

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE JIJEL  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Physique



N° d'ordre :

Série :

**Mémoire**

présenté pour obtenir le diplôme de

**Master en physique**

Option : Physique Théorique

Par

**Merghit Teffaha**

Thème

Le modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps via l'intégrale  
de chemin

Soutenu le : / 10 / 2020

**Devant le Jury :**

|                |              |                   |
|----------------|--------------|-------------------|
| Président :    | A. Tilbi     | M.C.A Univ. Jijel |
| Rapporteur :   | T. Boudjedaa | Prof. Univ. Jijel |
| Examinatrice : | R. Rekioua   | M.A.A Univ. Jijel |

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction générale</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Rappel sur les intégrales de chemin</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1      | Concepts d'intégrale de chemin . . . . .   | 7         |
| 2.2      | Propagateur de Feynman . . . . .   | 8         |
| 2.2.1    | Définition . . . . .   | 8         |
| 2.3      | Propagateur et opérateur d'évolution . . . . .   | 9         |
| 2.4      | Idée du propagateur de Feynman . . . . .   | 10        |
| 2.5      | Oscillateur harmonique en intégrale de chemin . . . . .                                  | 11        |
| <b>3</b> | <b>Opérateurs création et annihilation</b>   | <b>14</b> |
| 3.1      | Définition des opérateurs création et annihilation d'un oscillateur harmonique quantique | 14        |
| 3.1.1    | Opérateurs de création et d'annihilation . . . . .                                       | 15        |
| 3.2      | Etats cohérents . . . . .  | 16        |
| 3.3      | Propriétés des états cohérents . . . . .   | 16        |
| 3.3.1    | Les états cohérents bosoniques . . . . .   | 16        |
| 3.3.2    | Etat cohérent fermionique . . . . .  | 21        |
| 3.4      | Intégrale de chemin en représentation états cohérents . . . . .                          | 23        |
| <b>4</b> | <b>Modèle de Jaynes-Cummings</b>   | <b>26</b> |
| 4.1      | introduction . . . . .   | 26        |
| 4.2      | Hamiltonien de JCM . . . . .   | 27        |
| 4.3      | JCM dans sa version intégrale de chemin . . . . .  | 27        |
| 4.4      | Amplitudes de transition . . . . .   | 35        |
| 4.4.1    | Transition up-up . . . . .   | 35        |
| 4.4.2    | Transition up-down . . . . .   | 37        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.4.3    | Transition down -up . . . . .                     | 39        |
| 4.4.4    | Transition down -down . . . . .                   | 40        |
| <b>5</b> | <b>JCM dependant du temps</b>                     | <b>43</b> |
| 5.1      | cas simple . . . . .                              | 43        |
| 5.1.1    | Intégration sur les variables complexes . . . . . | 44        |
| 5.1.2    | Intégration sur le temps . . . . .                | 49        |
| 5.1.3    | inversion de population atomique . . . . .        | 56        |
| 5.2      | Cas composé . . . . .                             | 60        |
| 5.2.1    | Intégration sur les variables complexes . . . . . | 60        |
| 5.2.2    | Intégration sur le temps . . . . .                | 64        |
| 5.2.3    | Inversion de population atomique . . . . .        | 68        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion générale</b>                        | <b>72</b> |

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DE JIJEL  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Physique**

N° d'ordre :

Série :

**Mémoire**

présenté pour obtenir le diplôme de

**Master en physique**

Option : Physique Théorique

Par

**Merghit Teffaha**

Thème

Le modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps via l'intégrale de chemin

Soutenu le : / / 2020

**Devant le Jury :**

|                |              |       |             |
|----------------|--------------|-------|-------------|
| Président :    | A. Tilbi     | M.C.A | Univ. Jijel |
| Rapporteur :   | T. Boudjedaa | Prof. | Univ. Jijel |
| Examinatrice : | R. Rekioua   | M.A.A | Univ. Jijel |

# Remerciements

*Mes remerciements vont premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté et de m'avoir donné la force pour accomplir ce modeste travail et de m'avoir aidé à surpasser les difficultés que j'ai pu rencontrer.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciement à mon encadreur Monsieur **T. Boudjedaa** qui m'a donné la chance de préparer ce travail et ainsi que pour tout le temps qu'il m'a accordé pour le suivi de ce travail.*

*Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur **A. Tilbi** pour avoir accepté d'être président du jury et pour ses discussions et ses remarques.*

*Mes remerciements vont également à Madame **R. Rekioua** d'avoir accepté d'être membre du jury de ce mémoire.*

*Je tiens un grand remerciement aussi à Monsieur le professeur **S. Haouat** pour toutes les informations qu'il m'a données au intégrale de chemin.*

*J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants pendant toutes les années d'études à l'université de Jijel.*

*J'adresse mes plus sincères remerciements à **Lamri Houria** la secrétaire du laboratoire de physique théorique pour les services et l'encouragement.*

*Je voudrais Remercier **mes chers parents** et **mes frères et sœurs** pour le soutien qu'ils m'ont accordé au cours de la réalisation de cette memoire.*

*Je remercie aussi **mes collègues** et toutes les personnes et qui vont m'honorer par leur présence à ma soutenance.*

À mon cher **Fadi** et petite princesse **Nouha**

# Chapitre 1

## Introduction générale

En physique quantique, le formalisme des intégrales de chemin de Feynman est devenu presque l'outil parfait de quantification pour les physiciens théoriciens. Construit par Feynman pour un besoin d'exprimer l'électrodynamique quantique en termes de trajectoires, ce formalisme a eu un grand succès en théorie des champs, en physique statistique et en mécanique quantique non relativiste surtout quand la technique des transformations spatio-temporelle a vu le jour. Cependant, des difficultés restent encore et soulèvent leur contestation face à ce formalisme qui est essentiellement reliées à la covariance qui exige un traitement unifié de l'espace-temps et à l'aspect discret des dynamiques du spin de la particule, grandeur physique incontournable de la mécanique quantique relativiste.

La première difficulté pourrait être évitée au moyen de la technique de reparamétrisation dite "technique du temps propre" laquelle a été très utilisée par Schwinger pour déduire directement et de manière explicite les corrections de l'électrodynamique quantique. La deuxième difficulté, qui est le spin, n'est pas encore trouvée sa solution définitive dans le cadre de ce formalisme des intégrales de chemin. Le spin est une grandeur quantique qui n'est pas d'analogie classique. Ceci pose un vrai problème de formulation. En fait, il a eu plusieurs tentatives de formulation des intégrales de chemin pour le spin, citons par exemple, le modèle de la toupie, le modèle des bosons (fermions) de Schwinger et le modèle des Grassmann de Fadkin-Berezin-Marinov.

Parmi ces exemples, nous allons tester dans ce mémoire celui de Schwinger dans le cas du modèle de Jaynes-Cummings dans le cas de l'interaction de photons à deux termes dépendante du temps.

Dans ce mémoire de Master, nous allons utiliser ce modèle fermionique de Schwinger pour traiter un modèle théorique en optique quantique qui est le modèle de Jaynes-Cummings généralisé dépendant du temps via l'intégrale de chemin. Le plan de ce mémoire est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous présentons des outils nécessaires pour le calcul du propagateur de ce modèle. Nous introduisons les concepts d'intégrale de chemin puis nous donnerons un rappel sur le

propagateur de Feynman et construisons l'intégrale de chemin d'un Oscillateur harmonique.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons les opérateurs de création et d'annihilation d'un oscillateur harmonique quantique puis nous présentons les états cohérents et l'intégrale de chemin en représentation des états cohérents.

Dans le 3ème chapitre nous calculons le propagateur en question dans le cas de l'interaction dépendante du temps dans le cas d'un terme d'interaction des photons et dans le cas de deux termes d'interaction. Le cas simple d'un seul terme est recalculé et est corrigée vue que le travail initial contenait une erreur dans sa récurrence et l'autre cas, à deux termes, est plus difficile et même ardu si les fréquences des interactions sont différentes. Nous traitons alors le cas de fréquences égales et dans chaque cas nous calculons les propagateurs en utilisant la technique de Laplace pour obtenir des résultats exacts. Les inversions de populations atomiques sont données et traduites en des graphes dans le cas résonant et non résonant. Le dernier chapitre est une conclusion générale de notre travail.

## Chapitre 2

# Rappel sur les intégrales de chemin

### 2.1 Concepts d'intégrale de chemin

L'étude de la mécanique quantique par l'outil fonctionnel puissant dit l'intégrale de chemin est un besoin naturel qui surgît en mettant en correspondance de façon très explicite sa relation à la mécanique classique et on pourrait estimer, sans prétention que cette intégrale de chemin est l'une des découvertes théoriques les plus significatives dans le domaine de la physique quantique.

Cette notion d'intégrale de chemin a été introduite pour la première fois dans les années 1920 par Norbert Wiener comme méthode pour résoudre des problèmes dans la théorie de la diffusion et du mouvement Brownien faisant intervenir des intégrales en dimension infinie mais sans relation avec le domaine quantique et ses phénomènes.[1]. Ce fut en 1942 que Richard Feynman réinventa ces intégrales de chemin suite à des remarques pertinentes de Dirac mettant en relation le domaine classique et quantique et ceci a permis de représenter le propagateur de l'équation de Schrödinger comme une intégrale en dimension infinie et créa le lien avec le noyau de la chaleur fonction fondamentale en théorie de la diffusion.[6].

La formulation de la mécanique quantique basée via des intégrales de chemin bien qu'elle semble mathématiquement plus compliquée que la formulation habituelle basée sur des équations aux dérivées partielles, elle est bien adaptée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté tels que la théorie des champs ou les systèmes statistiques et où un formalisme de type Schrödinger serait beaucoup plus complexe [2]. En effet, il permet une transition facile et rapide de la mécanique quantique avec un petit nombre de degrés de liberté (et de particules) à la théorie quantique des champs ou à la physique statistique où la dimension croît indéfiniment (ainsi que le nombre de particules) . En particulier, les intégrales de chemin généralisées au concept du champ conduisent à une compréhension des relations profondes entre la théorie des champs quantiques et les phénomènes critiques dans les transitions de phase

continues.

Une intégrale de chemin est une intégrale fonctionnelle, c'est-à-dire que, où nous intégrons sur un espace de fonctions à l'encontre d'une intégrale ordinaire (par exemple intégrer sur des nombres réels ou complexes). Les intégrales de chemin sont définies comme des objets mathématiques qui peuvent être considérés comme des généralisations à un nombre infini des variables paramétrés par un indice continu (chemin évoluant en temps) et partagent parfois des propriétés analytiques et algébriques que celles des intégrales habituelles. Les grandeurs physiques sont exprimées sous forme de moyennes sur tous les chemins possibles mais dans la limite semi-classique  $\hbar \sim 0$ , les principales contributions provenant de tous les chemins se réduisent parfois aux chemins proches des chemins classiques. Ainsi, les intégrales de chemin conduisent à une compréhension intuitive et à des calculs simples de quantités physiques dans la limite semi-classique.[3]

Finalement, nous pouvons dire que la caractéristique la plus captivante de la technique est qu'elle fournit une approche unifiée pour résoudre des problèmes dans différentes branches de la physique théorique telles que la mécanique quantique, la théorie quantique des champs, la théorie des super cordes et la statistique

## 2.2 Propagateur de Feynman

### 2.2.1 Définition

Le propagateur est un outil mathématique qui permet de calculer l'amplitude de transition d'un système physique de l'état initial  $\psi(x, t_0)$  à l'état final  $\psi(y, t)$  et qui s'exprime par la relation suivante :

$$\psi(y, t) = \int dx K(y, t; x, t_0) \psi(x, t_0). \quad (2.1)$$

Cette équation exprime l'évolution temporelle en la mécanique quantique de la fonction d'onde  $\psi(y, t)$  avec  $\psi(x, t_0)$  sa valeur initial et  $\psi(y, t)$  est solution de l'équation de Schrodinger.

Il est facile d'obtenir l'expression du propagateur en terme d'une intégrale de chemin (intégrale fonctionnelle) en utilisant l'équation de Chapman-Kolmogorov (comme exemple : une marche aléatoire ou un mouvement Brownien) qui est une généralisation de l'équation (1.1) et qui s'écrit sous la forme

$$K(x_n, t_n; x_0, t_0) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.2)$$

Dans ce qui suit nous allons obtenir l'expression de cette dernière en utilisant l'opérateur d'évolution.

## 2.3 Propagateur et opérateur d'évolution

La solution formelle de l'équation de Schrodinger peut être exprimée par un opérateur dit opérateur d'évolution qui exprime l'état du système  $|\Psi(t)\rangle$  à l'instant  $t$  à partir de l'état initial  $|\Psi(t_0)\rangle$  à l'instant  $t_0$  suivant la formule

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (2.3)$$

où  $U(t, t_0)$  est l'opérateur d'évolution. Il est clair que le propagateur n'est rien d'autre que l'élément de matrice de cet opérateur en représentation de configuration. En effet, multiplions par le bra  $\langle y|$  et insérons la relation de fermeture  $\int dx |x\rangle \langle x|$ , nous obtenons alors

$$\langle y| \Psi(t)\rangle = \int dx \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \langle x| \Psi(t_0)\rangle \quad (2.4)$$

$$\Psi(t, y) = \int dx \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \Psi(t_0, x) \quad (2.5)$$

avec  $\Psi(t, y) = \langle y| \Psi(t)\rangle$  (en notation de dirac)

En comparaison avec l'équation (1.1) on a

$$K(y, t; x, t_0) = \langle y| U(t, t_0) |x\rangle \quad (2.6)$$

Pour un système physique régi par l'hamiltonien  $\hat{H}(t)$  (ou bien  $\hat{H}$  indépendant du temps) cet opérateur d'évolution est solution de l'équation

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} &= \hat{H}(t)U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) &= I \end{aligned} \quad (2.7)$$

et dont la solution est

$$U(t, t_0) = T_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt\right)$$

où  $T_D$  est l'opérateur de Dyson qui ordonne les temps en progressant de  $t_0 \rightarrow t$ . Pour  $\hat{H}$  indépendant du temps, bien sûr la solution est comme l'habituel la fonction exponentielle

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0)\right) \quad (2.8)$$

Ce qui donne enfin le propagateur comme élément de matrice suivant

$$K(y, t; x, t_0) = \langle y| T_D \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt\right) |x\rangle \quad (2.9)$$

L'idée de Feynman, basée sur des remarques de Dirac reliant la mécanique quantique à la mécanique classique utilisant les transformations canoniques quand  $\hbar \rightarrow 0$ , est de réécrire cet élément de matrice au moyen du lagrangien du système en subdivisant l'intervalle du temps  $[t_0, t]$  en intervalles infinitésimaux de durée  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le postulat est donné par

$$K(y, t; x, t_0) = C(\epsilon; y, x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \tilde{t})\epsilon\right) \quad (2.10)$$

avec  $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + \epsilon]$ ,  $\tilde{q}$  entre  $(x, y)$  et  $\dot{\tilde{q}} = \frac{y-x}{\epsilon}$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . La validation de ce postulat sera donnée par la suite en utilisant la formule de Trotter dans l'expression formelle (2.10).  $C(\epsilon; y, x)$  est une constante de normalisation qui assure que

$$K(y, t_0 + \epsilon; x, t_0) \rightarrow \delta(y - x) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

## 2.4 Idée du propagateur de Feynman

La formulation intégrale du chemin de la théorie quantique représente l'amplitude de transition qui est donnée par la somme sur tous les chemins possibles allant de la position initiale  $q_i$  à l'instant  $t_i$  vers la position finale  $q_f$  à l'instant  $t_f$  et qu'on appelle aussi propagateur de feynman  $K(q_f; t_f | q_i; t_i)$ .

Feynman exprime ce propagateur comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins continus comme suit

$$\begin{aligned} K(q_f; t_f | q_i; t_i) &= \int Dq(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(q_i; t_i)}^{(q_f; t_f)} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}\right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N L(q_n, \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon})\epsilon\right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a en notation continue

$$Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar}\right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} (dq_n) \quad (2.12)$$

et bien sûr l'action est donnée par

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.13)$$

et  $L(q(t), \dot{q}(t))$  le lagrangien de système. Comme on l'a dit, La validation de ce postulat sera donnée par la suite en utilisant la formule de Trotter dans l'expression formelle .

## 2.5 Oscillateur harmonique en intégrale de chemin

Avant d'étudier le modèle de Jaynes-Cummings dans sa version intégrale de chemin, il est naturel de savoir résoudre les problèmes simples de la mécanique quantique tels que la particule libre et celui de l'oscillateur harmonique dans cette formulation de Feynman. Par exemple, voyons comment on obtient le propagateur de l'oscillateur harmonique.

Considérons un système physique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension donné par le lagrangien suivant

$$L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (2.14)$$

Comme nous l'avons vu, la définition du propagateur entre le point initial  $x_a$  à l'instant  $t_a$  et le point final  $x_b$  à l'instant  $t_b$  s'écrit par la formule continue suivante

$$K(x_b; t_b | x_a; t_a) = \int_{(x_a; t_a)}^{(x_b; t_b)} Dx(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t))\right\} \quad (2.15)$$

Remarquons que le lagrangien est quadratique en position et vitesse et pour ce genre de lagrangien le calcul fonctionnel peut se faire simplement en faisant des variations fonctionnelles puisque l'apport de ces variations s'estompe à l'ordre deux de la variation. Ceci est équivalent à dire que les intégrales fonctionnelles sont de type gaussien. Dans ce cas, un résultat simple et important qui relie l'évolution quantique à son analogue classique, dit approximation semi-classique, apparaît comme résultat exact et est donné par

$$K^{(S.C)}(x_b; t_b | x_a; t_a) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)}{\partial x_b \partial x_a}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)\right) \quad (2.16)$$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a exactement la formule suivante

$$K^{(S.C)}(x_b; t_b | x_a; t_a) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)\right) \int_{(0; t_a)}^{(0; t_b)} D\eta(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta^2 S(\eta)\right) \quad (2.17)$$

c'est à dire on a comme calcul exact de ce qu'on appelle le facteur de fluctuation

$$\int_{(0; t_a)}^{(0; t_b)} D\eta(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta^2 S(\eta)\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i \hbar} \frac{\partial^2 S_{cl}(x_b; t_b, x_a; t_a)}{\partial x_b \partial x_a}} = A(t_b, t_a)$$

Occupons alors de l'équation classique d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2.18)$$

nous avons à résoudre alors l'équation de mouvement classique suivante

$$\ddot{x}_{cl}(t) + \omega^2 x_{cl}(t) = 0 \quad (2.19)$$

Sa solution est de la forme suivante

$$x_{cl}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.20)$$

avec

$$x_a(t) = A \sin \omega t_a + B \cos \omega t_a \quad (2.21)$$

$$x_b(t) = A \sin \omega t_b + B \cos \omega t_b \quad (2.22)$$

et par un calcul simple nous avons

$$A = \frac{x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.23)$$

$$B = -\frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.24)$$

Par conséquent,  $x_{cl}$  s'écrit sous la forme

$$x_{cl}(t) = x_b \frac{\sin \omega(t - t_a)}{\sin \omega(t_b - t_a)} + x_a \frac{\sin \omega(t_b - t)}{\sin \omega(t_b - t_a)} \quad (2.25)$$

Le calcul de l'action classique est alors

$$S_{cl}(x_b, x_a, t) = \int_{t_a}^{t_b} L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (2.26)$$

$$S_{cl}(x_b, x_a, t) = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_{cl}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x_{cl}^2 \right) dt \quad (2.27)$$

Qui par un intégration par partie et l'utilisation de l'équation de mouvement, nous obtenons

$$S_{cl}(t) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_b x_a] \quad (2.28)$$

Le facteur de fluctuation est

$$A(t_b, t_a) = A(t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_b - t_a)}} \quad (2.29)$$

Et le propagateur de l'oscillateur harmonique est finalement

$$K(x_b; t_b | x_a; t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega(t_b - t_a)}} \exp\left\{i \frac{m\omega}{2 \sin \omega(T)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_b x_a]\right\} \quad (2.30)$$

Il est à noter que l'intégration fonctionnelle quoiqu'elle soit longue donne le résultat puisque toutes les intégrales sont de type gaussien. Enfin pour le modèle de Jaynes-Cummings qu'on va étudier ce type de simplification existe aussi mais en plus des intégrales gaussiennes nous aurons besoin de la méthode des perturbations qui sera exposée implicitement dans l'étude du modèle en question. Avant de passer directement à ce modèle, utilisons encore cet oscillateur harmonique dans l'introduction des opérateurs de création et d'annihilation nécessaires pour le modèle et exposons brièvement leurs propriétés ainsi que leur état propre dit état cohérent.

## Chapitre 3

# Opérateurs création et annihilation

### 3.1 Définition des opérateurs création et annihilation d'un oscillateur harmonique quantique

L'oscillateur harmonique quantique est l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique quantique et il est aussi un outil précieux pour illustrer les concepts de base et de formalisme ainsi que son développement dans le domaine de l'optique quantique et théorie des champs quantiques en général. L'oscillateur harmonique quantique est un système physique quantique qui est l'analogue quantique de l'oscillateur harmonique classique et jouit de propriétés riches et intéressantes.

L'hamiltonien d'une particule de masse  $m$  qui oscille avec une fréquence angulaire  $\omega$  sous l'influence d'un potentiel harmonique unidimensionnel est

$$\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \quad (3.1)$$

et les observables  $P$  et  $X$  vérifient la relation de commutation suivante  $[P, X] = i\hbar$

Faisons un changement de variables opératoirel comme suit

$$\hat{p} = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}, \hat{x} = \frac{X}{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (3.2)$$

L'opérateur hamiltonien hermitique prend la forme suivante

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) \quad (3.3)$$

où  $\hat{p}$  un opérateur "impulsion" et  $\hat{x}$  opérateur de "position" sans dimension.

La relation de commutation canonique entre les nouveaux opérateurs  $\hat{p}$  et  $\hat{x}$  est  $[\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar$

### 3.1.1 Opérateurs de création et d'annihilation

On introduit les opérateurs non-hermitiques de création et d'annihilation  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  adjoints l'un de l'autre respectivement par les formules suivantes

$$\hat{a}^+ = \frac{(\hat{p} + \hat{x})}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

et

$$\hat{a} = \frac{(\hat{p} - \hat{x})}{\sqrt{2}} \quad (3.5)$$

ce qui permet d'écrire l'opérateur hamiltonien sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}) \\ \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $\hat{N}$  est appelé l'opérateur "nombre" où opérateur de nombre d'occupation, qui est clairement hermitien. Par l'utilisation de la relations de commutation précédente, il est facile de vérifier la relation de commutation entre  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (3.7)$$

Cette relation de commutation est dite bosonique et les opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  sont dits des opérateurs bosoniques ; par contre si  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  vérifient la relation d'anticommutation  $\{\hat{a}, \hat{a}^+\} = 1$ , ils sont opérateurs fermioniques. Il est à noter que par la suite dans le modèle de Jaynes-Cummings, on aura à utiliser les deux types d'opérateurs, bosoniques et fermioniques.

Introduisons maintenant l'état discret état propre de  $\hat{N}$  noté  $|n\rangle$ ,  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$   $n \geq 0$   $n$  un entier, et dont l'action des opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  sur l'état  $|n\rangle$  est définie par

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (3.8)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3.9)$$

Ces états discrets sont d'une importance capitale dans l'étude des systèmes discrets et en particulier dans l'étude de la quantification du champ électromagnétique dont les applications sont énormes en optique quantique et la théorie des champs en général. Dans notre cas du modèle Jaynes-Cummings, nous aurons besoin d'un état continu qui se définit à partir de ces états discrets et qu'on appelle état cohérent.

## 3.2 Etats cohérents

Les états cohérents ont été étudiés pour la première fois par Schrödinger en 1926 et ont été redécouverts par Klauder, Glauber et Sudarshan au début des années 1960 [6]. Le terme «cohérent» lui-même trouve son origine dans la terminologie utilisée en optique quantique. Depuis lors, ces états cohérents et leurs diverses généralisations ont envahi tous les domaines de la physique quantique et des branches de la physique mathématique [6]. Nous serons alors intéressé et obligé de formuler le propagateur par l'approche intégrales de chemin en représentation des états cohérents pour l'étude de ce modèle Jaynes-Cummings.

Soit  $\hat{H}$  l'opérateur hamiltonien d'un système avec  $\hat{H} \equiv \hat{H}(\hat{a}^+, a)$  qui est un fonction des opérateurs de creation et d'annihilation qui dans le cas général peuvent être bosoniques ou fermioniques.

Par définition, l'état coherent est état propre de l'opérateur  $\hat{a}$ .

## 3.3 Propriétés des états cohérents

### 3.3.1 Les états cohérents bosoniques

#### Définition

Soit  $\hat{a}$  l'opérateur bosonique d'annihilation l'état cohérent est défini comme état propre de cet opérateur et est noté  $|\alpha\rangle$  avec  $\alpha$  un nombre complexe  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$  et vérifiant

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3.10)$$

Comme on sait que l'état discret fondamental  $|0\rangle$  dit états du vide vérifie la relation

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (3.11)$$

on peut facilement montrer qu'on peut générer cet état cohérent par l'actio d'un opérateur dit opérateur de déplacement sur cet état du vide. En effet, définissons cet opérateur de déplacement comme  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$  appliqué à l'état du vide  $|0\rangle$ , on aura

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) |0\rangle \quad (3.12)$$

Cette expression peut être prise aussi comme définition d'un état cohérent à partir du vide et elle est équivalente mathématiquement à la précédente, c'est à dire qu'on peut vérifier qu'on a

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

En utilisant la formule Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right) \quad (3.13)$$

Nous avons

$$\exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \exp\left(-\frac{1}{2}[\alpha a^+, -\alpha^* a]\right) \quad (3.14)$$

Ce qui implique

$$[\alpha a^+, -\alpha^* a] = -\alpha[a^+, a]\alpha^* = \alpha\alpha^* = |\alpha|^2 \quad (3.15)$$

Nous obtenons alors

$$\exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \quad (3.16)$$

Suivant la définition(3.12) ,nous avons

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) |0\rangle. \quad (3.17)$$

Nous appliquons  $\exp(-\alpha^* a)$  sur l'état de vide  $|0\rangle$ , il vient

$$\exp(-\alpha^* a) |0\rangle = 1 \quad (3.18)$$

Alors

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) |0\rangle \quad (3.19)$$

Développons le terme  $\exp(\alpha a^+)$  en série

$$\exp(\alpha a^+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^+)^n \quad (3.20)$$

Il vient

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle \quad (3.21)$$

Et comme l'action de  $(a^+)^n$  sur l'états du vide  $|0\rangle$  est

$$(a^+)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle \quad (3.22)$$

Ceci permet d'obtenir aussi comme définition de l'état cohérent comme

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.23)$$

### Relation de fermeture

Pour obtenir la relation de fermeture des états cohérents, nous présentons l'intégrale à valeur opératorielle suivante

$$I = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (3.24)$$

Et nous définissons l'élément de matrice  $I_{m,n}$  de cette intégrale à valeur opératorielle par

$$I_{m,n} = \langle m| I |n\rangle \quad (3.25)$$

Ce qui veut dire que

$$I_{m,n} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \langle m|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle \quad (3.26)$$

Avec  $\{|n\rangle, n \geq 0\}$  est la base propre de l'opérateur nombre d'occupation. Tenant compte de

$$\langle m|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \langle m|k\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \quad (3.27)$$

Et insérant la relation (3.27) dans (3.26), il vient

$$I_{m,n} = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp\left(-|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \quad (3.28)$$

Par convention

$$\frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} = \frac{dx dy}{\pi} = \frac{\rho d\rho d\theta}{\pi} \quad (3.29)$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{\pi} \int \rho d\rho d\theta \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^m |\alpha|^n}{\sqrt{m!n!}} \exp(im\theta) \exp(-in\theta) \\
&= \int_0^\infty \rho d\rho \exp(-\rho^2) \frac{\rho^m \rho^n}{\sqrt{m!n!}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \exp i(m-n)\theta
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Et l'intégration sur  $\theta$  donne

$$I_{m,n} = 2 \int_0^\infty \rho d\rho \exp(-\rho^2) \frac{\rho^m \rho^n}{\sqrt{m!n!}} \delta_{mn} \tag{3.31}$$

Avec

$$2\delta_{mn} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \exp i(m-n)\theta \tag{3.32}$$

Faisons le changement de variable  $\rho = x^2$ , il vient

$$I_{m,n} = \int_0^\infty dx \exp(-x) \frac{\rho^{2m}}{m!} \delta_{mn} \tag{3.33}$$

Et introduisons la fonction  $\Gamma(m+1)$  donné par comme

$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty dx \exp(-x) x^{2m} = m! \tag{3.34}$$

Nous aurons en finale

$$I_{m,n} = \delta_{mn} \tag{3.35}$$

Par conséquent, cette intégrale à valeur opératorielle n'est rien d'autre que l'opérateur identité

$$\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} |\alpha\rangle \langle \alpha| = I \tag{3.36}$$

### Relation d'orthogonalité

Considérons le produit scalaire de deux états cohérents  $\langle \alpha_j |$  et  $|\alpha_{j-1}\rangle$

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_{j-1}|^2\right) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\alpha_{j-1})^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle \tag{3.37}$$

il vient

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha_{j-1}|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^* \alpha_{j-1})^n}{n!} \tag{3.38}$$

avec

$$\langle n | m \rangle = \delta_{n,m} \quad (3.39)$$

nous obtenons alors la relations d'orthogonalité suivante

$$\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha_j|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_{j-1}|^2 + \alpha_j^* \alpha_{j-1}\right\} \quad (3.40)$$

### Intégrale gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne suivante

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} \quad (3.41)$$

où  $\alpha_n, \bar{\alpha}_n$  et  $A$  sont des matrices définies par

$$\bar{\alpha}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \dots & \alpha_n^* \end{pmatrix}, \alpha_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour effectuer cette intégrale multidimensionnelle sur les états cohérents, diagonalisons la matrice  $A$  (en la supposant diagonalisable) en effectuant un changement de base dans l'espace complexe multidimensionnel. Par conséquent, cette intégrale devient le produit de plusieurs intégrale unidimensionnelle de forme gaussienne

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} = \prod_{k=1}^{\infty} \int \frac{\exp(-\bar{\alpha}_k a_{kk} \alpha_k) d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} \quad (3.42)$$

Pour chacune des variables séparées, faisons le changement de variable  $\alpha = x + iy$  avec

$$\frac{d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} = \frac{dx dy}{\pi} \quad (3.43)$$

nous obtenons alors

$$\int \frac{\exp(-a_{kk}(x^2 + y^2)) dx dy}{\pi} \quad (3.44)$$

L'intégration sur  $x$  et  $y$  donne alors  $\frac{1}{a_{kk}}$  et comme résultat final sur le produit suivant les éléments diagonaux

$$\int \frac{\exp(-\bar{\alpha} A \alpha) d\bar{\alpha} d\alpha}{(2\pi i)^n} = \prod_{k=1}^{\infty} \int \frac{\exp(-\bar{\alpha}_k a_{kk} \alpha_k) d\bar{\alpha}_k d\alpha_k}{2\pi i} = \frac{1}{\det A} \quad (3.45)$$

### 3.3.2 Etat cohérent fermionique

#### Définition

Soit  $\psi$  une variable de Grassmann, l'état cohérent fermionique est l'état propre de l'opérateur fermionique  $\hat{a}$  vérifiant

$$\hat{a} |\psi\rangle = \psi |\psi\rangle \quad (3.46)$$

Mathématiquement,  $\psi$  ces objets sont connus sous le nom de variables de Grassmann, ils sont définis par la propriété algébrique

$$\psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1 \quad (3.47)$$

ce qui les rend nilpotents

$$\psi^2 = 0 \quad (3.48)$$

avec

$$\int d\psi = \int d\bar{\psi} = 0 \quad (3.49)$$

$$\int \psi d\psi = \int \bar{\psi} d\bar{\psi} = 1 \quad (3.50)$$

Ces variables de Grassmann assurent le principe d'exclusion de Pauli qui nécessite que les opérateurs de création et d'annihilation pour un mode fermionique obéissent aux règles d'anticommuation

$$\{\hat{a}^+, a\} = 1$$

Ces variables de Grassmann sont anti-commutantes  $\{\psi_1, \psi_2\} = 0$  et cette relation illustre que l'état cohérent fermionique est généré à partir d'un état du vide  $|0\rangle$  qui est l'analogie du vide bosonique en suivant la définition (3.12) ce qui nous permet d'écrire

$$|\psi\rangle = \exp(-\psi a^+) |0\rangle \quad (3.51)$$

### Relation d'orthogonalité

Considerons le produit scalaire des vecteurs  $\langle \psi_j |$  et  $|\psi_{j-1}\rangle$

$$\langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle = \langle 0 | \exp(\bar{\psi}_j a) \exp(-\psi_{j-1} a^+) | 0 \rangle \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle &= \langle 0 | (1 + \bar{\psi}_j a) (1 - \psi_{j-1} a^+) | 0 \rangle \\ &\quad \langle 0 | (1 - \psi_{j-1} a^+ + \bar{\psi}_j a) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle 0 | (1 + \bar{\psi}_j \psi_{j-1}) | 0 \rangle$$

$$\langle \psi_j | \psi_{j-1} \rangle = \exp(\bar{\psi}_j \psi_{j-1}) \quad (3.53)$$

où l'on a utilisé  $a|0\rangle = 0$ , et son conjuguée Grassmanienne  $\langle 0|a^+ = 0$  et  $\langle 0|0\rangle = 1$  en plus de la commutativité d'un nombre pair de ces variables de Grassmann.

### Relation de fermeture

Considerons l'intégrale suivante

$$\int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\bar{\psi}\psi) |\psi\rangle \langle \psi| = \int d\bar{\psi} d\psi (1 - \bar{\psi}\psi) \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\bar{\psi} d\psi \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) - \int d\bar{\psi} d\psi \bar{\psi}\psi \exp(\psi a^+) |0\rangle \langle 0| \exp(\bar{\psi} a) \\ &= \int d\bar{\psi} d\psi (1 + \psi a^+) |0\rangle \langle 0| (1 + \bar{\psi} a) - \int d\bar{\psi} d\psi \bar{\psi}\psi (1 + 0\psi a^+) |0\rangle \langle 0| (1 + 0\bar{\psi} a) \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant les propriétés (3.49, 3.50, 3.47, 3.48) et  $a|0\rangle = 0$  et son conjuguée Grassmanienne  $\langle 0|a^+ = 0$ , et  $a^+|0\rangle = |1\rangle$  et son conjuguée Grassmanienne  $\langle 0|a = \langle 1|$ , on obtient alors la relation de fermeture suivante

$$\int d\bar{\psi} d\psi \exp(-\bar{\psi}\psi) |\psi\rangle \langle \psi| = |1\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle 0| = I \quad (3.56)$$

### Intégrale gaussienne

Soit l'intégrale gaussienne fermionique multidimensionnelle suivante

$$\int d\bar{\Psi}d\Psi \exp(-\bar{\Psi}A\Psi) \quad (3.57)$$

$$\text{avec } \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \dots & \bar{\psi}_n \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Développons les mêmes étapes que dans le cas gaussien bosonique utilisons les propriétés (3.49, 3.50) on obtient alors

$$\int d\bar{\Psi}d\Psi \exp(-\bar{\Psi}A\Psi) = \det A \quad (3.58)$$

### 3.4 Intégrale de chemin en représentation états cohérents

Ce qui nous intéresse dans cette section est la formulation de l'intégrale de chemin en représentation états cohérents. Comme nous l'avons vu, l'opérateur d'évolution dépendant du temps est défini par

$$U(T) = T_D \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(a, a^+, t) dt\right) \quad (3.59)$$

avec  $H(a, a^+, t)$  l'opérateur hamiltonien du système dépendant du temps et  $T_D$  l'opérateur chronologique de Dyson.

Et comme nous avons déjà vu, le propagateur est l'amplitude de transition entre l'état initial  $|\eta_i\rangle$  (état cohérent) à l'instant  $t_i$  vers l'état final  $|\eta_f\rangle$  (état cohérent) à l'instant  $t_f$  est défini par

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | U(T) | \eta_i \rangle \quad (3.60)$$

et où  $\eta$  peut être un état cohérent bosonique ou fermionique

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | T_D \exp\left(-i \int_0^T \hat{H}(a, a^+, t) dt\right) | \eta_i \rangle \quad (3.61)$$

Nous subdivisons l'intervalle de temps  $[0; T]$  de sorte que  $T = N\epsilon$  avec  $\epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}$  (avec  $N \rightarrow \infty$ ) de manière à écrire

$$K(\eta_i, \eta_f, T) = \langle \eta_f | \left( e^{[-i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t)]^N} | \eta_i \rangle \right) \quad (3.62)$$

et insérons  $(N - 1)$  relations de fermeture (bosonique et fermionique)

$$\int d\eta_n d\eta_n^* |\eta_n\rangle \langle \eta_n| = 1$$

-pour les bosons

$$\int \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| = 1 \quad (3.63)$$

-pour les fermions

$$\int d\psi_n d\bar{\psi}_n |\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n| = 1 \quad (3.64)$$

Dans la suite nous faisons une construction explicite du propagateur  $K(\alpha_i, \alpha_f, T)$  en représentation bosonique puis nous la généralisons pour les fermions.

Le propagateur  $K(\alpha_i, \alpha_f, T)$  s'écrit sous la forme

$$K(\alpha_i, \alpha_f, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \prod_{n=1}^N \langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \quad (3.65)$$

En évaluant l'élément de matrice figurant dans l'équation 3.65 en premier ordre en  $\epsilon$  comme suit

$$\langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | 1 - i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_{n-1} \rangle \quad (3.66)$$

$$\langle \alpha_n | e^{-(i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t))} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle e^{-(i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t))} \quad (3.67)$$

$$= \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle \left[ 1 - i\epsilon \frac{\langle \alpha_f | \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_f | \alpha_i \rangle} \right] \quad (3.68)$$

et en posant

$$\hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) = \frac{\langle \alpha_f | \hat{H}(a, a^+, t) | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_f | \alpha_i \rangle} \quad (3.69)$$

nous aurons alors

$$\langle \alpha_n | \exp - \left( i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t) \right) | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \langle \alpha_n | \alpha_{n-1} \rangle \exp - \left( i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right) \quad (3.70)$$

Utilisant la propriété (3.10) on écrira

$$\langle \alpha_n | e^{-i\epsilon \hat{H}(a, a^+, t)} | \alpha_{n-1} \rangle \simeq \exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{\alpha_f^2}{2} + \alpha_f^* \alpha_i\right) \exp\left(-i\epsilon \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t)\right) \quad (3.71)$$

Et par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{2} \left( \frac{\alpha_n^* \alpha_n}{\epsilon} + \frac{\alpha_{n-1}^* \alpha_{n-1}}{\epsilon} - \frac{2\alpha_n^* \alpha_{n-1}}{\epsilon} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \\
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2} \left[ \left( \frac{\alpha_n^* (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\epsilon} + \frac{\alpha_{n-1} (\alpha_{n-1}^* - \alpha_n^*)}{\epsilon} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \text{ po} \tag{3.72} \\
K(\alpha_i, \alpha_f, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\alpha_n d\alpha_n^*}{2\pi i} \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{2} \left( \frac{\alpha_n^* \Delta \alpha_n}{\epsilon} - \frac{\alpha_{n-1} \Delta \alpha_n^*}{\epsilon} \right) - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Ou bien sous la forme continue

$$K(\alpha_i, \alpha_f, T) = \int D\alpha D\alpha^* \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha_n^* \dot{\alpha}_n - \alpha_n \dot{\alpha}_n^*) - \hat{H}(\alpha^*, \alpha, t) \right] \right\} \tag{3.73}$$

En final, une simple généralisation de cette construction donne la forme de l'intégrale de chemin en représentation états cohérents (bosonique ou fermionique notée variable  $\eta$ ) s'écrivant comme suit

$$\begin{aligned}
K(\eta_i, \eta_f, T) &= \int D\eta_n D\eta_n^* \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\eta_n^* \dot{\eta}_n + a \eta_n \dot{\eta}_n^*) - \hat{H}(\eta^*, \eta, t) \right] \right\} \tag{3.74} \\
a &= -1 \text{ pour les bosons} \\
a &= 1 \text{ pour les fermions}
\end{aligned}$$

## Chapitre 4

# Modèle de Jaynes-Cummings

### 4.1 introduction

Le modèle standard de Jaynes-Cummings (JCM) largement utilisé en optique quantique qui est le modèle le plus élémentaire décrivant l'interaction d'atomes à deux niveaux avec des champs électromagnétiques quantifiés dans l'approximation dipolaire. Ce modèle est exactement résoluble dans l'approximation d'onde tournante (RWA) qui consiste à supprimer les termes «non conservateurs d'énergie» de l'hamiltonien et a suscité de nombreuses recherches théoriques et expérimentales au cours des dernières décennies. Le JCM permet de calculer toutes les propriétés de la mécanique quantique du système. Les caractéristiques quantiques les plus intéressantes et les plus frappantes du modèle sont les soi-disant effondrements et reprises des oscillations de Rabi lorsque le champ est initialement préparé dans l'état quantique le plus classique, l'état cohérent ou dans un état de vide pressé. Il a été reconnu que ces effets purement quantiques sont une preuve de la granularité du champ de rayonnement.

L'étude de JCM par le formalisme l'intégrale de chemin en représentation des état cohérent a été faites par plusieurs auteurs. Nous citerons Zaheer et Zubairy [8]

qui on résolu le modèle de J-C dans l'approxiamtion d'onde tournante .Malheureusement, le propagateur est exprimés par une série de perturbations qui n'a pas été évalué pour tous les ordres. Par la même methode Buzek [9] comme Boudjedaa et al [10] ont déterminé le propagateur associé à la généralisation multi photon du modèle J-C . Dans ce cas les séries de perturbation ont été sommée dans des cas particuliers stationnaires (interaction indépendants de temps)

Dans ce qui suit ,nous allons essayer de sommer ces série ,correspondantes au cas non stationnaires ,ayant une forme particulière .

## 4.2 Hamiltonien de JCM

Dans cette section nous considérons l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings généralisé donné par l'expression suivante

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \\ \hat{H} &= \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g [F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-]\end{aligned}\tag{4.1}$$

Nous remarquons que l'hamiltonien de JCM à trois composantes qui sont

- énergie du champ.
- énergie des transitions atomiques à 2-niveaux.
- énergie de l'interaction du champ des photons avec l'atome

$\hat{H}_0$  est l' hamiltonien du champs libre (photons)

$$\hat{H}_0 = \omega(a^+a + \frac{1}{2})\tag{4.2}$$

$H_0^{(at)}$  est l'hamiltonien libre des 2-niveaux

$$H_0^{(at)} = \frac{\omega_0}{2}\sigma_3$$

et  $\hat{H}_{int}$  est l' hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{int} = g[F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-]\tag{4.3}$$

où  $a$  et  $a^+$  sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ de photons,  $\omega$  est la fréquence du champ,  $\omega_0$  est la fréquence de transition entre l'état excité et l'état fondamental de l'atome,  $F(a, a^+, t)$  est une fonction de  $a$  et  $a^+$  qui est donnée par l'expression suivante

$$F(a, a^+, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n}(t)a^{+m}a^n\tag{4.4}$$

l'ensemble des matrices  $\{\sigma_+, \sigma_-, \sigma_3\}$  sont les matrices de Pauli standards qui décrivent le système à deux niveaux et  $C_{m,n}(t)$  est une fonction quelconque du temps et des opérateurs  $a$  et  $a^+$ .

## 4.3 JCM dans sa version intégrale de chemin

Comme nous avons vu, l'hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings est de la forme

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g[F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-] \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1\end{aligned}\quad (4.5)$$

avec

$$\hat{H}_0(\text{photons}) = \omega(a^+a + \frac{1}{2}) \quad (4.6)$$

$$\hat{H}_1(t)(\text{2level-photons}) = \left( \frac{\omega_0}{2}\sigma_3 + g [F(a, a^+, t)\sigma_+ + F^+(a, a^+, t)\sigma_-] \right) \quad (4.7)$$

Pour pouvoir construire l'intégrale du chemin correspondante à ce modèle, introduisons d'abord le modèle fermionique de spin dû à Schwinger. Nous remplaçons les matrices de Pauli  $\sigma_j$  par une paire d'opérateur fermioniques  $(u, d)$  suivant la recette

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} u^+ & d^+ \end{pmatrix} \sigma_j \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

et par un simple calcul nous trouvons

$$\begin{cases} \sigma_3 = u^+u - d^+d \\ \sigma_- = d^+u \\ \sigma_+ = u^+d \end{cases} \quad (4.9)$$

Les opérateurs fermioniques et bosoniques vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}u^+ |0\rangle &= |\uparrow\rangle, d^+ |0\rangle = |\downarrow\rangle \\ u |0\rangle &= d |0\rangle = 0 \\ a |\alpha\rangle &= \alpha |\alpha\rangle\end{aligned}\quad (4.10)$$

Ainsi, d'après les relations (4.10) l'Hamiltonien prend la forme suivante

$$\hat{H}(t) = \omega(a^+a + \frac{1}{2}) + \frac{\omega_0}{2}(u^+u - d^+d) + g[F(a, a^+, t)u^+d + F^+(a, a^+, t)d^+u] \quad (4.11)$$

La construction de l'intégrale de chemin du propagateur suit en introduisant l'état cohérent fermion-boson  $|\alpha, \psi, \phi\rangle$  où  $\alpha$  est une variable complexe et  $(\psi, \phi)$  sont des variables de Grassmann. On définit alors le propagateur entre l'état  $|\alpha_i, \psi_i, \phi_i\rangle$  à l'instant  $t_i = 0$  à l'état  $|\alpha_f, \psi_f, \phi_f\rangle$  à l'instant  $t_f = T$  par les éléments matriciels de l'opérateur d'évolution temporelle

$$K(f, i, T) = \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f | U(T, 0) | \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle \quad (4.12)$$

avec  $U(T, 0) = T_D \exp[-i \int_0^T \hat{H}(t) dt]$ ,

$T_D$  est l'opérateur chronologique de Dyson.

Discretisons l'intervalle du temps  $[0, T]$  en  $N$  interval avec  $T = N\epsilon$  et prenons la limite

$N \rightarrow \infty, \epsilon \ll 1$

Utilisons d'abord la formule de Trotter

$$U(T, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{(-i\epsilon \hat{H}_0)} e^{(-i\epsilon \hat{H}_1(t))}]^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N U(t_n, t_{n-1}) \quad (4.13)$$

D'après la définition (2.6) le propagateur s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f | \prod_{n=1}^N U(t_n, t_{n-1}) | \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \alpha_f, \psi_f, \phi_f | [e^{-i\epsilon H_0} e^{-i\epsilon \hat{H}_1(t)}]^N | \alpha_i, \psi_i, \phi_i \rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

et à ce niveau, nous insérons les  $(N - 1)$  relation de fermeture relative à la base  $\{\alpha, \psi, \phi\}$ , il vient

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{2\pi i} \langle \alpha_j | e^{-i\epsilon(H_0)} | \alpha_{j-1} \rangle \\ &\quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j} \\ &\quad \langle \psi_j, \phi_j | e^{-i\epsilon(H_{int})} | \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ensuite, calculons les éléments de matrice pour les bosons

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j | e^{-i\epsilon H_0} | \alpha_{j-1} \rangle &= \langle \alpha_j | e^{-i\epsilon \omega (aa^+ + \frac{1}{2})} | \alpha_{j-1} \rangle \\ &= \langle \alpha_j | \left( 1 - i\epsilon \omega \left[ aa^+ + \frac{1}{2} \right] \right) | \alpha_{j-1} \rangle \\ &= \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle \left( 1 - \frac{i\epsilon \omega \langle \alpha_j | (aa^+ + \frac{1}{2}) | \alpha_{j-1} \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

ce qui signifie

$$\langle \alpha_j | e^{(-\frac{i\epsilon}{\hbar} H_0)} | \alpha_{j-1} \rangle = \langle \alpha_j | \alpha_{j-1} \rangle e^{-i\epsilon \omega (\alpha_j^* \alpha_{j-1} + \frac{1}{2})} \quad (4.17)$$

en utilisant la formule d'orthogonalité on obtient

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j \mid e^{-(i\epsilon H_0)} \mid \alpha_{j-1} \rangle &= \exp - \left[ \frac{1}{2} (\alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) + \alpha_{j-1} (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)) \right] \\ &\times \exp \left[ -i\epsilon \omega (\alpha_j^* \alpha_{j-1} + \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Maintenant, intéressons nous aux éléments de matrice des fermions via l'utilisation des propriétés(4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \psi_j, \phi_j \mid e^{-(i\epsilon H_1)} \mid \psi_{j-1}, \phi_{j-1} \rangle &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \psi_j^* \psi_{j-1} + (1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \phi_j^* \phi_{j-1} \right. \\ &\left. - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \psi_j^* \phi_{j-1} - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \phi_j^* \psi_{j-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Insérons les équations (4.18, 4.19) dans(4.15) , nous avons alors

$$\begin{aligned} K(f, i, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\alpha_j^* d\alpha_j}{2\pi i} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\alpha_j^* (\alpha_j - \alpha_{j-1}) + \alpha_{j-1} (\alpha_j^* - \alpha_{j-1}^*)) \right] \\ &\times e^{-i\epsilon \omega (\alpha_j^* \alpha_{j-1} + \frac{1}{2})} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{(-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \psi_j^* \psi_{j-1} + (1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \phi_j^* \phi_{j-1} \right. \\ &\left. - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \psi_j^* \phi_{j-1} - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \phi_j^* \psi_{j-1} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

pour simplifier l'écriture de cette equation, nous posons que

$$K(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \alpha^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} K^\alpha(f, i, T) \quad (4.22)$$

avec  $K^\alpha(f, i, T)$  le propagateur partiel qui s'écrit sous la forme suivante

$$K^\alpha(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\psi_j^* d\psi_j d\phi_j^* d\phi_j e^{(-\psi_j^* \psi_j - \phi_j^* \phi_j)} \quad (4.23)$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \psi_j^* \psi_{j-1} + (1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2}) \phi_j^* \phi_{j-1} \right. \quad (4.24)$$

$$\left. - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \psi_j^* \phi_{j-1} - i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \phi_j^* \psi_{j-1} \right\} \quad (4.25)$$

Pour effectuer les intégrales gaussiennes sur  $\psi_j$  et  $\phi_j$  nous introduisons le vecteur à deux composantes défini par

$$q_j = \begin{pmatrix} \psi_j \\ \phi_j \end{pmatrix} \text{ et } q_j^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_j^* & \phi_j^* \end{pmatrix}$$

de manière que le propagateur partiel  $K^\alpha(f, i, T)$  sera écrit comme

$$K^\alpha(f, i, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j^+ dq_j \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ q_j + \sum_{j=1}^N q_j^+ R(\alpha_j, t_j) q_{j-1}\right\} \quad (4.26)$$

Nous pouvons mettre l'exposant sous la forme

$$-\sum_{j=1}^{N-1} q_j^+ (1\delta_{ij} - R(\alpha_j, t_j)\delta_{i,j+1}) q_j + q_N^+ R(\alpha_{N+1}, N+1) q_{N+1} + q_1^+ R(1) q_i \quad (4.27)$$

$$= -P^+ M P + P^+ V + W^+ P \quad (4.28)$$

où  $R(\alpha_j, t_j)$  est une matrice donnée par

$$R(\alpha_j, t_j) = \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2} & -i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\epsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & 1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

et

$$P = \{q_l\}, \quad M_{lm} = 1\delta_{lm} - R(\alpha, t)\delta_{l,m+1} \quad l, m \in [1, N] \quad (4.30)$$

Les vecteurs  $V$  et  $W^+$  sont définis par

$$V = \begin{pmatrix} R(\alpha_1, 1)q_1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W^+ = [0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ 0 \ q_{N+1}R(\alpha_{N+1}, N+1)] \quad (4.31)$$

Suivant les définitions des matrices précédentes, le propagateur partiel  $K^\alpha(f, i, T)$  prendra la forme d'une intégrale gaussienne multidimensionnelle

$$K^\alpha(f, i, T) = \int dP^+ dP \exp(-P^+ M P + P^+ V + W^+ P) \quad (4.32)$$

et pour faciliter l'intégration de cette gaussienne, nous faisons le changement suivant

$$P \rightarrow P + M^{-1}V, \quad P^+ \rightarrow P^+ + W^+ M^{-1} \quad (4.33)$$

d'où alors

$$K^\alpha(f, i, T) = \det M \exp(W^+ M^{-1}V) \quad (4.34)$$

en tenant compte du fait que

$$\det M = 1 \quad (4.35)$$

$$R(\alpha, T) = M^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{j=1 \\ \leftarrow}}^{N-1} R(\alpha_j, t_j) \quad (4.36)$$

La flèche sous le symbole du produit indique l'opération de classement temporel et  $R(\alpha_j, t_j)$  sont les éléments de matrice de  $R(\alpha, T)$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  nous avons

$$W^+ M^{-1} V = \lim_{N \rightarrow \infty} [q_f^+ R(N+1) R(N) \dots R(1) q_0] = q_f^+ R(\alpha, T) q_0 \quad (4.37)$$

et finalement on a pour le propagateur  $K^\alpha(f, i, T)$  devient

$$K^\alpha(f, i, T) = \exp(q_f^+ R(\alpha, T) q_0) \quad (4.38)$$

Pour évaluer les éléments de la matrice  $R(\alpha, T)$ , nous écrivons cette matrice  $R(\alpha_j, t_j)$  comme la somme d'une matrice diagonale et une autre anti-diagonale ( pour le premier ordre en  $\epsilon$ )

$$\begin{aligned} R(\alpha_j, t_j) &= \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 & -i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\epsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & 1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 & \\ & 1 + i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\epsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & \end{pmatrix} \quad (4.39) \\ &= e^{-i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3} + i\epsilon K(\alpha_j, t_j) \end{aligned}$$

avec

$$K(\alpha_j, t_j) = \begin{pmatrix} & -i\epsilon g F(\alpha_j^*, \alpha_j, t) \\ -i\epsilon g F^*(\alpha_j^*, \alpha_j, t) & \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

suivant(4.36) nous avons

$$R(\alpha, T) = \prod_{\substack{j=1 \\ \leftarrow}}^N [e^{-i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3} + i\epsilon K(\alpha_j, t_j)] \quad (4.41)$$

et on peut facilement obtenir la représentation en série suivante des éléments  $R(\alpha_j, t_j)$  comme suit

$$\begin{aligned}
\prod_{\leftarrow j=1}^N \exp(-i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + K(\alpha_j, t_j)) &= \sum_{l=1}^N i\epsilon \exp(-i\frac{\omega_0}{2} \sigma_3) + \\
&\sum_{l=1}^N (i\epsilon) \exp(-i \sum_{l+1}^N \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_l, l) \exp(-i \sum_1^{l-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) \\
&+ \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^{l_1-1} (i\epsilon)^2 \exp(-i \sum_{l_1+1}^N \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_1}, l_1) \\
&\exp(-i \sum_{l_2+1}^{l_1-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_2}, l_2) \exp(-i \sum_1^{l_2-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) \\
&+ \dots + \sum_{l_1=1}^N \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \dots \sum_{l_{N-1}=1}^{l_{N-2}-1} \sum_{l_N=1}^{l_{N-1}-1} (i\epsilon)^N \exp(-i \sum_{l_1+1}^N \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_1}, l_1) \\
&\times \exp(-i \sum_{l_2+1}^{l_1-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_2}, l_2) \times \exp(-i \sum_{l_3+1}^{l_2-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_3}, l_3) \\
&\times \exp(-i \sum_{l_{N+1}+1}^{l_{N-2}-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_{N-1}}, l_{N-1}) \\
&\times \exp(-i \sum_{l_N+1}^{l_{N-1}-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) K(\alpha_{l_N}, l_N) \exp(-i \sum_1^{l_N-1} \epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3) \quad (4.42)
\end{aligned}$$

et à la limite  $N \rightarrow \infty$ , le produit devient

$$\begin{aligned}
\prod_{\leftarrow j=1}^N (e^{-i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3} + K(\alpha_j, t_j)) &= \exp\left(-i \int_0^T ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) \\
&+ i \int_0^T ds_1 \exp\left(-i \int_{s_1}^T ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) K(\alpha_1, s_1) \exp\left(-i \int_0^{s_1} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) \\
&+ i^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \exp\left(-i \int_{s_1}^T ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 K(s_1)\right) \\
&\exp\left(-i \int_{s_2}^{s_1} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) K(\alpha_2, s_2) \exp\left(-i \int_{s_3}^{s_2} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) \\
&+ \dots + (i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 (i)^N \exp\left(-i \int_{s_1}^T ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) K(\alpha_1, s_1) \\
&\times \exp\left(-i \int_{s_2}^{s_1} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) K(\alpha_2, s_2) \exp\left(-i \int_{s_3}^{s_2} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) \\
&\times K(\alpha_3, s_3) \dots K(\alpha_{N-1}, s_{N-1}) \exp\left(-i \int_{s_N}^{s_{N-1}} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) K(\alpha_N, s_N) \\
&\exp\left(-i \int_0^{s_N} ds \frac{\omega_0}{2} \sigma_3\right) \quad (4.43)
\end{aligned}$$

ou alors

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^N \exp(-i\epsilon \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + K(\alpha_j, t_j)) &= \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-0)\sigma_3] \\
&+ i \int_0^T ds_1 \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3] K(\alpha_1, s_1) \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-0)\sigma_3] \\
&+ i^2 \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3] K(\alpha_1, s_1) \\
&\exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\sigma_3] K(\alpha_2, s_2) \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\sigma_3] + \dots \\
&(i)^N \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{N-1}} ds_N \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)\sigma_3] \\
&K(\alpha_1, s_1) \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)\sigma_3] K(\alpha_2, s_2) \\
&\exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)\sigma_3] K(\alpha_3, s_3) \dots \\
&\exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{N-1}-s_N)\sigma_3] K(\alpha_N, s_N) \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_N-0)\sigma_3] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Un calcul simple montre que les termes pairs et impairs dans l'expression ci-dessus sont, respectivement, les éléments diagonaux et anti-diagonaux. En utilisant les expressions des matrices  $\sigma_k$ ;  $k = 1, 2, 3$  et celle de la fonction  $K(\alpha_j, t_j)$ , on a alors pour les éléments de matrice  $R_{ij}(\alpha, T)$  les écritures suivantes

$$\begin{aligned}
R_{11}(\alpha, T) &= \exp[-i\frac{\omega_0}{2}T] + (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)] F(\alpha_1, s_1) \exp[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)] \\
&F^*(\alpha_2, s_2) \dots \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})] F(\alpha_{2N-1}, s_{2N}) \dots \\
&\times \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)\sigma_3] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_{12}(\alpha, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)] F(\alpha_1, s_1) \exp[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-0)] \\
&+ (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\exp[-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)] F(\alpha_1, s_1) \exp[i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)] \\
&F^*(\alpha_2, s_2) \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)] F(\alpha_3, s_3) \times \dots \\
&\times \dots \exp[-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{2N+1})] F(\alpha_{2N+1}, s_{2N+1}) \exp[i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)] \dots \quad (4.46)
\end{aligned}$$

D'après les formules suivantes, nous pouvons obtenir les autres éléments de matrice  $R_{ij}(\alpha, T)$

$$\begin{cases} R_{21}(\alpha, T) = -R_{12}^*(\alpha, T) \\ R_{11}^*(\alpha, T) = R_{22}(\alpha, T) \end{cases}$$

Finalement, la forme finale du propagateur  $K(f, i, T)$  est

$$\begin{aligned} K(f, i, T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} \prod_{j=1}^{N-1} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \alpha^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \\ & \times \exp [\psi_f^* (R_{11}(\alpha, T) \psi_i + R_{12}(\alpha, T) \phi_i)] \exp [\phi_f^* (R_{21}(\alpha, T) \psi_i + R_{22}(\alpha, T) \phi_i)] \end{aligned} \quad (4.47)$$

## 4.4 Amplitudes de transition

Dans la suite nous allons calculer les amplitudes de transition entre les états propres de spin.

### 4.4.1 Transition up-up

L'amplitude de transition up-up est définie comme les éléments de matrice  $K_{\uparrow\uparrow}$

$$K_{\uparrow\uparrow} = \langle \uparrow | K(f, i, T) | \uparrow \rangle \quad (4.48)$$

Introduisant les relations de fermeture suivantes

$$\begin{cases} \int d\psi_f^* d\psi_f e^{-\psi_f^* \psi_f} |\psi_f\rangle \langle \psi_f| = 1, \int d\psi_i^* d\psi_i e^{-\psi_i^* \psi_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = 1 \\ \int d\phi_f^* d\phi_f e^{-\phi_f^* \phi_f} |\phi_f\rangle \langle \phi_f| = 1, \int d\phi_i^* d\phi_i e^{-\phi_i^* \phi_i} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

nous aurons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow} = & \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ & \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle \end{aligned} \quad (4.50)$$

et à ce stade, il vaut mieux introduire le vecteur  $v^+ = \begin{pmatrix} \psi_i^* & \psi_f^* & \phi_f^* & \phi_i^* \end{pmatrix}$  et les notations suivantes pour effectuer le calcul rapidement .

$$\begin{cases} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \psi_f, \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle = \psi_i^* & , \langle \downarrow | \psi_f, \phi_f \rangle = \phi_f, \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle = \phi_i^* \\ \psi_f \psi_i^* = e^{-\psi_i^* \psi_f} - 1 & , \phi_f \phi_i^* = e^{-\phi_i^* \phi_f} - 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Substitution (4.51) dans (4.50), il vient

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \exp [\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \\
&\times \exp [\phi_f^* (R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)] \times [e^{(-\psi_i^* \psi_f)} - 1] \\
&\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

et

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} &= \left\{ \int dv dv^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \right. \\
&\exp [\psi_f^* R_{11}\psi_i + \psi_f^* R_{12}\phi_i + \phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i - \psi_i^* \psi_f] \\
&- \int dv dv^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \\
&\times \exp [\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \exp [\phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i] \\
&\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left[ i \int_0^T dt \left( \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

nous trouvons la résultats suivante

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left[ i \int_0^T dt \left( \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right) \right] \\
&\times \int dv dv^+ \left[ \exp(-v^+ \dot{M}v) - \exp(-v^+ Mv) \right]
\end{aligned} \tag{4.54}$$

où les matrices  $\dot{M}$  et  $M$  sont définie par les formes suivantes

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Remarquons que les marices  $\dot{M}$  et  $M$  sont de la forme

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} \dot{A} & C \\ D & B \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

et les blocs  $\dot{A}$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sont respectivement

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{11} & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ R_{22} & -1 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Pour calculer le déterminant des matrices  $\dot{M}$  et  $M$  nous utilisons l'identité

$$\det \dot{M} = \det(\dot{A} - CB^{-1}D) \det B \quad (4.58)$$

et par un calcul simple nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} \det B &= 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \dot{M} &= \det \dot{A} = 1 + R_{11}(\alpha, T), \quad \det A = \det M = 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Finalement, la résultat final de l'amplitude de transition up-up  $K_{\uparrow\uparrow}$  est

$$K_{\uparrow\uparrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{11}(\alpha, T) \quad (4.60)$$

et de la même manière on calcule les autres éléments de transition.

#### 4.4.2 Transition up-down

L'amplitude de transition up-down est définie comme élément de matrice  $K_{\uparrow\downarrow}$

$$K_{\uparrow\downarrow} = \langle \uparrow | K(f, i, T) | \downarrow \rangle \quad (4.61)$$

Introduisant les relations de fermeture suivantes

$$\begin{cases} \int d\psi_f^* d\psi_f e^{-\psi_f^* \psi_f} |\psi_f\rangle \langle \psi_f| = 1, \int d\psi_i^* d\psi_i e^{-\psi_i^* \psi_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = 1 \\ \int d\phi_f^* d\phi_f e^{-\phi_f^* \phi_f} |\phi_f\rangle \langle \phi_f| = 1, \int d\phi_i^* d\phi_i e^{-\phi_i^* \phi_i} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = 1 \end{cases} \quad (4.62)$$

nous aurons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ &\quad \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \langle \uparrow | \psi_f, \phi_f \rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

En utilisant les relations (??), nous avons

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ &\quad \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \times (\psi_f \phi_i^*) \times K(f, i, T) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \times \exp [\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \\
&\times \exp [\phi_f^* (R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)] \times [e^{(-\phi_i^* \psi_f)} - 1] \\
&\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \left\{ \int d v d v^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \right. \\
&\quad * \exp [\psi_f^* R_{11} \psi_i + \psi_f^* R_{12} \phi_i + \phi_f^* R_{21} \psi_i + \phi_f^* R_{22} \phi_i - \phi_i^* \psi_f] \\
&\quad - \int d v d v^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \psi_f^* (R_{11} \psi_i + R_{12} \phi_i) \right\} \exp [\phi_f^* R_{21} \psi_i + \phi_f^* R_{22} \phi_i] \left. \right\} \\
&\quad \div \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

et alors

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \\
&\quad \times \int d v d v^+ \left[ \exp(-v^+ \dot{M} v) - \exp(-v^+ M v) \right]
\end{aligned} \tag{4.67}$$

avec

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ o & -1 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

qui sont de la forme

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ \dot{D} & B \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

On utilise l'identité suivante

$$\det \dot{M} = \det(\dot{A} - C B^{-1} D) + \det B \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}\det B &= 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \dot{M} &= \det \dot{A} + \det B = 1 + R_{12}(\alpha, T), \quad \det A = \det M = 1\end{aligned}\quad (4.71)$$

Alors finalement l'amplitude de transition up-updown  $K_{\uparrow\downarrow}$  s'écrira

$$K_{\uparrow\downarrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{12}(\alpha, T) \quad (4.72)$$

#### 4.4.3 Transition down -up

L'amplitude de transition down -up est définie comme élément de matrice  $K_{\downarrow\uparrow}$

$$K_{\downarrow\uparrow} = \langle \downarrow | K(f, i, T) | \uparrow \rangle \quad (4.73)$$

On sait que

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \times \\ &\exp \{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \} \times \langle \downarrow | \psi_f, \phi_f \rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \uparrow \rangle\end{aligned}\quad (4.74)$$

et on trouve

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ &\times \exp \{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \} \times (\phi_f \psi_i^*) \times K(f, i, T)\end{aligned}\quad (4.75)$$

il vient

$$\begin{aligned}K_{\downarrow\uparrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\ &\exp \{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \} \times \exp [\psi_f^* (R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \\ &\times \exp [\phi_f^* (R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)] \times [e^{(-\psi_i^* \phi_f)} - 1] \\ &\int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\}\end{aligned}\quad (4.76)$$

et

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow} &= \left\{ \int dv dv^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \right. \\
&\quad \exp \left[ \psi_f^* R_{11} \psi_i + \psi_f^* R_{12} \phi_i + \phi_f^* R_{21} \psi_i + \phi_f^* R_{22} \phi_i - \psi_i^* \phi_f \right] \\
&\quad - \int dv dv^+ \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \\
&\quad \exp \left[ \psi_f^* (R_{11} \psi_i + R_{12} \phi_i) \right] \exp \left[ \phi_f^* R_{21} \psi_i + \phi_f^* R_{22} \phi_i \right] \\
&\quad \left. \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

il vient

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} \\
&\quad \times \int dv dv^+ \left[ \exp(-v^+ \dot{M} v) - \exp(-v^+ M v) \right]
\end{aligned} \tag{4.78}$$

avec

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ o & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix}$$

La forme finale de l'amplitude de transition down-up  $K_{\downarrow\uparrow}$  est

$$K_{\downarrow\uparrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{21}(\alpha, T) \tag{4.79}$$

#### 4.4.4 Transition down -down

L'amplitude de transition down -up est définie comme  $K_{\downarrow\downarrow}$

$$K_{\downarrow\downarrow} = \langle \downarrow | K(f, i, T) | \downarrow \rangle$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\quad \times \exp \left\{ -|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2 \right\} \times \langle \downarrow | \psi_f, \phi_f \rangle K(f, i, T) \langle \psi_i, \phi_i | \downarrow \rangle
\end{aligned} \tag{4.80}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\exp\{-|\psi_f|^2 - |\psi_i|^2 - |\phi_f|^2 - |\phi_i|^2\} \\
&\times \exp[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \exp[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)] \times [e^{(-\phi_i^*\phi_f)} - 1] \\
&\times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \left\{ \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \right. \\
&\exp[\psi_f^* R_{11}\psi_i + \psi_f^* R_{12}\phi_i + \phi_f^* R_{21}\psi_i + \phi_f^* R_{22}\phi_i - \phi_i^*\phi_f] \\
&- \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \\
&\times \exp[\psi_f^*(R_{11}\psi_i + R_{12}\phi_i)] \exp[\phi_f^*(R_{21}\psi_i + R_{22}\phi_i)] \\
&\left. \times \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

ou bien alors

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow} &= \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp\left\{i \int_0^T dt \left[\frac{i}{2}(\alpha^*\dot{\alpha} - \alpha\dot{\alpha}^*) - \omega\alpha^*\alpha - \frac{\omega}{2}\right]\right\} \\
&\times \int d\psi_f^* d\psi_f d\psi_i^* d\psi_i d\phi_f^* d\phi_f d\phi_i^* d\phi_i \left[ \exp(-v^+ \dot{M}v) - \exp(-v^+ Mv) \right]
\end{aligned} \tag{4.83}$$

avec

$$\dot{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ o & 0 & -1 & -1 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{11} & -1 & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_{21} & 0 & R_{22} & -1 \end{pmatrix} \tag{4.84}$$

Utilisons l'identité suivante

$$\det \dot{M} = \det(\dot{B} - CB^{-1}D) \det A \tag{4.85}$$

De sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \det B = 1, CB^{-1}D = 0 \\ \det \dot{M} = 1 + R_{22}(\alpha, T), \det A = \det M = 1 \end{array} \right. \tag{4.86}$$

Finalement alors l'amplitude de transition down-up  $K_{\downarrow\downarrow}$  est

$$K_{\downarrow\downarrow} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_f} D\alpha^* D\alpha \exp \left\{ i \int_0^T dt \left[ \frac{i}{2} (\alpha^* \dot{\alpha} - \alpha \dot{\alpha}^*) - \omega \alpha^* \alpha - \frac{\omega}{2} \right] \right\} R_{22}(\alpha, T) \quad (4.87)$$

D'après les propriétés des états cohérents( fermionique et bosonique ) nous pouvons écrire le propagateur sous la forme matricielle suivante

$$K(f, i, T) = \begin{pmatrix} K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) & K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) \\ K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) & K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

## Chapitre 5

# JCM dependant du temps

### 5.1 cas simple

Comme on l'a déjà dit auparavant, voyons comment traiter un concret du modèle Jaynes-Cummings dépend du temps via l'intégrale de chemin. Nous allons considérer le cas simple suivants

$$C_{\hat{m}, \hat{n}}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t} \delta_{m, \hat{m}} \delta_{n, \hat{n}} \quad (5.1)$$

ce qui donne

$$F(a, a^+, t) = e^{-i\Omega_{m,n}t} a^+ m a^n = e^{-i\Omega t} a^+ m a^n \quad (5.2)$$

Se référant à la section (4.3), les éléments de matrice de transition  $R(\alpha, T)$  sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} R_{11}(\alpha, T) &= \exp\left(-i\frac{\omega_0}{2}T\right) + (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(s_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)} F^*(s_2) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(s_3) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)} \dots \times e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N-1}-s_{2N})} F^*(s_{2N}) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)} \sigma_3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

et

$$\begin{aligned} R_{12}(\alpha, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(\alpha_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}s_1} \\ &+ (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\ &e^{-i\frac{\omega_0}{2}(T-s_1)} F(s_1) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_1-s_2)} F^*(s_2) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_2-s_3)} \\ &F(\alpha_3, s_3) e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_3-s_4)} \times \dots e^{i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-s_{N+1})} F(s_{2N+1}) e^{-i\frac{\omega_0}{2}(s_{2N}-0)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les autres éléments sont exprimés par les relations suivantes

$$\begin{cases} R_{21}(\alpha, T) = -R_{12}^*(\alpha, T) \\ R_{11}^*(\alpha, T) = R_{22}(\alpha, T) \end{cases} \quad (5.5)$$

### 5.1.1 Intégration sur les variables complexes

En appliquant exactement les résultats de la section (3.5) la forme matricielle du propagateur est alors

$$\begin{aligned} K(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) &= \exp \left[ -\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2) \right] \\ &\times \exp \left[ \alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)} \alpha_i - \frac{i}{2} \omega (s_f - s_i) \right] \\ &\times \begin{pmatrix} R_{11}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) & R_{12}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) \\ R_{21}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) & R_{22}(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Notons d'abords

$$K^\pm(\alpha_f, \alpha_i, s_f - s_i) = \exp \left[ -\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2) \right] \exp \left[ \alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)} \alpha_i - \frac{i}{2} (\omega \pm \omega_0) (s_f - s_i) \right] \quad (5.7)$$

Les éléments du propagateur s'écrit sous la forme suivants

-pour  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$

$$\begin{aligned} K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\ &\times e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) e^{i\Omega s_2} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} \\ &\times \dots e^{i\Omega s_{2N}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_i, s_{2N} - 0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ecrivant l'exponentielle de  $K^\pm(\alpha_f, \alpha_i, T)$  sous un forme d'une série

$$\exp[\alpha_f^* e^{-i\omega(s_f - s_i)} \alpha_i] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* \alpha_i)^{n*}}{n!} e^{-i\omega n (s_f - s_i)} \quad (5.9)$$

il vient

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\quad \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, \\ \dots, k_{2N}, k_i=0}} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_1|^2)} * \frac{(\alpha_f^*)^{k_1}}{k_1!} (\alpha_1)^{k_1+n} (\alpha_1^*)^{k_2+m} \\
&\quad \times e^{-i\omega k_1(T-s_1) - i\Omega s_1} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T - s_1)\right] \int \frac{d\alpha_2 d\alpha_2^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)} \\
&\quad \frac{(\alpha_2)^{k_2+m} (\alpha_2^*)^{k_3+n}}{k_2!} e^{-i\omega k_2(s_1-s_2) + i\Omega s_2} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1 - s_2)\right] \\
&\quad * \int \frac{d\alpha_3 d\alpha_3^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)} \frac{((\alpha_3)^{k_3+n} (\alpha_3^*)^{k_4+m})}{k_2!} e^{-i\omega k_3(s_2-s_3) - i\Omega s_3} \\
&\quad \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_2 - s_3)\right] \times \dots \int \frac{d\alpha_{2N-1} d\alpha_{2N-1}^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-2}|^2 + |\alpha_{2N-1}|^2)} \\
&\quad \frac{(\alpha_{2N-1})^{k_{2N-1}+n} (\alpha_{2N-1}^*)^{k_{2N-1}+m}}{k_{2N-1}!} e^{-i\omega k_{2N-1}(s_{2N-2}-s_{2N-1}) - i\Omega s_{2N-1}} \\
&\quad \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-2} - s_{2N-1})\right] \int \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N-1}|^2 + |\alpha_{2N}|^2)} \\
&\quad \frac{(\alpha_{2N})^{k_{2N}+m} (\alpha_{2N}^*)^{k_i+n}}{k_{2N}!} e^{-i\omega k_{2N}(s_{2N-1}-s_{2N}) + i\Omega s_{2N}} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-1} - s_{2N})\right] \\
&\quad e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_{2N}|^2 + |\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-i\omega k_i(s_{2N}) + i\Omega s_{2N}} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N} - 0)\right]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Utilisant la propriété suivante

$$\frac{1}{2\pi i \sqrt{m!} \sqrt{n!}} \int \int d\alpha d\alpha^* e^{-|\alpha|^2} (\alpha^*)^n (\alpha)^m = \delta_{nm} \tag{5.11}$$

il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 + n - m = k_2 \\ k_2 = k_3 + n - m \\ \vdots \\ k_{2N} = k_i + n - m \end{array} \right. \tag{5.12}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_{2N} = k_i = k$$

on trouve

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)]} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_f^*)^{k_1} \frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!]} \\
& e^{-i\omega k(T-s_1) - i\Omega s_1} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T - s_1)\right] \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_1-s_2) + i\Omega s_2} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1 - s_2)\right] \\
& e^{-i\omega k(s_2-s_3) - i\Omega s_3} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_2 - s_3)\right] \\
& e^{-i\omega k + (s_{2N-2} - s_{2N-1}) - i\Omega s_{2N-1}} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-2} - s_{2N-1})\right] \\
& e^{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1} - s_{2N}) + i\Omega s_{2N}} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_{2N-1} - s_{2N})\right] \\
& \frac{(\alpha_i)^k}{k!} e^{-i\omega k(s_{2N}) + i\Omega s_{2N}} \exp\left[-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N})\right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
& e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f \alpha_i)^k}{k!} \frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!]} \\
& \exp\left\{-i\omega k(T - s_1) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T - s_1) - i\Omega s_1\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega(k+n-m)(s_1 - s_2) - \frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1 - s_2) + i\Omega s_2\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k(s_2 - s_3) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_2 - s_3) - i\Omega s_3\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k + (s_{2N-2} - s_{2N-1}) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N-2} - s_{2N-1}) - i\Omega s_{2N-1}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega(k+n-m)(s_{2N-1} - s_{2N}) - \frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_{2N-1} - s_{2N}) + i\Omega s_{2N}\right\} \\
& \exp\left\{-i\omega k(s_{2N}) - \frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N})\right\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

on peut aussi réécrire

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \exp -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{[-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)]} \\
&\quad (1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\quad \frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!]} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{2N} (-1)^{j+1} [(n-m)\omega + \Omega - \omega_0] \right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

posons

$$\omega_{nm}^2(k) = g^2 \frac{[(k+n)!]}{[k!(k+n-m)!]} \tag{5.16}$$

et

$$(n-m)\omega + \Omega - \omega_0 = \Delta \tag{5.17}$$

L'élément de transition  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  devient

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \exp -\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\quad \left\{ 1 + [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Les autres éléments de transition se calculent de la même manière .

-Pour  $K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_i, T - s_1) \\
&\quad e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{+m} \alpha_1^n K^-(\alpha_f, \alpha_1, s_1 - 0) \\
&\quad + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\quad \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\
&\quad e^{-i\Omega s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) \\
&\quad e^{i\Omega s_2} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} K^+(\alpha_2, \alpha_3, s_2 - s_3) e^{-i\Omega s_3} \alpha_3^{*m} \alpha_3^n \times \dots \\
&\quad \dots e^{i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_{2N+1}, s_{2N} - s_{2N+1}) \\
&\quad e^{-i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N+1}^m \alpha_{2N+1}^{*n} K^+(\alpha_{2N+1}, \alpha_i, s_{2N+1} - 0)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ou bien le résultat suivant

$$\begin{aligned}
K_{\uparrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T - i\Delta s_1} \\
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k+n-m!} (\alpha_i^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&* \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \right. \\
&\quad \left. \dots \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N+1}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

-Pour  $K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f, \alpha_i, T - s_1) \\
&\quad e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^+(\alpha_f, \alpha_i, s_1 - 0) \\
&+ \sum_{N=1}^{\infty} (ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\quad \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f, \alpha_i, T - s_1) \\
&\quad e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^+(\alpha_f, \alpha_i, s_1 - s_2) e^{-i\Omega s_2} \alpha_2^{*m} \alpha_2^n \\
&\quad K^-(\alpha_f, \alpha_i, s_2 - s_3) e^{i\Omega s_3} \alpha_3^m \alpha_3^{*n} K^+(\alpha_2, \alpha_3, s_2 - s_3) \times \dots \\
&\quad e^{i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^+(\alpha_{2N}, \alpha_{2N+1}, s_{2N} - s_{2N+1}) \\
&\quad e^{i\Omega s_{2N+1}} \alpha_{2N+1}^m \alpha_{2N+1}^{*n} K^-(\alpha_{2N+1}, \alpha_i, s_{2N+1} - 0)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\uparrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (ig) \int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T + i\Delta s_1 - i\omega(n-m)T} \\
&\quad e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} (\alpha_f^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{i\Delta s_3} \right. \\
&\quad \left. \times \dots \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N+1}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

-Pour  $K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T)$

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^-(\alpha_f, \alpha_i, T) + (ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \\
&\times \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\
&\times e^{i\Omega s_1} \alpha_1^m \alpha_1^{*n} K^+(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) e^{-i\Omega s_2} \alpha_2^{*m} \alpha_2^n K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_2 - s_3) \\
&\times e^{i\Omega s_3} \alpha_3^m \alpha_3^{*n} K^+(\alpha_3, \alpha_4, s_3 - s_4) \times \dots \\
&\dots \times e^{i\Omega s_{2N}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} K^-(\alpha_{2N}, \alpha_i, s_{2N} - 0)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Après les calculs on a

$$\begin{aligned}
K_{\downarrow\downarrow}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{mn}^2(k)]^N \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{i\Delta s_3} \right. \\
&\dots \left. \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

avec

$$\omega_{mn}^2(k) = g^2 \frac{[(k+m)!]}{[k!(k+m-n)!]} \tag{5.25}$$

### 5.1.2 Intégration sur le temps

Pour pouvoir intégrer sur le temps, utilisons la transformation de Laplace définie par la relation suivante

$$\mathcal{L}_p(f(s)) = \int_0^{\infty} ds e^{-ps} f(s) \tag{5.26}$$

Donnons l'astuce de notre calcul. Notre résultat sera réécrit d'abord sous la forme d'un produit de convolution

définissons d'abord  $F_0(T)$  par

$$F_0(T) = \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \times \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N+1}} \tag{5.27}$$

Qui peut se mettre comme un produit de convolution

$$F_0(T) = \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \tag{5.28}$$

et où

$$F_1(s_1) = \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} F_2(s_2) \quad (5.29)$$

$$F_2(s_2) = \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} F_3(s_3) \quad (5.30)$$

et on obtient par itération

$$F_{2N-1}(s_{2N-1}) = \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \quad (5.31)$$

avec

$$K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) = e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \quad (5.32)$$

$$\left( 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) \right)$$

Définissons la transformation de Laplace de  $F_0(T)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} F_0(T) \\ &= \int_0^{\infty} dT e^{-pT} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

notons

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \tilde{F}(0, p) \quad (5.34)$$

alors

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{\infty} dT e^{-pT} \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} F_1(s_1) \quad (5.35)$$

produit l'équation(5.35) par  $e^{i\Delta T} e^{-i\Delta T}$

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^{\infty} dT e^{-(p+i\Delta)T} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta(T-s_1)} F_1(s_1) \quad (5.36)$$

qui s'arrange comme

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \mathcal{L}_{p+i\Delta}(F_0(T)) \quad (5.37)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p+i\Delta}(f * g(T)) &= \int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T} dT \int_0^T f(T-s_1) * g(s_1) ds_1 \\ &= G(p)F(p)\end{aligned}\quad (5.38)$$

alors

$$\tilde{F}(0, p) = \int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T} F_0(T) dT \int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T} \int_0^\infty e^{i\Delta T} dT \quad (5.39)$$

puisque

$$\int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T} e^{i\Delta T} dT = \int_0^\infty e^{-pT} dT = \frac{1}{p} \quad (5.40)$$

donc

$$\tilde{F}(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_1(0, p + i\Delta)$$

Même étapes pour les autres termes

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1(0, p + i\Delta) &= \int_0^\infty e^{-pT} F_2(0, T) dT \int_0^\infty e^{-(p+i\Delta)T} dT \\ &= \frac{1}{p + i\Delta} \tilde{F}_2(0, p)\end{aligned}\quad (5.41)$$

et

$$\tilde{F}_2(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_3(0, p + i\Delta) \quad (5.42)$$

jusqu'à l'ordre  $2N - 1$

$$\tilde{F}_{2N-2}(0, p) = \frac{1}{p + i\Delta} \tilde{F}_{2N}(0, p) \quad (5.43)$$

$$\tilde{F}_{2N-1}(0, p) = \frac{1}{p} \tilde{F}_{2N}(0, p + i\Delta) \quad (5.44)$$

en conclusion ,on a  $\mathcal{L}_p(F_0(T))$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \tilde{F}(0, p) \\ \tilde{F}(0, p) &= \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p(p + i\Delta)} \right]^N\end{aligned}\quad (5.45)$$

nous rappelons que

$$K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) = e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \quad (5.46)$$

$$\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) \right\}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace

$$F_0(T) = \int_0^{\infty} e^{-pT} \tilde{F}(0, p) dp = \text{la somme de r sidue } e^{-pT} \tilde{F}(0, p) \text{   sous les pôles} \quad (5.47)$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} e^{-pT} \tilde{F}(0, p) dp \\ & \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} e^{-pT} \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p(p+i\Delta)} \right]^N dp \\ & = \int_0^{\infty} e^{-pT} \frac{1}{p} \sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N - 1 \right\} dp \end{aligned} \quad (5.48)$$

on suppose

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} \left[ \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N \quad (5.49)$$

$$\left[ \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N = \frac{1 - \left( \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right)^{N+1}}{1 - \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} \quad (5.50)$$

si la condition  $\left| \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right| \leq 1$  est vérifiée donc

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right)^N}{1 - \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} &= \frac{1}{1 - \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)}} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} A_{N \rightarrow \infty} &= \frac{p(p+i\Delta)}{p(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} [-\omega_{nm}^2(k)]^N \int_0^{\infty} e^{-pT} \tilde{F}(0, p) dp &= \int_0^{\infty} e^{-pT} \left( \frac{p+i\Delta}{p(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} - \frac{1}{p} \right) dp \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pT} \left( \frac{p+i\Delta}{p(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} - \frac{1}{p} \right) dp \end{aligned} \quad (5.52)$$

calcul de  $\int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{(p+i\Delta)}{(p+i\Delta)+\omega_{nm}^2(k)} \right) dp$  :

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{p + \frac{i\Delta}{2}}{p(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} + \frac{\frac{i\Delta}{2}}{(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} \right) dp \\ &= \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{p + \frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \left( \sqrt{\frac{\Delta^2}{4}} + \omega_{nm}^2(k) \right)^2 \right)} + \frac{\frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \left( \sqrt{\frac{\Delta^2}{4}} + \omega_{nm}^2(k) \right)^2 \right)} \right) dp \end{aligned} \quad (5.53)$$

posons que

$$\sqrt{(\Delta + 4\omega_{nm}^2(k))} = \Omega_1 \quad (5.54)$$

il vient

$$\int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{(p+i\Delta)}{(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} \right) dp = \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{p + \frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} + \frac{\frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} \right) dp \quad (5.55)$$

en utilisant les formule suivant

$$e^{-bx} \sin(ax) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{a}{(p+b)^2 + a^2} dp \quad (5.56)$$

$$e^{-bx} \cos(ax) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{p+b}{(p+b)^2 + a^2} dp \quad (5.57)$$

alors

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{p + \frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} \right) dp \\ &= e^{-\frac{i\Delta T}{2}} \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}T\right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{\frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} \right) dp &= \frac{i\Delta}{\Omega_1} \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{\frac{\Omega_1}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} \right) dp \\ \int_0^\infty e^{-pT} \left( \frac{\frac{i\Delta}{2}}{\left( (p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4} \right)} \right) dp &= e^{-\frac{i\Delta T}{2}} \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin\left(\frac{\Omega_1}{2}T\right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

La transformation inverse donne

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}[(m-n)-1]\omega-\Omega)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\times \left( \cos(\Omega_1 T) + \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 T) \right)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

avec

$$\Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 + 4\omega_{nm}^2(k)} \tag{5.61}$$

Les autre éléments de transition s'obtiennent de la même manière.

-Pour le propagateur  $K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on va jusqu'à l'ordre  $2N$ . On a de même

$$\mathcal{L}_p(F(0, T)) = \left[ \frac{1}{p(p+i\Delta)} \right]^{N+1} \tag{5.62}$$

$$\mathcal{L}_p(F_1(0, T)) = \frac{1}{p(p+i\Delta)} \tag{5.63}$$

avec

$$\begin{aligned}
K_{12}(\alpha, T) &= (-ig) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k+n-m!} (\alpha_i^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\times \{ F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) \}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace qui nous donne

$$F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \int_0^\infty e^{-pT} \tilde{F}_1(0, p) + \frac{1}{p(p+i\Delta)} \int_0^\infty e^{-pT} \tilde{F}(0, p) dp \tag{5.65}$$

alors

$$F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \frac{1}{p(p+i\Delta)} \int_0^\infty e^{-pT} \sum_{N=0}^{\infty} \left( \left[ \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N \right) dp \tag{5.66}$$

et

$$\begin{aligned}
F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) &= \int_0^\infty e^{-pT} \frac{1}{p(p+i\Delta) + \omega_{nm}^2(k)} dp \\
&= \int_0^\infty e^{-pT} \frac{1}{(p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta^2}{4}\right) + \omega_{nm}^2(k)}\right)^2} dp \\
&= \int_0^\infty e^{-pT} \frac{1}{(p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4}} dp \\
&= \frac{2}{\Omega_1} \int_0^\infty e^{-pT} \frac{\frac{\Omega_1}{2}}{(p + \frac{i\Delta}{2})^2 + \frac{\Omega_1^2}{4}} dp \\
&= e^{-\frac{i\Delta T}{2}} \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2} T)}{\frac{\Omega_1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

il vient

$$\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{\frac{i}{2}[(m-n)-1]\omega - \Omega T} \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+n)!}{k+n-m!} \\
&\quad (\alpha_i^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} \alpha_i)^k}{k!} \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2} T)}{\frac{\Omega_1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.68}$$

-Pour le propagateur  $K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\mathcal{L}_p(F(0, T)) = \left[ \frac{1}{p(p+i\Delta)} \right]^{N+1} \tag{5.69}$$

Prenant la transformation inverse de Laplace qui nous donne

$$F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \int_0^\infty e^{-pT} \tilde{F}_1(0, p) + \int_0^\infty e^{-pT} \tilde{F}(0, p) dp \tag{5.70}$$

alors

$$F_1(0, T) + [-\omega_{nm}^2(k)]^N F_0(T) = \frac{1}{p(p-i\Delta)} \int_0^\infty e^{-pT} \sum_{N=0}^\infty \left( \left[ \frac{-\omega_{nm}^2(k)}{p(p+i\Delta)} \right]^N \right) dp \tag{5.71}$$

on aura

$$\begin{aligned}
K_{21}(\alpha, T) &= (ig) \int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\
&\quad e^{\frac{-i}{2}[(1-m-n)\omega - \Omega]} (\alpha_f^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_1}{2} T)}{\frac{\Omega_1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{5.72}$$

-pour le propagateur  $K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T)$

Après un calcul analogue de  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on trouve

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p(p-i\Delta)} \right]^N \quad (5.73)$$

En inversant la transformée de Laplace on aura

$$\begin{aligned} K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}[(n-m)\omega-1-\Omega]T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\ &\times \left( \cos\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_2} \sin\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.74)$$

avec

$$\sqrt{(\Delta + 4\omega_{mn}^2(k))} = \Omega_2 \quad (5.75)$$

### 5.1.3 inversion de population atomique

Définissons la probabilités de transition par

$$P_{rs}(t_f) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i)|^2 \quad (5.76)$$

avec

$$K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i) = \langle r | K_{rs}(\alpha_f; t_f; \alpha_i; t_i) | s \rangle \quad (5.77)$$

pour  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \quad (5.78)$$

donc

$$\begin{aligned} P_{11}(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \frac{(\alpha_f e^{-i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \\ &\left( \cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

De sorte que

$$\Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 + 4\omega_{n,m}(k_1)} \text{ pour le terme } \left( \cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \right) \quad (5.80)$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\Delta^2 + 4\omega_{n,m}(k_2)} \text{ pour le terme } \left( \cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_1} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \right) \quad (5.81)$$

Utilisons la propriété (5.11) on trouve

$$\begin{aligned} P_{11}(T) &= e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{2k}}{k!} \left( \cos\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \right) \\ &= e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{2k}}{k!} \left( \frac{1 - \cos(\Omega_1 T)}{2} + \cos(\Omega_1 T) + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \right) \\ P_{11}(T) &= e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_1 T) + \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2}\right) \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

-pour  $K_{12}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} P_{12}(T) &= \frac{g^2}{2\pi i} \int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} (\alpha_i^*)^{n-m} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(k_1 + n)!}{(k_1 + n - m)!} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\ &\quad \left( \frac{\sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(k_2 + n)!}{(k_2 + n - m)!} (\alpha_i^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \left( \frac{\sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \\ &= e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i \alpha_i^*)^k}{(k + n - m)!} (\alpha_i \alpha_i^*)^{n-m} [\omega_{n,m}^2(k)] \frac{\sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2}{\left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.84)$$

En tenant compte que

$$[\omega_{n,m}^2(k)] \frac{4}{\Omega_1^2} = \frac{4\omega_{n,m}^2(k)}{\Omega_1^2} = \frac{\Omega_1^2 - \Delta_1^2}{\Omega_1^2} = \left(1 - \frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2}\right) \quad (5.85)$$

on trouve

$$P_{12}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2(k+n-m)}}{(k + n - m)!} \left(1 - \frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2}\right) \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \quad (5.86)$$

-pour  $K_{21}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{21}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \quad (5.87)$$

alors

$$\begin{aligned}
P_{21}(T) &= \frac{g^2}{2\pi i} \int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} (\alpha_f^*)^{n-m} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(k_1+n)!}{(k_1+n-m)!} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\
&\quad \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_1 T}{2})}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(k_2+n)!}{(k_2+n-m)!} (\alpha_f^*)^{n-m} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_1 T}{2})}{\frac{\Omega_1}{2}} \right) \\
&= e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i \alpha_i^*)^k}{k!} [\omega_{n,m}^2(k)] \frac{\sin(\frac{\Omega_1 T}{2})^2}{(\frac{\Omega_1}{2})^2}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

alors

$$P_{21}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left( 1 - \frac{\Delta_1^2}{\Omega_1^2} \right) \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \tag{5.89}$$

-pour  $K_{22}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{22}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{22}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
P_{22}(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \frac{(\alpha_f e^{-i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \\
&\quad \left( \cos\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_2} \sin\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_2} \sin\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Avec la même méthode on trouve la résultats suivante

$$P_{22}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_1 T) + \left( 1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_1^2} \right) \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \right) \tag{5.92}$$

En supposant qu'au moment initial, l'atome est dans son état fondamental, l'inversion de la population atomique est définie comme

$$W_1(T) = P_{11}(T) - P_{12}(T) \tag{5.93}$$

Alors

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_1 T) + \frac{2\Delta^2}{\Omega_1^2} \sin\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)^2 \right) \tag{5.94}$$

Mais si l'atome est dans l'états excité, on a

$$W_2(T) = P_{21}(T) - P_{22}(T) \tag{5.95}$$

Donc

$$W_2(T) = -e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_2 T) + \frac{2\Delta^2}{\Omega_2^2} \sin\left(\frac{\Omega_2 T}{2}\right)^2 \right) \tag{5.96}$$

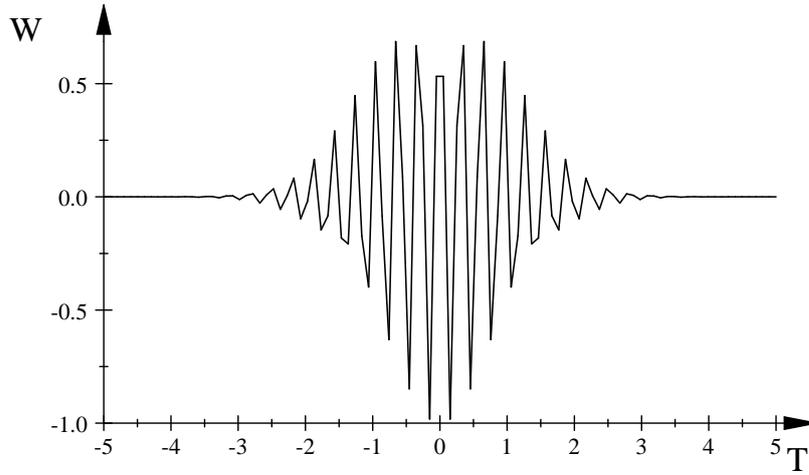


FIG. 5.1 – Population inverse  $W_1(T) = y$  dans le cas résonnant . Ici  $\alpha_i = 10$

### Cas particulier

Dans le cas résonnant  $n = 1, m = 0, \Delta = 0$  on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_1 T)) \quad (5.97)$$

$$\Omega_1(k) = \sqrt{4g^2 (k + 1)}$$

$W_1(T)$  est donné par la figure (5.1)

dans le cas non résonnant  $n = 1, m = 0, \Delta \neq 0$  on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_1 T)) \quad (5.98)$$

$$\Omega_1(k) = \sqrt{4g^2 k (k - 1)}$$

dans ce cas  $W_1(T)$  est donné par la figure (5.2)

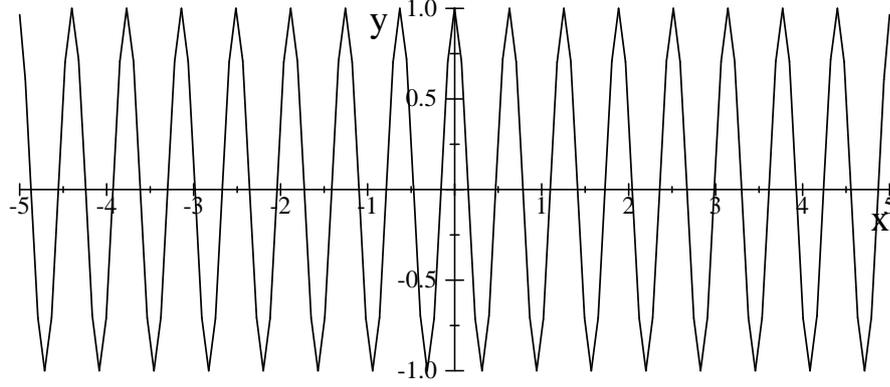


FIG. 5.2 – Population inverse  $W_1(T) = y$  dans le cas non- résonnant . Ici  $\alpha_i = 10$

## 5.2 Cas composé

Dans ce paragraphe, nous voulons traiter le cas où

$$C_{\dot{m}, \dot{n}}(t) = e^{-i\Omega_{m,n}t} \delta_{m, \dot{m}} \delta_{n, \dot{n}} + e^{-i\Omega_{q,p}t} \delta_{q, \dot{m}} \delta_{p, \dot{n}} \quad (5.99)$$

Ce qui veut dire

$$\begin{aligned} F(a, a^+, t) &= e^{-i\Omega_{m,n}t} a^{+m} a^n + e^{-i\Omega_{q,p}t} a^{+q} a^p \\ &= e^{-i\Omega_1 t} a^{+m} a^n + e^{-i\Omega_2 t} a^{+q} a^p \end{aligned} \quad (5.100)$$

### 5.2.1 Intégration sur les variables complexes

Les éléments du propagateur sont donnés dans ce cas par

$$\begin{aligned} K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\ &\times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\ &F(\alpha_1, s_1) K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) F^*(\alpha_2, s_2) \\ &\times \dots F^*(\alpha_{2N}, s_{2N}) K^+(\alpha_{2N}, \alpha_i, s_{2N} - 0) \end{aligned} \quad (5.101)$$

avec

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^+(\alpha_f, \alpha_i, T) + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_1} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \frac{d\alpha_2 d\alpha_2^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} \\
&\times \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \\ k_i=0}} \frac{(\alpha_f^* \alpha_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\frac{i}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_1|^2)} e^{-i\omega k_1(T-s_1)} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(T-s_1)} \quad (5.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(e^{-i\Omega_1 s_1} \alpha_1^{*m} \alpha_1^n + e^{-i\Omega_2 s_1} \alpha_2^{*p} \alpha_2^q) \frac{(\alpha_1^* \alpha_2)^{k_2}}{k_2!} e^{-\frac{i}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)} \\
&e^{-i\omega k_2(s_1-s_2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)(s_1-s_2)} (e^{i\Omega_1 s_2} \alpha_2^m \alpha_2^{*n} + e^{i\Omega_2 s_2} \alpha_2^p \alpha_2^{*q}) \dots \\
&\times \dots (e^{i\Omega_1 s_{2N}} \alpha_{2N}^m \alpha_{2N}^{*n} + e^{i\Omega_2 s_{2N}} \alpha_{2N}^p \alpha_{2N}^{*q}) \frac{(\alpha_{2N}^* \alpha_i)^{k_i}}{k_i!} \\
&e^{-\frac{i}{2}(|\alpha_{2N}|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-i\omega k_i(s_{2N}-0)} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)(s_{2N+1}-0)} \quad (5.103)
\end{aligned}$$

Suivant la propriété(5.11) on trouve

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T} e^{-\frac{i}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \left( \int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_1} + \int_0^T ds_1 \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_1} \right) \\
&\left( \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{i\Delta_1 s_2} + \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_2} \right) \quad (5.104) \\
&\dots \left( \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_{2N-1}} + \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_{2N-1}} \right) \\
&\left( \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+n)!}{(k-n+m)!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_{2N}} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

et avec

$$\begin{aligned}
p - q &= n - m \\
\omega(n - m) - \omega_0 + \Omega_1 &= \Delta_1 \\
\omega(p - q) - \omega_0 + \Omega_2 &= \Delta_2 \quad (5.105)
\end{aligned}$$

Les autres éléments se calculent de la même manière

-pour  $K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T)$

$$\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) = & \{(-ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_i, T - s_1) \\
& F_1(\alpha_1, s_1) K^-(\alpha_f, \alpha_1, s_1 - 0) \\
& + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
& \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^+(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\
& F_1(\alpha_1, s_1) K^-(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) \\
& F_2^*(\alpha_2, s_2) K^+(\alpha_2, \alpha_3, s_2 - s_3) F_3(\alpha_3, s_3) \dots \\
& \times \dots \times F_{2N}^*(\alpha_{2N}, s_{2N}) K^+(\alpha_{2N}, \alpha_{2N+1}, s_{2N} - s_{2N+1}) \\
& F_{2N+1}(\alpha_{2N+1}, s_{2N+1}) K^-(\alpha_{2N+1}, \alpha_i, s_{2N+1} - 0)
\end{aligned} \tag{5.106}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) = & \{(-ig) \int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} (\alpha_i)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
& \left( \frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{-i\Delta_1 s_1} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_1} \right) \\
& \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \right. \\
& \left. \left( \frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{i\Delta_1 s_2} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_2} \right) \left( \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_3} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_3} \right) \dots \right. \\
& \left. \dots \left( \frac{(k+n)!}{k+n-m!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_{2N}} \right) \left( \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_{2N+1}} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_{2N+1}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

-pour  $K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \{(-ig) \int_0^T ds_1 \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f, \alpha_i, T - s_1) \\
&F_1(\alpha_1, s_1) K^+(\alpha_f, \alpha_1, s_1 - 0) \\
&+ \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N+1} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \\
&\int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N+1} d\alpha_{2N+1}^*}{2\pi i} K^-(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) \\
&F_1^*(\alpha_1, s_1) K^+(\alpha_1, \alpha_2, s_1 - s_2) \\
&F_2(\alpha_2, s_2) K^-(\alpha_2, \alpha_3, s_2 - s_3) F_3^*(\alpha_3, s_3) \dots \\
&\times \dots \times F_{2N}(\alpha_{2N}, s_{2N}) K^-(\alpha_f, \alpha_i, s_{2N} - s_{2N+1}) \\
&F_{2N+1}^*(\alpha_{2N+1}, s_{2N+1}) K^+(\alpha_{2N+1}, \alpha_i, s_{2N+1} - 0)
\end{aligned} \tag{5.108}$$

Ou bien la forme suivante

$$\begin{aligned}
K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) \int_0^T ds_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T} (\alpha_f)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\left( \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{-i\Delta_1 s_1 - \omega(n-m)T} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_1 - \omega(p-q)T} \right) \\
&\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} \right. \\
&\left. \left( \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_2} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_2} \right) \left( \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{-i\Delta_1 s_3} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_3} \right) \dots \right. \\
&\left. \left( \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_{2N}} \right) \left[ \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{-i\Delta_1 s_{2N+1}} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{-i\Delta_2 s_{2N+1}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.109}$$

-Pour  $K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= K^-(\alpha_f, \alpha_i, T) + (ig)^{2N} \int_0^T ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \\
&\times \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_1^*}{2\pi i} \dots \frac{d\alpha_{2N} d\alpha_{2N}^*}{2\pi i} \\
&\times K^-(\alpha_f, \alpha_1, T - s_1) F^*(\alpha_1, s_1) K^+(\alpha_f, \alpha_1, s_1 - s_2) \\
&F(\alpha_2, s_2) K^-(\alpha_f, \alpha_1, s_2 - s_3) F^*(\alpha_3, s_3) K^+(\alpha_f, \alpha_1, s_3 - s_4) \dots \\
&\dots \times K^-(\alpha_f, \alpha_1, s_{2N-1} - s_{2N}) F(\alpha_{2N}, s_{2N}) K^+(\alpha_f, \alpha_1, s_{2N} - 0)
\end{aligned} \tag{5.110}$$

Ou bien le résultat suivant

$$\begin{aligned}
K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \left( \int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_1 s_1} + \int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_2 s_1} \right) \right. \\
&\left( \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+n)!}{(k+m-n)!} e^{-i\Delta_1 s_2} + \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+p)!}{(k+q-p)!} e^{-i\Delta_2 s_2} \right) \\
&\dots \left( \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+n)!}{k!} e^{i\Delta_{s_{2N-1}}} + \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+p)!}{k!} e^{i\Delta_{s_{2N-1}}} \right) \\
&\times \left. \left( \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+n)!}{(k+m-n)!} e^{-i\Delta_1 s_{2N}} + \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+p)!}{(k+q-p)!} e^{-i\Delta_2 s_{2N}} \right) \right\} \quad (5.111)
\end{aligned}$$

### 5.2.2 Intégration sur le temps

Si  $\Delta_1 \neq \Delta_2$  l'intégration sur le temps par la technique de Laplace devient pratiquement infaisable puisque sa récurrence n'est plus évidente. Pour avancer dans les calculs, nous supposons que

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad (5.112)$$

sans oublier que les intégrations complexes ont imposé une sélection sur les puissances comme suit

$$n - m = p - q \quad (5.113)$$

Alors les éléments du propagateur s'écrivent sous les formes suivantes

-Pour  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on a

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \left( \int_0^T ds_1 \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_1 s_1} + \int_0^T ds_1 \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_2 s_1} \right) \right. \\
&\left( \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+n)!}{(k+n-m)!} e^{i\Delta_1 s_2} + \int_0^{s_1} ds_2 \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_2} \right) \\
&\left( \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+n)!}{k!} e^{-i\Delta_{s_{2N-1}}} + \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} \frac{(k+p)!}{k!} e^{-i\Delta_{s_{2N-1}}} \right) \\
&\left. \left( \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+n)!}{(k-n+m)!} e^{i\Delta_1 s_{2N}} + \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} e^{i\Delta_2 s_{2N}} \right) \right\} \quad (5.114)
\end{aligned}$$

alors  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  devient

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-ig)^{2N} \left( \frac{(k+n)!(k+p)!}{k!} \right)^N \left( \frac{(k+n)!+(k+p)!}{(k+n-m)!} \right)^N \right. \\
&\left. \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_1} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N}} \right\} \quad (5.115)
\end{aligned}$$

posons

$$\left[ g^2 \left( \frac{(k+n)!}{k!} + \frac{(k+p)!}{k!} \right) \left( \frac{(k+n)!}{k+n-m!} + \frac{(k+p)!}{(k+p-q)!} \right) \right] = \omega_{np}^2 \quad (5.116)$$

En tenant compte de

$$p - q = n - m \quad (5.117)$$

alors

$$\left[ g^2 \frac{((k+n)!+(k+p)!)^2}{[k!k+n-m!]} \right] = \omega_{np}^2 \quad (5.118)$$

Le propagateur  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  prend la forme

$$\begin{aligned}
K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega+\omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2+|\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\left\{ 1 + (-\omega_{np}^2)^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \dots \right. \\
&\left. \times \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \right\} \quad (5.119)
\end{aligned}$$

De même on trouve les autres éléments

$$\begin{aligned}
K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \left\{ (-ig) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T} (\alpha_i)^{n-m} \right. \\
&\quad \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \left( \frac{(k+n)! + (k+p)!}{k+n-m!} \right) \\
&\quad \left\{ \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} + \sum_{N=1}^{\infty} (-\omega_{np}^2)^N \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_1} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \right. \\
&\quad \times \dots \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N+1}} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.120}$$

$$\begin{aligned}
K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= (-ig) e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T - i\omega(n-m)T} \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(k+n)! + (k+p)!}{(k+n-m)!} \right) (\alpha_f)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\quad \left\{ 1 + (-\omega_{np}^2)^N \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \int_0^{s_1} ds_3 e^{i\Delta s_3} \right. \\
&\quad \times \dots \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{i\Delta s_{2N+1}} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.121}$$

$$\begin{aligned}
K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{-\frac{i}{2}(\omega + \omega_0)T} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \\
&\quad \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (-\omega_{mq}^2)^N \int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\Delta s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{-i\Delta s_{2N}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.122}$$

Avec

$$\left[ g^2 \frac{((k+m)! + (k+q)!)^2}{k! (k+m-n)!} \right] = \omega_{mq}^2 \tag{5.123}$$

Nous remarquons que l'intégration sur le temps dans cette partie est équivalent à celle de (5.1.2) du cas simple ; c'est à dire le calcul par la méthode de Laplace déjà appliquée, il suffit de retrouver les résultats.

Comme d'habitude nous écrivons notre résultats sous la forme d'un produit de convolution qui s'arrange comme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \mathcal{L}_{p+i\Delta}(F_0(T)) \\ \mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \mathcal{L}_{p+i\Delta}\left(\int_0^T ds_1 e^{i\Delta s_1} F_1(s_1)\right)\end{aligned}\quad (5.124)$$

En utilisant alors la théorème de convolution on aura

$$\mathcal{L}_p(F_0(T)) = \frac{1}{p} \mathcal{L}_{p+i\Delta} F_1(s_1) \quad (5.125)$$

avec

$$\begin{aligned}F_0(T) &= \int_0^T ds_1 e^{-i\Delta s_1} \int_0^{s_1} ds_2 e^{i\Delta s_2} \int_0^{s_2} ds_3 e^{-i\Delta s_3} \dots \\ &\times \int_0^{s_{2N-2}} ds_{2N-1} e^{-i\Delta s_{2N-1}} \int_0^{s_{2N-1}} ds_{2N} e^{i\Delta s_{2N}} \int_0^{s_{2N}} ds_{2N+1} e^{-i\Delta s_{2N+1}}\end{aligned}\quad (5.126)$$

En tenant compte du fait que la transformation de Laplace de  $F_0(T)$  est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p(p+i\Delta)} \right]^N \text{ à l'ordre } 2N-1 \\ \mathcal{L}_p(F_0(T)) &= \left[ \frac{1}{(p+i\Delta)} \right]^{N+1} \text{ à l'ordre } 2N\end{aligned}\quad (5.127)$$

Puis prenons l'inverse de la transformée de Laplace pour obtenir les résultats suivants

-Pour  $K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on trouve

$$\begin{aligned}K_{11}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= e^{\frac{i}{2}[(m-n)-1]\omega-\Omega T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \\ &\left( \cos\left(\frac{\Omega_3}{2}T\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_3} \sin\left(\frac{\Omega_3}{2}T\right) \right)\end{aligned}\quad (5.128)$$

avec

$$\Omega_2 = \sqrt{(\Delta + 4\omega_{pn}^2(k))} \quad (5.129)$$

-Pour  $K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on trouve

$$\begin{aligned}K_{12}(\alpha_f, \alpha_i, T) &= \{(-ig) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{\frac{i}{2}[(m-n)-1]\omega-\Omega T} (\alpha_i)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!}\} \\ &e^{\frac{-i}{2}[(1-m-n)\omega-\Omega]} \left( \frac{(k+n)! + (k+p)!}{(k+n-m)!} \right) \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_3}{2}T)}{\frac{\Omega_3}{2}} \right)\end{aligned}\quad (5.130)$$

-Pour  $K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on trouve

$$K_{21}(\alpha_f, \alpha_i, T) = \{(-ig) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)T} (\alpha_f)^{n-m} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} \left( \frac{(k+n)! + (k+p)!}{(k+n-m)!} \right) \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_3 T}{2})}{\frac{\Omega_3}{2}} \right)\} \quad (5.131)$$

-Pour  $K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T)$  on trouve

$$K_{22}(\alpha_f, \alpha_i, T) = e^{\frac{i}{2}([(m-n)-1]\omega + \Omega)T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} \left( \cos\left(\frac{\Omega_4 T}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_4} \sin\left(\frac{\Omega_4 T}{2}\right) \right) \quad (5.132)$$

Avec

$$\Omega_4 = \sqrt{(\Delta + 4\omega_{qm}^2(k))} \quad (5.133)$$

### 5.2.3 Inversion de population atomique

Par un calcul identique de section (5.2.3) et en utilisant la propriété (5.11) on trouve les probabilités de chaque élément de transition .

-Pour  $K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{11}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{11}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \quad (5.134)$$

Alors

$$P_{11}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_i^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_3 T) + \left(1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_3^2}\right) \sin\left(\frac{\Omega_3 T}{2}\right)^2 \right)$$

-Pour  $K_{12}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{12}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{12}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned}
P_{12}(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha e^{-(|\alpha_f|^2 + |\alpha_i|^2)} (\alpha_i^*)^{n-m} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left( \frac{(k_1+n)! + (k_1+p)!}{(k_1+n-m)!} \right) \frac{(\alpha_f^* e^{-i\omega T} \alpha_i)^{k_1}}{k_1!} \\
&\quad \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_3 T}{2})}{\frac{\Omega_3}{2}} \right) \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( \frac{(k_2+n)! + (k_2+p)!}{(k_2+n-m)!} \right) (\alpha_i)^{n-m} \frac{(\alpha_f e^{i\omega T} \alpha_i^*)^{k_2}}{k_2!} \left( \frac{\sin(\frac{\Omega_3 T}{2})}{\frac{\Omega_3}{2}} \right) \\
&= e^{-(\alpha_i^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i \alpha_i^*)^k}{(k+n-m)!} (\alpha_i \alpha_i^*)^{2(n-m)} [\omega_{n,p}^2(k)] \frac{\sin(\frac{\Omega_3 T}{2})^2}{(\frac{\Omega_3}{2})^2}
\end{aligned} \tag{5.136}$$

On trouve

$$P_{12}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2(k+n-m)}}{(k+n-m)!} \sin(\frac{\Omega_3 T}{2})^2 \left( 1 - \frac{\Delta^2}{\Omega_3^2} \right) \tag{5.137}$$

Pour  $K_{21}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{21}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{21}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \tag{5.138}$$

Il vient

$$P_{21}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i|^{2k}}{k!} \left( 1 - \frac{\Delta^2}{\Omega_3^2} \right) \sin(\frac{\Omega_3 T}{2})^2 \tag{5.139}$$

-Pour  $K_{22}(\alpha_f; \alpha_i; T)$  on a

$$P_{22}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\alpha |K_{22}(\alpha_f; \alpha_i; T)|^2 \tag{5.140}$$

Par un calcul direct on obtient

$$P_{22}(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_4 T) + \left( 1 + \frac{\Delta^2}{\Omega_4^2} \right) \sin(\frac{\Omega_4 T}{2})^2 \right) \tag{5.141}$$

L'inversion de population atomique est définie comme

$$W_1(T) = P_{11}(T) - P_{12}(T) \tag{5.142}$$

Et donc

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_3 T) + \frac{2\Delta^2}{\Omega_3^2} \sin(\frac{\Omega_3 T}{2})^2 \right) \tag{5.143}$$

Si l'atome est dans l'états excité

$$W_2(T) = P_{21}(T) - P_{22}(T) \tag{5.144}$$

alors

$$W_2(T) = -e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} \left( \cos(\Omega_4 T) + \frac{2\Delta^2}{\Omega_4^2} \sin\left(\frac{\Omega_4}{2} T\right)^2 \right) \quad (5.145)$$

### Cas particulier

Dans le cas résonnant  $n = 1, p = 1, m = 0, q = 0, \Delta = 0$  on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_3 T)) \quad (5.146)$$

$$\Omega_3(k) = \sqrt{\left(\frac{2g^2}{k+1}\right)}$$

$W_1(T)$  est donné par la figure (5.3)

Dans le cas non résonnant  $n = 2, p = 2, m = 0, q = 0, \Delta \neq 0$  on a

$$W_1(T) = e^{-(|\alpha_i|^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i)^{2k}}{k!} (\cos(\Omega_3 T)) \quad (5.147)$$

$$\Omega_3(k) = \sqrt{\Delta + \frac{2g^2}{(k+1)(k+2)}}$$

$W_1(T)$  est donné par la figure (5.4)

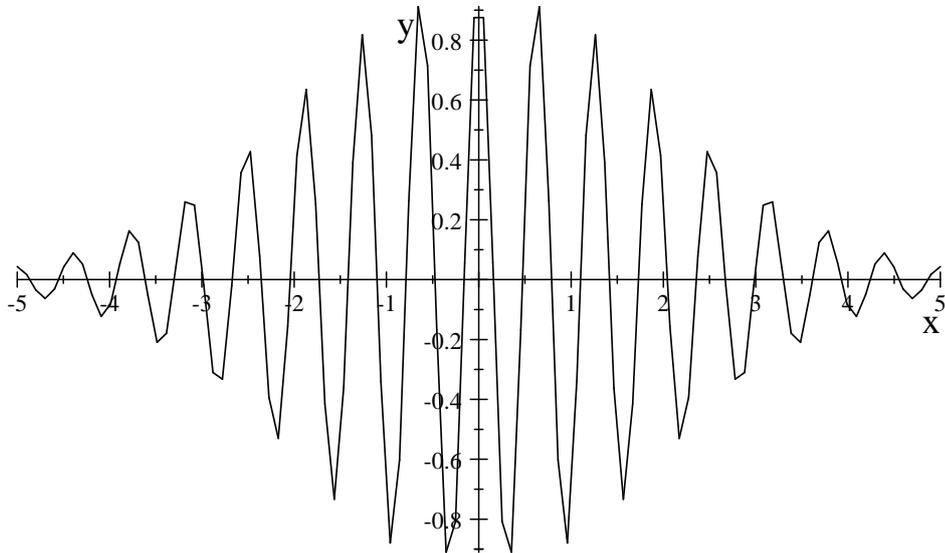


FIG. 5.3 – Population inverse  $W_1(T) = y$  dans le cas résonnant. Ici  $\alpha_i = 10$

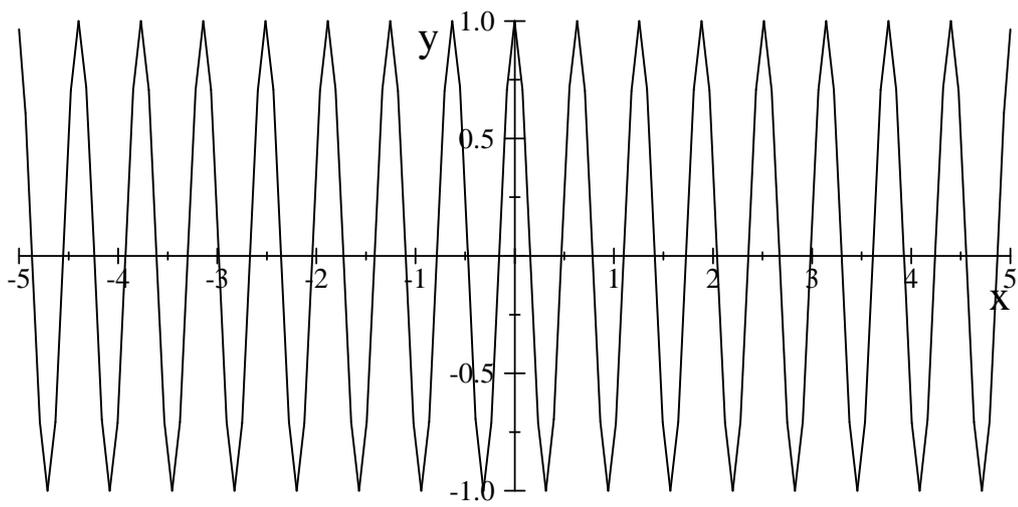


FIG. 5.4 – Population inverse  $W_1(T) = y$  dans le cas non- résonnant. Ici  $\alpha_i = 10$

## Chapitre 6

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous sommes intéressés à l'étude du modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps via le formalisme de l'intégrale de chemin.

Nous avons présenté les définitions et les outils nécessaires tels que les états cohérents et la méthode de calcul du modèle de Jaynes-Cummings via l'intégrale de chemin dans le cas stationnaire.

Puis nous sommes passés à l'objectif de notre travail qui est le modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps. Pour le traiter nous avons divisé notre problème en deux étapes.

Le premier est le choix, le plus simple (thèse de Magister A. Djaghri) dans laquelle la fonction du temps  $C_{m,n}(t)$  est une forme d'exponentielle qui se laisse intégrer sur le temps par la technique de Laplace. Dans le deuxième choix (notre travail original) nous supposons que la fonction du temps  $C_{m,n}(t)$  est la somme de deux exponentielles mais malheureusement nous tombons sur un problème ardu (vue sa récurrence compliquée) par l'application de la transformation de Laplace et pour cette raison nous considérons le cas  $\Delta_1 = \Delta_2$ ; ce qui signifie que les deux exponentielles oscillent avec la même fréquence. Cette dernière condition nous a donné la même intégrale sur le temps que celle du premier cas. De cette manière, les calculs sont faits jusqu'à la fin explicitement et analytiquement et nous avons ainsi sommé les séries de perturbation sur le temps et sur les variables du système à deux niveaux et nous avons exprimé le propagateur par une série de nombre de photons puis nous avons calculé les inversions de population dans différents cas et nous les avons exprimées graphiquement.

En conclusion, malgré quelques difficultés nous pouvons affirmer qu'à travers cette étude l'intégrale de chemins peut être un outil de travail très puissant pour étudier plusieurs phénomènes physiques tels que le modèle de Jaynes-Cummings dépendant du temps.

# Bibliographie

- [1] J. Zinn-Justin, Path Integrals in Quantum Mechanics. Oxford University Press (2006).
- [2] M. Chaichian and A. P. Demichev. Stochastic processes and quantum mechanics. Path integrals in physics, Vol. 1. Inst. of Physics Publ Bristol 2001.
- [3] C. Grosche F. Steiner. Handbook of Feynman Path Integrals, (Springer Tracts in Modern Physics, Berlin, 1998)
- [4] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu and F. Laloë : 1973, Mécanique quantique. Paris : Hermann.
- [5] N. Zettili, Quantum Mechanics – Concepts and Applications, Wiley (2009).
- [6] J-P. Gazeau, Coherent States in Quantum Physics, Wiley-VCH, Berlin, 2009.
- [7] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum mechanics, Statistics and polymer Physics (World Scientific, Singapor, 1990).
- [8] Jaynes, E. T. and Cummings, F., Proc. IEEE 51,89 (1963)
- [9] Zaheer, K. and Zubairy, M. S., Phys. Rev. A37,1628 (1988)
- [10] Buzek, V., Czech. J. Phys. B39,757 (1989).
- [11] IS Gradshteyn, IM Ryzhik. Tables of integrals, series, and products. Academic Press. pp1033. New York, 1979.
- [12] T. Boudjedaa, A. Bouname, Kh. Nouicer, L. Chetouani, T. F. Hammann, Phys. Scr. 54, 225(1996).
- [13] M. Aouachria and Y. Delenda, Path Integral for an Effective Two Level Atom in a Kerr-Like Medium and Stark Shift with a Pseudo Hermitian Hamiltonian, Int. J. Theor. Phys.(2017) 56 : 271,
- [14] Amel Djaghri, Intégrale de chemin et modèle de Jaynes- Cummings. thèse de magister Université Jijel (2006).

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons nous utilisé le formalisme de l'intégral du chemin pour traite le modèle de Jaynes- Cummings dépendante du temps en utilisant le modèle fermionique et bosonique de Schwinger .dans cette étude nous prendre deux cas :

Le premier cas est la plus simple et facile .dans ce cas le choix est basée sur la forme d'exponentielle mais avec un seul terme d'interaction

-Dans le deuxième cas nous prendre deux terme d'interaction de forme exponentielle mais nous trouvons un une problème de récurrence si pour sa nous supposons que les deux terme a le même fréquence .Puis nous calculons la transformée de Laplace qui nous donne les amplitudes de transition pour finira nos travaille par le calcule de population atomique .

**Mots clés :** intégrale de chemin ,le modèle de Jaynes Cummings ,états cohérents ,le modèle de Schwinger .

## abstrat

In this thesis we have used the integral path formalism to study the time-dependent model of Jaynes Cummings using the Schwinger fermionic and bosonic model. In this study we take two cases

The first case is the simplest and easiest. In this case the choice is based on the exponential form but with only one interaction term

-in the second case we take two interaction terms of exponential form but we find a recurrence problem if for its we assume that the two terms have the same frequency. Then we calculate the Laplace transform which gives us the amplitudes of transition to finish our work by calculating atomic population.

**Keywords:** path integral, Jaynes Cummings model, coherent states, Schwinger model.

## الملخص

في هذه المذكرة استخدمنا تكامل المسارات من اجل دراسة نموذج جاينز كامينغز التابع للزمن الى جانب نموذج شوينجر الفرميوني والبوزوني حيث تنقسم هذه الدراسة الى حالتين

الحالة الأولى هي الأبسط والأسهل. في هذه الحالة ، يعتمد الاختيار على الشكل الأسي ولكن مع عنصر تفاعل واحد فقط

- في الحالة الثانية ، نأخذ عنصري تفاعل من الشكل الأسي ولكننا نجد مشكلة في ايجاد علاقة عامة لهذا نفترض انا التفاعلين لهما نفس التردد. ثم نحسب تحويل لابلاس الذي يعطينا سعة الانتقال لإنهاء عملنا عن طريق حساب التعداد الذري.

**الكلمات المفتاحية:** مسار متكامل ، نموذج جاينز كامينغز ، حالات متماسكة ، نموذج شوينجر