REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED
SEDDIK BEN YAHIA

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :
Série :…..

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

Master en physique

Option : **Physique Théorique**

Par

Bouguerra Cheima

THEME

Equation de Duffin Kemmer-Petiau dans un espace-temps courbe.

Soutenu le : /10/2020

Devant le Jury :

Président:	D. Bouaziz	Prof.	Univ. Jijel
Rapporteur:	R. Rekioua	M.A.A.	Univ. Jijel
Examinateurs:	B. Guettou	M.A.A.	Univ. Jijel

Remerciements

En tout premier lieu, Je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Le travail présenté dans cette mémoire a été réalisé au laboratoire de physique théorique du département de physique de la faculté des sciences exactes de l'université de Jijel.

Ma plus grande gratitude va à mon encadreur R.Rekioua, pour sa disponibilité et la confiance qu'il m'a accordée .J'aimerais aussi lui remercier pour l'autonomie qu'il m'accordée, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à la professeur D.Bouaziz pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire.

Que Madame B.Guettou maitre-assistant à l'université de Jijel, trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour avoir bien voulu juger ce travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Lamri Houria la secrétaire du laboratoire de physique théorique pour les servies et l'encouragement.

J'adresse aussi mes remerciement a tous mes professeurs qui ont contribué à mes formation au long de ces années.

Enfin, J'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille :

Mes parents, mes sœurs, tous mes proches amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Il est bien connu que les effets quantiques des champs gravitationnels peuvent être traités par les solutions des équations relativistes. Ces équations sont très utiles pour comprendre le comportement physique des particules dans un espace-temps courbe. En astrophysique et en cosmologie, ces équations permettent l'étude de l'univers en expansion et de rendre compte des effets gravitationnels. Parmi ces équations, les équations Klein-Gordon (spin-0) et Dirac (spin-1/2) sont les plus étudiées dans différents modèles cosmologiques. D'autre part, on a l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) (Duffin, 1938 ; Kemmer, 1938 ; Petiau, 1936) qui décrit la dynamique des particules scalaires et vectorielles de spin respectivement 0 et 1. Elle est covariante, du premier degré par rapport au temps et similaire à celle de Dirac mais elle obéit à une algèbre plus compliquée possédant trois représentations irréductibles respectivement, une représentation triviale à une dimension, cinq dimensions associées au spin 0 et à dix dimensions associées au spin 1.

Parmi les nouvelles interactions mises étudiées par la théorie quantique dans l'espace temps courbe, la création des paires de particules à partir du vide est la plus importante [1]. La présence d'un champ extérieure de nature électromagnétique ou gravitationnelle est généralement associée à un vide instable. Cette instabilité conduit à la création des paires de particules qui a pris de plus en plus d'importance par ces applications en cosmologie contemporaine. Ce phénomène a été mis en évidence par la découverte du paradoxe Klein [2], qui a été ensuite traitée par Sauter [3]. Par la suite, l'instabilité du vide a été étudiée par Schwinger en utilisant la méthode du temps propre (effet de Schwinger dans QED) [4].

Dans un espace en expansion, de nombreuses études ont été consacrées au phénomène de création de particules en utilisant différents modèles cosmologiques en présence des champs électromagnétiques[5, 6, 7, 8]. Pour calculer la densité des paires de particules à partir de vide, nous pouvons appliquer plusieurs méthodes comme par exemple la méthode des intégrales de chemins [17], la méthode semi-classique complexe [18], la méthode de la fonction de Green [19], la méthode de Schwinger basée sur l'action effective [20, 21], la méthode de diagonalisation de l'Hamiltonien [22] et la méthode canonique via la transformation de Bogoliubov [1].

Dans ce mémoire, nous traitons le mécanisme de production de particules pour des particules vectorielles massives de spin-1 en considérant un champ gravitationnel avec ou sans la présence d'un champ électrique variable dans le temps. Notre objectif est de calculer les effets de ces champs sur la création de particules de spin-1(bosons W$\pm$et Z) dans l'univers de (1 + 1)-dimensions. Des Calculs similaires ont été faits pour des particules scalaires (spin-0) et spinoriels (spin-1/2) en considérant les mêmes expressions des champs externes [14, 15, 16]. Le point remarquable des résultats est que le champ électrique réduit le taux de création de spin-0 alors qu'il amplifie la création de particules de spin-1/2. Le couplage spin- champ électrique devrait être l'une des raisons possibles de cette différence. Il est intéressant s'il y a la contribution provenant du couplage de spin- champ électrique pour des particules ayant des valeurs de spin plus grandes (en particulier les particules spin-1).

Il est à noter qu'il est difficile d'avoir une solution exacte pour les équations relativistes de particules en quatre dimensions. Plus précisément, l'équation DKP est la plus difficile à résoudre dans l'espace courbe à (3 + 1)-dimensions, puisque elle a une équation d'onde de 16 composantes qui nécessite la solution de dix équations couplées pour le cas spin-1 [23]. Différentes approches ont été proposées pour les équations relativistes de particules en quatre dimensions : l'approximation faible du champ, les méthodes numériques, les solutions asymptotiques et les approches d'approximations WKB. Cette difficulté peut être simplifiée d'abord par la réduction du nombre de dimensions spatiales. Ensuite, la dynamique des particules est limitée à un espace-temps à dimension inférieure. Certains éléments comme le couplage de spin -champ externe ne sont pas vus explicitement dans les solutions exactes, mais cela n'est pas vraiment nécessaire pour le calcul du taux de création de particules. Cette simplification donne une équation pour la particule ayant une forme plus simple et qui maintient le contenu dynamique du problème. Physiquement, la plus faible dimension d'espace- temps est (1+1).

Afin d'atteindre cet objectif, cette mémoire commence d'abord par une introduction générale. Ensuite, nous étudions dans le deuxième chapitre les propriétés des matrices de Kemmer et l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace de Minkowski. Dans le troisième chapitre, nous donnons la forme générale de l'équation DKP à $(1 + 1)$-dimensions pour une métrique générale donnée par la forme

$$ds^2 = -C_0^2\left(x, t\right)dt^2 + C_1^2\left(x, t\right)dx^2$$

Les solutions exactes aux différents modèles cosmologiques dans le cas vectoriel seront illustrées. Dans le quatrième chapitre également, nous identifions les états "in" et "out" et nous calculons le taux de création de particules via la méthode canonique de Bogoliubov. Nous consacrons le cinquième chapitre à la résolution des mêmes problèmes en présence d'un champ électrique. Ces applications ont fait l'objet de quelques travaux réalisés auparavant [24, 25]. Dans le sixième chapitre, nous concluons par un récapitulatif des principaux résultats puis nous présentons une bibliographie complète principalement sur les sujets traités et ceux en relation.

Chapitre 2

L'equation de DKP dans l'espace de Minkowski

2.1 Introduction

Dans le milieu des années 1930 [28], le succès de l'équation de Dirac dans la description des particules relativistes de spin 1/2 a motivé les scientifiques pour la recherche d'une équation du premier ordre similaire pour les particules de spin 0 et les particules de spin 1. Ce nouveau formalisme était pressenti pour remplacer les formalismes existant donnés par l'équation de Schrödinger de second ordre ou l'équation de Klein-Gordon (KG), connues aujourd'hui pour les particules de spin 0, et l'équation de Proca de second ordre pour les particules de spin 1. La première avancée majeure dans cette direction était initiée par De Broglie en 1934. Ce dernier a, depuis 1934, émis l'hypothèse d'un photo massif en état de repos. De Broglie a basé ses recherches sur une équation d'onde de premier ordre avec des matrices 16x16 résultant de produits dans des espaces de matrices γ de Dirac. Il espérait que la combinaison de deux leptons conduirait à la définition des photons massifs. L'un des étudiants de De Broglie, Petiau [27], a proposé une modification de l'algèbre de De Broglie qui a abouti à l'algèbre DKP 16x16. Il imposa sur ces matrices la relation suivante

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \delta^{bc} + \beta^c \delta^{ba} \tag{2.1}$$

Par la suite, Géhéniau a décomposé l'algèbre DKP 16x16 en une représentation de cinq, dix et une dimension triviale [28]. Cependant, les travaux de Pétiau en 1936 sont restés méconnus pour la plupart des chercheurs. Particulièrement, Kemmer a consulté les travaux de Pétiau après la fin de la deuxième guerre mondiale. Kemmer [29] et Duffin [30] étaient inspirés par les travaux de Proca. Kemmer conclut que l'équation de Proca peut être décrite par un ensemble d'équations couplées du premier ordre et écrite de manière analogue au cas du spin 0. Kemmer réussit à formuler l'équation de Proca explicitement sous formes matricielles 5x5 et 10x10 sans avoir aucune connaissance de la propriété de commutation vérifiée par ces matrices.

Juste après les travaux de Kemmer, Duffin a assisté à une discussion autour des équations de Proca animée par Kemmer dans un séminaire de physique. Lors de cette discussion Duffin voulait savoir comment conclure que cette nouvelle théorie était de spin 1. La réponse donnée par Kemmer à cette question n'a pas satisfait la curiosité de Duffin. Comme suite, ce dernier, très attaché au formalisme de Dirac du premier ordre, réussit à formuler les équations du spin 0 et spin 1 par desβ-matrices. Dans sa démarche, Duffin a exploité trois des quatre relations de commutation constituantes représentées dans l'équation (2.1) (non pas pour $c = b \neq a$).

A la lecture des travaux de Duffin, Kemmer écrivit à Duffin pour l'informer qu'il savait comment étendre sa théorie et qu'il attendait de lui de publier d'avantage sur cette théorie. Duffin, à l'époque très impliqué avec A.C. Schaeffer sur la théorie des fonctions, donna son approbation à Kemmer pour publier sur cette théorie. Suite à cela, Kemmer rassemble ses travaux sur le sujet et publie son papier classique de 1939 sur la théorie de méson. Son article est devenue une référence principale dans l'étude des particules bosoniques [30, 31].

Finalement, Le formalisme DKP devenait intéressant du fait qu'il contient des composantes pseudoscalaires et vectorielles présente dans la description des interactions produisant des forces nucléaires basses énergies.

2.2 Les matrices β_μ

Nous savons que les mésons sont des particules possédant une masse m et une charge$\pm e$. Leur mouvement est régi par l'équation d'onde suivante [29, 32]

$$(\beta^\mu \partial_\mu + \mathrm{k})\, \Psi_k = 0 \tag{2.2}$$

où β sont des matrices qui vérifient les relations suivantes

$$\beta^a\beta^b\beta^c + \beta^c\beta^b\beta^a = \beta^a\delta^{bc} + \beta^c\delta^{ba} \tag{2.3}$$

avec

$$\mathrm{k} = \frac{mc}{\hbar}, \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, x_4 = ict. \tag{2.4}$$

Notons que ces matrices n'ont pas d'inverse.

A partir de l'équation (2.3) nous avons

$$\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1, \tag{2.5}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta_4 = \eta_4\beta_4 = \beta_4\eta_4, \quad \eta_4^2 = 1 \\ \eta_4\beta_k - \beta_k\eta_4 = 0 \ \ (k = 1, 2, 3) \end{array} \right. . \tag{2.6}$$

Conjuguons maintenant l'équation (2.2)

$$\partial_\mu \Psi_k^\dagger \beta^\mu - k\Psi_k^\dagger = 0, \tag{2.7}$$

où

$$\Psi_k^\dagger = i\Psi_k^* \eta_4. \tag{2.8}$$

Les deux équations fondamentale (2.2) et (2.7) peuvent être trouvées à partir de la densité lagrangienne définie par

$$\mathcal{L} = \frac{-i\hbar}{2}\left(\partial_\mu \bar{\Psi}\beta^\mu\Psi - \bar{\Psi}\beta^\mu\partial_\mu\Psi\right) + m\bar{\Psi}\Psi, \tag{2.9}$$

avec

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\eta_4. \tag{2.10}$$

2.2.1 -Le nombre des représentations irréductibles

Nous savons que dans le cas de l'équation de Dirac, les matrices γ admettent une seule représentation irréductible. Pour le cas de l'équation de DKP (2.2), nous avons des matrices β_μ vérifiant une certaine relation plus compliquée que celle relative aux matrices γ. Pour trouver les différentes représentations irréductibles, il faut d'abord chercher le nombre de quantités linéairement indépendantes qui, dans le cas de l'équation de Dirac, le nombre est de 16 .

Soit la relation suivante

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1 \tag{2.11}$$

nous pouvons montrer les égalités suivantes

$$\begin{cases} \beta_\mu^3 = \beta_\mu, \eta_\mu^2 = 1, \\ \eta_\mu\eta_\nu - \eta_\nu\eta_\mu = 0, \eta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\eta_\mu = 0, (\nu \neq \mu), \\ \beta_\mu = \eta_\mu\beta_\mu = \beta_\mu\eta_\mu. \end{cases} \tag{2.12}$$

A partir de ces équations, nous formons une liste d'éléments linéairement indépendants

Élément	Nb des éléments de ce type	Élément	Nb des éléments de ce type
I	1	$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12
β_μ	14	$\eta_\mu\eta_\nu$	6
$\beta_\mu\beta_\nu$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho$	12
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	12
$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma$	6	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho$	4
η_μ	4	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\beta_\sigma$	4
$\eta_\mu\beta_\nu$	12	$\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\eta_\sigma$	1
$\eta_\mu\beta_\nu\beta_\rho$	24	Nb total	126

Table2.2-Dénombrement des différents éléments linéairement indépendant.

En tout il y a 126 éléments linéairement indépendants formés à partir des matrices β_μ. Parmi ces éléments il y a ceux qui commutent entre eux [22]. D'après Kemmer, il y en a trois qui sont définis comme suit

$$I = \text{matrice unité}, \tag{2.13}$$

$$M = \sum_\mu \eta_\mu - \sum_{\mu \prec \nu} \eta_\mu\eta_\nu, \tag{2.14}$$

$$\text{et} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 \left(1 - \sum_\mu \eta_\mu\right). \tag{2.15}$$

Alors trois représentations irréductibles de dimensions n_1, n_2, n_3 sont présentent. Suivant la théorie des groupes [22], on a la relation suivante

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 126. \tag{2.16}$$

Cette équation nous permis d'avoir les dimensions de ces représentations : on a donc le choix suivant

$$n_1 = 10, n_2 = 5, n_3 = 1 \text{ avec } 10^2 + 5^2 + 1^2 = 126. \tag{2.17}$$

Nous avons donc trois représentations irréductibles de dimensions $10, 5, 1$, qui décrivent chacune, une situation physique bien déterminée. La dimension 1 est un cas trivial qui n'a pas d'intérêt physique.

2.2.2 -La représentation des matrices de Kemmer(β_μ)

Comme il a été mentionné auparavant, il existe trois représentations irréductibles pour les matrices β_μ : pour la représentation de dimension 10, nous avons

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

par contre, pour la représentation de dimension 5, nous avons

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

On peut voir que ces matrices sont dans des formes complètement irréductibles, et dont chaque matrice de même ordre peut être écrite comme une combinaison linéaire des quatre matrices β et leurs multiplications. Parmi les trois représentation irréductible, la représentation de dimension dix, conduit à la théorie bien connue de Proca, par contre, la représentation de dimension cinq conduit à la théorie scalaire.

Belinfante [14], a par ailleurs montré que la théorie à 16 composantes peut être obtenu en définissant des matrices $\acute{\beta}_\mu$ dans une représentation réductible

$$\acute{\beta}_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu \otimes I + I \otimes \gamma_\mu\right). \tag{2.22}$$

Alors, nous obtenons l'équation des mésons suivante

$$\left(\partial_\mu \left(\gamma_\mu \otimes I + I \otimes \gamma_\mu\right) + \mathrm{k}\right)\Psi_k = 0. \tag{2.23}$$

Pour terminer, il est important de noter que une étude plus approfondie, basée sur (2.22), montre que la fonction d'onde Ψ_k se comporte en un produit symétrique de deux fonctions d'onde de Dirac

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D. \tag{2.24}$$

Cette procédure est équivalente à la réduction des $\acute{\beta}$ et à la restriction des considérations à la représentation de rang 10 seulement (Belinfante avait étudié seulement la formulation de la théorie de Proca).

2.3 Solutions exactes des équation de Dirac et de DKP dans le cas libre à (1+1) dimensions

Le but principal de cette partie est de montrer que la fonction d'onde de l'équation DKP peut être obtenue à partir du produit direct de deux fonctions d'onde de Dirac. Lorsque nous passons de $(3+1)$ dimensions à $(1+1)$ dimensions, nous perdons la dynamique de spin et l'écriture des solutions sous la forme spinorielle devient un problème difficile. Bien que les solutions de l'équation de Dirac à $(1+1)$ dimensions peut être écrit sous une forme des ondes similaire de type U ou de type V, il n'est pas facile de le faire pour l'équation DKP. Une autre façon est que, puisque l'équation DKP est écrite comme le produit direct de deux fonctions d'onde de Dirac, on peut tester si les produits directs des fonctions d'onde de Dirac donnent les solutions de l'équation de DKP à $(1+1)$ ou non au moins dans le cas libre.

2.3.1 -L'équation de Dirac pour une particule libre à (1+1) dimensions

La forme covariante de l'équation de Dirac pour une particule libre dans l'espace de Minkowski est donnée par

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi_D = 0. \tag{2.25}$$

La fonction de Dirac Ψ_D est un spineur de deux dimensions qui s'écrit

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

En utilisant les définitions des matrices γ^{μ}, l'equation(2.25)se reduit à un systeme d'équation comme suit

$$\begin{cases} (\partial_0 + im)\,\Psi_1 - \partial_1\Psi_2 = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 + (\partial_0 + im)\,\Psi_2 = 0 \end{cases}. \tag{2.27}$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante Ψ_2

$$\left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2\right)\Psi_2 = 0\cdot \tag{2.28}$$

Une équation similaire à (2.28) peut être obtenue, aussi. Les solutions de particules libres sont des ondes planes. Nous considérons séparément les solutions aux énergies positives et négatives. Pour l'énergie positive et le moment k positif, nous trouvons les solutions positives de l'équation de Dirac comme

$$\Psi_k^{+}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(kx-\omega t)}U(k) \tag{2.29}$$

avec

$$U(k) = \sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{k}(\omega-m) \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

où nous avons appliqué la relation normalisation pour déterminer la constante de normalisation

$$N^{+} = \sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega L}} \tag{2.31}$$

avec L est la longueur finie de la coordonnée spatiale.

Pour l'énergie négative et le moment k négatif, nous trouvons les solutions positives de l'équation de Dirac comme

$$\Psi_{-k}^{-}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i(kx-\omega t)}V(k) \tag{2.32}$$

avec

$$V(k)=\sqrt{\frac{\omega+m}{2\omega}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{k}(\omega-m)\\ 1\end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Ces solutions vérifient les relations

$$U^{\dagger}(k)\,V(-k)=0 \quad \text{et} \quad V^{\dagger}(-k)\,U(k)=0\cdot \tag{2.34}$$

2.3.2 -L'équation de DKP pour une particules libre à (1+1) dimensions

L'équation de DKP pour une particule libre dans l'espace de Minkowski est

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}-2m)\,\Psi_k=0. \tag{2.35}$$

Dans notre cas, nous limitons aux particules de spin 1. En appliquant les proprietés du produit tensoriel

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B\rightarrow a_{1n}B & \\ \downarrow & \\ a_{m1}B & a_{mn}B\end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

on obtient les matrices β^{μ} à une dimention sous la forme suivante

$$\beta^0=\sigma^3\otimes I+I\otimes\sigma^3=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\beta^1=-i\left(\sigma^2\otimes I+I\otimes\sigma^2\right)=\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

La fonction de kemmer Ψ_k est reduit a un spineur de 4 dimensions qui s'écrit

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

En utilisant les définitions des matrices β_μ, l'equation(2.35)se reduit a un systeme d'équation comme suit

$$\begin{cases} (2\partial_0 + 2im)\,\Psi_1 - \partial_1\Psi_0 - \partial_1\Psi_{\tilde{0}} = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 - 2im\Psi_0 + \partial_1\Psi_2 = 0 \\ -\partial_1\Psi_1 - 2im\Psi_0 + \partial_1\Psi_2 = 0 \\ (-2\partial_0 - 2im)\,\Psi_1 + \partial_1\Psi_0 + \partial_1\Psi_{\tilde{0}} = 0 \end{cases}. \tag{2.40}$$

On deduit

$$\Psi_{\tilde{0}} = \Psi_0 \Rightarrow \Psi_0 = \frac{i}{2m}\partial_1\left(\Psi_1 - \Psi_2\right)\cdot \tag{2.41}$$

On peut réecrit le systeme d'éqs. comme suit

$$\begin{cases} \partial_0\left(\Psi_1 + \Psi_2\right) + im\left(\Psi_1 - \Psi_2\right) - 2\partial_1\Psi_0 = 0 \\ \partial_0\left(\Psi_1 - \Psi_2\right) + im\left(\Psi_1 + \Psi_2\right) = 0 \end{cases}. \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow \left(\Psi_1 + \Psi_2\right) = \frac{i}{m}\partial_0\left(\Psi_1 - \Psi_2\right)\cdot \tag{2.43}$$

Un calcul simple donne une équation différentielle pour la composante $\chi = \left(\Psi_1 - \Psi_2\right)$:

$$\left(\partial_0^2 - \partial_1^2 + m^2\right)\chi = 0\cdot \tag{2.44}$$

La solution χest de la forme

$$\chi^{\pm}\left(x,t\right) = Ne^{i(kx\mp\omega t)} \tag{2.45}$$

avec $\omega = \sqrt{k^2+m^2}$et N est la constante de normalisation.

Pour les energies positive $\omega \succ 0$,le spineur Ψ_k^+ peut s'écrire comme suit

$$\Psi_k^+\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i(kx-\omega t)}\tilde{U}\left(k\right) \tag{2.46}$$

avec

$$\tilde{U}(k) = \frac{m}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{m}\right) \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{m}\right) \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Pour le cas des energies négatives $\omega \prec 0$,le spineur Ψ_{-k}^{-} peut s'écrire comme suit

$$\Psi_{-k}^{-}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(kx-\omega t)} \tilde{V}(k) \tag{2.48}$$

avec

$$\tilde{V}(k) = \frac{m}{\omega}\begin{pmatrix} \frac{1}{2m}(\omega - m) \\ -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{2m} \\ \frac{1}{2m}(\omega + m) \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Pour ces solutions, nous avons

$$\tilde{U}^{\dagger}(k)\tilde{V}(-k) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{V}^{\dagger}(-k)\tilde{U}(k) = 0\cdot \tag{2.50}$$

En conséquence, on peut voir que les solutions de l'équation DKP peuvent être obtenues par le produit direct des solutions de l'équation de Dirac

$$\tilde{U}(k) = U(k) \otimes U(k) \tag{2.51}$$

$$\tilde{V}(k) = V(k) \otimes V(k). \tag{2.52}$$

2.4 Conclusion

Nous avons étudié les solutions u-type et v-type de l'équation DKP. Pour ce faire, nous avons d'abord examiné les solutions de l'équation de Dirac pour le même cas et exprimé ces solutions en termes de solutions d'ondes planes, à savoir u-type et v-type solutions. Nous avons constaté que les solutions de l'équation de DKP pour les particules libres peuvent être obtenues à partir du produit direct de ces solutions de type u et de type V. Il s'agit des solutions de type u et v de l'équation DKP.

Chapitre 3

Solution de l'équation de DKP dans un espace-temps courbe à (1+1) dimensions pour le spin 1

3.1 Introduction

L'équation des bosons massifs DKP est une équation relativiste qu'a été d'abord proposée par Duffin–Kemmer–Petiau à la fin des années 1930. Elle définit le mouvement d'une particule vectorielle de spin 1. Elle est similaire à l'équation de Dirac où les matrices γ de Dirac ont été remplacées par les matrices β avec une algèbre plus compliquée que celle relative aux γ.

Dans le cas de $(1+3)$ dimensions, la fonction d'onde de la particule admet seize composantes $\Psi_k\,(k = 1, ...16)$, et à $(1+1)$ dimensions, le système est réduit à quatre composantes seulement trois composantes sont linéairement indépendantes.

Dans ce chapitre, nous commençons d'abord par une brève description de l'univers de Friedman-Robertson-Walker(FRW). Ensuite, nous passons à la résolution de l'équation de DKP à deux dimensions dans un espace -temps courbe. Comme nous allons voir, nous proposons au premier lieu des différentes formes du facteur d'échelle et nous essayons de déduire les fonctions d'onde correspondantes pour chaque cas en remplaçons les matrices de Kemmer par les matrices de Dirac et le spineur de Kemmer Ψ_k par le produit tensoriel de deux spineur de

Dirac $\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D$.

3.2 L'univers de Friedmann-Robertson-Walker(FRW)

La théorie quantique des champs dans l'univers de Friedman-Robertson-Walker est une théorie approximative de la gravitation quantique dans laquelle les champs de la matière sont quantifiés et le champ gravitationnel généré par la courbure de l'espace est traité classiquement. Dans notre travail nous nous intéressons au modèle cosmologique standard qui se repose essentiellement sur l'hypothèse suivante ; l'univers est localement homogène, isotrope et en expansion lorsqu'on le décrit dans le système des cordonnées comobiles (principe cosmologique). La modélisation mathématique de cette hypothèse nous amène à décrire l'espace-temps par une métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) dont la forme générale s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3.1}$$

où (t, r, θ, ϕ) représente le système des coordonnées comobiles (les coordonnées comobi1es veulent dire que pour un observateur à l'origine r = 0, une galaxie aura les coordonnées r, θ, ϕ constantes. Ainsi, dans chaque direction d'observation θ=θ_0, $\phi = \phi_0$, les galaxies qui s'y trouvent auront chacune une coordonnée radiale r constante). La métrique (FLRW) nous permet de décrire la géométrique globale de l'univers en fonction de deux paramètres cosmologiques ; le facteur d'échelle $a(t)$ qui représente l'expansion de l'univers (temps,on peut le déterminer par les équations d'Einstein) et le scalaire

k qui représente la courbure spatiale. Suivant la valeur donnée à k, il est possible de postuler trois familles d'univers$\begin{cases} k = +1 & \text{univers fermé} \\ k = 0 & \text{univers plat} \\ k = -1 & \text{univers ouvert} \end{cases}$.

Les équations d'Einstein liant la courbure de l'univers à la présence de la matière s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa} = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{3.2}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci definit par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\kappa} \tag{3.3}$$

$\mathrm{T}^{\mu\nu}$ est le tenseur energie-implusion du fluide cosmologique .

et les connexions affines (symboles de Christoffel) sont définis par

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda} \right). \tag{3.4}$$

Sans difficulté nous obtenons $\Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{i}_{00} = 0$. Ce qui signifie qu'une particule qui est au repos reste toujours au repos dans ce système de coordonnées. Il résulte donc que le système de coordonnées comobiles suit le mouvement de l'observateur. Les symboles de Christoffel non nulles sont

$$\Gamma^{0}_{ij} = a\dot{a}\ \tilde{g}_{ij} \tag{3.5}$$

$$\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.6}$$

$$\Gamma^{i}_{lj} = k\ \tilde{g}_{lj} x^{i} \tag{3.7}$$

où

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + k\frac{x^i x^j}{1 - kr^2} \tag{3.8}$$

En particulier, si nous choisissons l'univers plat, alors les symboles de Christoffel peuvent être réécrits

$$\Gamma^{0}_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij} \tag{3.9}$$

$$\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j} \tag{3.10}$$

$$\Gamma^{i}_{lj} = 0 \tag{3.11}$$

Dans la représentation conforme (η, x), ces symboles deviennent

$$\Gamma^{\eta}_{\eta\eta} = \frac{\acute{a}}{a} \tag{3.12}$$

$$\Gamma^{\eta}_{ij} = \frac{\acute{a}}{a}\delta_{ij} \tag{3.13}$$

$$\Gamma^{i}_{\eta j} = \frac{\acute{a}}{a}\delta^{i}_{j} \tag{3.14}$$

où la prime désigne la dérivation par rapport à η.

Les différentes composantes de $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a},\ R_{ij} = -\left(2\dot{a} + a\ddot{a} + 2k\right)\tilde{g}_{ij} \quad et \quad R_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}k(\delta_{lj}\tilde{g}_{il} - \delta_{li}\tilde{g}_{jl})x^{j} \tag{3.15}$$

Au voisinage de l'origine $\tilde{g}_{ij} \sim \delta_{ij}$, il vient alors

$$R_{0i} = 0. \tag{3.16}$$

En prenant la trace des équations d'Einstein nous arrivons à

$$R = 8\pi GT. \tag{3.17}$$

Ce qui donne

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \tag{3.18}$$

où G est la constante de Newton et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion du fluide cosmologique. Sous l'hypothèse d'un fluide parfait, ce tenseur prend la forme suivante

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p+\rho)\, u_\mu u_\nu \tag{3.19}$$

où u$_\mu$désigne le quadri-vitesse du gaz . Ici p et ρ sont respectivement la pression et la densité dépendante du temps. Le fluide est choisi parfait car c'est la plus simple réalisation d'un tenseur énergie-impulsion diagonal et qui, par isotropie à toutes ses composantes spatiales égales.

$$T^{00} = \rho(t)\,,\; T^{0i} = 0\;, T^{ij} = a^{-2} p(t)\, \delta_{ij} \tag{3.20}$$

avec

$$T = g_{u\nu} T^{\mu\nu} = -\rho + 3p \tag{3.21}$$

En substituant les derniers résultats (3.15)et (3.20) et (3.21)dans l'équation d'Einstein pour obtenir les équations fondamentales de la cosmologie

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho + 3p) \tag{3.22}$$

$$4\pi G(\rho - p) = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} \tag{3.23}$$

En combinant ces deux dernières équations, nous arrivons à

$$8\pi G\rho(t) = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{3.24}$$

Cette équation est dénommée l'équation fondamentale de Friedmann qui gouverne l'expansion de l'univers et elle permet de déterminer la structure de l'univers selon son contenu.

A partir de la loi de conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu 0}$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \tag{3.25}$$

Suivant les observations [35] qui montrent la courbure spatiale est très proche de zéro, nous considérerons dans la suite de ce mémoire que l'univers est plat et fixerons par conséquent k = 0.

La dernière équation va permettre de déterminer totalement l'évolution de $a(t)$. Pour cela nous postulons une équation d'état reliant la densité et la pression

$$p = \omega\rho. \tag{3.26}$$

avec ω constant, car l'univers primordial est suffisamment homogène, pour cela, on trouve que

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}, \tag{3.27}$$

où ρ_0=$\rho(t_0)$ et $a_0 = a(t_0)$ sont respectivement la densité du fluide cosmique et le rayon de l'univers observé actuellement (dans la suite, l'indice 0 est réfère à l'instant présent). Suivant la valeur ω on distingue différentes situations

3.2.1 a)Un univers dominé par la matière (matière non –relativiste) pour $\omega = 0$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \tag{3.28}$$

En cosmologie, la matière est souvent appelée poussière et sa pression peut être considérée comme négligeable. Elle se compose de la matière baryonique et probablement de la matière non baryonique de nature encore inconnue. Dans un univers plat et d'après l'équation Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{a_0^3}{a^3} \tag{3.29}$$

Le facteur d'expansion devient

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \tag{3.30}$$

A l'aide de la définition de la constante de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ on peut déduire l'âge d'un univers plat dominé par la matière non relativiste $t_0 = \frac{2}{3H(t_0)}$.

3.2.2 b)Un univers dominé par le rayonnement (matière relativiste) pour $\omega = (\frac{1}{3})$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \tag{3.31}$$

Le rayonnement est constitué de rayonnement électromagnétique (photons), neutrinos (si $k_B T \geq mc^2$) et ondes gravitationnelles . Pour k=0, nous avons

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{a_0^3}{a^3}, \tag{3.32}$$

ce qui réduit $a(t)$ à

$$a(t) \sim \sqrt{t} \tag{3.33}$$

3.2.3 c)Un univers dominé par l'énergie du vide (modèle de Sitter) $\omega = -1$

L'Univers est en accélération et correspond à un espace de de Sitter tel que

$$\rho = \Lambda = cste$$

Λ est la constante cosmologique. Dans un univers plat, l'équation de Friedmann étant

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \Lambda}{3} \tag{3.34}$$

Le facteur d'échelle devient alors $a(t) = e^{Ht}$ avec $H = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$.[33]

3.3 Solution de l'équation de DKP dans un espace-temps courbe à (1+1) dimensions pour le spin 1

Dans le système d'unités où la constante de Planck $\hbar$ et la vitesse de la lumière c sont égales à 1, l'équation covariante de DKP s'écrira

$$\left[i\widetilde{\beta}^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Sigma_{\mu}\right)-m\right]\Psi_{k}\left(x\right)=0. \tag{3.35}$$

où m est la masse de la particule, et β sont les matrices de Kemmer qui vérifient les relations de commutation(2.3) .Les matrices $\widetilde{\beta}^{\mu}$ peuvent s'écrire aussi en fonction des matrices β^{μ}comme suit

$$\widetilde{\beta}^{\mu}=e_{i}^{\mu}\left(x\right)\beta^{\mu}, \tag{3.36}$$

où le tilde est utilisé pour désigner les matrices β dans l'espace-temps courbe et $e_{i}^{\mu}\left(x\right)$ sont des tétrades satisfaisant

$$g_{\mu\nu}=e_{\mu}^{i}e_{\nu}^{j}\eta_{ij}. \tag{3.37}$$

Notons que η_{ij}est la métrique habituelle de Minkowski

$$\eta_{ij}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

et les indices Grec et Latin représentent respectivement l'espace-temps courbe et plat. Les connexions de spin pour les particules de spin-1 données dans l'équation (5.1) sont écrites comme

$$\Sigma_{\mu}=\Gamma_{\mu}\otimes I+I\otimes\Gamma_{\mu}, \tag{3.38}$$

où Γ_{μ} sont les connexions de spin pour les particules de spin-1/2 vérifiant la relation

$$\Gamma_{\mu}=-\frac{1}{8}g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]. \tag{3.39}$$

Ici $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$se sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\mu}g_{\beta\nu}+\partial_{\nu}g_{\beta\mu}-\partial_{\beta}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.40}$$

En vertu de la relation générale de la métrique

$$ds^2 = -C_0^2(x,t)\,dt^2 + C_1^2(x,t)\,dx^2, \tag{3.41}$$

l'équation (3.35) peut se réécrire comme suit

$$\left[\frac{1}{C_0}\beta^0\partial_0 + \frac{1}{C_1}\beta^1\partial_1 - \frac{1}{C_0}\beta^0\Sigma_0 - \frac{1}{C_1}\beta^1\Sigma_1 + m\right]\Psi_k(x) = 0. \tag{3.42}$$

D'où l'on remplace les matrices de Dirac γ par les matrices de Pauli $\gamma^\alpha = (\sigma^3, -i\sigma^2)$

$$\beta^\mu = \sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu \Rightarrow \begin{cases} \beta^0 = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \beta^1 = -i\left(\sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^\mu\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.43}$$

D'autre part, les connexions de spin (3.38) deviennent

$$\Sigma_\mu = \lim_{\gamma\to\sigma}\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \Rightarrow \begin{cases} \Sigma_0 = 0 \\ \Sigma_1 = -\frac{1}{2}\frac{\dot{C}_1}{C_0}\left(\alpha^1 \otimes I + I \otimes \alpha^1\right) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha^1 = \gamma^0\gamma^1 \tag{3.44}$$

Maintenant passant aux applications.

3.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$

Les fonctions d'onde de Dkp se laissent exprimer comme produit tensoriel des deux fonctions d'onde de Dirac.

A $(1+1)$ dimensions, Ψ_D est un spineur à deux composantes ce qui donne un spineur de Ψ_k à quatre composantes.

$$\Psi_k = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\rho \\ \rho\varphi \\ \varphi\rho \\ \varphi\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

D'autre part, la métrique générale (3.41) devient

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}dx^2, \tag{3.46}$$

et elle se réduit en fonction de temps conforme

$$\eta = -\frac{1}{H}e^{-Ht}, \tag{3.47}$$

à la forme

$$ds^2 = \frac{1}{H\eta}\left(-d\eta^2 + dx^2\right) \tag{3.48}$$

avec

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 = \frac{1}{a}\partial_\eta \\ a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} \end{cases}, \tag{3.49}$$

$$\text{et } C_0 = 1, C_1 = a(t), \tag{3.50}$$

Pour déterminer les composantes $\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{\tilde{0}}$ et Ψ_2, il suffit de chercher des solutions sous la forme

$$\Psi_\kappa(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(ik_x x)}\chi(\eta) \tag{3.51}$$

où la fonction $\chi(\eta)$ ne dépend que de temps. Portons les équations (3.44), (3.49), (3.50) et (3.51) dans l'équation (3.42). Il vient

$$\left[\beta^0\partial_\eta + \beta^1\left(ik_x - \frac{1}{2\eta}\left(\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1\right)\right) - \frac{im}{\eta H}\right]\chi(\eta) = 0 \tag{3.52}$$

En vertu des relations (3.43) et (3.44), cette équation peut s'écrire comme des trois équations différentielles couplées

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_1 + k_x^2\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_2 = 0 \tag{3.53a}$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_2 + k_x^2\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_1 = 0 \tag{3.53b}$$

$$(ik_x)(\chi_1 - \chi_2) - \frac{im}{\eta H}\chi_0 = 0 \tag{3.53c}$$

avec

$$\chi_0 = \chi_{\tilde{0}} \tag{3.54}$$

On obtient à partir de ce système des nouvelles équations différentielles

$$(3.53c) \Rightarrow \chi_0 = \frac{\eta H}{m} k_x \left(\chi_1 - \chi_2\right) \tag{3.55a}$$

$$(3.53a) - (3.53b) \Rightarrow \left(\chi_1 + \chi_2\right) = \frac{2\eta H}{im} \partial_\eta \left(\chi_1 - \chi_2\right) \tag{3.55b}$$

$$(3.53a) + (3.53b) \Rightarrow \left(\partial_\eta + \frac{1}{\eta}\right) \left(\chi_1 + \chi_2\right) - \frac{im}{2\eta H} \left(\chi_1 - \chi_2\right) - 2ik_x\chi_0 = 0 \tag{3.55c}$$

Remplaçons les équations $(3.55a)$et$(3.55b)$dans l'équation $(3.55c)$,on obtient

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{\eta}\partial_\eta + k_x^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2}\right] \left(\chi_1 - \chi_2\right) = 0. \tag{3.56}$$

Par le changement $\chi = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\varphi$, on réduit (3.56) à l'équation

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{1}{\eta}\partial_\eta + k_x^2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{4H^2}\right)\frac{1}{\eta^2}\right] \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0, \tag{3.57}$$

de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right] \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0. \tag{3.58}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = N_1 J_\nu\left(z\right) + N_2 J_{-\nu}\left(z\right) \tag{3.59}$$

où

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = N_3 H_\nu^{(1)}\left(z\right) + N_4 H_\nu^{(2)}\left(z\right). \tag{3.60}$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = k_x\eta,\ \nu = i\left|\tilde{\nu}\right| = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}}. \tag{3.61}$$

A l'aide des équations $(3.55a)$ et $(3.55b)$ et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}\left(z\right) - \nu H_\nu^{(2)}\left(z\right) = -zH_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right), \tag{3.62}$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_\kappa\left(\eta, x\right) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(ik_x x\right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left\{\left(\frac{iH}{m}\left(1-2\nu\right)+1\right)H_\nu^{(2)}\left(z\right) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right)\right\} \\ \frac{Hk_x}{m}\sqrt{\eta}H_\nu^{(2)}\left(z\right) \\ \frac{Hk_x}{m}\sqrt{\eta}H_\nu^{(2)}\left(z\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left\{\left(\frac{iH}{m}\left(1-2\nu\right)-1\right)H_\nu^{(2)}\left(z\right) + \frac{2iHk_x}{m}\eta H_{\nu+1}^{(2)}\left(z\right)\right\} \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

3.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$

Suivant les mêmes étapes précédentes, nous obtenons pour la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + (a_0 t)^2 \, dx^2, \tag{3.64}$$

Cette équation se réécrite comme

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-dt^2 + dx^2\right), \tag{3.65}$$

où

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \begin{cases} \partial_0 = \frac{1}{a}\partial_\eta \\ \eta = \frac{1}{a_0}\ln t \\ a(\eta) = a_0 e^{a_0 \eta} \end{cases} . \tag{3.66}$$

Les équations différentielles couplées sont

$$\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} + iM\right)\Psi_1 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_{\tilde{0}} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi_2 = 0 \tag{3.67}$$

$$-\frac{1}{a}\partial_1\Psi_1 - iM\Psi_0 + \frac{1}{a}\partial_1\Psi_2 = 0 \tag{3.68}$$

$$-\frac{1}{a}\partial_1\Psi_1 - iM\Psi_{\tilde{0}} + \frac{1}{a}\partial_1\Psi_2 = 0 \tag{3.69}$$

$$\left(2\partial_0 + \frac{\dot{a}}{a} - iM\right)\Psi_2 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 - \frac{1}{a}\partial_1\Psi_0 + \frac{\dot{a}}{a}\Psi_1 = 0 \tag{3.70}$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_\kappa(t,x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = a^{\frac{-1}{2}}(t)\,\frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_{\tilde{0}}(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

Nous obtenons le système couplé suivant

$$\left(\partial_0 + i\frac{M}{2}\right)h_1 - i\frac{k_x}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_2 = 0 \tag{3.72}$$

$$\frac{-k_x}{a}h_1 - Mh_0 + \frac{k_x}{a}h_2 = 0 \tag{3.73}$$

$$\left(\partial_0 - i\frac{M}{2}\right)h_2 - i\frac{k_x}{a}h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_1 = 0 \tag{3.74}$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1k_x}{Ma}(h_1 - h_2) \tag{3.75}$$

$$(h_1 + h_2) = \frac{2i}{M}\left(\partial_0 - \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 - h_2) \tag{3.76}$$

$$\left(\partial_0 + \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 + h_2) + i\frac{M}{2}(h_1 - h_2) - 2i\frac{k_x}{a}h_0 = 0 \tag{3.77}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\partial_0^2 + \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{4a^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_x}{a}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{3.78}$$

Considérons maintenant le facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et en remplaçant dans l'équation(3.78). Il vient alors

$$\left[\partial_0^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right)\frac{1}{t^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{3.79}$$

Par le changement

$$(h_1 - h_2) = \sqrt{t}\chi(z)$$

on réduit (3.79) à l'équation de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\chi(z) = 0. \tag{3.80}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\chi(z) = N_1 J_\nu(z) + N_2 J_{-\nu}(z) \tag{3.81}$$

où

$$\chi(z) = N_3 H_\nu^{(1)}(z) + N_4 H_\nu^{(2)}(z), \tag{3.82}$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = \frac{M}{2}t,\ \nu = i|\tilde{\nu}| = i\frac{k_x}{a_0}. \tag{3.83}$$

A l'aide des équations (3.75) et (3.76) et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - \nu H_\nu^{(2)}(z) = -zH_{\nu+1}^{(2)}(z), \tag{3.84}$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_{\kappa}(\eta,x)=\frac{N_{\infty}}{\sqrt{2\pi a_0 t}}e^{(ik_x x)}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{t}}{2}\left\{\left(1+\frac{2i\nu}{m^2 t}\right)H_{\nu}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)-\frac{i}{m}H_{\nu+1}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)\right\}\\ \frac{-k_x}{Ma_0\sqrt{t}}H_{\nu}^{(2)}(z)\\ \frac{-k_x}{Ma_0\sqrt{t}}H_{\nu}^{(2)}(z)\\ \frac{\sqrt{t}}{2}\left\{\left(-1+\frac{2i\nu}{m^2 t}\right)H_{\nu}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)-\frac{i}{m}H_{\nu+1}^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right)\right\}\end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

3.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t)=\sqrt{\Gamma+\Lambda t}$

Dans notre cas, nous posons

$$ds^2=-\frac{1}{a^2(t)}dt^2+a^2(t)\,dx^2, \tag{3.86}$$

Si nous choisissons

$$d\eta=\frac{dt}{a(t)}\Rightarrow\begin{cases}\partial_0=\frac{1}{a}\partial_{\eta}\\ \eta=\frac{2}{\Lambda}a(t)\\ a(\eta)=\frac{\Lambda}{2}\eta\end{cases}, \tag{3.87}$$

l'équation (3.86) se réécrite comme

$$ds^2=-d\eta^2+a^2(\eta)\,dx^2. \tag{3.88}$$

Afin d'obtenir une forme de type Minkowski, il suffit de remplacer le temps η par le temps conforme τ comme suit

$$d\tau=\frac{d\eta}{a(\eta)}\Rightarrow\begin{cases}\partial_{\eta}=\frac{1}{a}\partial_{\tau}\\ \tau=\frac{2}{\Lambda}\ln\eta\\ a(\tau)=e^{\frac{\Lambda}{2}\tau}\end{cases}. \tag{3.89}$$

Il vient alors

$$ds^2=a^2(\tau)\left(-d\tau^2+dx^2\right). \tag{3.90}$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_{\kappa}(t,x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_0\\ \Psi_{\tilde{0}}\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_0(t)\\ h_{\tilde{0}}(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix} \tag{3.91}$$

Remplaçons dans l'équation(3.42), nous obtenons le système couplé suivant

$$\begin{cases} \left(2a\partial_0 + \dot{a} + im\right) h_1 - 2i\left(\frac{k}{a}\right) h_0 + \dot{a} h_2 = 0 \\ \left(2a\partial_0 + \dot{a} - im\right) h_2 - 2i\left(\frac{k}{a}\right) h_0 + \dot{a} h_1 = 0 \\ i\left(\frac{k}{a}\right)\left(h_1 - h_2\right) + imh_0 = 0 \end{cases} \tag{3.92}$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma_0 = 0 \\ \Sigma_1 = \frac{1}{2}\dot{a}a\left(\sigma^1 \otimes I + I \otimes \sigma^1\right) \end{cases} . \tag{3.93}$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{m}\left(\frac{k}{a}\right)\left(h_1 - h_2\right) \tag{3.94}$$

$$h_1 + h_2 = i\frac{a\partial_0}{m}\left(h_1 - h_2\right) \tag{3.95}$$

$$\left(2a\partial_0 + 2\dot{a}\right)\left(h_1 + h_2\right) + im\left(h_1 - h_2\right) - 4i\left(\frac{k_x}{a}\right) h_0 = 0 \tag{3.96}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{k}{a^2}\right)^2\right]\left(h_1 - h_2\right) = 0 \tag{3.97}$$

Remplaçons $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et $\chi\left(t\right) = \left(h_1 - h_2\right)$ .Il vient alors

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\Gamma}{\Gamma + \Lambda t}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma + \Lambda t} + \left(\frac{k}{\Gamma + \Lambda t}\right)^2\right]\chi\left(t\right) = 0 \tag{3.98}$$

Par le changement $\chi\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}\varphi\left(u\right)$, on réduit (3.98) à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{u^2} + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right]\varphi\left(u\right) = 0, \quad \text{avec } u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}\ . \tag{3.99}$$

Faisons un deuxième changement $u = \rho\beta$. Nous obtenons l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{m\beta}{\Lambda}\right)^2\right]\varphi\left(\rho\right) = 0 \tag{3.100}$$

de type Bessel

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\partial_z + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\varphi\left(z\right) = 0. \tag{3.101}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\varphi\left(z\right) = N_1 J_\nu\left(z\right) + N_2 J_{-\nu}\left(z\right) \tag{3.102}$$

où

$$\varphi(z) = N_3 H_\nu^{(1)}(z) + N_4 H_\nu^{(2)}(z), \tag{3.103}$$

avec les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = \frac{m\beta}{\Lambda}\rho, \ \nu = i\,|\tilde{\nu}| = i\frac{2k_x}{\Lambda}. \tag{3.104}$$

A l'aide des équations (3.94) et (3.95) et la relation de récurrence des fonctions Bessel

$$z\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - \nu H_\nu^{(2)}(z) = -zH_{\nu+1}^{(2)}(z), \tag{3.105}$$

On détermine aisément la solution régulière de l'équation (3.35) à l'infinie

$$\Psi_\kappa(\rho, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} \frac{i\Lambda}{2m\beta\rho^{3/2}}\left(-\frac{1}{2} + \nu - \frac{2im\beta\rho}{\Lambda}\right) H_\nu^{(2)}(z) - \frac{i}{4\sqrt{\rho}} H_{\nu+1}^{(2)}(z) \\ \frac{-k}{ma\sqrt{\rho}} H_\nu^{(2)}(z) \\ \frac{-k}{ma\sqrt{\rho}} H_\nu^{(2)}(z) \\ \frac{i\Lambda}{2m\beta\rho^{3/2}}\left(-\frac{1}{2} + \nu + \frac{2im\beta\rho}{\Lambda}\right) H_\nu^{(2)}(z) - \frac{i}{4\sqrt{\rho}} H_{\nu+1}^{(2)}(z) \end{pmatrix}. \tag{3.106}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une breve description de l'univers de (FRW). Ainsi, nous avons écrire l'éq. DKP pour les particules massives de spin-1 dans le (FRW) univers. Ensuite nous avons considéré comme application des facteurs d'échelle pour lesquels l'éq. DKP est soluble.

Chapitre 4

Création des particules

4.1 Introduction

Il existe deux cas différents de la production des particules par un champ extérieure classique qui sont d'intérêt cosmologique. Le premier est la production par le champ gravitationnel et le deuxième est la transformation de l'inflaton en particules élémentaires. Pour un champ électrique le phénomène de la création des particules ne peut être observé sauf si le champ extérieure est supérieur a sa valeur critique ($\mathrm{E}_c = \frac{m^2c^2}{|e|\hbar}$). Alors actuellement la possibilité de création des paires n'existe pas dans le laboratoire. Cependant, le champ gravitationnel près des trous noirs ainsi que le champ de coulomb des trous noirs chargés est suffisamment intense pour créer des particules. La production des particules par la gravité pourrait être essentielle dans l'univers très tôt prés de la singularité cosmologique quand la force du champ gravitationnelle est proche de la valeur de Planck. Ce qui explique la nature non perturbative du problème de sorte qu'il soit nécessaire de produire une méthode d'analyse exacte.

Dans l'univers de Friedmann-Robertson-Walker l'étude de la création de particules a été lancée par Parker[5] et développés dans une série de papiers. Dans cette partie nous proposons d'étudier la création des paires dans un univers en expansion. Nous considérons des facteurs d'échelle qui mènent à des solutions analytiques et exactes pour l'équation de DKP pour les particules massives de spin-1.

4.2 La transformation canonique de Bogoliubov

Il existe différentes techniques pour calculer le nombre de création des particules telles que la méthode de diagonaliser le Hamiltonien, la méthode de Feynman des intégrales de chemins, l'approche de la fonction de Green, l'approximation semi classique WKB, la méthode adiabatique et la technique de transformation de Bogoliubov (BTT). En raison du comportement asymptotique des états in et out du vide, nous appliquons la technique (BTT) pour déterminer la densité de création des particules, ainsi la probabilité de crée des paires.

Dans la théorie quantique des champs, l'équation de champs admet deux ensembles des solutions orthogonales φ.

$$\varphi(t) = \sum_i a_i \varphi_i + a_i^+ \varphi_i^* = . \sum_j b_j \varphi_j + b_j^+ \varphi_j^* \tag{4.1}$$

où $\left(a_i^+, b_j^+\right)$ et (a_i, b_j) sont les opérateurs de création et d'annihilation respectivement qui vérifient les relations de commutations

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= [b_j, b_i] = 0, & (4.2)\\ \left[a_i^+, a_j^+\right] &= \left[b_j^+, b_i^+\right] = 0, & (4.3)\\ \left[a_i, a_j^+\right] &= \left[b_j, b_i^+\right] = \delta_{ij.} & (4.4) \end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{\varphi_{out}, \varphi_{out}^*\}$ forme une base, nous pouvons écrire le deuxième ensemble$\{\varphi_{in}, \varphi_{in}^*\}$ comme des combinaisons linéaires des fonctions φ_{out} et φ_{out}^*.

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \alpha\varphi_{out} + \beta\varphi_{out}^*, \\ \varphi_{in}^* &= \alpha^*\varphi_{out}^* + \beta^*\varphi_{out}. \end{aligned}$$

Cette écriture est dite transformation de Bogoliubov où les coefficients de Bogoliubov α et β vérifient la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

De plus, on en déduit

$$\begin{aligned} a_{out} &= \alpha a_{in} + \beta b_{in}^+, & (4.5)\\ b_{out}^+ &= \beta^* a_{in} + \alpha^* b_{in}^+. & (4.6) \end{aligned}$$

Les opérateurs de création et d'annihilation engendrent deux bases dans l'espace de Fock. Ces deux bases sont définies à partir des états du vide

$$a_{in}\left|0_{in}\right\rangle = 0, \qquad a_{out}\left|0_{out}\right\rangle = 0 \tag{4.7}$$

Ce qu'implique que l'opérateur de nombre des particules $\hat{N}_{out}$ sur un état de vide $\left|0_{in}\right\rangle$ est

$$\left\langle 0_{in}\right| \hat{N}_{out}\left|0_{in}\right\rangle = \left\langle 0_{in}\right| a^{+}_{out}a_{out}\left|0_{in}\right\rangle = \left|\beta\right|^{2}. \tag{4.8}$$

Ce qui montre que le vide $\left|0_{in}\right\rangle$ contient des particules "out"pour $\beta \neq 0$.Selon la théorie quantique des champs, l'amplitude de transition est définie comme

$$Amp\left(vide - vide\right) = \left\langle 0_{out}\right| a_{out}b_{out}\left|0_{in}\right\rangle. \tag{4.9}$$

Compte tenu des équations (4.5)et (4.6), b_{out} peut s'écrire

$$b_{out} = \frac{1}{\alpha^{*}}b_{in} + \frac{\beta^{*}}{\alpha^{*}}a^{+}_{out} \tag{4.10}$$

Alors, l'amplitude se réduit à

$$Amp\left(vide - vide\right) = \frac{\beta^{*}}{\alpha^{*}}\left\langle 0_{out}\right| 0_{in}\rangle. \tag{4.11}$$

Donc, la probabilité de création des paires est donnée par

$$P = \left|\frac{\beta^{*}}{\alpha^{*}}\right|^{2}. \tag{4.12}$$

[16].

4.3 Création des particules

4.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$

Les deux solutions de l'équation(3.56) peuvent être écrites en fonction des fonctions de Bessel de première espèce (et se notent $J_{\nu}\left(z\right)$ et $J_{-\nu}\left(z\right)$) ou de fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce (et se notent $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$)

$$\begin{aligned}
(\chi_1 - \chi_2)_1 &= \frac{N_1}{\sqrt{\eta}} J_\nu(z) && (4.13)\\
(\chi_1 - \chi_2)_2 &= \frac{N_2}{\sqrt{\eta}} J_{-\nu}(z) && (4.14)\\
(\chi_1 - \chi_2)_3 &= \frac{N_3}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(1)}(z) && (4.15)\\
(\chi_1 - \chi_2)_4 &= \frac{N_4}{\sqrt{\eta}} H_\nu^{(2)}(z), && (4.16)
\end{aligned}$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et z et ν sont donnés par

$$z = k_x\eta, \;\; \nu = i\,|\tilde{\nu}| = i\sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}}. \tag{4.17}$$

Pour déterminer les solutions relatives aux états "*in*" et "*out*", on va étudier le comportement asymptotique de ces solutions quand $\eta \to -\infty$ et $\eta \to 0$.

utilisant les relations

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, && |argz| \prec \pi. && (4.18)\\
H_\nu^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], && -\pi \langle argz \langle 2\pi && (4.19)\\
H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], && -2\pi \langle argz \langle \pi. && (4.20)
\end{aligned}$$

Nous pouvons voir que les solutions (4.18), (4.19) et (4.20) se comportent asymptotiquement comme

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0} J_\nu(k_x\eta) &\sim \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}(k_x\eta)^\nu = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left(-\frac{k_x}{H}\right)^\nu e^{-iH|\tilde{\nu}|t} && (4.21)\\
\lim_{\eta\to 0} J_{-\nu}(k_x\eta) &\sim \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}(k_x\eta)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}\left(-\frac{k_x}{H}\right)^{-\nu} e^{iH|\tilde{\nu}|t} && (4.22)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to -\infty} H_\nu^{(1)}(k_x\eta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_x \eta}} e^{i\left(k\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} && (4.23)\\
\lim_{\eta\to -\infty} H_\nu^{(2)}(k_x\eta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_x \eta}} e^{-i\left(k\eta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} && (4.24)
\end{aligned}$$

Donc, les états "*in*" et "*out*" sont

$$(\chi_1 - \chi_2)^+_{out} = \frac{N_{out}}{\sqrt{\eta}} J_\nu(z) \tag{4.25}$$

$$(\chi_1 - \chi_2)^-_{out} = \frac{N_{out}}{\sqrt{\eta}} J_{-\nu}(z) \tag{4.26}$$

$$(\chi_1 - \chi_2)^-_{in} = \frac{N_{in}}{\sqrt{\eta}} H^{(1)}_\nu(z) \tag{4.27}$$

$$(\chi_1 - \chi_2)^+_{in} = \frac{N_{in}}{\sqrt{\eta}} H^{(2)}_\nu(z), \tag{4.28}$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons les relations entre les fonctions de Bessel et les fonctions de Hankel

$$H^{(1)}_\nu(k_x\eta) = \frac{J_{-\nu}(k_x\eta) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(k_x\eta)}{i\sin(\pi\nu)} \tag{4.29}$$

$$H^{(2)}_\nu(k_x\eta) = \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(k_x\eta) - J_{-\nu}(k_x\eta)}{i\sin(\pi\nu)} \tag{4.30}$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha^* = -\frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \tag{4.31}$$

$$\beta^* = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})}. \tag{4.32}$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules dans l'univers de de Sitter est

$$P = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \tag{4.33}$$

et la densité des particules crées est

$$n = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}} - 1} \quad \text{où} \quad \tilde{\nu} = \sqrt{\frac{m^2}{4H^2} - \frac{1}{4}} \tag{4.34}$$

On peut voir que cette expression est valide quand $\frac{m^2}{4H^2} \succeq \frac{1}{4}$.

De l'équation (4.34), on peut voir que le processus de création de paire est plus important pour des valeurs faibles de masse et $n(k) \rightarrow 0$ lorsque $m >> 1$.

4.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$

En tout nous avons quatre solutions

$$
\begin{aligned}
(\chi)_1 &= N_1 J_\nu(z) && (4.35)\\
(\chi)_2 &= N_2 J_{-\nu}(z) && (4.36)\\
(\chi)_3 &= N_3 H_\nu^{(1)}(z) && (4.37)\\
(\chi)_4 &= N_4 H_\nu^{(2)}(z), && (4.38)
\end{aligned}
$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique de chaque solution quand $t \to \infty$ et $t \to 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} J_\nu\left(\frac{M}{2}t\right) &\sim \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\left(\frac{M}{2}t\right)^\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\left(\frac{M}{2}\right)^\nu e^{ia_0|\tilde{\nu}|\eta} && (4.39)\\
\lim_{t\to 0} J_{-\nu}\left(\frac{M}{2}t\right) &\sim \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{M}{2}t\right)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}\left(\frac{M}{2}\right)^{-\nu} e^{-ia_0|\tilde{\nu}|\eta} && (4.40)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} H_\nu^{(1)}\left(\frac{M}{2}t\right) &\sim \sqrt{\frac{4}{\pi M t}} e^{i\left(\frac{M}{2}t - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} && (4.41)\\
\lim_{t\to\infty} H_\nu^{(2)}\left(\frac{M}{2}t\right) &\sim \sqrt{\frac{4}{\pi M t}} e^{-i\left(\frac{M}{2}t - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}. && (4.42)
\end{aligned}
$$

Donc, les états "*in*" et "*out*" sont

$$
\begin{aligned}
(h_1 - h_2)^+_{out} &= N_{out}\sqrt{t} H_\nu^{(2)}(z) && (4.43)\\
(h_1 - h_2)^-_{out} &= N_{out}\sqrt{t} H_\nu^{(1)}(z) && (4.44)\\
(h_1 - h_2)^-_{in} &= N_{in}\sqrt{t} J_\nu(z) && (4.45)\\
(h_1 - h_2)^+_{in} &= N_{in}\sqrt{t} J_{-\nu}(z), && (4.46)
\end{aligned}
$$

En fait à l'aide des propriétés de transformation des fonctions de Bessel

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(z)}{i\sin(\pi\nu)} && (4.47)\\
H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i\sin(\pi\nu)}, && (4.48)
\end{aligned}
$$

nous pouvons définir les coefficients de Bogoliubov

$$\alpha = -\frac{N_{in}}{N_{out}}\frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} \tag{4.49}$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}}\frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})}. \tag{4.50}$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules est

$$P_k = \frac{\mid\beta\mid^2}{\mid\alpha\mid^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \tag{4.51}$$

et la densité des particules crées est

$$n(k) = \mid\beta\mid^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}}-1} \text{ où } \tilde{\nu} = \frac{k_x}{a_0} \tag{4.52}$$

De l'équation (4.52) on peut voir que le processus de création de paire est plus important pour l'impulsion faible et $n(k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$ (c.-à-d $k >> 1$).

4.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$

Considérons maintenant les quatre solutions possibles

$$(\varphi)_1 = N_1 J_\nu(z) \tag{4.53}$$

$$(\varphi)_2 = N_2 J_{-\nu}(z) \tag{4.54}$$

$$(\varphi)_3 = N_3 H_\nu^{(1)}(z) \tag{4.55}$$

$$(\varphi)_4 = N_4 H_\nu^{(2)}(z), \tag{4.56}$$

Pour déterminer la densité des particules crées, nous étudions d'abord le comportement asymptotique de chaque solution quand $\eta \to \infty$ et $\eta \to 0$.

$$\lim_{\eta\to 0} J_\nu(z) \sim \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}(M\eta)^\nu = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}(M)^\nu e^{i\frac{\Lambda}{2}|\tilde{\nu}|\tau} \tag{4.57}$$

$$\lim_{\eta\to 0} J_{-\nu}(z) \sim \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}(M\eta)^{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}(M)^{-\nu} e^{-i\frac{\Lambda}{2}|\tilde{\nu}|\tau} \tag{4.58}$$

et

$$\lim_{\eta\to\infty} H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi M\eta}}e^{i\left(M\eta-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{4.59}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi M\eta}}e^{-i\left(M\eta-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{4.60}$$

Donc, les états "in" et "out" sont

$$\begin{aligned}
(\varphi)^{+}_{out} &= N_{out} H^{(2)}_{\nu}(z) && (4.61)\\
(\varphi)^{-}_{out} &= N_{out} H^{(1)}_{\nu}(z) && (4.62)\\
(\varphi)^{-}_{in} &= N_{in} J_{\nu}(z) && (4.63)\\
(\varphi)^{+}_{in} &= N_{in} J_{-\nu}(z), && (4.64)
\end{aligned}$$

Selon les propriétés de transformation des fonctions de Bessel $(4.47, 4.48)$, nous pouvons définir les coefficients de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{1}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} && (4.65)\\
\beta &= \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{e^{-\pi\tilde{\nu}}}{\sinh(\pi\tilde{\nu})} && (4.66)
\end{aligned}$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = e^{-2\pi\tilde{\nu}}, \tag{4.67}$$

et la densité des particules crées est

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\nu}} - 1} \text{ où } \tilde{\nu} = \frac{2k_x}{\Lambda}. \tag{4.68}$$

Il est clair que le processus de création de paire est plus important pour l'impulsion faible et $n(k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

4.4 Conclusion

A partir des ensembles des solutions obtenus au chapitre précédant, nous avons classées les modes in et out en utilisons le comportement asymptotique de ces solutions. Ensuite, nous avons déterminé les probabilités de création une paire et le nombre des particules crées en appliquant la transformation canonique de Bogoliubov.

Chapitre 5

L'équation de DKP dans un espace-temps courbe en presence d'un champ électrique

5.1 Introduction

Dans cette partie, nous écrivons l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un espace-temps courbe (Robertson-Walker) à la présence du champ électriques en considérant trois modèles cosmologique différents. Ensuite, nous essayons de la résoudre et trouver les différents ensembles des solutions. D'autre par, nous identifions les états "in" et "out" en classant ces solutions par le recours au comportement asymptotique des fonctions spéciales. A la fin, nous pouvons déterminer la densité des particules crées, ainsi la probabilité de création une paire en appliquant la méthode canonique de Bogoliubov.

5.2 L'équation de DKP dans un espace-temps courbe en presence d'un champ électrique

L'équation covariante de DKP dans un espace-temps courbe à la présence d'un champ électromagnétique externe est donnée par

$$\left[i\widetilde{\beta}^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\Sigma_{\mu}-ieA_{\mu}\right)-m\right]\Psi_{k}\left(x\right)=0 \tag{5.1}$$

où m est la masse de la particule massive de spin-1, A_{μ} est le potentiel vectoriel, e est la charge, et $\tilde{\beta}^{\mu}$sont les matrices de Kemmer qui sont exprimées par les matrices habituelles de Dirac γ^{μ} .

L'équation de DKP pour une métrique générale (1 + 1) dimensionnelle donnée par l'équation (3.42) peut être écrite comme suit :

$$\left[\frac{1}{C_0}\beta^0\partial_0+\frac{1}{C_1}\beta^1\partial_1-\frac{1}{C_0}\beta^0\Sigma_0-\frac{1}{C_1}\beta^1\Sigma_1+i\frac{1}{C_0}\beta^0A_0+i\frac{1}{C_1}\beta^1A_1+m\right]\Psi_k\left(x\right)=0 \tag{5.2}$$

Passons maintenant aux applications en suivant la même procédure que nous l'avons vu auparavant (chapitre3).

5.2.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t)=e^{Ht}$ et un potentiel $A_{\mu}\left(0,-\frac{E}{H}e^{Ht}\right)$

Dans l'espace temps de (1 + 1)-dimensions les matrices de Dirac γ sont remplacées par les matrices Pauli σet les matrices β_{μ} sont représentées comme suit [24]

$$\beta^{\mu}=\sigma^{\mu}\otimes I+I\otimes\sigma^{\mu} \tag{5.3}$$

Les Connexions spinoriales pour l'espace temps de de Sitter sont données en fonction de temps conforme η par

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{2\eta}\left(\sigma^1\otimes I+I\otimes\sigma^1\right) \tag{5.4}$$

$$\sum\nolimits_0 = 0 \tag{5.5}$$

En considérant (3.44), (3.49) et (3.51)et en prenant le potentiel vectoriel sous la forme

$$A_{\mu}=\left(0,-\frac{E_0}{H}e^{Ht}=\frac{E_0}{\eta H^2}\right), \tag{5.6}$$

nous obtenons

$$\left[\beta^0\partial_{\eta}+\beta^1\left(ik_x-\frac{1}{2\eta}\left(\sigma^1\otimes I+I\otimes\sigma^1\right)+\frac{ieE}{\eta H^2}\right)-\frac{im}{\eta H}\right]\chi\left(\eta\right)=0.$$

Utilisant l'équation (3.43) nous arrivons à

$$\begin{cases} \left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} - \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_1 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_2 = 0 \\ \left(\partial_\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{im}{2\eta H}\right)\chi_2 - \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)\chi_0 + \frac{1}{2\eta}\chi_1 = 0 \\ \left(ik_x + \frac{ieE_0}{\eta H^2}\right)(\chi_1 - \chi_2) - \frac{im}{\eta H}\chi_0 = 0, \end{cases} \tag{5.7}$$

avec

$$\chi_0 = \chi_{\tilde{0}}. \tag{5.8}$$

On obtient à partir de ce système des nouvelles équations différentielles

$$\chi_0 = \frac{\eta H}{m}\left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2}\right)(\chi_1 - \chi_2) \tag{5.9}$$

$$\chi_1 + \chi_2 = \frac{2\eta H}{im}\partial_\eta(\chi_1 - \chi_2) \tag{5.10}$$

$$\left(\partial_\eta + \frac{1}{\eta}\right)(\chi_1 + \chi_2) = \frac{im}{2\eta H}(\chi_1 - \chi_2) + 2i\left(k_x + \frac{eE_0}{\eta H^2}\right)\chi_0 \tag{5.11}$$

Après un calcule simple, nous obtenons l'équation différentielle

$$\left[\partial_\eta^2 + \frac{2}{\eta}\partial_\eta + \left(k_x + \frac{eE}{\eta H}\right)^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2}\right](\chi_1 - \chi_2) = 0 \tag{5.12}$$

Par le changement $\chi = \frac{1}{\eta}\varphi$, on réduit (5.12) à l'équation

$$\left[\partial_\eta^2 + \left(k_x + \frac{eE}{\eta H}\right)^2 + \frac{m^2}{4\eta^2 H^2}\right](\varphi_1 - \varphi_2)_1 = 0 \tag{5.13}$$

de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right] W_{\lambda,\mu}(z) = 0, \tag{5.14}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_1 W_{\lambda,\mu}(z) + N_2 M_{\lambda,\mu}(z) \tag{5.15}$$

où

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_3 W_{-\lambda,-\mu}(-z) + N_4 M_{-\lambda,-\mu}(-z). \tag{5.16}$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires etavec λ, μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{-ieE_0}{H^2},\ \mu = i\tilde{\mu} = i\left[\left(\frac{e^2E_0^2}{H^4} + \frac{m^2}{4H^2}\right) - \frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = 2ik_x\eta. \tag{5.17}$$

A l'aide des équations (5.9) et (5.10) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z)+W_{\lambda+1,\mu}(z)=\left(\frac{1}{2}z-\lambda\right)W_{\lambda,\mu}(z), \tag{5.18}$$

on détermine aisément

$$\chi_1 = \frac{1}{2\eta}\left\{1+\frac{2iH}{m}(1+k-ik_x\eta)W_{\lambda,\mu}(z)-\frac{2iH}{m}W_{\lambda+1,\mu}(z)\right\} \tag{5.19}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2\eta}\left\{-1+\frac{2iH}{m}((1+k-ik_x\eta))W_{\lambda,\mu}(z)-\frac{2iH}{m}W_{\lambda+1,\mu}(z)\right\} \tag{5.20}$$

$$\chi_0 = \chi_{\tilde{0}}=\frac{H}{m}\left(k_x+\frac{eE}{\eta H}\right)W_{\lambda,\mu}(z) \tag{5.21}$$

Donc, la solution régulière de l'équation (5.1) à l'infinie est

$$\Psi_\kappa(\eta,x)=\frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}}e^{(ik_xx)}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\eta}\left\{1+\frac{2iH}{m}(1+k-ik_x\eta)W_{\lambda,\mu}(z)-\frac{2iH}{m}W_{\lambda+1,\mu}(z)\right\}\\ \frac{H}{m}\left(k_x+\frac{eE}{\eta H}\right)W_{\lambda,\mu}(z)\\ \frac{H}{m}\left(k_x+\frac{eE}{\eta H}\right)W_{\lambda,\mu}(z)\\ \frac{1}{2\eta}\left\{-1+\frac{2iH}{m}((1+k-ik_x\eta))W_{\lambda,\mu}(z)-\frac{2iH}{m}W_{\lambda+1,\mu}(z)\right\}\end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

5.2.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t)=a_0t$ et un potentiel $A_\mu(0,-Et)$

Suivant les mêmes étapes précédentes, nous obtenons pour la métrique [25]

$$ds^2=-dt^2+(a_0t)^2\,dx^2, \tag{5.23}$$

et le potentiel vectoriel

$$A_\mu=(0,-Et) \tag{5.24}$$

les équations différentielles couplées suivantes

$$\left(2\partial_0+\frac{\dot a}{a}+iM\right)\Psi_1+\left(-\frac{1}{a}\partial_1+i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_0+\left(-\frac{1}{a}\partial_1+i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_{\tilde{0}}+\frac{\dot a}{a}\Psi_2 = 0 \tag{5.25}$$

$$\left(-\frac{1}{a}\partial_1+i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_1-iM\Psi_0+\left(\frac{1}{a}\partial_1-i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_2 = 0 \tag{5.26}$$

$$\left(-\frac{1}{a}\partial_1+i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_1-iM\Psi_{\tilde{0}}+\left(\frac{1}{a}\partial_1-i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_2 = 0 \tag{5.27}$$

$$\left(2\partial_0+\frac{\dot a}{a}-iM\right)\Psi_2-\left(\frac{1}{a}\partial_1-i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_0-\left(\frac{1}{a}\partial_1-i\frac{eEt}{a}\right)\Psi_0+\frac{\dot a}{a}\Psi_1 = 0 \tag{5.28}$$

Considérons la fonction d'onde $\Psi_\kappa(\eta, x)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = a^{\frac{-1}{2}}(t)\,\frac{e^{ik_x x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_0(t) \\ h_{\tilde{0}}(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

Nous obtenons le système couplé suivant

$$\left(\partial_0 + i\frac{M}{2}\right)h_1 - i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_2 = 0 \tag{5.30}$$

$$\left(\frac{-k_x + eEt}{a}\right)h_1 - Mh_0 + \left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)h_2 = 0 \tag{5.31}$$

$$\left(\partial_0 - i\frac{M}{2}\right)h_2 - i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)h_0 + \frac{\dot{a}}{2a}h_1 = 0 \tag{5.32}$$

où

$$h_0(t) = h_{\tilde{0}}(t)$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{M}\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)(h_1 - h_2) \tag{5.33}$$

$$(h_1 + h_2) = \frac{2i}{M}\left(\partial_0 - \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 - h_2) \tag{5.34}$$

$$\left(\partial_0 + \frac{\dot{a}}{2a}\right)(h_1 + h_2) + i\frac{M}{2}(h_1 - h_2) - 2i\left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)h_0 = 0 \tag{5.35}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\partial_0^2 + \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{4a^2} + \left(\frac{M}{2}\right)^2 + \left(\frac{k_x - eEt}{a}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{5.36}$$

Considérons maintenant le facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et en remplaçant dans l'équation(5.36). Il vient alors

$$\left[\partial_0^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{k_x^2}{a_0^2}\right)\frac{1}{t^2} - \frac{2k_x eE}{a_0^2 t} + \left(\frac{M^2 a_0^2 + 4e^2E^2}{4a_0^2}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{5.37}$$

Par le changement

$$z = \frac{t}{\rho}$$

on se réduit (5.37) à l'équation

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right] W_{\lambda,\mu}(z) = 0, \tag{5.38}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$(h_1 - h_2) = N_1 W_{\lambda,\mu}(z) + N_2 M_{\lambda,\mu}(z) \tag{5.39}$$

où

$$(h_1 - h_2) = N_3 W_{-\lambda,-\mu}(-z) + N_4 M_{-\lambda,-\mu}(-z). \tag{5.40}$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires etavec λ, μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{2ieEk_x}{a_0\sqrt{M^2a_0^2 + 4e^2E^2}},\ \mu = i\tilde{\mu} = i\left[\frac{k_x^2}{a_0^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \frac{t}{\rho} = \frac{i\sqrt{M^2a_0^2 + 4e^2E^2}}{a_0}t. \tag{5.41}$$

A l'aide des équations (5.33) et (5.34) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z) + W_{\lambda+1,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2}z - \lambda\right) W_{\lambda,\mu}(z), \tag{5.42}$$

on détermine aisément

$$h_1 + h_2 = \left(\frac{it - 2ik_x\rho - i\varrho}{M\varrho t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) \tag{5.43}$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{it - 2ik_x\varrho - i\varrho + M\varrho t}{M\varrho t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \tag{5.44}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{it - 2ik_x\varrho - i\varrho - M\varrho t}{M\varrho t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \tag{5.45}$$

$$h_0 = -\left(\frac{k_x - eEt}{Ma_0 t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) \tag{5.46}$$

Donc, la solution régulière à l'infinie est

$$\Psi_\kappa(\eta, x) = \frac{N_\infty}{\sqrt{2\pi}} a^{\frac{-1}{2}}(t)\, e^{ik_x x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{it-2ik_x\varrho-i\varrho+M\varrho t}{M\varrho t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \\ -\left(\frac{k_x-eEt}{Ma_0t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) \\ -\left(\frac{k_x-eEt}{Ma_0t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) \\ h_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{it-2ik_x\varrho-i\varrho-M\varrho t}{M\varrho t}\right) W_{\kappa,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right) - \frac{2i}{Mt} W_{\kappa+1,\mu}\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

5.2.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel A_μ(0,-Ea(t))

En considérant (3.86) ,et en prenant le potentiel vectoriel sous la forme [26]

$$A_\mu = (0, -Ea(t)), \tag{5.48}$$

nous obtenons

$$\left[a\beta^0\partial_0 + \frac{1}{a}\beta^1\left(\partial_1 - \sum\nolimits_1 -ieE_0 a\right) - m\right]\Psi(t,x) = 0 \tag{5.49}$$

Nous cherchons des solutions sous la forme

$$\Psi_\kappa(t,x) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_x x)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \\ h_{\tilde{0}} \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

Portons les équations (3.93) , (5.50)et (3.43)dans l'équation (5.49). Il vient

$$\begin{cases} (2a\partial_0 + \dot{a} + im)\, h_1 - 2i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right) h_0 + \dot{a}h_2 = 0 \\ (2a\partial_0 + \dot{a} - im)\, h_2 - 2i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right) h_0 + \dot{a}h_1 = 0 \\ i\left(\frac{k}{a} - eE_0\right)(h_1 - h_2) + imh_0 = 0 \end{cases} \tag{5.51}$$

Par un simple calcul nous arrivons aux équations

$$h_0 = \frac{-1}{m}\left(\frac{k}{a} - eE_0\right)(h_1 - h_2) \tag{5.52}$$

$$h_1 + h_2 = i\frac{a\partial_0}{m}(h_1 - h_2) \tag{5.53}$$

$$(2a\partial_0 + 2\dot{a})(h_1 + h_2) + im(h_1 - h_2) - 4i\left(\frac{k_x}{a} + eE_0\right) h_0 = 0 \tag{5.54}$$

A partir de ces équations on obtient

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{k}{a^2} - \frac{eE_0}{a}\right)^2\right](h_1 - h_2) = 0 \tag{5.55}$$

Remplaçons $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et $\chi(t) = (h_1 - h_2)$ .Il vient alors

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\Lambda}{\Gamma + \Lambda t}\frac{d}{dt} + \left(\frac{m}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma + \Lambda t} + \left(\frac{k}{\Gamma + \Lambda t} - \frac{eE_0}{\sqrt{\Gamma + \Lambda t}}\right)^2\right]\chi(t) = 0 \tag{5.56}$$

Par le changement du variable $u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$, il vient directement

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\sqrt{\Gamma+\Lambda t}}\frac{d}{du} = \frac{\Lambda}{2u}\frac{d}{du}, \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} &= \frac{1}{4}\frac{\Lambda^2}{\Gamma+\Lambda t}\frac{d^2}{du^2} - \frac{\Lambda^2}{4\left(\Gamma+\Lambda t\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du} \\ &= \frac{\Lambda^2}{4u^2}\frac{d^2}{du^2} - \frac{\Lambda^2}{4u^3}\frac{d}{du}.\end{aligned} \tag{5.58}$$

Insérons les éqs.(5.57) et (5.58)dans(5.56) , on obtient la nouvelle équation

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{d}{du} + \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{4}{\Lambda^2}\left(\frac{k}{u} - eE_0\right)^2\right]\chi\left(u\right) = 0 \tag{5.59}$$

Pour déterminer les solutions de cette équation, nous faisons un deuxième changement $\chi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}\varphi\left(u\right)$,Il vient alors

$$\frac{d}{du}\chi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{d}{du}\varphi\left(u\right) - \frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}\varphi\left(u\right), \tag{5.60}$$

$$\frac{d^2}{du^2}\chi\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{d^2}{du^2}\varphi\left(u\right) - \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{du}\varphi\left(u\right) + \frac{3}{4u^{\frac{5}{2}}}\varphi\left(u\right) \tag{5.61}$$

En substituant ces quantités dans (5.59), il vient

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{u^2} - \frac{8ekE_0}{\Lambda^2}\frac{1}{u} + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right]\varphi\left(u\right) = 0. \tag{5.62}$$

Par comparaison avec l'équation de Whittaker, nous choisissons $z = \beta u$

$$où\beta = 2i\sqrt{\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda}\right)^2} \tag{5.63}$$

. Alors l'équation(5.62)devient

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{2k}{\Lambda}\right)^2\right)\frac{1}{z^2} - \frac{8ekE_0}{\Lambda^2\beta}\frac{1}{z} + \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\varphi\left(z\right) = 0 \tag{5.64}$$

Cette dernière équation est de type Whittaker

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right]W_{\kappa,\mu}\left(z\right) = 0 \tag{5.65}$$

D'où ces solutions peuvent être écrites sous la forme

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = N_1 W_{\kappa,\mu}\left(z\right) + N_2 M_{\kappa,\mu}\left(z\right) \tag{5.66}$$

où

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = N_3 W_{-\kappa,-\mu}(-z) + N_4 M_{-\kappa,-\mu}(-z) \tag{5.67}$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires etavec κ, μ et β sont donnés par

$$\kappa = i\tilde{\kappa} = -\frac{4ek_x E_0}{\Lambda^2\beta},\ \mu = i\tilde{\mu} = \frac{2ik_x}{\Lambda} \tag{5.68}$$

$$\text{et } \beta = 2i\left[\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = \beta u \tag{5.69}$$

Puisque $z = \beta u$ et $(h_1 - h_2) = \chi(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\varphi(z)$,ceci implique les quatre solutions suivantes

$$(h_1 - h_2)_1 = \frac{N_1}{\sqrt{u}} W_{\kappa,\mu}(\beta u) \tag{5.70}$$

$$(h_1 - h_2)_2 = \frac{N_2}{\sqrt{u}} M_{\kappa,\mu}(\beta u) \tag{5.71}$$

$$(h_1 - h_2)_3 = \frac{N_3}{\sqrt{u}} W_{-\kappa,-\mu}(-\beta u) \tag{5.72}$$

$$(h_1 - h_2)_4 = \frac{N_4}{\sqrt{u}} M_{-\kappa,-\mu}(-\beta u) \tag{5.73}$$

A l'aide des équations (5.52) et (5.53) et la relation de récurrence des fonctions Whittaker

$$z\frac{d}{du} W_{\kappa,\mu}(z) + W_{\kappa+1,\mu}(z) = \left(\frac{1}{2}z - \kappa\right) W_{\kappa,\mu}(z), \tag{5.74}$$

on détermine aisément la solution régulière de l'équation (5.1) à l'infinie

$$\Psi_\kappa(t,x) = \frac{N_\infty e^{(ik_x x)}}{\sqrt{2\pi u}} \tag{5.75}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{i\Lambda\beta}{2m} - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} + \frac{i\Lambda\kappa}{m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}}\right) W_{\kappa,\mu}(\beta u) - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} W_{\kappa+1,\mu}(\beta u)\right] \\ -\frac{1}{m}\left(\frac{k}{\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} - eE_0\right) W_{\kappa,\mu}(\beta u) \\ -\frac{1}{m}\left(\frac{k}{\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} - eE_0\right) W_{\kappa,\mu}(\beta u) \\ \frac{1}{2}\left[\left(-1 + + \frac{i\Lambda\beta}{2m} - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} + \frac{i\Lambda\kappa}{m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}}\right) W_{\kappa,\mu}(\beta u) - \frac{i\Lambda}{2m\sqrt{\Gamma+\Lambda t}} W_{\kappa+1,\mu}(\beta u)\right] \end{pmatrix},$$

$$\text{où } u = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}.$$

5.3 La densité de creation des paires

5.3.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$ et un potentiel $A_\mu\left(0, -\frac{E}{H}e^{Ht}\right)$

Puisque l'équation de Whittaker ne varie pas lorsqu'on change μ en $-\mu$, ou qu'on change simultanément λ en $-\lambda$ et z en $-z$, elle admet comme solutions les fonctions

$$\begin{aligned}(\chi_1-\chi_2)_1 &= \frac{N_1}{\eta}W_{\lambda,\mu}(z) && (5.76)\\ (\chi_1-\chi_2)_2 &= \frac{N_2}{\eta}M_{\lambda,\mu}(z) && (5.77)\\ (\chi_1-\chi_2)_3 &= \frac{N_3}{\eta}W_{-\lambda,-\mu}(-z)=\frac{N_3}{\eta}W_{-\lambda,\mu}(-z) && (5.78)\\ (\chi_1-\chi_2)_4 &= \frac{N_4}{\eta}M_{\lambda,\mu}(z)=\frac{N_4}{\eta}M_{-\lambda,-\mu}(-z)=\frac{N_4}{\eta}(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}M_{\lambda,-\mu}(z), && (5.79)\end{aligned}$$

où les N_i se sont des constantes arbitraires et λ, μ et z sont donnés par

$$\lambda = i\tilde{\lambda} = \frac{-ieE_0}{H^2},\ \ \mu = i\tilde{\mu} = i\left[\left(\frac{e^2E_0^2}{H^4}+\frac{m^2}{4H^2}\right)-\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } z = 2ik_x\eta. \tag{5.80}$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique de chaque solution quand $\eta \to -\infty$ et $\eta \to 0$.

$$\lim_{|z|\to\infty} W_{\lambda,\mu}(z) \approx z^{\lambda}e^{-\frac{z}{2}}, \qquad |\arg z| \leq \frac{3\pi}{2}-\delta \tag{5.81}$$

avec δ est un petit constant arbitraire positif.

$$\lim_{z\to 0} M_{\lambda,\mu}(z) \approx z^{\mu+\frac{1}{2}}, \qquad 2\mu \neq -1; -2; -3; ... \tag{5.82}$$

En déduisant alors les états "*in*" et "*out*"

$$\begin{aligned}(\chi_1-\chi_2)_{in}^{+} &= \frac{N_{in}}{\eta}W_{\lambda,\mu}(z) && (5.83)\\ (\chi_1-\chi_2)_{in}^{-} &= \frac{N_{in}}{\eta}W_{-\lambda,\mu}(-z) && (5.84)\\ (\chi_1-\chi_2)_{out}^{+} &= \frac{N_{out}}{\eta}M_{\lambda,\mu}(z) && (5.85)\\ (\chi_1-\chi_2)_{out}^{-} &= \frac{N_{out}}{\eta}(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}M_{\lambda,-\mu}(z), && (5.86)\end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}M_{\lambda,-\mu}(z)$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} \quad (5.87)$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} \left(e^{i\pi}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}. \quad (5.88)$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules dans l'univers de de Sitter est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \quad (5.89)$$

Maintenant, nous appliquons les propriétés des fonctions gamma

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iz\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi z}, \quad (5.90)$$

nous obtenons

$$P_k = \frac{\cosh \pi y}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|}\cosh \pi\tilde{y}} \quad (5.91)$$

où

$$\tilde{y} = \tilde{\mu} - \tilde{\lambda}, \quad (5.92)$$

$$y = \tilde{\mu} + \tilde{\lambda}. \quad (5.93)$$

Pour déterminer la densité des particules crées, nous utilisons la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad (5.94)$$

et l'èqaution (5.91) .Nous arrivons à

$$n = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\mu}}\frac{\cosh \pi\tilde{y}}{\cosh \pi y} - 1} = \frac{\cosh \pi y}{e^{2\pi\tilde{\mu}}\cosh \pi\tilde{y} - \cosh \pi y}. \quad (5.95)$$

A la limite

$$\left|\tilde{\mu} \pm \tilde{\lambda}\right| \gg 1, \quad (5.96)$$

nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n = |\beta|^2 \approx e^{-\frac{2\pi}{H^2}\left[\left(e^2E_0^2 + M^2H^2 - \frac{H^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - eE_0\right]}.$$

En réalité c'est la condition adiabatique

$$\lim_{\eta\to 0}\left|\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right| \ll 1, \tag{5.97}$$

qui impose la limite(5.96). Par conséquent, la production de particules n'est bien définie que lorsque

$$\left[\left(\frac{e^2E_0^2}{H^4}+\frac{m^2}{4H^2}\right)-\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{eE_0}{H^2} \gg 1. \tag{5.98}$$

5.3.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et un potentiel $A_\mu\,(0, -Et)$

Suivant les mêmes étapes que le premier cas, nous déduisant alors les états "*in*" et "*out*"

$$\begin{aligned}
(h_1 - h_2)^+_{out} &= N_{out} W_{\lambda,\mu}(z) && (5.99)\\
(h_1 - h_2)^-_{out} &= N_{out} W_{-\lambda,\mu}(-z) && (5.100)\\
(h_1 - h_2)^+_{in} &= N_{in} M_{\lambda,\mu}(z) && (5.101)\\
(h_1 - h_2)^-_{in} &= N_{in}(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{\lambda,-\mu}(z)\,, && (5.102)
\end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,-\mu}(z) \tag{5.103}$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} && (5.104)\\
\beta &= \frac{N_{out}}{N_{in}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} \left(e^{i\pi}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}. && (5.105)
\end{aligned}$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\,\beta\,|^2}{|\,\alpha\,|^2} = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)}\right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \tag{5.106}$$

Maintenant, nous appliquons les propriétés des fonctions gamma

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iz\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi z}, \tag{5.107}$$

nous obtenons

$$P_k = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|\frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi \tilde{y}}}} = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} f\left(y, \tilde{y}\right)} \tag{5.108}$$

où

$$\begin{aligned} y &= \tilde{\mu} + \tilde{\lambda}, && (5.109) \\ \tilde{y} &= \tilde{\mu} - \tilde{\lambda} && (5.110) \\ f\left(y, \tilde{y}\right) &= \frac{\cosh \pi y}{\cosh \pi \tilde{y}} && (5.111) \end{aligned}$$

Pour déterminer la densité des particules crées, nous utilisons la condition de normalisation

$$\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2 = 1, \tag{5.112}$$

et l'éqaution (5.108) .Nous arrivons à

$$n\left(k\right) = \mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{2\pi|\tilde{\mu}|} f\left(y, \tilde{y}\right) - 1}. \tag{5.113}$$

Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n\left(k\right) = \mid \beta \mid^2 \approx e^{-2\pi\left(\frac{k_x}{a_0} - \frac{2eEk_x}{a_0\sqrt{M^2 a_0^2 + 4e^2E^2}}\right)}$$

à la limite adiabatique

$$\left| \frac{k_x}{a_0} \pm \frac{2eEk_x}{a_0\sqrt{M^2 a_0^2 + 4e^2E^2}} \right| \gg 1.$$

5.3.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel A_μ(0,-Ea(t))

Par la même méthode appliquée précédemment, nous déduisant les états "*in*" et "*out*"

$$\begin{aligned} \left(h_1 - h_2\right)^+_{out} &= \frac{N_{out}}{\sqrt{u}} W_{\lambda,\mu}\left(z\right) && (5.114) \\ \left(h_1 - h_2\right)^-_{out} &= \frac{N_{out}}{\sqrt{u}} W_{-\lambda,\mu}\left(-z\right) && (5.115) \\ \left(h_1 - h_2\right)^+_{in} &= \frac{N_{in}}{\sqrt{u}} M_{\lambda,\mu}\left(z\right) && (5.116) \\ \left(h_1 - h_2\right)^-_{in} &= \frac{N_{in}}{\sqrt{u}} \left(-1\right)^{-\mu+\frac{1}{2}} M_{\lambda,-\mu}\left(z\right), && (5.117) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients de Bogoliubov nous utilisons la propriété de transformation des fonctions de Whittaker

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,-\mu}(z) \tag{5.118}$$

et la relation de Bogoliubov

$$\varphi_{out} = \alpha\varphi_{in} + \beta\varphi_{in}^{*} \tag{5.119}$$

Alors, les coefficients de Bogoliubov sont

$$\alpha = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} \tag{5.120}$$

$$\beta = \frac{N_{in}}{N_{out}} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} \left(e^{i\pi}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}. \tag{5.121}$$

Donc, la probabilité de création d´une paire de particules est

$$P_k = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}\right|^2 e^{-2\pi\tilde{\mu}} = \frac{\cosh\pi\tilde{y}}{\cosh\pi y} e^{-2\pi\tilde{\mu}}, \tag{5.122}$$

et la densité des particules crées

$$n(k) = |\beta|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\tilde{\mu}} f(y,\tilde{y}) - 1}. \tag{5.123}$$

où

$$y = \tilde{\mu} + \tilde{k}, \tag{5.124}$$

$$\tilde{y} = \tilde{\mu} - \tilde{k} \tag{5.125}$$

$$f(y,\tilde{y}) = \frac{\cosh\pi y}{\cosh\pi\tilde{y}} \tag{5.126}$$

Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique

$$n(k) = |\beta|^2 \approx e^{-2\pi\left(\frac{2k_x}{\Lambda} - \frac{2ek_xE_0}{\Lambda^2\left[\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right)}. \tag{5.127}$$

à la limite adiabatique

$$\left|\frac{2k_x}{\Lambda} \pm \frac{2ek_xE_0}{\Lambda^2\left[\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{2eE_0}{\Lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right| \gg 1. \tag{5.128}$$

5.4 Représentation graphique du nombre de particules créées

5.4.1 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = e^{Ht}$ et un potentiel $A_\mu \left(0, -\frac{E}{H}e^{Ht}\right)$

Nous avons constaté que le nombre de densité des particules créées à la présence d'un champ électrique dans l'espace-temps courbe n'est pas thermique, comme dans le cas du spin 0 et spin (1/2) [14, 15, 16]. Pour étudier la dépendance du n au champ électrique, nous représentons le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant la masse et la charge.

$$n = \frac{\cosh\left(\pi\left(\sqrt{\left(E_0^2+\frac{3}{4}\right)}+E_0\right)\right)}{e^{2\pi\sqrt{\left(E_0^2+\frac{3}{4}\right)}}\cosh\left(\pi\left(\sqrt{\left(E_0^2+\frac{3}{4}\right)}-E_0\right)\right)-\cosh\left(\pi\left(\sqrt{\left(E_0^2+\frac{3}{4}\right)}+E_0\right)\right)}. \tag{5.129}$$

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000$_{1.pdf}$

FIG. 5.1 – *variation de n en fonction de E où $H = 1$, $m = 2$ et $e = 1$.*

Maintenant pour faire une comparaison entre le taux de création des particules par le champ gravitationnel pur et le champ électrique pur nous supprimons respectivement le champ électrique et la constante de Hubble.

La création des particules par le champ gravitationnel pure (E=0)

Dans ce cas, le champ électrique est nul et la densité de création des particules crées est devenue thermique de type Bose-Einstein distribution.

$$n_{GR} \simeq \mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H}\left(M^2-\frac{H^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}-1} = \frac{1}{e^{2\pi\frac{\omega}{H}}-1}, \tag{5.130}$$

où

$$\text{la température } T = \frac{H}{2\pi} \text{ et l'énergie } \omega = \left(M^2 - \frac{H^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.131}$$

Ce résultat était déjà obtenu au chapitre 4. Si nous fixons la masse $m = 2$, la représentation graphique de

$$n_{GR} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H}\left(1-\frac{H^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1}, \tag{5.132}$$

devient

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000$_{2.pdf}$

FIG. 5.2 – *variation de n en fonction de H où $m = 2$.*

La création des particules par le champ électrique pure $(H \to 0)$.

L'exposant dans l'expression de n peut être réécrit

$$\frac{-2\pi}{H^2}\left[\left(e^2E_0^2 + M^2H^2 - \frac{H^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - eE_0\right] = \frac{-2\pi eE_0}{H^2}\left[\left(1 + \frac{M^2H^2}{e^2E_0^2} - \frac{H^4}{4e^2E_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]. \tag{5.133}$$

A la limite $H \to 0$

$$\lim_{H\to 0}\left\{\left[1 + \left(\frac{M^2H^2}{e^2E_0^2} - \frac{H^4}{4e^2E_0^2}\right)\right]^{1/2} - 1\right\} \to \left(\frac{M^2H^2}{2e^2E_0^2} - \frac{H^4}{8e^2E_0^2}\right). \tag{5.134}$$

Alors, on obtient facilement la densité des particules créées à la limite plate (l'espace plat de Minkowski en présence du champ électrique).

$$n_{plat} = \lim_{H\to 0} \mid \beta \mid^2 \simeq e^{-\frac{\pi}{eE_0}M^2}. \tag{5.135}$$

La représentation graphique de n_{plat} pour ($m = 2$ et $e = 1$) est

$$n_{plat} = e^{-\frac{\pi}{E_0}}. \tag{5.136}$$

Discussion

-Nous remarquons que la densité de particules créées se ressemble à une distribution thermique à la limite adiabatique $\left|\left[\left(\frac{e^2E_0^2}{H^4}+\frac{m^2}{4H^2}\right)-\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\pm\frac{eE_0}{H^2}\right|\gg 1$.Ceci explique la nature thermique de l'effet.

-En comparant les figures (5.2)et (**??**), il est facile de voir qu'une augmentation considérable du taux de création de particules se produit en présence de champs électriques dépendant du temps. Pour la création de particules spin-1, le champ électrique joue le rôle dominant par rapport aux champs gravitationnels.

-D'après la figure (**??**), la probabilité de création est nulle à la limite ($H \to 0$ et $E = 0$) (l'espace plat de Minkowski libre).

5.4.2 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = a_0 t$ et un potentiel $A_\mu\,(0, -Et)$

Dans ce cas, nous représentons aussi le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant $k_x = 1$, $a_0 = 1$, $M = 1$ et $e = 1$.

$$n\,(k) = \frac{\cosh\left[\pi\left(1+\frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}}\right)\right]}{e^{2\pi}\ \cosh\left[\pi\left(1-\frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}}\right)\right]-\cosh\left[\pi\left(1+\frac{2E}{\sqrt{1+4E^2}}\right)\right]} \tag{5.137}$$

.

On passe maintenant aux cas particuliers possibles.

La création des particules par le champ gravitationnel pure (E=0)

Pour un champ électrique nul, la densité de création des particules créées devient

$$n_{GR} \simeq\mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi k}{a}}-1} \tag{5.138}$$

avec la température $T = \frac{a}{2\pi}$ et l'énergie $\omega = k$.

C'est le même résultat que nous avons obtenu au chapitre 4. Si nous fixons $k_x = 1$, il vient

$$n_{GR} \simeq \mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}} - 1} \tag{5.139}$$

Discussion

-En comparant les figures (**??**)et (**??**), nous observons une augmentation considérable du taux de création de particules se produit en présence du champ électrique dépendant du temps.

5.4.3 -Cas d'un facteur d'échelle $a(t) = \sqrt{\Gamma + \Lambda t}$ et un potentiel A_μ(0,-Ea(t))

Comme dans les deux cas précédents, nous représentons le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique en fixant $k_x = 1$, $e = 1$, $M = 1$ et $\Lambda = 1$.

$$n = \frac{\cosh\left[\pi\left(2 + \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]}{e^{4\pi}\cosh\left[\pi\left(2 - \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right] - \cosh\left[\pi\left(2 + \frac{2E}{(1+4E^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]}. \tag{5.140}$$

La création par le champ gravitationnel pure $(E = 0)$ En supprimant le champ électrique, la densité de création des particules créées se réduit à

$$n_{GR} \simeq \mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{4\pi\frac{\omega}{\Lambda}} - 1} \tag{5.141}$$

avec la température $T = \frac{\Lambda}{4\pi}$,l'énergie $\omega = k$.

C'est le même résultat que nous avons obtenu au chapitre 4. Si nous fixons $k_x = 1$, il vient

$$n_{GR} \simeq \mid \beta \mid^2 = \frac{1}{e^{\frac{4\pi}{\Lambda}} - 1} \tag{5.142}$$

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000$_{3.pdf}$

FIG. 5.3 – *variation de n en fonction de Λ où $k_x = 1$.*

Discussion

-En comparant les figures (??) et (5.3), il est clair que le taux de création de particules augmente en présence du champ électrique.

-D'après la figure (5.3), la probabilité de création est nulle à la limite ($\Lambda \to 0$ et $E = 0$) (l'espace plat de Minkowski libre).

5.4.4 conclusion

Dans cette partie, nous présentons l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un espace-temps courbe (Robertson-Walker) à la présence du champ électriques en considérant trois modèles cosmologique différents. La solution exacte est déterminée pour les trois cas, où les fonctions d'onde sont exprimées par les fonctions Whittaker. Selon les solutions, la densité de création des particules est calculée en présence des champs gravitationnel et électrique par la technique de transformation de Bogoliubov. Pour tester nos résultats, nous avons étudié quelques cas particuliers en représentant le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique où nous avons constaté pour les trois cas que le champ électrique amplifie de manière significative la création de particules plus que le champ gravitationnel.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons solutionné l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour les particules massives de spin-1 dans un espace-temps courbe (Friedmann-Robertson-Walker) à la présence de champ gravitationnel avec ou sans un champ électrique variable dans le temps. En considérant trois modèles cosmologiques différents, la solution exacte de l'équation est déterminée pour les trois cas. Au début, on a fait un bref rappel sur les propriétés des matrices de Kemmer et l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau dans l'espace de Minkowski.

Puis, nous avons exposé une brève description de l'univers de (FRW). Ainsi, nous avons solutionné l'équation de DKP dans un espace-temps courbe à (1+1) dimensions en présence d'un champ gravitationnel en exprimant ces solutions par les fonctions de Bessel. A l'aide de comportement asymptotique des fonctions de Bessel, nous avons classé notre solutions en états" in "et états "out". A partir de la relation entre ces états nous avons exprimé la probabilité de création d'une paire de particule et la densité des particules créées en termes des coefficients de Bogoliubov.

Dans une autre étape, nous avons fait la même étude pour l'équation de DKP dans un espace-temps courbe en présence d'un champ électrique où les fonctions d'onde sont exprimées par les fonctions de Whittaker. Pour tester nos résultats, nous avons étudié quelques cas particuliers en représentant le nombre de densité des particules créées en fonction du champ électrique.

Les résultats essentiels de cette étude sont :

- A (1+1) dimensions, nous avons obtenus des solutions exactes de l'équation Duffin-

Kemmer-Petiau (DKP) au cas de spin-1 pour des facteurs d'échelle différents.

- nous avons déterminés les probabilités de création une paire et le nombre des particules créées en appliquant la transformation canonique de Bogoliubov.

-Nous avons observé que le champ électrique amplifie de manière significative la création de particules plus que le champ gravitationnel.

-la probabilité de création est nulle à l'absence des deux champs (gravitationnel et électrique).

En outre, il est bien connu que les champs gravitationnels purs ne créent pas de particules sans masse avec un couplage conforme. Par exemple, à partir de (3.92) nous pouvons voir que ces équations sont impossibles à résoudre quand m = 0. Cela reste vrai même si des champs électriques sont présents.

Il est intéressant de voir la fig.(6.1)qui inclut nos résultats et ceux obtenus par (Refs.[14, 15, 16]) pour les particules spin-0 et spin-1/2.

$$\begin{aligned} n_{s=0} &= \frac{\cosh\left[\pi\left(\sigma-\lambda\right)\right]}{e^{2\pi\sigma}\cosh\left[\pi\left(\sigma+\lambda\right)\right]-\cosh\left[\pi\left(\sigma-\lambda\right)\right]} \\ \text{où } \sigma &= \sqrt{\frac{e^2E^2}{H^4}+\frac{M^2}{H^2}-\frac{1}{4}} \text{ et } \lambda = \frac{eE}{H^2} \end{aligned} \tag{6.1}$$

et

$$\begin{aligned} n_{s=1/2} &= \frac{\sinh\left[\pi\left(\alpha+\beta\right)\right]}{e^{2\pi\alpha}\sinh\left[\pi\left(\alpha-\beta\right)\right]+\sinh\left[\pi\left(\alpha+\beta\right)\right]} \\ \text{où } \alpha &= \sqrt{\frac{e^2E^2}{H^4}+\frac{M^2}{H^2}} \text{ et } \beta = \frac{eE}{H^2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Fig.(6.1) montre que dans l'espace-temps courbe de de sitter, la présence du champ électrique amplifie le taux de création des particules spinorielle (s=1 où s= $\frac{1}{2}$), alors qu'elle réduit le taux de création de particules sans spin. Un des raison possibles de cet effet peut être le couplage de spin au champ électrique.

:/Users/BB/AppData/Local/Temp/graphics/swp0000$_{4.pdf}$

FIG. 6.1 – *variation de n en fonction de E où $H = 1$, $M = 2$ et $e = 1$.*

Finalement, nous pouvons dire que les résultats que nous avons obtenus montrent l'importance de l'équation de DKP pour les bosons et pour confirmer nos résultats, nous espérons de résoudre le problème de $(3 + 1)$-dimensions aux prochaines études.

Annexe A

Fonctions mathématiques utiles

Dans cette annexe, nous avons représentés les propriétés des fonctions mathématiques nécessaires dans ce mémoire ([34]).

A.1 -Les fonctions de Bessel

L'équation différentielle de Bessel est

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{z}\partial_z+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\right]\chi(z)=0. \tag{A.1}$$

Elle a deux solutions linéairement indépendantes, à savoir, $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$où $[H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)]$. Les formules de connexion nécessaires sont

$$H_\nu^{(1)}(\bar{z}) = \overline{H_\nu^{(2)}}(z) \tag{A.2}$$

$$H_\nu^{(1)}\left(e^{i\pi}z\right) = -e^{-i\pi\eta}H_\nu^{(2)}(z) \tag{A.3}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z)-e^{-i\nu\pi}J_\nu(z)}{i\sin(\pi\nu)} \tag{A.4}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\nu\pi}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin(z)} \tag{A.5}$$

Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel quand $|z|\to 0$ est donné par

$$J_{\pm\nu}(z) \sim \frac{1}{2^{\pm\nu}\Gamma(\nu+1)}(z)^{\pm\nu},\ \nu\neq -1,-2,-3... \tag{A.6}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim -H_\nu^{(2)}(z)\sim\frac{-i}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu},\ \ \mathrm{Re}(\nu)\succ 0. \tag{A.7}$$

A la limite $|z| \to \infty$, le comportement asymptotique est donné par

$$
\begin{aligned}
J_{\pm\nu}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z \mp \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| \prec \pi && \text{(A.8)}\\
H_\nu^{(1)}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad -\pi+\delta \leq \arg z \leq 2\pi-\delta && \text{(A.9)}\\
H_\nu^{(2)}(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad -2\pi+\delta \leq \arg z \leq \pi-\delta, && \text{(A.10)}\\
& \text{avec } \delta \text{ est un petit constant arbitraire positif.} && \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

A.2 -Les fonctions de Whittaker

L'équation différentielle de Whittaker est

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right]\varphi(z) = 0, \tag{A.12}$$

Elle a deux solutions linéairement indépendantes, à savoir, $W_{\lambda,\mu}(z)$ et $M_{\lambda,\mu}(z)$ [où $W_{-\lambda,-\mu}(-z)$ et $M_{-\lambda,\mu}(-z)$]. Les formules de connexion nécessaires sont

$$
\begin{aligned}
W_{\lambda,\mu}(z) &= W_{\lambda,-\mu}(z) && \text{(A.13)}\\
M_{\lambda,\mu}\left(e^{\pm i\pi}z\right) &= \pm i e^{\pm i\pi\mu} M_{-\lambda,\mu}(z) && \text{(A.14)}\\
W_{\kappa,\mu}(z) &= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} M_{\lambda,-\mu}(z) && \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

Le comportement asymptotique des fonctions de Whittaker quand $|z| \to \infty$ est donné par

$$
\begin{aligned}
W_{\lambda,\mu}(z) &\sim z^\lambda e^{-\frac{z}{2}}, && \text{(A.16)}\\
M_{\lambda,\mu}(z) &\sim \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} e^{\frac{z}{2}} z^{-\lambda} + \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\lambda\right)} e^{-\frac{z}{2}\pm i\pi\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} z^\lambda, && \text{(A.17)}\\
-\frac{\pi}{2}+\delta &\leq \pm\arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \delta \text{ , avec } \delta \text{ est un petit constant arbitraire positif.}
\end{aligned}
$$

A la limite $|z| \to 0$, le comportement asymptotique est donné par

$$
\begin{aligned}
M_{\lambda,\mu}(z) &\sim z^{\mu+\frac{1}{2}}, && \text{(A.18)}\\
W_{\lambda,\mu}(z) &\sim \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} z^{\frac{1}{2}-\mu} + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} z^{\frac{1}{2}+\mu}, \ 0 \leq \mathrm{Re}(\mu) \leq \frac{1}{2}, \ \mu \neq 0. && \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

A.3 -La fonction Gamma

La fonction Gamma vérifie les propriétés suivantes

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{A.20}$$

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x\sinh \pi x}, \tag{A.21}$$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi x}, \tag{A.22}$$

$$|\Gamma(1+ix)|^2 = \frac{\pi x}{\sinh \pi x}, \tag{A.23}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{A.24}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}, (x \text{ est un réel positif.}). \tag{A.25}$$

Annexe B

Les matrices de Pauli

Les matrices de Pauli sont un ensemble de matrices complexes de dimensions 2×2 qui sont hermitiennes et unitaires.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Elles obéissent aux relations de (anti)-commutation suivantes

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{B.2}$$

où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Ces relations de commutativité peuvent être vérifiées en utilisant

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} \cdot I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{B.3}$$

où I est la matrice identité.

Bibliographie

[1] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] O. Klein, Z. Phys. 53 (1929) 157.

[3] F. Sauter, Z. Phys. 69 (1931) 742 ; Z. Phys. 73 (1931) 547.

[4] J.S. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664.

[5] L. Parker, Phys. Rev. D 3 (1971) 346.

[6] C.J. Isham, J.E. Nelson, Phys. Rev. D 10 (1974) 3226.

[7] J. Autretsch, G. Shafer, J. Phys. A : Math. Gen. 11 (1975) 1583.

[8] J. Audretsch, G. Schafer, Phys. Lett. 66 (1978) 459.

[9] A.O. Barut, I.H. Duru, Phys. Rev. D 36 (1987) 3705.

[10] V.M. Villalba, U. Percoco, J. Math. Phys. 31 (1990) 715.

[11] A. Havare, T. Yetkin, M. Korunur, K. Sogut, Nuclear Phys. B 682 (2004) 457.

[12] G. Schafer, H. Dehnen, J. Phys. A : Math. Gen. 13 (1980) 517–528.

[13] K.H. Lotze, Class. Quant. Grav. 2 (1985) 351 ; Class. Quant. Grav. 2 (1985) 363 ; Ast. Phys. Spac. Sci. 120 (1986) 191.

[14] J. Garriga, Phys. Rev. D 49 (1994) 6343.

[15] V.M. Villalba, Phys. Rev. D 52 (1995) 3742 ; Phys. Rev. D 60 (1999) 127501 ; V.M. Villalba, W. Greiner, Phys. Rev. D 65 (2001) 025007.

[16] S. Haouat, R. Chekireb, Eur. Phys. J. C. 72 (2012) 2034.

[17] D.M. Chitre, J.B. Hartle, Phys. Rev. D 16 (1977) 251.

[18] S. Winitzki, Phys. Rev. D 72 (2005) 104011.

[19] S. Gavrilov, D.M. Gitman, S.D. Odintsov, Internat. J. Modern Phys. A 12 (1997) 4837.

[20] E. Akhmedov ; Mod. Phys. Lett. A 25 (2010) 2815

[21] S. P. Kim ; arXiv :1008.0577v1 [hep-th]

[22] A.A. Grib, S.G. Mamaev, V.M. Mostepanenko, Quantum Vacuum Effects in Strong Fields, Energoatomizdat, Moscow, 1988.

[23] Y. Sucu, N. Unal, Eur. Phys. J. C 44, 287–291 (2005).

[24] E.E. Kangal, H. Yanar, A. Havare, K. Sogut Annals of Physics 343, (2014) 40-48.

[25] K. Sogut and A. Havare Class. Quantum Grav. 23 (2006) 7129–7142.

[26] E.E. Kangal, AKU J. Sci.Eng.18 (2018) 011101 (774-779).

[27] G. Petiau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8, 16 No. 2 (1936).

[28] R. A. Krajcik et M. M. Nieto Am. J. Phys, 45, 818 (1977). J. Géhéniau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect. 8, 18 No. 1 (1938).

[29] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A166, 127-53 (1938). N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A173, 91-116 (1939).

[30] R. J. Duffin, Phys. Rep, 54, 1114(1939).

[31] Y. Takahashi, An Introduction to Field Quantization (Oxford : Pergamon Press) (1969).

[32] A. Boumali, These de doctorat, Université de Tebessa, (2005).

[33] B. Zagh, Mémoire de Master, Université Mohamed Seddik Ben-Yahia, LPTH, Jijel (2016). I. Fakrache, Mémoire de Master, Université Mohamed Seddik Ben-Yahia, LPTH, Jijel (2016).

[34] M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1974. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (Academic Press, New York, 1979).

[35] F. Bernardeau, Cosmologie : Des Fondements Théoriques Aux Observations, EDP Sciences/CNRS Editions, (2007) (LPTH268).