C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n$ est donc la probabilité d'avoir seulement n paires créés dans l'état $\vec{k}$. Nous avons alors

$$\sum_n C_{\vec{k}}\left(P_{\vec{k}}\right)^n = 1, \tag{4.76}$$

ce qui nous donne

$$C_{\vec{k}} = 1 - P_{\vec{k}} = 1 - \left|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right|^2 = \frac{1}{\left|\alpha_k\right|^2} = \frac{1}{1+\left|\beta_k\right|^2} \tag{4.77}$$

En utilisant la probabilité $C_{\vec{k}}$, la probabilité de transition vide-vide peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{vac-vac} &= \prod_k C_{\vec{k}} \\ &= \prod_k \exp\left[-\ln\left(1+|\beta_k|^2\right)\right] \\ &= \exp\left[-\sum_k \ln\left(1+|\beta_k|^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Par conséquent la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$\int dtdV_d \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \sum_k \ln\left(1+|\beta_k|^2\right). \tag{4.79}$$

Utilisons le developpement de Taylor

$$\ln\left(1+|\beta_k|^2\right) = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |\beta_k|^{2n}$$

pour obtenir l'équivalent à la fameuse série de Schwinger

$$\int dtdV_d \; 2\,\mathrm{Im}\, L_{eff} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_k |\beta_k|^{2n}. \tag{4.80}$$

Il est à noter que la sommation sur k peut être remplacée par l'intégrale $\int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)}$

$$\sum_k \to \int \frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)} \tag{4.81}$$

où la mésure $\frac{dV_d d^d k}{(2\pi)^d a^d(t)}$ représente le nombre d'états dans l'intervale $\left[\vec{k}, \vec{k}+d\vec{k}\right]$ dans le volume dV_d.

L'action effective de Schwinger devient

$$\begin{aligned}\int dtdV_d L_{eff} &= \int dV_d \int \frac{k^{d-1}dk}{(2\pi)^d a^d(t)} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-2n\pi|\mu|\right) \\ & \int \prod_{i=1}^{d-1} (\sin\theta_i)^{i-1} d\theta_i \exp\left(-2n\pi\cos\theta_{d-2}\frac{eE_0}{H^2}\right) \end{aligned} \tag{4.82}$$

Après intégration sur les angles, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int dtdV_d L_{eff} &= \int dV_d \int \frac{k^{d-1}dk}{(2\pi)^{d-1} a^d(t)} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-2n\pi|\mu|\right) \\ & \left(\frac{H^2}{eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1} I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right) \end{aligned} \tag{4.83}$$

En utilisant la même procedure utilisée dans la section précédente pour éliminer la divergence de l'intégrale $\int k^{d-1}dk$, nous obtenons l'expression finale du Lagrangien effectif de Schwinger dans l'espace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions

$$2\,\mathrm{Im}\,L_{eff} = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \frac{\left(m^2H^2 + eE_0^2\right)^{\frac{d}{2}}}{H\,(eE_0)^{\frac{d}{2}-1}} \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-2n\pi\,|\mu|\right) I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right) \tag{4.84}$$

4.8 Le courant induit

Si nous voulons chercher la dynamique du champ électrique nous ajoutons à l'action du champ scalaire le Lagrangien du champ de Maxwell

$$\mathcal{L}[A] = -\sqrt{-g}\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,,$$

ce qui donne pour le champ A_μ l'équation de mouvement suivante

$$\nabla_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$$

avec

$$J_\mu = -\frac{ie}{2}\left\{\phi^\dagger D_\mu\phi - \phi\,(D_\mu\phi)^\dagger\right\} + \text{h.c.}\,.$$

La valeur moyenne du courant dans l'état du vide est nulle pour toutes les composantes à l'exception de la direction d, qui est donnée par

$$\langle 0|J_d|0\rangle = \frac{2e}{a^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(k_d - eA_d\right)|\varphi_{in}\left(x\right)|^2\,. \tag{4.85}$$

Comme

$$\varphi\left(x\right) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[a_{in,k}\varphi_k e^{ikx} + b^+_{in,k}\varphi^+_{-k}e^{-ikx}\right] \tag{4.86}$$

et

$$\varphi^*\left(x\right) = \int \frac{d^dk'}{(2\pi)\,d}\left[a^+_{in,k'}\varphi^+_{k'}e^{-ik'x} + b_{in,k'}\varphi_{-k'}e^{+ik'x}\right] \tag{4.87}$$

il vient

$$\partial_d\varphi = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[ika_{in,k}\varphi_k e^{ikx} - ikb^+_{in,k}\varphi^+_{-k}e^{-ikx}\right] \tag{4.88}$$

et

$$\partial_d\varphi^* = \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\left[-k'a^+_{in,k'}\varphi^+_{k'}e^{-ik'x} + ik'b_{in,k'}\varphi_{-k'}e^{+ik'x}\right] \tag{4.89}$$

Nous avons alors

$$\left\langle 0 \mid J^{d}\left(x\right) \mid 0\right\rangle = \left\langle 0 \mid \frac{ie}{2} g^{dd} \left\{ \left(\partial_{d}\varphi + ieA_{d}\varphi\right), \varphi^{*} \right\} - \left\{ \left(\partial_{d}\varphi^{*} - ieA_{d}\varphi^{*}\right), \varphi \right\} \mid 0 \right\rangle$$

$$= \left\langle 0 \mid \frac{ie}{2} g^{dd} \left[\left\{ \partial_{d}\varphi, \varphi^{*} \right\} + ieA_{d} \left\{ \varphi, \varphi^{*} \right\} - \left\{ \partial_{d}\varphi^{*}, \varphi \right\} + ieA_{d} \left\{ \varphi^{*}, \varphi \right\} \right] \mid 0 \right\rangle$$

Après quelques calculs nous obtenons

$$j^{d} = \left\langle 0 \mid J^{d}\left(x\right) \mid 0\right\rangle = \frac{2e}{\left(2\pi\right)^{d} a^{2}} \int d^{d}k \left(k + eA_{d}\right) \left|\varphi_{in}^{+}\right|^{2}$$

et par conséquent,

$$j^{d} = \frac{2e}{\left(2\pi\right)^{d} a^{2}} \int d^{d}k \left(k + eA_{d}\right) \frac{e^{\frac{i\lambda\pi}{2}}}{\sqrt{2k}} \left|W_{k,\mu}\left(\rho\right)\right|^{2}$$

Compte tenu du comportement des fonctions $W_{\lambda,\mu}\left(z\right)$ à $\left|z\right| \to \infty$

$$W_{\lambda,\mu}\left(z\right) = e^{-z/2} z^{\lambda} \left(1 + \frac{\mu^{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^{2}}{z} + \frac{\left[\mu^{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^{2}\right]\left[\mu^{2} - \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^{2}\right]}{2z^{2}} + \ldots\right)$$

nous pouvons écrire

$$j_{d} = \frac{2e}{a^{d+1}} \int \frac{d^{d}k}{\left(2\pi\right)^{d}} \frac{ie^{-i\pi\mu}}{4\mu k} \left(k\cos\theta + eA_{d}\right) \begin{pmatrix} 1 + \frac{eE_{0}}{H^{2}} \frac{1}{k} \frac{1}{\eta} \cos\theta \\ + \cos^{2}\theta \frac{e^{2}E_{0}^{2}}{4H^{4}} \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{\eta^{2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{M}{H}\right)^{4} \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{\eta^{2}} \\ + \frac{1}{4} \cos^{4}\theta \frac{e^{4}E_{0}^{4}}{H^{8}} \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{\eta^{2}} - \frac{1}{2} \frac{M^{2}}{H^{2}} \frac{e^{2}E_{0}^{2}}{H^{4}} \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{\eta^{2}} \cos^{2}\theta \end{pmatrix} e^{\pi\widetilde{\lambda}}. \tag{4.90}$$

En faisant l'intégration sur les angles, nous obtenons

$$j_{d} = \frac{2e}{a^{d+1}} \frac{ie^{-i\pi\mu}}{4\mu} \int \frac{k^{d-1}dk}{\left(2\pi\right)^{d}} \left(B_{1} - \frac{eE_{0}}{H^{2}\eta}\left(B_{2} - 1\right)\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{4}\frac{M^{4}}{H^{4}\eta^{2}}B_{1} - \frac{1}{2}\frac{M^{2}}{H^{2}}\frac{e^{2}E_{0}^{2}}{H^{4}\eta^{2}}B_{3} + \frac{1}{4}B_{5}\frac{e^{4}E_{0}^{4}}{H^{8}\eta^{2}}\right)\frac{1}{k^{2}}\right)$$

où les coefficients sont donnés par

$$B_{n} = \int d\Omega \left(\cos\theta\right)^{n} e^{\pi\widetilde{\lambda}}.$$

La dernière expression de j_{d} montre des divergences ultraviolettes qui nécéssitent une régularisation.

4.9 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre l'influence d'un champ éléctrique sur la création de spin 0 dans l'éspace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions. Nous avons trouvé des solutions éxactes pour l'équation de K-G correspondante. Ensuite nous avons établi la relation entre les états d'énèrgie positif et négatif pour obtenir les coefficients de Bogoliubov à partir desquels nous avons calculé la probabilité et la densité des particules crées. De ces résultats nous avons pu extraire la partie imaginaire de Schwinger.

Chapitre 5

Création de particule de spin$\frac{1}{2}$ dans un univers de de-Sitter

5.1 introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules de Dirac dans l'univers de de Sitter à $(d+1)$ dimensions. Nous commençons d'abord par la solution de l'équation de Dirac et la détermination des états "in" et "out". Ensuite, nous calculons la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés à partir des coefficients de Bogoliubov.

5.2 Equation de Dirac en présence d'un champ éléctrique

Considérons une particule de spin 1/2, de masse m et de charge $(-e)$ qui se propage en présence d'un champ électrique dans un espace-temps à $(d+1)$ dimensions décrit par la métrique

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\vec{x}^2\right), \tag{5.1}$$

où $a(\eta) = a_0 f(\eta)$ et $f(\eta)$ est une fonction arbitraire. Nous choisissons la jauge

$$A_\mu = (0, 0, ..., A_d(\eta)),$$

avec

$$A_d = E_0 f(\eta). \tag{5.2}$$

Suivant le principe du couplage minimal, l'équation de Dirac covariante s'écrit

$$[i\tilde{\gamma}^{\mu}(\eta)(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta) - \Gamma_{\mu}(\eta)) - m]\,\Psi(\eta, \vec{x}) = 0 \tag{5.3}$$

où $\tilde{\gamma}^{\mu}$ sont les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace. Ces matrices qui vérifient la relation d'anti-commutation $\{\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}$ sont reliées aux matrices habituelles de Dirac γ^a par la relation

$$\tilde{\gamma}^{\mu} = e_a^{\mu}\gamma^a, \tag{5.4}$$

où e_a^{μ} sont les tétrades permettant de passer d'un système de coordonnées Minkowskien (noté par les indices latins a,b...) à un système de coordonnées quelconque, (noté par les indices grecs μ, ν...). Nous avons alors

$$g^{\mu\nu} = e_a^{\mu}e_b^{\nu}\eta^{ab}. \tag{5.5}$$

avec $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$où η^{ab} est la métrique de Minkowski.

Pour une métrique du genre (**??**), les matrices de Dirac dépendantes de la courbure de l'espace-temps s'écrivent

$$\tilde{\gamma}^0(\eta) = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^0 \tag{5.6}$$

$$\tilde{\gamma}^i(\eta) = \frac{1}{a(\eta)}\gamma^i, i = 1, 2, ..., d \tag{5.7}$$

où γ^0 et γ^i avec $i = \overline{1, d}$, sont les matrices habituelles de Dirac qui peuvent être écrites en $(d+1)$ dimensions dans un espace de Minkowski comme suit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

où les matrices σ_i vérifient la condition

$$\sigma_i\sigma_j^+ + \sigma_j\sigma_i^+ = 2\delta_{ij}. \tag{5.10}$$

Les connexions de spin Γ_{μ} sont définies à l'aide des symboles de Christoffel $\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}$ (**??**)

$$\Gamma_{\alpha} = -\frac{1}{8}g_{\mu\lambda}\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\left[\tilde{\gamma}^{\mu}, \tilde{\gamma}^{\nu}\right], \tag{5.11}$$

Dans le présent modèle, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma_{00}^{0} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}, \tag{5.12}$$

$$\Gamma_{ij}^{0} = \Gamma_{0j}^{i} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\delta_{ij} \tag{5.13}$$

Par un calcul simple nous obtenons

$$\Gamma_0 = 0 \tag{5.14}$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma_0\gamma_i = -\frac{1}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}\gamma^0\gamma^i. \tag{5.15}$$

Pour un espace de dimension $(d+1)$ l'équation de Dirac se réduit alors à

$$\left[i\frac{1}{a(\eta)}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta)) + i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0 - m\right]\Psi(\eta, \vec{x}) = 0. \tag{5.16}$$

Pour éliminer le terme supplémentaire $i\frac{d}{2}\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}\gamma^0$ nous posons

$$\Psi(\eta, x) = a(\eta)^{-\frac{d}{2}}\phi(\eta, \vec{x}). \tag{5.17}$$

L'équation résultante qui a une forme simple se ressemble à l'équation de Dirac habituelle (dans un espace plat) mais avec une masse dependante du temps

$$[i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(\eta) - ma(\eta)]\Psi(\eta, \vec{x}) = 0. \tag{5.18}$$

5.3 Séparation des variables

Dans le but de résoudre cette équation, nous écrivons la fonction d'onde sous la forme

$$\chi(\eta, x) = \gamma^0\gamma^d \exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right)\xi(\eta). \tag{5.19}$$

Le spineur $\xi(\eta)$ vérifie alors l'équation

$$\left[i\gamma^d\frac{\partial}{\partial\eta} - \gamma^0(k_d - eA_d(\eta)) - (\gamma_{\perp}.k_{\perp})\gamma^0\gamma^d - m\gamma^0\gamma^d a(\eta)\right]\xi(\eta) = 0. \tag{5.20}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\hat{K}_1\xi_{k,s}(\eta, s) = \hat{K}_2\xi_{k,s}(\eta, s). \tag{5.21}$$

où

$$\hat{K}_1 = i\gamma^d \frac{\partial}{\partial\eta} - \gamma^0 \left(k_d - eA_d(\eta)\right) - \gamma^0\gamma^d ma\left(\eta\right) \tag{5.22}$$
$$\hat{K}_2 = \left(\gamma_\perp . k_\perp\right)\gamma^0\gamma^d$$

Ici, nous pouvons voir que $\left[\hat{K}_1, \hat{K}_2\right] = 0$, ce qui nous permet de construire une base propre commune aux opérateurs $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$. De plus, nous montrer que

$$\hat{K}_2^2 = -k_\perp^2 = -\sum_i^{d-1}\left(k_i^2\right), \tag{5.23}$$

ce qui montre que l'opérateur $\hat{K}_2$ a deux valeurs propres ; $isk_\perp$ avec $s = \pm 1$. Il n'est pas dificile de montrer que les vecteur propres communs aux opérateurs $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$ sont donnés par

$$\xi_{k,s}\left(\eta, s\right) = \begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right)\Upsilon_{s,1} \\ \xi_2\left(\eta, s\right)\Upsilon_{s,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right)\Upsilon_s \\ \xi_2\left(\eta, s\right)\sigma_d^+\Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

où $\Upsilon_s\left(\vec{k}\right)$, avec $s = \pm 1$, sont les vecteurs propres de la matrice $\vec{\sigma}_\perp.\vec{k}_\perp$

$$\hat{K}_2^2 = -\left(k_x^2 + k_y^2 + ... + k_{d-1}^2\right) \tag{5.25}$$

Les fonctions $\xi_1\left(\eta, s\right)$ et $\xi_1\left(\eta, s\right)$ vérifient le système d'équations différentielles de première ordre

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\eta} + ma\left(\eta\right)\right)\xi_1\left(\eta, s\right) = \left[-isk_\perp + k_d - eA_d(\eta)\right]\xi_2\left(\eta, s\right) \tag{5.26}$$
$$\left(i\frac{\partial}{\partial\eta} - ma\left(\eta\right)\right)\xi_2\left(\eta, s\right) = \left[isk_\perp + k_d - eA_d(\eta)\right]\xi_1\left(\eta, s\right) \tag{5.27}$$

pour ce système nous pouvons voir que le $2^{ème}$ tèrme contient les coefficients de couplage $\left[\left(k_d - eA_d\right) \pm isk_\perp\right]$ depend du temps conforme. pour cela l'équation du second ordre des intéraction est compliquée donc pour trouver des bonnes solutions on introduit la transformation unitaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \xi_1\left(\eta, s\right) \\ \xi_2\left(\eta, s\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1\left(\eta, s\right) \\ \varphi_2\left(\eta, s\right) \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

où

$$\tau = -\frac{a_0}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right) \tag{5.29}$$

et

$$\mathcal{M}=\sqrt{m^2+\frac{e^2E_0^2}{a_0^2}} \tag{5.30}$$

A partire de cette écriture nous obtenons un système de deux équations différentielles du premier ordre couplées

$$\left[i\frac{d}{d\eta}-\frac{m^2}{\mathcal{M}}a_0f\left(\eta\right)+\frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}k_d-\frac{e^2E^2}{\mathcal{M}a_0}f\left(\eta\right)\right]\varphi_2=\left[\frac{m}{\mathcal{M}}k_d+isk_\perp\right]\varphi_1 \tag{5.31}$$

$$\left[i\frac{d}{d\eta}+\frac{m^2}{\mathcal{M}}a_0f\left(\eta\right)-\frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}k_d+\frac{e^2E^2}{\mathcal{M}a_0}f\left(\eta\right)\right]\varphi_1=\left[\frac{m}{\mathcal{M}}k_d-isk_\perp\right]\varphi_2 \tag{5.32}$$

Par intéraction nous obtenons deux équations différentielles du second ordre decouplées

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2}+a_0^2\mathcal{M}^2f^2\left(\eta\right)-2eE_0k_df\left(\eta\right)+k^2\mp i\mathcal{M}a_0f'\left(\eta\right)\right]\varphi_{1,2}=0 \tag{5.33}$$

Cette équation admet des solutions pour différents modèles : univers de de Sitter $f\left(\eta\right)=\frac{-1}{H^2\eta}$, univers dominé par radiation $f\left(\eta\right)=\eta$ et un univers de Milne $f\left(\eta\right)=e^{\rho\eta}$, univers asymptotiquement Minkowskien $f\left(\eta\right)=a+b\tanh(\lambda\eta)$...etc.

Il est à noter que dans (**??**) le champ gravitationnel se couple à la masse des particules, tandis que le champ électrique se couple à la charge e. Dans le nouveau système (**??**), nous pouvons voir qu'un champ effectif est couplé à la quantité $\mathcal{M}$.

De plus, l'équation (**??**) peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\left(\tilde{k}_d-e\mathcal{E}f\left(\eta\right)\right)^2+\tilde{M}^2+\tilde{k}_\perp^2\pm ie\mathcal{E}\ f\ '\left(\eta\right)\right]\varphi_s=0 \tag{5.34}$$

avec

$$e\mathcal{E}=\mathcal{M}a_0, \tag{5.35}$$

$$\tilde{k}_d=k_d\frac{eE_0}{\mathcal{M}a_0}, \tag{5.36}$$

$$\tilde{k}_\perp^2=k_\perp^2\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2a_0^2} \tag{5.37}$$

et

$$\tilde{M}=k\frac{m}{\mathcal{M}}. \tag{5.38}$$

L'équation (5.34) est similaire à celle de Dirac pour une particule de masse $\tilde{M}$, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde $\tilde{k}$ soumise à un champ électrique décrit par la jauge $A_1=\mathcal{E}f\left(\eta\right)$ dans un espace de Minkowski. Alors, la densité des particules de masse m, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde k créées par un champ électrique $A_1 = E_0 f(\eta)$ dans un espace-temps en expansion où $a(\eta) = a_0 f(\eta)$ est la même que la densité des particules de masse $\tilde{M}$, charge $(-e)$ et de vecteur d'onde $\tilde{k}$ créées par le champ électrique $A_1 = \mathcal{E} f(\eta)$ dans un espace de Minkowski.

5.4 Solutions exactes pour l'espace de de Sitter

Pour un espace de de-Sitter nous avons $a_0 = H$, $\mathcal{M} = \sqrt{m^2 + \frac{e^2 E_0^2}{a_0^2}}$ et $f(\eta) = -\frac{1}{H^2 \eta}$. Dans ce cas, nous obtenons pour $\varphi_{1,2}$ l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \left(\frac{\mathcal{M}^2}{H^2} \mp i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)\frac{1}{\eta^2} + 2\frac{eE_0 k_d}{H^2}\frac{1}{\eta} + k^2\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.39}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\varphi''(\eta) + \omega_s^2(\eta)\,\varphi_s(\eta) = 0 \tag{5.40}$$

où $\omega_s^2(\eta)$ a l'expression

$$\omega_s^2(\eta) = a_0^2 \mathcal{M}^2 f^2(\eta) - 2eE_0 k_d f(\eta) + k^2 \mp i a_0 \mathcal{M} f'(\eta) \tag{5.41}$$

d'où nous en déduisons la condition adiabatique

$$\lim_{\eta \to 0}\left|\frac{\omega_s'(\eta)}{\omega_s^2(\eta)}\right| \approx \frac{H}{\mathcal{M}} \ll 1. \tag{5.42}$$

Pour résoudre l'équation (5.39) nous effectuons le changement de variable

$$\rho = -2ik\eta \tag{5.43}$$

pour obtenir l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)^2\right)\frac{1}{\rho^2} + i\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_d}{k}\frac{1}{\rho} - \frac{1}{4}\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.44}$$

où $\varphi_s(\rho) \equiv \varphi_s(\eta)$.

Cette équation est identique à l'équation de Whittaker [43]

$$\left[\frac{d^2}{d^2\rho} + \frac{\left(\frac{1}{4} - \mu_s^2\right)}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right]\varphi_{1,2} = 0 \tag{5.45}$$

avec

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - i\frac{M}{H} = \mu \tag{5.46}$$
$$\mu_2 = \frac{1}{2} + i\frac{M}{H} = \mu^* \tag{5.47}$$

et

$$\lambda = i\frac{eE_0}{H^2}\frac{k_d}{k}. \tag{5.48}$$

Comme dans le cas des particules de spin 0, nous utilisons les solutions semi-classiques, pour identifier les états "in" et "out". Le résultat est

$$\varphi^+_{1,in}(\eta, s) = N_{1,in}W_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.49}$$
$$\varphi^-_{1,in}(\eta, s) = N^*_{1,in}W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{5.50}$$

et

$$\varphi^+_{1,out}(\eta, s) = N_{1,ont}M_{-\lambda,\mu}(-\rho) \tag{5.51}$$
$$\varphi^-_{1,out}(\eta, s) = N^*_{1,ont}M_{\lambda,-\mu}(\rho) \tag{5.52}$$

Maintenant nous utilisons les relations fonctionelles

$$\left[(2\mu-1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu-1)^2}{2\rho} - \lambda\right]W_{\lambda,\mu}(\rho) = -\left(\mu+\lambda-\frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu-1}(\rho), \tag{5.53}$$

$$\left[(2\mu+1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu+1)^2}{2\rho} - \lambda\right]M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2 - \lambda^2}{2(\mu+1)(2\mu+1)} \tag{5.54}$$

et

$$\left[(2\mu-1)\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{(2\mu-1)^2}{2\rho} - \lambda\right]M_{\lambda,\mu}(\rho) = 2\mu(2\mu-1)M_{\lambda,\mu+1}(\rho) \tag{5.55}$$

pour calculer la deuxième composante pour chaque spineur. Nous obtenons alors

$$\varphi^+_{2,in}(\eta, s) = i\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_dm + sk_\perp\mathcal{M}}W_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.56}$$

$$\varphi^-_{2,in}(\eta, s) = i\frac{-\left(\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}\right)}{ik_dm + sk_\perp\ \mathcal{M}}W_{\lambda,\mu-1}(\rho) \tag{5.57}$$

$$\varphi^+_{2,out} = \frac{4k}{\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}} - isk_\perp\right)}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho) \tag{5.58}$$

et

$$\varphi_{2,out}^{-} = \frac{k}{4\left(k_d \frac{m}{\mathcal{M}} - isk_\perp\right)} \frac{\left(1 - \frac{e^2 E_0^2}{\mathcal{M}^2 H^2} \frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(\frac{\mathcal{M}}{H} i - \frac{1}{2}\right)} M_{\lambda,1-\mu}\left(\rho\right). \tag{5.59}$$

Alors, les spineurs de Dirac correspondant aux états d'énergie positive et négative sont donnée par

$$\xi_{k,s,in}^{+}\left(\eta\right) = \begin{pmatrix} \xi_{1,in}^{+}\left(\eta, s\right) \Upsilon_s \\ \xi_{2,in}^{+}\left(\eta, s\right) \sigma_d^{+} \Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.60}$$

$$\xi_{k,s,in}^{-}\left(\eta\right) = \begin{pmatrix} \xi_{1,in}^{-}\left(\eta, s\right) \Upsilon_s \\ \xi_{2,in}^{-}\left(\eta, s\right) \sigma_d^{+} \Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

$$\xi_{k,s,out}^{+}\left(\eta\right) = \begin{pmatrix} \xi_{1,out}^{+}\left(\eta, s\right) \Upsilon_s \\ \xi_{2,out}^{+}\left(\eta, s\right) \sigma_d^{+} \Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

$$\xi_{k,s,out}^{-}\left(\eta\right) = \begin{pmatrix} \xi_{1,out}^{-}\left(\eta, s\right) \Upsilon_s \\ \xi_{2,out}^{-}\left(\eta, s\right) \sigma_d^{+} \Upsilon_s \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

où les fonctions $\xi_{1,in}^{+}\left(\eta, s\right)$ et $\xi_{2,in}^{+}\left(\eta, s\right)$ sont données par

$$\xi_{1,in}^{+}\left(\eta, s\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.64}$$
$$\left[W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right) - i\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right)\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_d m + sk_\perp \mathcal{M}} W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{2,in}^{+}\left(\eta, s\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.65}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right) W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right) + i\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_d m + sk_\perp \mathcal{M}} W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{1,in}^{-}\left(\eta, s\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.66}$$
$$\left[W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right) + i\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right)\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_d m + sk_\perp \mathcal{M}} W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right]$$

$$\xi_{2,in}^{-}\left(\eta, s\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.67}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}\left(\mathcal{M} - m\right) W_{-\lambda,\mu}\left(-\rho\right) - i\frac{\mathcal{M}k - k_d\frac{eE_0}{H}}{ik_d m + sk_\perp \mathcal{M}} W_{-\lambda,\mu-1}\left(-\rho\right)\right] \tag{5.68}$$

$$\xi^{+}_{1,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.69}$$
$$\left[M_{-\lambda,\mu}(-\rho)-\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)\frac{4k}{k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_\perp}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]$$

$$\xi^{+}_{2,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.70}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)M_{-\lambda,\mu}(-\rho)+\frac{4k}{k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_\perp}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\mathcal{M}}{H}\right)M_{-\lambda,\mu-1}(-\rho)\right]$$

$$\xi^{-}_{1,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.71}$$
$$\left[M_{\lambda,-\mu}(\rho)-\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)\frac{k}{4\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_\perp\right)}\frac{\left(1-\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2H^2}\frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(i\frac{M}{H}-\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]$$

$$\xi^{-}_{2,out}(\eta,s)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{5.72}$$
$$\left[\frac{H}{eE_0}(\mathcal{M}-m)M_{\lambda,-\mu}(\rho)+\frac{k}{4\left(k_d\frac{m}{\mathcal{M}}-isk_\perp\right)}\frac{\left(1-\frac{e^2E_0^2}{\mathcal{M}^2H^2}\frac{k_d^2}{k^2}\right)}{\left(i\frac{M}{H}-\frac{1}{2}\right)}M_{\lambda,1-\mu}(\rho)\right]$$

5.5 Création de particule

Compte tenu des solutions obtenues, l'opérateur de champ de Dirac peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$\hat{\phi}(\eta,x)=\sum_{k,s}\left[a_{\vec{k},s,in}\ \xi^{+}_{k,s,in}(\eta)e^{ikx}+b^{+}_{\vec{k},s,in}\ \xi^{-}_{k,s,in}(\eta)e^{-ikx}\right] \tag{5.73}$$

et

$$\hat{\phi}(\eta,x)=\sum_{k,s}\left[a_{\vec{k},s,out}\ \xi^{+}_{k,s,out}(\eta)e^{ikx}+b^{+}_{\vec{k},s,out}\ \xi^{-}_{k,s,out}(\eta)e^{-ikx}\right] \tag{5.74}$$

avec les relation d'anti-commutation habituelles

$$\left\{\hat{a}_{k,s,in},\hat{a}^{+}_{k',s',in}\right\}=\left\{\hat{b}_{k,s,in},\hat{b}^{+}_{k',s,in}\right\}=\delta_{s,s'}\delta_{k,k'}. \tag{5.75}$$

et

$$\left\{\hat{a}_{k,s,out},\hat{a}^{+}_{k',s',out}\right\}=\left\{\hat{b}_{k,s,out},\hat{b}^{+}_{k',s',out}\right\}=\delta_{s,s'}\delta_{k,k'}. \tag{5.76}$$

Les opérateurs $a_{k,in}$ et $b^{+}_{k,in}$ ne peuvent avoir une interprétation physique que pour $\eta \to -\infty$ où les fonctions $\varphi^{+}_{in}(\eta)$ et $\varphi^{-}_{in}(\eta)$ sont associées aux états d'énergie positive et d'énergie négative respectivement. Idem pour les opérateurs $a_{k,out}$ et $b^{+}_{k,out}$.

Pour calculer la probabilité de création d'une paire et la densité des fermions créés nous utilisons la relation fonctionnelle [43]

$$M_{\lambda,\mu}(\rho) = \frac{\Gamma(2\mu-1)\, e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{-\lambda,\mu}(-\rho) + \frac{\Gamma(2\mu+1)\, e^{i\pi\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} W_{\lambda,\mu}(\rho) \tag{5.77}$$

qui nous permet d'établir la transformation de Bogoliubov

$$\xi^{+}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha_{s,\vec{k}}\xi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta_{s,\vec{k}}\xi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.78}$$

$$\xi^{-}_{s,\vec{k},out}(\eta) = \alpha^{*}_{s,\vec{k}}\xi^{-}_{s,\vec{k},in}(\eta) + \beta^{*}_{s,\vec{k}}\xi^{+}_{s,\vec{k},in}(\eta) \tag{5.79}$$

où les coefficients de Bogoliubov $\alpha_{s,\vec{k}}$ et $\beta_{s,\vec{k}}$ sont donnés par

$$\alpha_{s,\vec{k}} = \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu-1)\, e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.80}$$

et

$$\beta_{s,\vec{k}} = \frac{N_{out}}{N^{*}_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu-1)\, e^{i\pi\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)}. \tag{5.81}$$

avec, cette fois-ci, la condition

$$\left|\alpha_{s,\vec{k}}\right| + \left|\beta_{s,\vec{k}}\right| = 1. \tag{5.82}$$

Nous avons alors

$$\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}} = \frac{N_{in}}{N^{*}_{in}} \frac{\Gamma\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} e^{i\pi\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.83}$$

$$\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}} = \sqrt{\left(\frac{k\mathcal{M} - k_d\frac{eE_0}{H}}{k\mathcal{M} + k_d\frac{eE_0}{H}}\right)} \frac{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)} e^{-i\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}. \tag{5.84}$$

La probabilté de création d'une paire de particule dans l'état $\left(s,\vec{k}\right)$ est donc

$$p_{s,\vec{k}} = \left|\frac{\beta_{s,\vec{k}}}{\alpha_{s,\vec{k}}}\right|^2 \tag{5.85}$$

$$= \left|\frac{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} - \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}{\Gamma\left(i\left(\frac{\mathcal{M}}{H} + \frac{eE_0}{H}\frac{k_d}{k}\right)\right)}\right|^2 \left(\frac{k\mathcal{M} - k_d\frac{eE_0}{H}}{k\mathcal{M} + k_d\frac{eE_0}{H}}\right) e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}} \tag{5.86}$$

En utilisant la propriété de fonction Gamma

$$\left|\Gamma\left(i\left(x\right)\right)\right|^{2}=\frac{\pi}{x\sinh\left(\pi x\right)} \tag{5.87}$$

nous obtenons

$$p_{s,\vec{k}}=\frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_{0}}{H}\frac{k_{d}}{k}\right)\right)}{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_{0}}{H}\frac{k_{d}}{k}\right)\right)}e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}. \tag{5.88}$$

La densité des fermions est définie par

$$n\left(s,k\right)=\left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^{2}. \tag{5.89}$$

Après un simple calcul, nous obtenons

$$n\left(s,k\right)=\frac{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_{0}}{H}\frac{k_{d}}{k}\right)\right)e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}{\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_{0}}{H}\frac{k_{d}}{k}\right)\right)+\sinh\left(\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}+\frac{eE_{0}}{H}\frac{k_{d}}{k}\right)\right)e^{-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}}}. \tag{5.90}$$

Pour M>> H la densité des particules se comporte comme

$$n\left(s,k\right)=\exp\left(-2\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_{0}}{H^{2}}\frac{k_{d}}{k}\right)\right). \tag{5.91}$$

Nous constatons que ce nombre devient plus significatif lorsque $k_d > 0$. Par conséquent, le champ électrique crée principalement les particules avec un vecteur d'onde positif $k_d > 0$. En d'autres termes, en présence d'un champ électrique, les particules préfèrent d'être créées avec un signe spécifique du moment canonique k. Cela dépend de l'orientation du champ électrique et de la charge de la particule. Les antiparticules seront alors créées dans la direction opposée avec la même densité.

5.6 Nombre de particules créées

Considéron maintenant le nombre de particules défini par

$$N=\sum_{s}\int\frac{dV_{d}dk^{d}}{\left(2\pi\right)^{d}a^{d}\left(t\right)}n\left(s,k\right) \tag{5.92}$$

$\frac{dV_{d}dk^{d}}{(2\pi)^{d}a^{d}(t)}$ est le nombre des états dans l'élément de l'espace des phase $dV_d dk^d$. Le facteur $a^d\left(t\right)$ au dénominateur exprime la dilution des particules par l'expansion de l'univers. Nous avons alors

$$N=(1+\delta_d)\frac{1}{(2\pi)^d a^d}\int dV_d\int k^{d-1}dkd\Omega\exp\left(-2\pi\left(\frac{\mathcal{M}}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\cos\theta\right)\right) \tag{5.93}$$

où $\delta_d=0$ pour $d=1$ et $d=2$ et $\delta_d=1$ pour $d\geq 3$. Après integration sur les variable angulaires, nous obtenons

$$N=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{a^d}(1+\delta_d)\int dV_d\int_0^\Lambda k^{d-1}dk\left(\frac{H^2}{\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1}I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right) \tag{5.94}$$

En introduisant le cut-off $\Lambda=\mathcal{M}e^{Ht}$, nous pouvons écrire

$$\frac{dN}{d\Lambda dV_d}=(1+\delta_d)\frac{1}{(\sqrt{\pi})^d}\frac{1}{a^d}\Lambda^{d-1}\left(\frac{H^2}{\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1}I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.95}$$

Compte tenu du fait que

$$d\Lambda=\mathcal{M}He^{Ht}dt,$$

le nombre des particules créées par unité de temps et par unité de volume prend la forme finale

$$\frac{dN}{dtdV_d}=(1+\delta_d)\frac{\mathcal{M}^dH}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{H^2}{2\pi eE_0}\right)^{\frac{d}{2}-1}I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.96}$$

5.7 Action effective de Schwinger

Pour calculer l'action effective de Schwinger, nous introduisons d'abord, la probabilité $C_{s,\vec{k}}$ de ne pas avoir une paire dans l'état $\left(\vec{k},s\right)$. Il vient alors suivant le principe de Pauli

$$C_{s,\vec{k}}+C_{s,\vec{k}}p_{s,\vec{k}}=1, \tag{5.97}$$

ce qui nous donne

$$C_{s,\overrightarrow{k}}=\frac{1}{1+p_{s,\vec{k}}}=\left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2, \tag{5.98}$$

La probabilié de transition $vide-vide$ est donc

$$|\langle vid\mid vid\rangle|^2=e^{-2\,\mathrm{Im}\,seff}=\prod_{s,\overrightarrow{k}}C_{s,\overrightarrow{k}}=\exp\sum_{k,s}\ln C_{s,\overrightarrow{k}} \tag{5.99}$$

et la partie imaginaire de l'action effective de Schwinger est

$$2\,\mathrm{Im}\,S_{eff}=-\sum\ln c_k=-\sum\ln\left(1-|\beta_k|^2\right) \tag{5.100}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous faisons un développement de Taylor

$$-\ln\left(1-\left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^2\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left|\beta_{s,\vec{k}}\right|^{2n} \tag{5.101}$$

et nous remplaçons la somme sur tous les états par

$$\sum_{k,s}\rightarrow\left(1+\delta_d\right)\int\frac{dV_d d^d k}{\left(2\pi\right)^d a^d\left(t\right)}, \tag{5.102}$$

L'action effective de Schwinger devient

$$2\int dt dV_d\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=2\sum_{n=1}\frac{1}{n}\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right)\int\frac{dV_d k^{d-1}dk}{\left(2\pi\right)^d a^d\left(t\right)}\int\prod_{i=0}^{d-2}\left(\sin\theta_i\right)^i d\theta_i\exp\left(-2n\pi\cos\theta_{d-2}\frac{eE_0}{H^2}\right) \tag{5.103}$$

En suivant les mêmes étapes que dans le chapitre précédent

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=\left(1+\delta_d\right)\frac{1}{\left(2\pi\right)^{d-1}}\frac{\left(\mathcal{M}^2H^2+eE_0^2\right)^{\frac{d}{2}}}{H\left(eE_0\right)^{\frac{d-2}{2}}}\sum\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right)I_{\frac{d-2}{2}}\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right) \tag{5.104}$$

5.8 Cas particuliers

5.8.1 Un champ électrique dans l'espace de Minkowski

Pour un champ électrique dans l'espace de Minkowski, c-à-d $H\rightarrow 0$, nous utilisons le comportement de la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu\left(\alpha\right)\sim\frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}$$

et la limite

$$\begin{aligned}\lim_{H\rightarrow 0}\left(\frac{M}{H}-\frac{eE_0}{H^2}\right) &= \lim_{H\rightarrow 0}\frac{eE_0}{H^2}\left[\sqrt{1+\frac{m^2H^2}{e^2E_0^2}}-1\right]\\ &= \lim_{H\rightarrow 0}\frac{eE_0}{H^2}\left[1+\frac{m^2H^2}{2e^2E_0^2}-1\right]\\ &= \frac{m^2}{2eE_0}\end{aligned}$$

pour obtenir le résultat

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=2\frac{(eE_0)^{\frac{d+1}{2}}}{(2\pi)^d}\sum\frac{1}{n^{\frac{d+1}{2}}}\exp\left[-n\pi\frac{m^2}{eE_0}\right]. \tag{5.105}$$

Notons ici, que ce résultat coïncide avec celui de l'article [49]

5.8.2 Le champ gravitationnel pur

Pour $E=0$, nous utilisons le developpement de la fonction de Bessel modifié

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \end{aligned}$$

pour obtenir

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=\frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\frac{m^dH}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum\frac{1}{n}\exp\left(-2n\pi\frac{m}{H}\right) \tag{5.106}$$

5.8.3 La dimension $d=1$

Le cas $d=1$ a été étudié par [7], dont le résultat est

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=\frac{\mathcal{M}H}{\pi}\sum\frac{1}{n}\cosh\left(2\pi\frac{neE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.107}$$

A partir de notre expression nous pouvons obtenir le résultat de [7], en utilisant la forme explicite de la fonction $I_{-\frac{1}{2}}(x)$

$$I_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi x}}\cosh x.$$

5.8.4 La dimension $d=3$

Pour $d=3$, nous avons

$$I_{\frac{1}{2}}(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{2\pi x}}\sinh x$$

et par conséquent,

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_{eff}=\frac{1}{2\pi^3}\frac{\mathcal{M}^3H^3}{eE_0}\sum\frac{1}{n^2}\sinh\left(\frac{2n\pi eE_0}{H^2}\right)\exp\left(-2n\pi\frac{\mathcal{M}}{H}\right). \tag{5.108}$$

5.9 Conclusion

En conclusion, nous avons étudié dans ce chapitre l'effet du champs éléctrique sur la création de paires de particules de spin $\frac{1}{2}$ dans un espace temps de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions. D'abord, nous avons résolu l'équation de Dirac en introduisant une transformation unitaire. Puis, nous avons appliqué la transformation de Bogoliubov pour calculer la probabilité et la densité des particules crées en fonction de deux rapport $\frac{M}{H}$ et $\frac{eE_0}{H^2}$. Ensuite ,nous avons calculé le nombre total des particules créées en faisant la somme sur tous les modes. Finalement, nous définissons la lagrangien effective de Schwinger, nous avons fait tout les calculs pour un espace de de-Sitter à $(d+1)$ dimensions.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons voulu étudier la création de particules à partir du vide dans l'univers de de-Sitter à $(d+1)$ dimension en présences d'un champ électrique. Nous nous sommes intéressés au calcul de la probabilité de création d'une paire de particules et la densité des particules créées en utilisant la méthode canonique basée sur la transformation de Bogoliubov reliant les états "in" et "out".

D'abord nous avons proposé dans le deuxième chapitre le mécanisme de la création des particules comme un mécanisme de l'inflation où nous avons montré que l'univers primordial peut subir une expansion exponentielle. Dans cette image, l'inflation est due à un effet quantique plutôt qu'à un champ scalaire.

Ensuite, dans le troisième chapitre, nous avons pu trouver une interprétation physique de la création des particules dans un univers en expansion à travers une théorie quantique des champs dans un espace courbe. Nous avons montré que le Hamiltonien du champ scalaire complexe dans un univers en expansion n'est pas toujours diagonal et ainsi l'interprétation du champ en termes de particules n'est pas tout à fait claire. Ici, nous avons utilisé la technique de Bogoliubov pour montrer qu'il y a une création des particules. Nous avons considéré comme application l'un univers de de-Sitter.

Dans un quatrième chapitre, nous avons voulu étudier l'effet du champ électrique sur la création des particules. Compte tenu des difficultés rencontrées nous avons d'abord commencé par l'étude de l'effet du champ électrique sur la création des particules scalaires où nous avons trouvé des solutions exactes pour l'équation de Klein Gordon correspondante. Le résultat essentiel de cette étude est que le champ électrique amplifie la densité des particules créées.

Ayant contourné les difficultés rencontrées, nous avons considéré dans le cinquième chapitre, la création des particules de Dirac dans l'univers de de-Sitter en présence d'un champ électrique. Plusieurs cas particuliers ont été étudiés.

Bibliographie

[1] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1982).

[2] S. A. Fulling, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (Campridge University. Press, Campridge 1985).

[3] V. F.Mukhanov and S. Winitzki, Intoduction of Quantum Effects in Gravity (Campridge Univ. Press, Campridge 2007).

[4] L. Parker and D. J. Toms, Quantum Field Theory in Curved Space-Time : Quantized Fields and Gravity

[5] Ya. Zeldovich and A. A. Starobinskii Sov. Phys. JETP 34, 1159 (1971) (Campridge University. Press, Campridge 2009).

[6] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, New J. Phys. 9, 11 (2007).

[7] R. Chekireb, Création des particules en comologie, Thèse de Doctorat, Université de Jijel.

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951)

[9] E. Akhmedov, Mod. Phys. Lett. A 25, 2815 (2010).

[10] M. N. Hounkonnou and M. Naciri, J. Phys. G : Nucl. Part. 26 (2000) 1849

[11] E. Bresin and C. Itzykson, Phys. Rev. D **2** (1970) 1191.

[12] D. M. Chitre and J. B. Hartel, Phys. D 16, 251 (1977).

[13] H. Aoyama and M. Kobayashi, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 1045

[14] I. H. Duru and N. Ünal, Phys. Rev. D 34, 966 (1986).

[15] S. A. Baran and I. H. Duru, J. Sov. Laser Res. 13 (1992) 241

[16] I. H. Duru, J. Phys. A : Math. Gen. 28 (1995) 588

[17] A. A. Grib and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, Gen. Relativ. Gravit. 6, 538 (1976).

[18] A. A. Grib and S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, J. Phys. A : Math. Gen. 13, 2057 (1980).

[19] L. Parker, Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968).

[20] L. Parker, Phys. Rev. D 183, 1057 (1969).

[21] L. Parker, Phys. Rev. D 3, 346 (1971).

[22] S. Biswas, J. Guha, N. G. Sarkar, Class. Quantum Gravity 12, 1591 (1995).

[23] J. Guha, D. Biswas , N. G. Sarkar, S. Biswas, Class. Quantum Gravity 12, 1641 (1995).

[24] S. Biswas, A. Shaw, P. Misra, Gen. Relativ. Gravit. 34, 665 (2002).

[25] S. Biswas, I. Chowdhury, Int. J. Mod. Phys. D 15, 937 (2006).

[26] S. Winizki, Phys. Rev. D 72, 104011 (2005).

[27] J. Garriga, Phys. Rev. D 49, 6343 (1994).

[28] V. M. Villalba, Phys. Rev. D 60, 127501 (1999).

[29] V. M. Villalba and W. Greiner, Phys. Rev. D 65, 025007 (2001).

[30] S. Haouat and R. Chekireb, Mod. Phys. Lett. A, 26, 2639 (2011).

[31] S. Haouat and R. Chekireb, Int. J. Theor. Phys. 51, 1704 (2012)

[32] S. Moradi ; Journal of Geometry and Physics 59 (2009) 173,184

[33] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11,** 596 (1970).

[34] S. Moradi ; Int. J. Theor. Phys. 47 (2008) 2808.

[35] A. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. 49, 1110 (1982)

[36] S. K. Modak and D. Singleton, Int. J. Mod. Phys. D 21,1242020 (2012)

[37] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975)

[38] R. Cai and S. P. Kim, JHEP 0502, 050 (2005).

[39] I. Fekrache, Effet du champ magnétique sur la création des particules de sdans un univers de de-Sitter, Mémoire de Master, Université de Jijel

[40] L. Cheriet, Méthode des invariants et création des particules, Mémoire de Master, Université de Jijel

[41] R. Ruffini, G. Vereshchagin, S-S. Xue, Phys. Rep. **487** (2010).

[42] S. Gavrilov, D. M. Gitman and S. D. Odintsov, Int. J. Mod. Phys. A 12, 4837(1997).

[43] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, 1979).

[44] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Int. J. Mod. Phys. D, 11, 433 (2002).

[45] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Int. J. Mod. Phys. A, 17, 4435 (2002).

[46] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Grav. and Cosmol. 8, Suppl.,148 (2002).

[47] A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Grav. and Cosmol.8, Suppl. II,50 (2002).

[48] A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur and K. Sogut, Nuclear Physics B 682, 464 (2004).

[49] Q. G. Lin, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. 25 (1999) 17

[50] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, Phys.Rev. D **53,** 7162 (1996)

[51] S. P. Kim and D. N. Page, Phys. Rev. D 73, 065020 (2006).

[52] I. L. Buchbinder and S. D Odintsov, Sov. Phys. J. 25, 385 (1982).

[53] S. P. Kim, H. K. Lee and Y. Yoon, Phys. Rev. D 78, 105013 (2008).

[54] M.B. Fröb et al., Schwinger effect in de Sitter space, JCAP 04, 009 (2014)

[55] N. Tanji, Annals Phys. 324, 1691 (2009)

[56] G. Schäfer and H. Dehnen, J. Phys. A, Math. Gen. 13, 517 (1980).

[57] R-G. Cai and S. P. Kim, JHEP 09, 072 (2014).

[58] G.V. Dunne and C. Schubert, Phys. Rev. D 72 (2005) 105004

[59] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Sov. J. Nucl. Phys. **11** (1970) 596