

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel  
Faculté de la Technologie



**Département de Génie Civil et Hydraulique**

## **MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES**

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique

Option : Hydraulique Urbaine

Présenté par :

**LACHI Hacene**

*Ingénieur d'Etat en Hydraulique  
de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger*

## **SIMULATION NUMÉRIQUE DU RESSAUT HYDRAULIQUE DANS UN CANAL À PROFIL RECTANGULAIRE**

Dirigé par :

- Mr. AMARA Lyes

Soutenu publiquement le 23 / 06 / 2018 devant le jury composé de :

- Président : Dr. LABIOD Chouaib
- Examineur : Dr. BERREKSI Ali (Université de Bejaia)

Promotion 2018

## Homage

*Je témoigne ma reconnaissance et je rends hommage à celle qui a sacrifié tout ce qui est de plus chère pour épaulé et prêté conseils durant toute sa vie à ces enfants, celle qui a compris que le meilleur fruit que l'être humain peut conquérir dans cette vie passagère c'est d'éduquer et instruire ses enfants « ma défunte mère ». Je ne saurai évidemment la remercier autant, mais je pris Dieu que ces quelques mots trouverons refuge dans son esprit.*

*Que dieu lui réserve pour résidence les jardins de Firdaws ou elle demeurera éternellement.*

« La valeur d'un homme tient dans sa capacité à donner et non dans sa capacité à recevoir ».  
Albert Einstein

## Remerciements

En premier je remercie le Bon Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage d'achever ce modeste travail. Et si j'ose dire que ce dernier a réussi alors sa réussite n'est due qu'ALLAH (عزوجل).

En deuxième, je tiens à remercier mes parents qui m'ont toujours apporté aide et assistance durant tout ma vie. Je ne saurai les remercier autant.

Je saisis cette occasion pour remercier celle à qui j'ai causé beaucoup de désagréments le long de l'élaboration de ce mémoire et à celle qui m'a enrobé par son affection et son amour « ma chère femme ».

A ma petite fille Djamila que j'ai attendu quatre années pour l'avoir parmi nous et dont je remercie Dieu tout Puissant et Miséricordieux de me l'avoir offert.

A mes beaux parents et toute ma belle famille chacun en son nom pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Je tiens à présenter toute ma gratitude et ma reconnaissance très particulière à Mr. **AMARA Lyes**, Maître de conférence au département d'hydraulique de l'université de Jijel, mon encadrant, mon ami et mon frère qui a dirigé pas à pas ce travail que sur le plan académique que morale. Exception faite, je ne ferai ici d'éloges à sa personne quant à ses mérites à mon égard car je mettrai à mal sa modestie. Que Dieu lui apporte son aide, beaucoup de courage et de réussite dans ces travaux scientifiques.

Je tiens à présenter mes remerciements au Dr. **BERREKSI Ali** qui a accepté l'invitation et qui m'a honoré par sa présence parmi les membres de jurys.

Je remercie Dr. **LABIOD Chouaib** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury du présent mémoire.

Je saisis cette occasion pour remercier ici l'ensemble des enseignants du département d'Hydraulique de l'Université de Jijel pour l'appui et l'aide qui m'ont apporté tout le long de cette année ainsi que leur esprit d'amitié, spécialement Messieurs H.AYAS, BOUTEBA, B.AINASS, Mme KRIMIL et les autres.

Par la même occasion je tiens à remercier vivement Monsieur **OGGAD El Mahdi**, Directeur de l'ABH-AHS de m'avoir donné la chance de continuer mes études et qui n'a pas hésité une seconde à m'apporter son soutien, son aide morale et matérielle et son encouragement le long de l'élaboration de ce travail.

*Je tiens également à exprimer mes remerciements à mes amis pour leur soutien, aide, encouragements et leur appui, notamment KRIM Faiçal, GUESSMIA Ayoub, AMIR Mohamed el hanafi, OMRANE Islem et tous les autres, chacun son nom et dont la liste ne sera jamais exhaustive.*

*A toute personne qui m'a aidé de près ou de loin pour l'élaboration de ce travail*

*Un chaleureux merci à tous !*

## **TABLE DES MATIÈRES**

Introduction générale.....1

### **Chapitre 1 : Généralités sur le ressaut**

I. Introduction..... 3

II. Ressaut hydraulique classique ..... 5

    II.1. Type du ressaut classique ..... 5

    II.2. Rapport des hauteurs conjuguées du ressaut ..... 6

    II.3. Longueurs caractéristiques du ressaut ..... 8

    II.4. Longueur du rouleau ..... 8

    II.5. Longueur du ressaut..... 9

    II.6. Rendement du ressaut ..... 10

III. Etat de l'art..... 13

### **Chapitre 2 : Equations différentielles du mouvement**

I. Introduction..... 19

II. Hypothèse de base ..... 19

III. équation de mouvement..... 20

    III.1. équation de continuité..... 20

    III.2. Équation de quantité de mouvement..... 22

        III.2.1. Équation de quantité de mouvement sur l'axe des (z) : ..... 22

        III.2.2. Équation de quantité de mouvement sur l'axe des (x) : ..... 23

IV. Conclusion ..... 26

## **Chapitre 3 : Résolution numérique**

I.	Méthodes de résolution des EDP .....	28
I.1.	Introduction .....	28
I.2.	Les méthodes de résolution.....	28
I.2.1.	Méthodes analytiques.....	28
a)	Modèle mathématique .....	28
b)	La formulation .....	29
c)	Résolution.....	29
I.2.2.	Méthodes expérimentales .....	30
I.2.3.	Méthodes numériques.....	30
a)	La méthode des différences finies .....	31
b)	Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles.....	32
c)	La méthode des éléments finis .....	32
II.	Introduction à la méthode des différences finies .....	33
II.1.	Développement en série de Taylor.....	34
II.2.	Développement limité de Taylor .....	34
II.3.	La méthode des différences finies .....	35
II.3.1.	Principe.....	35
II.3.2.	Discrétisation numériques .....	36
II.3.3.	Expression des dérivées première .....	36
a)	Différences finies en avant.....	36
b)	Différences finies en arrière :.....	36
c)	Différences finies centrées :.....	37
d)	Expression des dérivées secondes .....	37
e)	Analyse de l'approximation.....	39
II.3.4.	Schémas aux différences finies (schéma explicite et schéma implicite) .....	40
a)	Schéma implicite .....	40
b)	Schéma explicite :.....	41

---

II.3.5.	Application du schéma de LAX aux équations de Saint Venant.....	43
a)	Forme non conservative :.....	43
b)	forme conservative : .....	44
c)	Conditions initiales et conditions aux limites :.....	45
▪	Conditions initiales .....	45
▪	Conditions aux limites .....	46
▪	Méthode des caractéristiques.....	47
d)	Condition de stabilité : Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).....	50
III.	Conclusion .....	51
 <b>Chapitre 4 : Application et validation du modèle numérique</b>		
I.	Base et données expérimentales de validation .....	52
I.1.	présentation de l'installation d'essai .....	52
I.2.	Liste des données expérimentales (Tableau des tests) .....	55
II.	Procédure et de calcul numérique .....	55
III.	Résultats et discussion .....	56
III.1.	Analyse stationnaire du ressaut.....	56
III.2.	Tests N°01, 03 et 04 respectivement pour $Fr= 7.0, 5.74$ et $4.23$ .....	61
III.3.	Tests N°06 pour $Fr= 2.30$ .....	61
III.4.	Analyse dynamique du ressaut hydraulique .....	61
IV.	conclusion.....	64
Conclusion générale et perspectives .....		65
Références bibliographiques.....		68

## LISTE DES FIGURES

<i>Figure 1.1 : Barrage de BURDEKIN en Australie, montrant un ressaut hydraulique prononcé induit par des obstructions en aval et un changement de gradient.....</i>	<i>4</i>
<i>Figure 1.2: Forme du ressaut classique selon la classification de Bradley et Peterka (1957). .</i>	<i>6</i>
<i>Figure 1.3: Ressauts hydrauliques classique .....</i>	<i>6</i>
<i>Figure 1.4: a) Rouleau développé, b) Rouleau non développé.....</i>	<i>8</i>
<i>Figure 1.5: ligne de charge totale le long du ressaut hydraulique.....</i>	<i>10</i>
<i>Figure 1.6: rendement du ressaut classique en fonction du nombre Froude. ....</i>	<i>12</i>
<i>Figure 2.1: Esquisse de définition pour la dérivation d'équations gouvernantes .....</i>	<i>21</i>
<i>Figure 3.1: Champ d'écoulement calculé dans la confluence de la rivière Kazibacha et de la rivière Solmari pendant la marée descendante (Courtoisie, Institut de modélisation de l'eau, Bangladesh).....</i>	<i>27</i>
<i>Figure 3.2: Maillage du domaine régulier.....</i>	<i>31</i>
<i>Figure 3.3: Maillage d'une digue de retenue d'eau .....</i>	<i>31</i>
<i>Figure 3.4: discrétisation par élément triangulaire d'un Oued est ces lits mineur et majeur. .</i>	<i>33</i>
<i>Figure 3.5: Approximations de différences finies .....</i>	<i>34</i>
<i>Figure 3.6: Molécules de calcul dans un schéma de différences finies. ....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 3.7: Notation pour les grilles de calcul.....</i>	<i>44</i>
<i>Figure 3.8: Notation pour le calcul des conditions initiales.....</i>	<i>46</i>
<i>Figure 3.9: Maillage du domaine et conditions aux limites .....</i>	<i>46</i>
<i>Figure 3.10: Notation pour les équations caractéristiques positives et négatives .....</i>	<i>49</i>
<i>Figure 4.1: Schéma du dispositif expérimental (Gharangik, 1988).....</i>	<i>53</i>
<i>Figure 4.2: Profil du ressaut stabilisé .....</i>	<i>57</i>
<i>Figure 4.3: Profil du ressaut stabilisé .....</i>	<i>58</i>
<i>Figure 4.4.: Profil du ressaut stabilisé .....</i>	<i>59</i>
<i>Figure 4.5: Profil du ressaut stabilisé .....</i>	<i>60</i>
<i>Figure 4.6: Profil du ressaut pour des différents temps .....</i>	<i>62</i>
<i>Figure 4.7: Profil du ressaut pour des différents temps .....</i>	<i>63</i>



## **LISTE DES TABLAUX**

*Tableau 4.1. Conditions Hydrodynamiques des tests* ..... 55

# Introduction générale

Une modification faite sur les conditions locales d'un écoulement à surface libre donne naissance à une discontinuité qui se propage le long du canal, c'est la manifestation d'une « onde de choc » communément connue sous le nom de « Ressaut hydraulique ». Ce phénomène à la fois complexe et merveilleux a depuis longtemps suscité l'intérêt et l'enthousiasme des chercheurs.

La maîtrise de la position (siège de l'onde) du ressaut et la détermination de ses diverses caractéristiques à travers différents ouvrages à l'exemple des évacuateurs de crues et les bassins de dissipation constitue à la fois un défi pour les ingénieurs et demeure une pièce maîtresse et indispensable pour le dimensionnement de ces derniers.

Basé sur deux lois de conservation : une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de la quantité de mouvement, tel est le modèle décrivant le mouvement non permanent d'un écoulement à surface libre. Mis en œuvre par *Barré de Saint Venant* (1871) il y a déjà 150 ans, il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), non linéaire de type hyperbolique dont une solution analytique s'avère pratiquement impossible. Viennent alors à la rescousse le développement de l'outil informatique et l'essor qu'ont connues les méthodes numériques, dont nous qualifions de « pullulement », pour le calcul et la prédiction du champ d'écoulement, charcuté par ces ondes de choc, est alors rendu possible.

C'est dans une telle optique que notre travail a été entrepris dans le but de proposer un modèle numérique simple basé sur l'une des méthodes les plus utilisées à savoir la méthode des différences finies avec un schéma explicite développé par *Peter Lax* (schéma diffusif de Lax) et confronter les résultats obtenus aux mesures expérimentales et à ceux obtenus pour

d'autres modèles numériques (basés sur d'autres schémas) objet des travaux antérieurs élaboré par d'autres chercheurs.

Dans le souci de bien mener ce travail et afin d'atteindre l'objectif escompté, le présent mémoire s'articule sur quatre chapitres, à savoir :

Chapitre premier : nous abordons dans un premier temps les généralités relatives au phénomène du ressaut hydraulique où des définitions et des explications relatives à ce dernier seront données. Aussi un état de l'art relatif aux travaux menés pour le calcul du ressaut notamment les modèles numériques proposés à ce sujet.

Chapitre deuxième : dans ce chapitre, nous essayons de tracer les principales étapes marquant l'établissement des équations gouvernant le mouvement d'un liquide dans un canal à ciel ouvert.

Chapitre troisième : un balayage sur les différentes méthodes numériques sera présenté dans ce chapitre. La méthode des différences finies sera par contre abordée plus en détail notamment les différents schémas à l'image du schéma de Lax objet de notre travail où une application aux équations de Saint Venant sera faite.

Chapitre quatrième : Ce chapitre dernier concernera la partie de la validation du modèle par la confrontation des résultats obtenus lors de l'élaboration de ce travail avec les résultats expérimentaux et ce du modèle numérique issus des travaux menés par Gharangik (1988). Les tests effectués permettront l'analyse du ressaut hydraulique sous ces deux aspects : dynamique et stationnaire.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale et perspectives envisageables dans le contexte du sujet traité.

# Chapitre 1

## Généralités sur le ressaut

Dans ce chapitre nous essayons d'abord de décrire le ressaut hydraulique dans son aspect physique tout en traçons les différentes étapes qui ont marqué les travaux entrepris sur ce dernier. En fin nous clôturons ce chapitre par le passage en revue des travaux relatifs aux calculs numériques du ressaut hydraulique entrepris jusqu'à présent.

### I. Introduction

Le ressaut hydraulique est l'un des phénomènes hydrauliques les plus complexes, il avait constitué depuis longtemps un centre d'intérêt où il a animé la curiosité de beaucoup de chercheurs, non seulement à cause de son importance dans la conception des bassins de dissipation et autre ouvrages hydrotechniques mais aussi à cause de sa complexité à la fois séduisante et fascinante. Bien que le débit demeure constant pour des écoulements stationnaires comportant un ressaut, l'écoulement à l'intérieur de celui-ci est fortement instationnaire. Subséquemment les effets de turbulences caractérisent ces écoulements et mènent à des mouvements spatiaux additivement au phénomène de l'entraînement d'air, associé à l'écoulement bi-phasique qui complique davantage la description du ressaut.

Le ressaut hydraulique est par définition une brusque surélévation de la surface libre d'un courant permanent occupant une position fixe dans le lit uniforme. Ce phénomène se produit lorsqu'un régime torrentiel (caractérisé par un nombre de *Froude*  $Fr > 1$ ) devient fluvial (caractérisé par un nombre de *Froude*  $Fr < 1$ ) sur une courte distance, il est accompagné d'une agitation plus au moins marquée et de grandes pertes d'énergie. Les surfaces libres se situent nécessairement de part et d'autre du niveau critique.

Le ressaut hydraulique est dit classique lorsqu'il se forme dans un canal de section droite rectangulaire de pente nulle ou faible. C'est le profil de référence qui a servi de base à l'étude du phénomène tant du point de vue théorique qu'expérimental.



*Figure 1.1 : Barrage de BURDEKIN en Australie, montrant un ressaut hydraulique prononcé induit par des obstructions en aval et un changement de gradient*

Les caractéristiques du ressaut sont essentiellement :

Les longueurs  $L_r^*$  et  $L_j^*$  qui désignent respectivement la longueur du rouleau et la longueur du ressaut.

Les hauteurs initiales  $h_1$  et finale  $h_2$ , appelées également hauteurs conjuguées.

La capacité de dissipation du ressaut est généralement évaluée par le rapport de la perte de charge qu'il occasionne entre ses sections initiale et finale à la charge totale dans sa section initiale.

L'écoulement torrentiel à l'amont du ressaut est caractérisé par un nombre de *Froude* ( $Fr > 1$ ) étroitement lié au débit volume, à la hauteur initiale  $h_1$  ainsi qu'à la forme géométrique du canal.

On s'accorde à dire que le ressaut hydraulique est régi par l'équation de la quantité de mouvement dont l'application a pour objectif de définir la relation liant le rapport  $y^* = \frac{h_2}{h_1}$  des hauteurs conjuguées et le nombre de *Froude*  $Fr_1$  incident.

Le ressaut hydraulique peut être contrôlé par un seuil à paroi mince ou épaisse, continu ou discontinu ainsi que par une marche positive ou négative. Tous ces obstacles ont pour fonction d'assurer la formation du ressaut par l'élévation du plan d'eau à l'aval, de contrôler sa position lors de changements des paramètres de l'écoulement tels que les débits et contribuer enfin à une meilleure capacité du bassin.

## II. Ressaut hydraulique classique

Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus le ressaut hydraulique classique se produit dans un canal rectangulaire de pente nulle ou faible, sa facilité la rend le profil le plus utilisé dans la pratique et dont plusieurs travaux notamment expérimentaux qui ont conduit à des résultats pertinents qui ont contribué davantage à une compréhension meilleure du phénomène.

### II.1. Type du ressaut classique

Selon la valeur du nombre de *Froude* amont,  $Fr$ , un ressaut peut correspondre à différents types d'écoulement. La figure 1.1, permet d'établir une classification selon l'allure générale de la surface libre, et ceci selon la nomenclature utilisée par le « U.S. bureau of réclamation ».

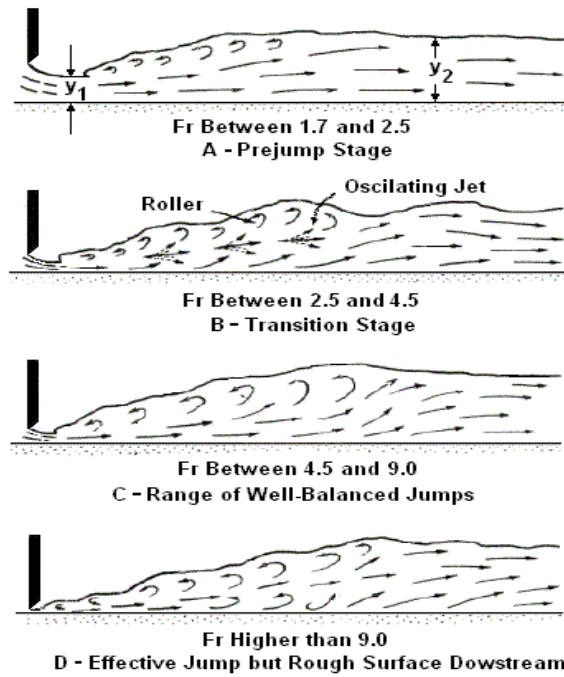


Figure 1.2: Forme du ressaut classique selon la classification de Bradly et Peterka (1957)

## II.2. Rapport des hauteurs conjuguées du ressaut

La figure 1.2 montre un ressaut classique évoluant entre ses sections initiale et finale 1 et 2 :

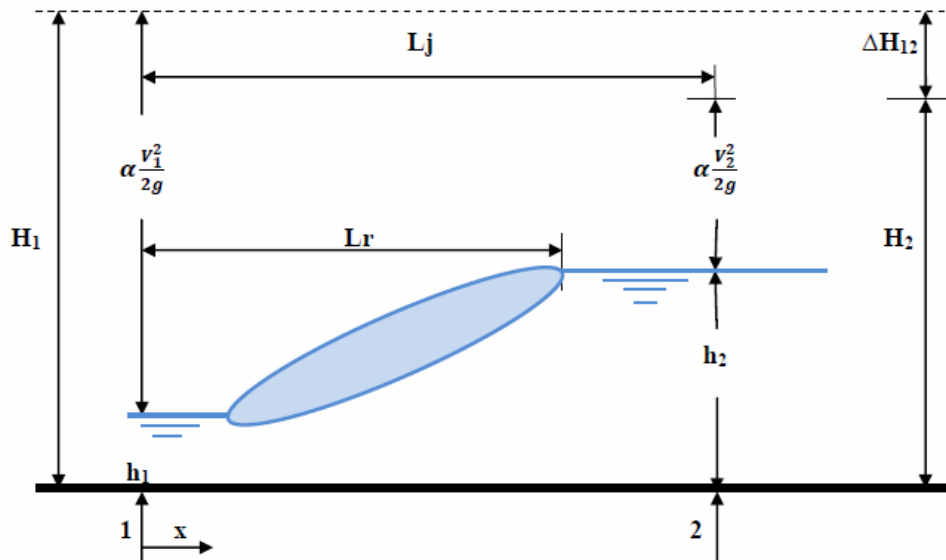


Figure 1.3: Ressaut hydraulique classique

L'écoulement à l'amont du ressaut (à l'origine) est caractérisé par une profondeur  $h_1$  et une vitesse  $V_1$ , l'équation de continuité permet d'écrire :

$$V_1 = \frac{Q}{A} \quad (1.1)$$

Q est le débit volume et  $A_1$  l'aire de la section mouillée initiale qui s'exprime par :

$$A_1 = bh \quad (1.2)$$

Avec

b : la largeur du canal rectangulaire.

Comme nous l'avons déjà signalé, les ressaut hydraulique est régi par l'équation de la quantité de mouvement appliquée entre ses sections initiale et finale, c'est en fait la seconde loi de *Newton* qui est appliquée, énonçant que la variation de la quantité de mouvement s'opérant entre les sections 1 et 2 est égale à la somme des forces extérieures agissant sur la masse liquide en mouvement. L'application de cette loi a nécessité quatre hypothèses simplificatrices :

1. La répartition de la pression dans la section finale et initiale est hydrostatique ;
2. La distribution des vitesses est uniforme ;
3. La perte de charge par frottement est négligeable ;
4. La résistance de l'air est négligeable.

Sachant que la quantité de mouvement est donnée par  $\rho QV$ , l'application de la loi de *Newton* mène à écrire :

$$\omega.b.\frac{h_1^2}{2} + \rho QV_1 = \omega.b.\frac{(h_2^*)^2}{2} + \rho QV_2^* \quad (1.3)$$

Ou  $\omega = \rho.g$ ,  $\rho$  : est la masse volumique et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

En tenant compte des relations (1.1) et (1.2) et sachant que le nombre de *Froude* caractérisant l'écoulement à l'amont du ressaut est tel que :

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g.b^2.h_1^3} \quad (1.4)$$

La relation (1.3) conduit à écrire :

$$y^* = \frac{h_2^*}{h_1} = 0,5[\sqrt{1+8Fr^2} - 1] \quad (1.5)$$



La relation (1.5) est connue sous le nom de l'équation de Bélanger et permet d'évaluer le rapport  $y^*$  des hauteurs conjuguées du ressaut en fonction du nombre de Froude  $Fr_2$ , Hager et Sinniger (1985) proposent une relation approchée applicable pour les nombres de Froude  $Fr_2 > 2$ :

$$y^* = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{2} \cdot Fr_1 - \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

### II.3. Longueurs caractéristiques du ressaut

Deux longueurs caractérisent le ressaut hydraulique, il s'agit de la longueur  $L_r$  de son rouleau ainsi que la longueur  $L_j$  sur laquelle il s'étend. Ces caractéristiques n'ont pu être mises en valeur que par la voie de l'expérimentation.

### II.4. Longueur du rouleau

En 1990 Hager et al. (1990) définissent en fait deux longueurs de rouleau suivant le type de ressaut étudié et introduisent ainsi la notion de la longueur du rouleau développée et non développée. La figure 1.3 illustre ces deux type de longueur  $L_r$  qui leur correspondent.

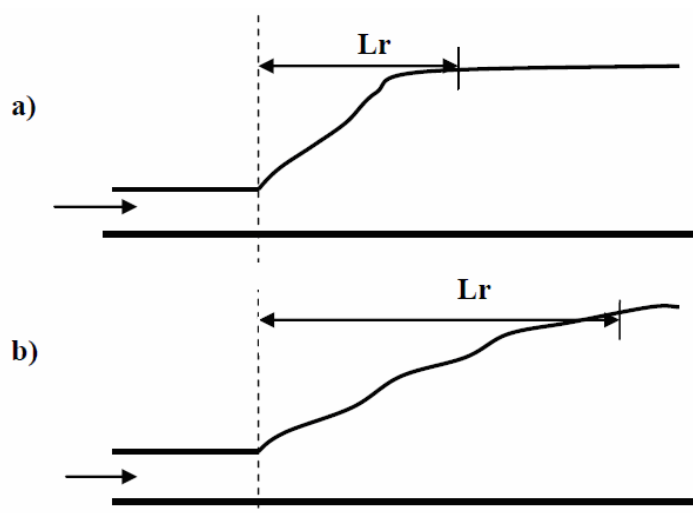


Figure 1.4: a) Rouleau non développé, b) Rouleau développé

La longueur du rouleau non développée est caractérisée par une longueur plus courte que celle du rouleau développée et sa surface à l'aval se présente sous l'aspect de

vagues au fond de la masse liquide en mouvement. On peut distinguer une zone de rouleau dite de séparation formant un tourbillon de fond. En raison de la présence de cette zone, le jet entrant dans la section initiale du ressaut est dévié vers la surface libre. Le rouleau développé présente une surface relativement lisse et il est caractérisé par une quasi-stabilité. Le jet entrant dans la section initiale du ressaut adhère sur une certaine distance au fond du canal puis diverge en s'orientant vers l'aval. Les essais effectués par *Hager et al. (1990)* montrent que, pour le cas du ressaut classique, le rapport  $\lambda_r^* = \frac{L_r}{h_1}$  dépend du nombre de Froude  $Fr_1$  et du rapport d'aspect  $w = \frac{h_1}{b}$ , les auteurs proposent les relations suivantes :

$$\lambda_r^* = -12 + 160Tgh\left(\frac{Fr_1}{20}\right) \text{ Pour } w = \frac{h_1}{b} < 0,1 \quad (1.7)$$

$$\lambda_r^* = -12 + 100Tgh\left(\frac{Fr_1}{12,5}\right) \text{ Pour } 0,1 < w < 0,7 \quad (1.8)$$

**Nb : « Tgh » désigne la tangente hyperbolique.**

## II.5. Longueur du ressaut

La seconde caractéristique du ressaut est la longueur  $L_j^*$  sur laquelle il s'étend. Comme la longueur du rouleau,  $L_j$  n'a pas pu être quantifiée que par voie de l'expérimentation et sa définition varie d'un auteur à un autre. En effet, on estime que la longueur  $L_j^*$  doit être mesurée toujours par la section à l'aval du ressaut où :

1. La surface libre est pratiquement horizontale
2. La surface de turbulence du rouleau est faible
3. Les grosses bulles d'air dues à la présence du rouleau de surface sont inexistantes.

Toutes les définitions ont pour but d'indiquer la limite aval du ressaut au-delà de laquelle la protection ou le rendement du bassin amortisseur n'est pas nécessaire.

Les essais de *Bradley et Peterka (Debabeche, 2003)* ont permis à *Hager et al. (1990)* de déterminer une relation permettant d'évaluer la longueur  $L_j^*$  du ressaut. Celle-ci, rapportée à la hauteur initiale  $h_1$  du ressaut, peut s'écrire :

$$\frac{L_j^*}{h_1} = 220.Tgh \left[ \frac{(Fr_1 - 1)}{22} \right] \quad (1.9)$$

D'après *Hager et al. (1990)*, la variation de la longueur relative  $\frac{L_j^*}{h_2}$  en fonction du nombre de Froude  $Fr_1$  indique que ce dernier rapport prend une valeur moyenne de 6 pour la gamme pratique  $4 < Fr < 12$ . Ce résultat est encore admis de nos jours.

$$\frac{L_j^*}{h_2} = 6 \quad (1.10)$$

## II.6. Rendement du ressaut

La figure 1.4 montre la ligne de charge totale le long de la longueur  $L_j^*$  sur laquelle s'étend le ressaut classique.

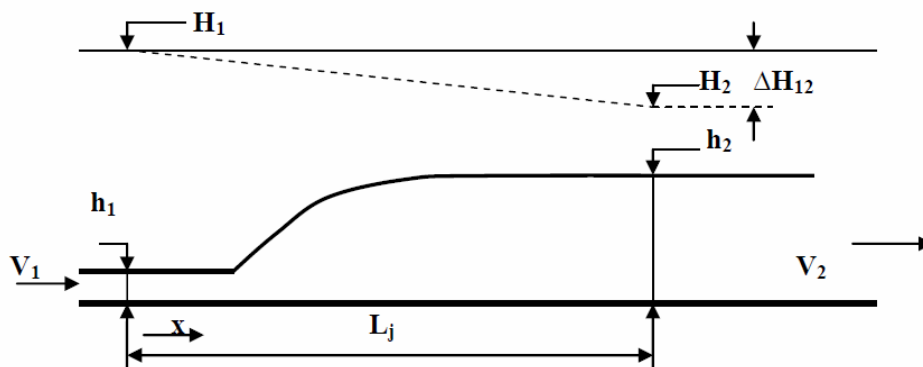


Figure 1.5: (.....) ligne de charge totale le long du ressaut hydraulique

En se référant au plan 0-0, la charge totale dans la section initiale du ressaut s'écrit :

$$H_1 = h_1 + \alpha_1 \cdot \frac{V_1^2}{2g} \quad (1.11)$$

Tandis que la charge dans la section finale est :

$$H_2 = h_2 + \alpha_2 \cdot \frac{V_2^2}{2g} \quad (1.12)$$

$\alpha$ , Désigne le facteur de correction de l'énergie cinétique dont on admet que la valeur est égale à l'unité.

La perte de charge  $\Delta H^*$  due au ressaut est la différence des charges totales initiale et finale :

$$\Delta H^* = H_1 - H_2^* \quad (1.13)$$

En raison du caractère permanent de l'écoulement, l'équation de continuité reste en vigueur et l'on peut écrire :

$$Q = V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 \quad (1.14)$$

Où

$$A_1 = h_1 \cdot b \text{ Et } A_2 = h_2 \cdot b \quad (1.15)$$

En tenant compte des relations (1.12), (1.13), (1.15) la relation (1.13) s'écrit :

$$\Delta H^* = (h_1 - h_2^*) + \left[ (h_1^{-2} - h_2^{*-2}) \left( \frac{q}{2g} \right) \right] \quad (1.16)$$

$q = Q/b$  est le débit unitaire dont l'expression peut être déduite de l'équation de la quantité de mouvement définie par (1.3) :

$$\frac{q^2}{2g} = \frac{(h_1 \cdot h_2^{*2} + h_1^2 \cdot h_2)}{4} \quad (1.17)$$

Ainsi, l'équation (1.16) s'écrit sous sa forme définitive :

$$\Delta H^* = \frac{(h_2^* - h_1)^3}{4 \cdot h_2^* \cdot h_1} \quad (1.18)$$

La relation (1.18) exprime la perte de charge due au ressaut classique en fonction des hauteurs conjuguées de celui-ci.

On exprime souvent la capacité de dissipation du ressaut par le rapport  $\eta^* = \frac{\Delta H}{H_1}$ , qui représente en fait son rendement. En tenant compte de la relation (1.4), les charges totales initiale et finale du ressaut peuvent s'écrire respectivement :

$$H_1 = h_1 \left[ 1 + \frac{Fr_1^2}{2} \right] \quad (1.19)$$

$$H_2^* = h_1 \left[ Y^* + \frac{Fr_1^2}{2Y^{*2}} \right] \quad (1.20)$$

Où  $Y^*$  est le rapport des hauteurs conjuguées du ressaut classique défini par l'équation (1.5) de *Belanger*. Ainsi, le rendement  $\eta^*$  s'écrit :

$$\eta^* = \frac{\Delta H^*}{H_1} = \frac{H_1 - H_2^*}{H_1}$$

$$\eta^* = 1 - \frac{\left[ Y^* + \frac{Fr_1^2}{2Y^{*2}} \right]}{\left( 1 + \frac{Fr_1^2}{2} \right)} \quad (1.21)$$

Bien que la relation (1.21) permet le calcul explicite du rendement  $\eta^*$ , *Hager* et *Schleiss* (2009) proposent une expression approchée, applicable pour  $Fr_1 > 2$  :

$$\eta^* = \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{Fr_1} \right]^2 \quad (1.22)$$

Les relations (1.21) et (1.22) sont représentées graphiquement dans le système d'axes de coordonnées cartésiennes de la figure (1.5).

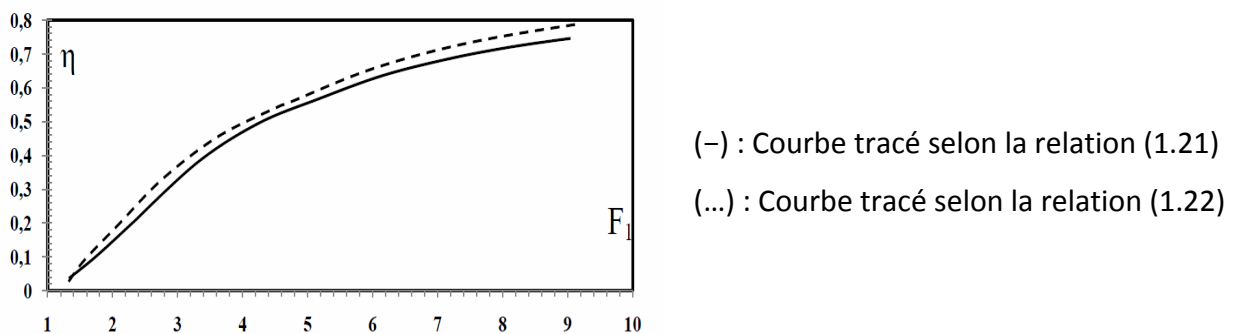


Figure 1.6: rendement du ressaut classique en fonction du nombre Froude (*Hager* et *Schleiss*, 2009).

La figure (1.5) montre d'une part que le rendement  $\eta^*$  du ressaut classique est supérieur à 50% pour  $Fr_1 \geq 5.1$  et que les rendements calculés en application de la relation approchée (1.21) est légèrement supérieurs à ceux obtenus par la relation exacte (1.22) d'autre part ; l'écart maximum observé peut atteindre les 2%.

### III. Etat de l'art

Nous tracerons dans cette partie l'évolution qu'ont connue les travaux menés pour ce qui concerne le calcul du ressaut hydraulique par voie des méthodes numériques et nous essayons de mettre en exergue les principales phases qui ont marqué ces travaux de recherche.

Une grande partie des études antérieures relatives au ressaut hydraulique étaient expérimentales ou analytique traitant des cas simples. Cependant le développement qu'ont connu les ordinateurs avait comme conséquence d'orienter les recherches vers l'emploi des modèles numériques pour simuler le ressaut hydraulique.

Il est notable qu'il est plus commode d'utiliser les modèles numériques que les modèles physiques. D'une part car ces derniers (modèles numériques) s'avère plus économiques de plus, l'usage des modèles physiques de petite taille pour la conception des bassins de dissipation peut ne pas reproduire les effets de la viscosité, de l'entraînement de l'air et de certains autres paramètres importants.

Un modèle mathématique adéquat d'un ressaut hydraulique combiné avec des données expérimentales obtenues avec un modèle physique devrait améliorer davantage les prévisions du cas réel (prototype).

*Abott* (1969) et *Katopodes* (1984) ont employé des équations dans l'eau peu profonde appelée communément les équations de *Sain Venant*, pour décrire l'écoulement à surface libre stationnaire dans leurs modèles.

*McCorquodale* (1983) a développé un modèle mathématique pour prévoir les caractéristiques internes d'écoulement du ressaut hydraulique. Ce modèle mathématique est une version modifiée du travail présenté par *Narayanan* (1975) pour calculer l'écoulement interne d'un ressaut hydraulique. *Katopodes* (1984) a utilisé le même principe mais il a appliqué la méthode des éléments finis pour simuler le ressaut hydraulique.

Il utilise la résolution de l'équation bidimensionnelle d'état stationnaire par une méthode d'intégral par tranche horizontale appelé en anglais *Strip integral method* et en abrégé (*SIM*) pour calculer la longueur du ressaut, la distribution de vitesse, le profil de la ligne d'eau ainsi

que les pressions au fond du canal. Les résultats calculés ont bien été comparés aux données expérimentales.

Les principales hypothèses relatives à la dérivation de l'équation en eau peu profonde (équation de *Saint Venant*) sont la répartition de la pression hydrostatique et la distribution uniforme de la vitesse sur toute section transversale. Cependant, un ressaut hydraulique est associé à un gradient relativement important de vitesse et de profil de surface libre et l'hypothèse de distribution de pression hydrostatique suivant la verticale n'est plus valide (*Basco, 1983*). Par conséquent, il est nécessaire d'appliquer les équations d'écoulement à surface libre rapidement varié pour décrire la nature physique du ressaut et des méthodes numériques doivent être utilisées pour résoudre avec précision les équations qui régissent le phénomène.

Après l'apport significatif de *Saint-Venant* (1871) à l'étude des écoulements instationnaire dans les canaux à ciel ouvert, *Boussinesq* (1872) étend son travail en prenant en compte les courbures en surface libre et dans le fond du canal et de la distribution des vitesses (*Lai, 1986*). La théorie qui incorpore les effets de l'accélération verticale résultant de la courbure de la ligne en approximation à l'équation de quantité de mouvement horizontal est appelée : théorie *Boussinesq* (*Basco, 1987*).

Le système d'équations décrivant des écoulements rapidement variés a été développé par différents auteurs pour différentes situations principalement basées sur une distribution de pression non hydrostatique (*McCowan 1985, Basco 1983, Basco 1987*). Ces équations utilisent la théorie de *Boussinesq* pour des lignes de courant. Cependant, *Basco* (1983) et *McCowan* (1985) proposent de nombreuses formes d'équations de type *Boussinesq* au modélisateur numérique où chaque forme se distingue de l'autre par différentes hypothèses simplificatrices et diverses procédures d'intégration utilisées dans leur dérivation (*McCowan, 1985*).

Les équations de type *Boussinesq* sont un ensemble d'équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires et les solutions analytiques ne sont disponibles que pour des cas simples. Ce n'est que lorsque les ordinateurs à grande vitesse ont été disponibles que les méthodes numériques sont devenues populaires, car le nombre requis de calculs pour résoudre un problème est très important.

(Abbott, 1979, Lai, 1986) étaient les premiers chercheurs qui ont utilisé la méthode des caractéristiques pour résoudre les équations de *Saint venant*. Cependant, elle ne convient pas aux écoulements avec un gradient important de vitesse et de profil de surface libre car elles nécessitent un traitement spécial du front d'onde en tant que condition limite interne. Lax (1954) et Lax et Wendroff (1960) ont mis au point une technique de différences finies permettant l'analyse des écoulements à front raide sans les isoler. Cette technique est capable de capturer les chocs et simplifie grandement la simulation des écoulements avec de grands gradients de surface. Plusieurs techniques de capture de choc du second ordre ont depuis été développées et appliquées à l'analyse des trains d'onde et les mascarets dans les canaux à ciel ouvert (Abbott, 1979, Fennema et Chaudry, 1986, Lai, 1986).

La technique des différences finies explicite est devenue populaire en raison de sa simplicité. La taille du pas de temps dans cette technique est limitée par la condition de stabilité de Courant (règle CFL) afin d'obtenir une solution stable (Courant et al. , 1928). D'un autre côté, la technique des différences finies implicites est inconditionnellement stable. Le temps de calcul peut être sélectionné indépendamment de la discrétisation spatiale. Cependant, des recherches récentes montrent que la taille du pas de temps dans les méthodes implicites doit être presque égale à celle des méthodes explicites pour la précision, surtout si un choc est formé (Fennema et Chaudry, 1986).

Un certain nombre de schémas dissipatifs précis de second ordre ont été utilisés pour simuler un ressaut hydraulique. A l'exemple du schéma de Lax-Wendroff (1960) à deux niveaux et le schéma de dissipation de phase (Abbott, 1969). Les schémas du premier et du second ordre donnent d'assez bons résultats lorsqu'ils sont utilisés pour résoudre les équations d'écoulement graduellement varié (Berreksi et al. 2008; Berreksi, 2012). Cependant, les équations d'écoulement rapidement varié ont des termes de troisième ordre et, comme l'a noté Abbott (1979), un effort considérable doit être déployé pour réduire les erreurs de troncature générées par l'application de différences finies si des erreurs inacceptables doivent être évitées. Par conséquent, des méthodes précises de troisième ordre ou d'ordre supérieur doivent être employées dans la résolution numérique des équations d'écoulement rapidement varié.



Le schéma de *MacCormack*, présenté par *MacCormack* en 1969, est un schéma explicite de la méthode des différences finies de deuxième ordre de précision, dans l'espace et dans le temps. *Gottlieb* et *Turkel* (1976) ont mis au point une méthode dissipative deux-quatre permettant d'étendre le schéma de *MacCormack* pour obtenir des résultats précis dans l'espace et de second ordre dans le temps. Comme pour toutes les méthodes d'ordre supérieur avec des erreurs dispersives, le schéma de *MacCormack* produit des oscillations à haute fréquence près du choc. Pour amortir cette oscillation, une viscosité artificielle est employée (*Jameson*, 1981). En utilisant cette technique, il est possible de simuler avec précision le ressaut hydraulique dans les écoulements à canal ouvert.

*Gharangik* (1988) pour simuler un ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire à développer un modèle numérique dans lequel les équations à une dimension avec des conditions aux limites appropriées d'un écoulement rapidement varié (équation de *Boussinesq*) ont été résolues, jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Les équations bidimensionnelles de la continuité et de la quantité de mouvement dans les directions horizontales et verticales ont été moyennées sur la profondeur pour obtenir des équations d'écoulement à une dimension. La pente de frottement a été déterminée en supposant que les pertes de charge dans des conditions d'écoulement instationnaire peuvent être calculées en utilisant une équation de perte de charge en régime permanent (équation de *Manning*).

Le schéma de *MacCormack* a été utilisé pour la résolution des équations citées ci-dessus. Ce schéma a été modifié pour obtenir une précision d'ordre quatre dans l'espace et d'ordre deux dans le temps. Pour ce faire, la méthode dissipative deux-quatre a été utilisée pour résoudre avec précision les équations sur la profondeur. Comme pour la plupart des méthodes d'ordre supérieur, le système *MacCormack* a produit une oscillation à haute fréquence près du ressaut hydraulique. Pour amortir ces oscillations, une viscosité artificielle a été introduite dans la solution.

*Sakarya* et *Tokyay* (2000) ont étudié la simulation numérique d'un ressaut hydraulique de type A se produisant à une transition positive brusque, ce qui est un exemple d'un écoulement torrentiel-fluvial combiné avec une discontinuité dans le lit du canal, est donnée en utilisant une approche par intégrale. Un écoulement fluvial graduellement varié dans un canal prismatique rectangulaire et horizontal avec une élévation abrupte du fond est considéré comme condition initiale. Puis, la profondeur de l'écoulement en amont est

réduite à une valeur produisant un écoulement torrentiel et demeure ainsi durant les calculs. L'écoulement non permanent résultant est déterminé par l'utilisation du schéma de *MacCormack* et du schéma dissipatif deux-quatre pour les équations de *Saint-Venant* dans le cas non permanent et unidimensionnel. Dans la simulation numérique, la transition brusque est traitée comme une frontière interne. En aval et aux frontières internes, la méthode des caractéristiques est employée afin d'évaluer les paramètres significatifs. La simulation numérique est vérifiée en comparant les résultats avec les données et méthodes analytiques disponibles.

La formation d'un ressaut hydraulique dans un bassin de tranquillisation à l'aval d'un déversoir, avec un nombre de *Froude*  $Fr = 6$ , et qui se développe en amont de l'écoulement, a été étudiée par *Carvalho et al. (2008)* en utilisant un modèle physique et un modèle numérique. Le modèle numérique est basé sur les équations 2D de *Navier–Stokes* en moyenne de *Reynolds*; la surface libre est représentée en utilisant un algorithme de raffinement en volumes finis (VOF), les obstacles internes sont décrits au moyen de la méthode de représentation d'obstacle par surface ou volume partiels (FAVOR), et la dynamique de turbulence est prise en compte par un modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  développé spécialement. Les dispositifs additionnels du code, qui sont essentiels pour son application pratique, comprennent: un contrôle automatique du pas de temps, des schémas d'ordre élevé pour la convection et une variété de conditions aux limites pour les variables dépendantes sur la surface libre et le long des obstacles internes. Avec ce modèle, les caractéristiques du ressaut hydraulique ont été analysées en deux étapes. D'abord la turbulence n'est pas prise en compte. Puis l'évolution des solutions numériques a été contrôlée en calculant l'évolution en temps des variables dépendantes en plusieurs points ou sections. Les valeurs calculées de vitesse et de pression ont été comparées aux mesures de laboratoire et aux formules disponibles dans la littérature. L'accord entre les résultats numériques et les mesures de laboratoire était satisfaisant.

Une simulation numérique des ressauts de type B dans les canaux rectangulaires horizontaux ayant une chute abrupte a fait l'objet d'un travail de collaboration de *Tokyay et al. (2007)*. Un écoulement graduel constant et supercritique est supposé comme condition initiale. Un flux instable est créé en augmentant la profondeur en aval. Les équations de *Saint-Venant* unidimensionnelles et instationnaire sont résolues à l'aide de la méthode des

différences finies en utilisant le schéma de *MacCormack* et du schéma dissipatif deux-quatre. La solution à écoulement constant est obtenue en traitant la variable de temps comme un paramètre d'itération et en laissant la solution converger vers l'état stationnaire. La chute abrupte est traitée comme une limite intérieure et résolue par la méthode des caractéristiques. Les résultats sont comparés avec des études expérimentales et analytiques.

## Chapitre 2

# Equations différentielles du mouvement

Dans ce chapitre nous allons essayer de tracer les principales étapes marquant l'établissement des équations qui gouvernent le mouvement d'un liquide dans un canal à ciel ouvert, bien connues sous le nom des « équations en eau peu profonde ou de Saint-Venant »

### I. Introduction

La circulation des fluides et en particulier des liquides s'effectue soit au moyen des canaux ou des conduites organisés selon des réseaux plus ou moins complexes. C'est le cas des circuits naturels : réseaux hydrographiques, système sanguin et réseaux capillaires, c'est aussi le cas des systèmes ou circuits faits par l'homme : réseaux de distribution de fluide, canaux à ciel ouvert irrigation, ...etc.

Les écoulements des fluides sont décrits par des équations très complexes considérées dans leurs formulations générales.

Quant aux écoulements à surface libre ces derniers peuvent être permanents, non permanents, supercritiques, critiques ou subcritiques et ils sont gouvernés par les équations dites de *Saint Venant*. Ces équations sont obtenues en appliquant les deux principes de la dynamique des fluides à savoir le principe de continuité et le principe de variation de la quantité de mouvement, aussi elles peuvent s'établir par l'intégration des équations tridimensionnelles de *Navier-Stokes* sur l'axe des  $z$  (la profondeur).

## II. Hypothèse de base

Il est à noter que l'obtention des équations de *Saint-Venant* n'est possible que sous un nombre d'hypothèses simplificatrices lesquelles nous citons ci-après :

- La pente  $\theta$ , du fond du canal est petite de sorte que  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx 0$  et  $\cos \theta \approx 1$ .
- La répartition de la pression est hydrostatique dans une section et ceci n'est possible que si l'accélération verticale est faible, autrement dit si la variation de la surface de l'eau avec la distance est graduelle.
- Les pertes par frottement à l'état transitoire peuvent être calculées en utilisant les formules pour le calcul des pertes par frottement en état stationnaire.
- La distribution des vitesses dans une section du canal est uniforme.
- Le canal est rectiligne et prismatique.

## III. équation de mouvement

### III.1. équation de continuité

L'équation de continuité dans un écoulement peut être écrite comme suit (Basco, 1983) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.01)$$

Dans laquelle :

$u$  : Vitesse d'écoulement dans la direction  $x$

$w$  : Vitesse d'écoulement dans la direction  $z$

Nous moyennons en profondeur l'équation (2.01) en la multipliant par  $dz$  et en l'intégrant suivant la profondeur du fond du lit du canal ( $z=0$ ) à la surface libre ( $z=h$ ) (selon la figure II.1) :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2.02)$$

En appliquant la règle de *Leibnitz* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \left( u \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} - \left( u \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_{z=h} + w \Big|_{z=h} - w \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.03)$$

Faisons référence aux quantités pour le fond ( $z = 0$ ) et pour la surface de l'eau ( $z = h$ ) par les indices  $b$  et  $s$  respectivement, l'équation (2.03) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + w_s - w_b = 0 \quad (2.04)$$

La vitesse d'écoulement à la surface libre  $w_s$  peut s'écrire comme suit :

$$w_s = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.05)$$

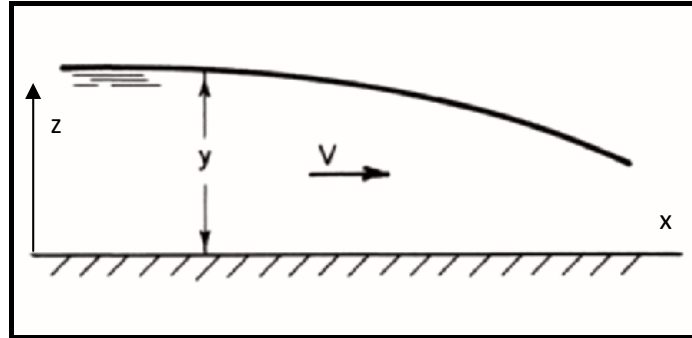


Figure 2.1: Schéma de définition pour la dérivation d'équations gouvernantes

Ayant la variation de  $z$  le long du fond du canal (un canal horizontal),  $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$ . De plus ce dernier est supposé rigide, donc :  $w_b = 0$

Revenant à l'équation (2.04) et remplaçant  $w_s$  par son expression on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (2.06)$$

C'est l'équation de continuité unidimensionnelle.

L'équation (2.06) peut s'écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.07)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.08)$$

Il découle de l'équation (2.01) :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.09)$$

Puisque la vitesse  $u$  est supposée constante à travers la profondeur d'écoulement, nous

pouvons intégrer l'équation (2.09) comme suit :  $w = -\frac{\partial u}{\partial x} z$

Ou :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{w}{z} \quad (2.10)$$

De l'équation (2.08) et (2.10) nous pour ont écrire que :

$$w = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) z \quad (2.11)$$

### III.2. Équation de quantité de mouvement

#### III.2.1. Équation de quantité de mouvement sur l'axe des (z) :

L'équation de quantité de mouvement sur la direction des (z) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2.12)$$

En multipliant l'équation (2.12) par z et en réarrangeant les termes nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (zw) + \frac{\partial}{\partial x} (uwz) - w \frac{\partial}{\partial x} (uz) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2 z) - w \frac{\partial}{\partial z} (wz) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (pz) - \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (2.13)$$

Cette équation peut se réduire à :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} (wz) + \frac{\partial}{\partial x} (uwz) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2 z) + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (pz) - wz \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - w^2 \quad (2.14)$$

De l'équation de continuité, équation (2.1), la somme des termes entre parenthèses est nulle de ce fait l'équation (2.14) devient :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} (wz) + \frac{\partial}{\partial x} (uwz) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2 z) + gz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (pz) - w^2 \quad (2.15)$$

L'intégration de cette équation sur la profondeur d'écoulement,  $h$  nous obtenons :

$$\int_0^h \frac{p}{\rho} dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} (wz) dz + \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (uwz) dz + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (w^2 z) dz + \int_0^h gz dz + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (pz) dz - \int_0^h w dz^2 \quad (2.16)$$

En appliquant la règle de *Leibnitz*, cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (wz) dz - (wz)_s \frac{\partial h}{\partial t} + (wz)_b \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (uwz) dz - (uwz)_s \frac{\partial h}{\partial x} + (uwz)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ &+ (w^2 z)_s - (w^2 z)_b + \frac{1}{2} gh^2 - \int_0^h w^2 dz + \frac{1}{\rho} [(pz)_s - (pz)_b] \end{aligned} \quad (2.17)$$

- En surface libre les conditions suivantes s'appliquent :

1.  $(wz)_s \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} - w_s \right] = 0$

2. comme la pression à la surface libre est atmosphérique,  $(pz)_s = 0$ .

- De la même façon au fond du canal les conditions suivantes s'appliquent :

1. puisque  $w = 0$  au fond du canal,  $(wz)_b = 0$ .

2. au fond du canal l'entité  $(pz)_b = 0$ .

Sur la base de ces conditions l'équation (2.17) peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^h \frac{p}{\rho} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h uz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h uwz dz + \frac{1}{2} gh^2 - \int_0^h w^2 dz \quad (2.18)$$

### III.2.2. Équation de quantité de mouvement sur l'axe des (x) :

L'équation de quantité de mouvement sur l'axe des (x) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

En réarrangeant les termes, l'équation (2.19) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (uw) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

En multipliant l'équation (2.20) par  $dz$ , en intégrant cette dernière de 0 à  $h$  et en se référant aux conditions au fond du canal et en surface libre on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = 0 \quad (2.21)$$

L'application de la règle de Leibnitz à l'équation (2.21) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \frac{p}{\rho} dz - \left( \frac{p}{\rho} \right)_s \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{p}{\rho} \right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

Comme discuté dans les paragraphes précédents,  $(p_s) = 0$  and  $\frac{\partial z_b}{\partial x} = 0$  en substituant ces relations et l'équation (2.18) dans l'équation (2.22) et en réorganisant les termes de l'équation résultante, on aboutit à :



$$\frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h wzdz + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h uwzdz - \int_0^h w^2 dz\right) = 0 \quad (2.23)$$

Simplifions les termes du dernier terme de l'équation (2.23). En utilisant l'équation (2.10) et en substituant la valeur de  $w$  à partir de l'équation (2.10) nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h wzdz = \frac{\partial}{\partial t}\int -\frac{\partial u}{\partial x}z^2 dz \quad (2.24)$$

Aussi, en simplifiant on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h wzdz = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{h^3}{3}\right) \quad (2.25)$$

De manière similaire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h wzdz = \frac{\partial}{\partial x}\int -u\frac{\partial u}{\partial x}z^2 dz \quad (2.26)$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h uwzdz = \frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{h^3}{3}\right) \quad (2.27)$$

Et

$$\int_0^h w^2 dz = \int_0^h z^2\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dz \quad (2.28)$$

Ou :

$$\int_0^h w^2 dz = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{h^3}{3} \quad (2.29)$$

Maintenant, revenons à équation (2.23), isolant le dernier terme et appelons-le Y, alors :

$$Y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h wzdz + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h uwzdz - \int_0^h w^2 dz\right) \quad (2.30)$$

En substituant les équations (2.25) à (2.29) à la place des termes de l'équation (2.30), nous obtenons :

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{h^3}{3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{h^3}{3} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{h^3}{3} \right] \quad (2.31)$$

En développant les termes de l'équation on obtient :

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{3} 3h^2 \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h^3}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{h^3}{3} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{3} 3h^2 \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.32)$$

Ou :

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} \left[ h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.33)$$

En utilisant l'équation (2.8), on aura

$$Y = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left( -h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.34)$$

Et en réarrangeant ça nous donne :

$$Y = -\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

Si nous remplaçant l'équation (2.35) dans l'équation originale (2.23) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad (2.36)$$

Par conséquent, l'équation de la quantité de mouvement suivant la direction (x) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right] = 0 \quad (2.37)$$

Le terme  $\left[ \frac{h^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right]$  de l'équation (2.37) est appelé terme de *Boussinesq*.

Son apparition est causée en considérant le terme de deuxième ordre de la distribution de pression le long de la profondeur de l'eau à ondes d'amplitude finie.

Il est clair d'après les équations (2.6) et (2.37) que si on omet le terme de *Boussinesq* de ces équations nous retrouvons les équations unidimensionnelles d'écoulement instationnaire dite équation de *Saint-Venant*:

Continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right] = 0 \quad (2.39)$$

Plusieurs travaux ont montré que pour l'étude du ressaut hydraulique les modèles avec ou sans les termes de *Boussinesq* donnent des résultats similaires (*Gharangik et Chaudhry, 1991*).

#### IV. Conclusion

Les équations dites de *Saint-Venant* peuvent se présenter suivant les problèmes à résoudre sous deux formes : forme conservative et forme non conservative. En raison de leurs caractères hyperboliques elles admettent des solutions discontinues, qu'on nomme ressaut.

Bientôt âgées de 150 ans, les équations de *Saint-Venant* n'ont pas pris « une ride ». Elles sont utilisées pour modéliser et analyser nombre de phénomènes liés à l'océanographie côtière ou aux écoulements à faible profondeur, comme les inondations et les ondes de crue, les ruptures de barrage, les ondes de marée et les ressauts.

Les équations de *Saint-Venant* reposent sur deux principes de conservation : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement étant donné que notre travail consiste en l'analyse du ressaut hydraulique qui est caractérisé par une perte d'énergie nous baptisons tous nos calculs le long de l'élaboration du présent travail sur les équations de *Saint-Venant* sous sa forme conservative.

Suite à la complexité des équations hyperboliques d'où une solution analytique s'avère hors de portée, le recours à une méthode numérique fera l'objet des prochains chapitres et constitue le but de notre modeste recherche.

# Chapitre 3

## Résolution numérique

Dans le présent chapitre et dans un premier temps nous aborderons les différentes méthodes de résolution numériques des équations aux dérivées partielles, notamment la méthode des différences finies. La deuxième partie fera l'objet d'une introduction détaillée à la méthode des différences finies ainsi que son application aux équations de *Barré de Saint-Venant* objet de notre recherche.

### I. Méthodes de résolution des EDP

#### I.1. Introduction

Le chercheur est confronté lors de son analyse des problèmes physique à résoudre des équations différentielles qui régissent le phénomène étudié et plus souvent il s'agit des équations à différences partielles (EDP) notamment en hydraulique.

Les principaux types de problèmes analysés sont les problèmes elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Les méthodes de résolution utilisées sont :

- Les méthodes analytiques.
- Les méthodes expérimentales.
- Les méthodes numériques.

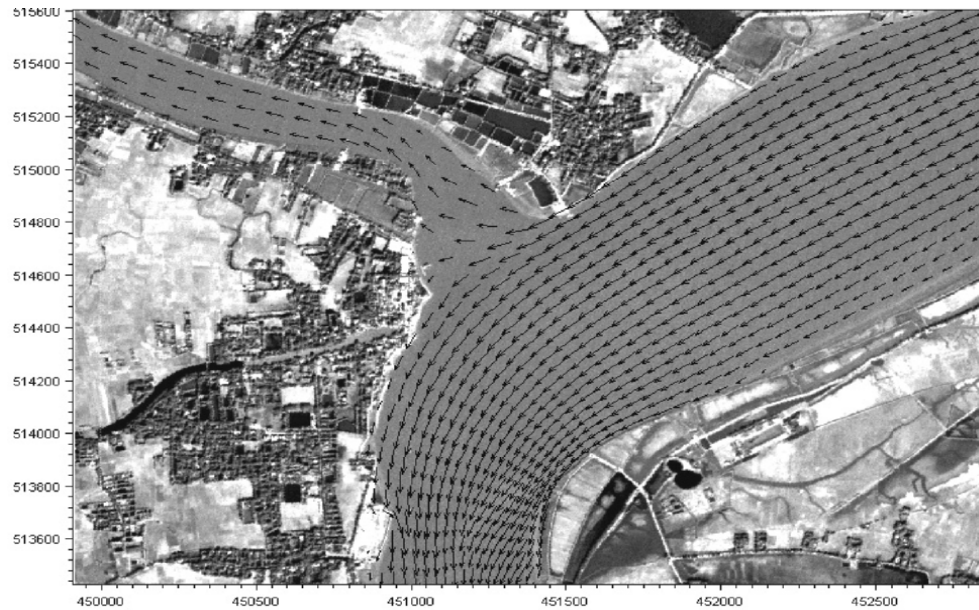


Figure 3.1: Champ d'écoulement calculé dans la confluence de la rivière Kazibacha et de la rivière Solmari pendant la marée descendante (Chaudhy, 2008)

## I.2. Les méthodes de résolution

### I.2.1. Méthodes analytiques

Le problème étant défini par un modèle mathématique choisi, la méthode analytique consiste à rechercher la solution exacte du problème en résolvant les équations qui régissent le modèle.

#### a) Modèle mathématique

Un modèle mathématique est la mise en équation d'un phénomène dans le but de représenter fidèlement le comportement réel du phénomène. Des relations reliant les variables d'entrées aux variables de sorties sont établies. Le modèle est construit selon le but à atteindre.

Le succès du modèle dépend de sa facilité d'utilisation et de la précision des résultats prédits par le modèle. Le modèle mathématique n'est pas spécifique aux sciences de l'engineering seulement mais se retrouve dans d'autres domaines comme les sciences naturelles, les sciences sociales, les sciences économiques, ..etc.

### b) La formulation

Le modèle mathématique est formulé par des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites qui garantissent l'unicité de la solution, donc le fonctionnement du système physique.

Forme générale des équations du second ordre à deux variables indépendantes (x et y) de la physique mathématique est la suivante :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi = G(x, y) \quad (3.01)$$

Où  $\phi = \phi(x, y)$  est la fonction recherchée dépendante de x et de y, c'est la fonction qui donne le comportement du modèle. A, B, C, D, E et F sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles. Ils sont fonction de x et de y et peuvent être des constantes.

L'équation (3.01) peut s'écrire sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \quad (3.02)$$

Selon le signe de  $B^2 - 4AC$  on admet le classement suivant :

- 1-  $B^2 - 4AC < 0$  l'équation est dite elliptique à l'exemple de l'équation de Laplace.
- 2-  $B^2 - 4AC > 0$  l'équation est dite parabolique à l'exemple de l'équation de la conduction instationnaire de la chaleur.
- 3-  $B^2 - 4AC = 0$  l'équation est dite hyperbolique à l'exemple de l'équation des ondes ou l'équation de vibration transversale.

### c) Résolution

Les équations aux dérivées partielles peuvent être résolues par de nombreuses méthodes. **La méthode de la solution générale** et **la méthode de séparation des variables** sont les plus couramment utilisées.

La première méthode consiste d'abord à déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles puis de la particulariser afin d'obtenir la solution du problème en utilisant les conditions aux limites. La seconde méthode consiste, par contre, à rechercher d'abord des

solutions particulières, puis de les utiliser à la recherche de la solution du problème. Cette deuxième méthode trouve un champ d'application bien plus vaste que la première.

### **1.2.2. Méthodes expérimentales**

La méthode expérimentale est définie comme une activité pratique de recherche par des techniques de mesures de paramètres entrant globalement dans la résolution d'un problème donné. C'est un autre moyen mis à la disposition de l'ingénieur pour valider un résultat analytique ou mécanique.

L'expérimentation est le seul moyen précis d'évaluer les différentes hypothèses qui ont été émises, elle servira à aller chercher des données, c'est-à-dire des informations qui serviront à confirmer ou à infirmer une hypothèse. Les résultats obtenus sont surtout confrontés aux résultats analytiques (quand ceux-ci existent) car ces résultats sont objectifs et résistent bien à la subjectivité. La méthode expérimentale pour être fiable, doit tenir compte d'un certain nombre de critères ou normes scientifiques et qui sont les suivantes :

- objectif à atteindre (émission d'hypothèse, formulation)
- procédure d'analyse expérimentale et matériel expérimental
- résultats (appelés données)
- interprétation des résultats et validation.

On utilise dans certaines disciplines pour désigner la méthode expérimentale la désignation, OPHERIC (Observation, Problème, Hypothèse, Expérience, Résultats, Interprétation, Conclusion), couramment utilisé dans la conduite d'activités expérimentales.

### **1.2.3. Méthodes numériques**

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes que rencontre les ingénieurs. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- La méthode des différences finies.
- Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles (qui ont donné naissance à la méthode des éléments finis).
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des caractéristiques.

### a) La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation locale des dérivées apparaissant dans les équations différentielles. En se basant sur le développement limité de *Taylor*, les fonctions dérivées sont approchées par plusieurs types de schémas aux différences finies: différences finies en avant, en arrière et centrées. La précision du résultat varie d'un schéma à un autre selon la troncature utilisée. La méthode utilise un maillage, ou grille du domaine d'intégration.

L'équation discrétisée, selon les schémas cités plus haut, est projetée aux points du maillage. On obtient alors un système d'équations dont la résolution permet de trouver la solution approchée du problème. La méthode peut résoudre aussi bien des problèmes à domaines réguliers (Figure III.1) qu'irrégulier (Figure III.2).

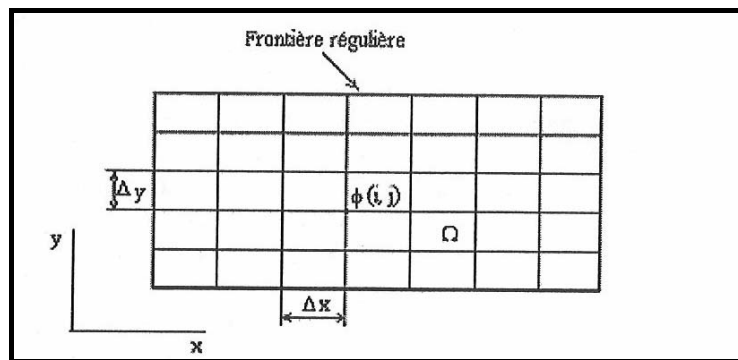


Figure 3.2: Maillage du domaine régulier

Pour un domaine irrégulier, les pas  $\Delta x$  et  $\Delta y$  deviennent respectivement  $\alpha\Delta x$  et  $\beta\Delta y$  aux points voisins des frontières, ou  $\alpha$  et  $\beta$  étant des coefficients de correction du pas, connus,

Inférieurs à 1.

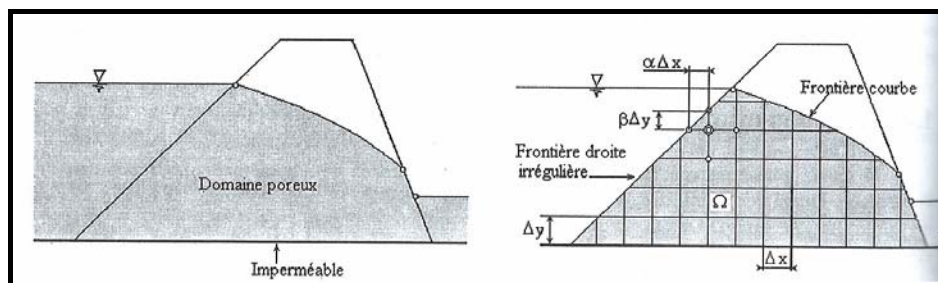


Figure 3.3: Maillage d'une digue de retenue d'eau



### **b) Les méthodes d'approximation intégrales et variationnelles**

Les méthodes d'approximation peuvent se classer en deux catégories principales : Les méthodes de résidus pondérés, ou méthodes intégrales et les méthodes variationnelles ou méthodes à extremum.

Le principe général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction sur le domaine d'intégration de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

La solution est écrite sous forme d'une série polynomiale ou trigonométrique à termes finis. Des paramètres généralisés sont introduits et des fonctions de base sont alors construites. Le principe de la méthode consiste à rechercher les paramètres qui donnent la meilleure approximation construite à l'aide de fonctions de base.

Les méthodes des résidus pondérés utilisent des fonctions test de manière à minimiser l'erreur ou le résidu de l'équation différentielle. Différentes méthodes de résidus pondérés sont obtenues selon la valeur de la fonction test. La méthode de collocation par sous domaine, la méthode la méthode des moindres carrés et la méthode de *Galerkin*.

Dans d'autre cas, les lois physiques peuvent s'exprimer sous une forme variationnelles c'est-à-dire sous la forme de conditions d'extremum d'une fonctionnelle comme c'est le cas l'énergie totale par exemple en mécanique des structures. La méthode adaptée à ce type de problème est la méthode de *Ritz*, qui aboutit plus tard à la méthode des éléments finis en mécanique des structures.

### **c) La méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation elle réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales : respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction d'approximation et sa formulation.

La méthode des éléments finis améliore ces deux principes comme suit :

- a) Le domaine d'intégration n'est plus discrétisé par des points comme pour le cas de la méthode des différences finies, mais par des sous domaines continus ou des "continuum", dont le nombre est fini, et qu'on appelle éléments finis (Fig. 3.4). En utilisant ce découpage, (modélisation géométrique), la méthode fournit un modèle qui représente aussi fidèlement que possible le phénomène physique dans sa réalité.

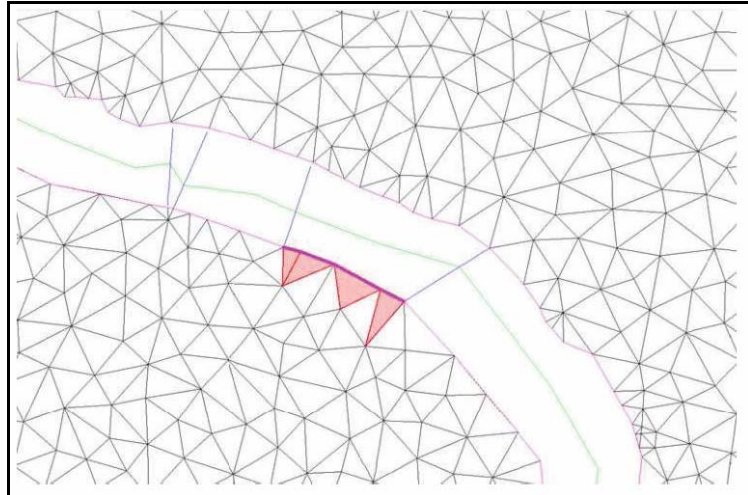


Figure 3.4: discrétisation par élément triangulaire d'un Oued et de ses lits mineur et majeur

- b) La formulation intégrale, de type Galerkin, est appliquée non pas sur le domaine d'intégration global, mais sur des éléments finis standard, ayant des fonctions de formes normées, au lieu des fonctions de base de la méthode de Galerkin. La formulation devient unifiée pour les différents types de problèmes. Une bibliographie d'éléments est alors mise à jour.

La méthode devient alors programmable par excellence. Possédant tous ces atouts, la méthode ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à des domaines qui étaient jusque-là du seul ressort des méthodes expérimentales.

## II. Introduction à la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une méthode numérique de résolution des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Sa formulation est basée sur l'approximation locale au voisinage d'un point donné des fonctions dérivées apparaissant dans les équations différentielles (Fig 3.5). Les fonctions dérivées sont approchées par des fonctions polynomiales données par le développement en série de *Taylor*.

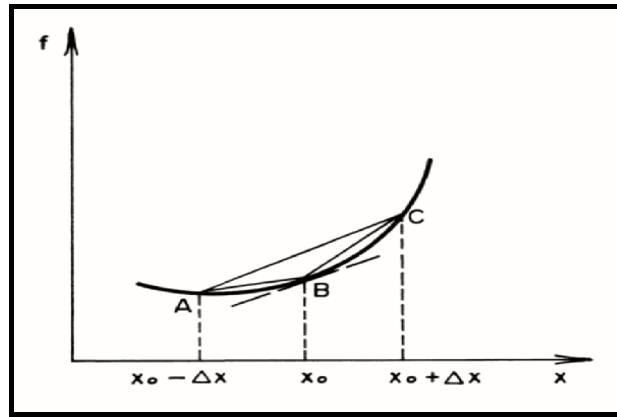


Figure 3.5: Approximations de différences finies

Le développement de *Taylor* représente le noyau de la méthode des différences finies, nous avons jugé judicieux d'apporter quelques détails concernant ce dernier dans le présent chapitre.

### II.1. Développement en série de Taylor

On montre que si une fonction  $f(x)$  est analytique, indéfiniment dérivable au voisinage du point  $x = x_0$  (c'est à dire dans un intervalle ouvert contenant le point  $x = x_0$ ,  $0 < |x - x_0| < R$ ), alors cette fonction peut être approchée par une fonction polynomiale écrite sous la forme de série convergente qu'on appelle série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \dots \quad (3.03)$$

le second membre de l'équation (3.03) est le développement en série de la fonction  $f$  au voisinage du point  $x = x_0$ . L'équation (3.03) peut s'écrire encore :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x) \quad (3.04)$$

### II.2. Développement limité de Taylor

En fait, dans l'équation (3.04). On ne peut tenir compte que d'un nombre fini de termes: On effectue une troncature de la série. On a donc un développement à termes finis c'est le développement limité de Taylor (appelée aussi formule de Taylor) de la fonction  $f$  autour du point  $x = x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n \quad (3.05)$$

Le dernier terme de l'équation (3.05) est appelé reste ou erreur de troncation, est donné par la formule de Lagrange :

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)} f^{n+1}(\xi), \quad (3.06)$$

Avec  $x - x_0 < \xi < x + x_0$

Cette erreur est de premier ordre de grandeur de  $(x - x_0)^{n+1}$  et elle est notée par  $o(x - x_0)^{n+1}$ .

Puisque la fonction est infiniment dérivable,  $f^{n+1}(\xi)$  existe et est bornée. La série converge

puisque la  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)} = 0$ . Ecrite sous la forme (3.06) la formule de Taylor est utilisée pour

approcher les fonctions par des fonctions polynomiales.

En posant  $h = \Delta x = x - x_0$  la formule de Taylor (3.06) devient:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h}{2!} f''(x_0) + \frac{h}{n!} f^n(x_0) + o(h^{n+1}) \quad (3.07)$$

On peut interpréter graphiquement l'erreur de troncation. Par exemple, si on tient compte uniquement du terme contenant la dérivée première, l'équation (3.07) s'écrit :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \pm \text{erreur} \quad (3.08)$$

Le signe  $\pm$  est introduit pour tenir compte de l'allure (concave ou convexe) de la courbe donnée par  $f(x)$ .

### II.3. Description de la méthode (différences finies)

#### II.3.1. Principe

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine en remplaçant l'opérateur différentielle par un opérateur aux différences finies.

### II.3.2. Discrétisation numérique

Comme nous l'avons déjà mentionné il s'agit de remplacer les opérateurs différentiels (les dérivées premières, secondes et autres) par des différences finies établies à partir du développement de série de *Taylor* qu'on appelle schémas puis on résout le système d'équation algébrique ainsi obtenu en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites. Il existe plusieurs schémas, nous les aborderons un plus en détail dans cette deuxième partie.

### II.3.3. Expression des dérivées premières

#### a) Différences finies en avant

La fonction  $f$  est connue aux points  $x_i$  (points pivot) du domaine d'analyse à l'aide de la formule de Taylor (3.07) on développe la fonction  $f$  jusqu'à l'ordre 2.

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi) \quad (3.09)$$

$\xi$  Abscisse d'un point se trouvant au voisinage de  $x_i$  avec  $x_i < \xi < x_i + h$ .

En résolvant l'équation (3.09) pour  $f'(x_i)$ , on a :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + o(h) \quad (3.10)$$

L'erreur est de l'ordre de grandeur du pas  $h$  (de l'ordre du degré le plus petit du pas  $h$ ).

La formule de la dérivée première s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h) \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) représente l'expression de la dérivée première de la fonction  $f$  écrite par un schéma de différences finies en avant ou différences progressives.

#### b) Différences finies en arrière :

En remplaçant  $h$  par  $-h$  dans l'équation (3.09) on obtient :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi), \quad x_i - h < \xi < x_i \quad (3.12)$$

En résolvant l'équation (3.09) pour  $f'(x_i)$ , on a :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x-h_i)}{h} + o(h) \quad (3.13)$$

L'ordre de grandeur est le même de celui obtenu pour le schéma des différences en avant.

L'équation (3.13) s'écrit sous indicielle :

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(h) \quad (3.14)$$

### c) Différences finies centrées :

L'élimination de  $f(x_i)$  des équations

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \quad (3.15)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \quad (3.16)$$

Nous permet de trouver la dérivée première par un schéma de différences centres

$$f' \left( x_i = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + o(h^2) \right) \quad (3.17)$$

$$o(h^2) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) \quad , \quad x_i - h < \xi < x_i + h \quad (3.18)$$

Qui s'écrit en notation indicielle

$$f_i^{(1)} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2) \quad (3.19)$$

L'erreur est de l'ordre de  $h^2$ . La dérivée première centrée est plus précise que dans le cas de différences en avant ou en arrière.

### d) Expression des dérivées secondes

#### ▪ Différences finies en avant

On écrit le développement de  $f(x_i + h)$  et  $f(x_i - h)$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi) \quad (3.20)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) + \frac{8}{3!} h^3 f^{(3)}(\xi) \quad (3.21)$$

Eliminant  $f(x_i)$  entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{h^2} + o(h) \quad (3.22)$$

$$o(h) = -hf^{(3)}(\xi) \quad (3.23)$$

$\xi$  Point au voisinage de  $x_i$ , on prend le voisinage qui contient les autres  $x_i < \xi < x_i + 2h$ .

On a, en notation indicielle :

$$f^{(2)} = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + o(h) \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) représente l'expression de la dérivée seconde écrite par un schéma de différences finies en avant ou progressives.

#### ▪ Différences finies en arrière

On considère le développement de  $f(x_i - h)$  et  $f(x_i - 2h)$  :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi) \quad (3.25)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2 f''(x_i) - \frac{4}{3} h^3 f^{(3)}(\xi) \quad (3.26)$$

Eliminant  $f(x_i)$  entre les deux équations, on obtient le schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + o(h) \quad (3.27)$$

$$o(h) = hf^{(3)}(\xi), \quad x_i - 2h < \xi < x_i \quad (3.28)$$

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + o(h) \quad (3.29)$$

Qui est un schéma de différences finies en arrières de la dérivée seconde.

- **Différences finies centrées**

On considère le développement de  $f(x_i + h)$  et  $f(x_i - h)$  :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \quad (3.30)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi) \quad (3.31)$$

Idem comme pour les schémas précédent en élimant  $f(x_i)$ , on a :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + o(h^2) \quad (3.32)$$

$$o(h^2) = -\frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi), \quad x_i - h < \xi < x_i + h \quad (3.32)$$

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + o(h^2) \quad (3.33)$$

Qui est un schéma de différences finies centrées de la dérivée seconde.

**e) Analyse de l'approximation**

- **Erreur de troncature**

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de *Taylor* de la fonction  $f$ .

L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'un pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

- **La consistance d'un schéma aux différences finies**

Nous n'aurons de chance d'obtenir la convergence du schéma que si nous approchons correctement le problème continu, c'est-à-dire si nous remplaçons les dérivées partielles par des différences finies effectivement.



La « qualité » de cette consistance s'appelle la précision du schéma.

A rappeler que plusieurs schémas ont été proposés par les chercheurs dont nous présenterons les plus utilisés dans ce qui suit.

- **La stabilité :**

Un schéma numérique est dit stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

- **La convergence :**

Un schéma est dit convergent quand la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue.

Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

#### **II.3.4. Schémas aux différences finies (schéma explicite et schéma implicite)**

Un schéma est explicite (Fig 3.6 a), si chaque valeur approchée de la solution au temps  $t + \Delta t$  et au point  $x$  donné, est décrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps  $t$  en ce même point. Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées et s'obtient directement pour tous les points du maillage (*Anderson et al., 1984*).

Un schéma est implicite (Fig 3.6 b), si la valeur approchée en un point  $x$  au temps  $t + \Delta t$ , est écrite en fonction de la solution précédente au temps  $t$ , et les valeurs voisines au temps  $t + \Delta t$ . Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps  $t + \Delta t$ , qui se résout globalement.

##### **a) Schéma implicite**

Dans un schéma implicite, les dérivées spatiales sont remplacées par les approximations de différences finies. Selon les approximations de ces dernières et l'évaluation des coefficients des équations directrices, plusieurs schémas (Cunge et Wegner, 1964; Vasiliev et al., 1965 et Chaudhry, 2008) ont été rapportés dans la littérature. Parmi ces schémas, nous citons le schéma de *Preissmann* qui a été largement utilisé pour l'analyse des écoulements instationnaires à surface libre et est présenté ici :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{(V_i^{k+1} + V_{i+1}^{k+1}) - (V_i^k + V_{i+1}^k)}{2\Delta t} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha[V_{i+1}^{k+1} - V_i^{k+1}]}{\Delta x} + \frac{(1-\alpha)[V_{i+1}^k - V_i^k]}{\Delta x} \quad (3.35)$$

$$V(x,t) = \frac{(V_{i+1}^{k+1} + V_i^{k+1})}{2} + (1-\alpha) \frac{(V_{i+1}^k + V_i^k)}{2} \quad (3.36)$$

Où  $\alpha$  est un coefficient de pondération,  $0.5 < \alpha < 1$ .

**b) Schéma explicite :**

Plusieurs méthodes explicites de différences finies ont été utilisées pour l'analyse des écoulements instationnaire à surface libre. Nous présentons les détails de l'une de ces méthodes et celle qu'on utilisera pour l'élaboration de notre modeste travail, appelée schéma de diffusion de Lax (Abbott, 1979). Le schéma de Lax est très simple à programmer et donne des résultats satisfaisants. En outre, un alésage ne doit pas être isolé dans les calculs. Cependant, la principale insuffisance ou limite du schéma est que de courts intervalles de temps peuvent être nécessaires pour la stabilité et que les fronts d'ondes raides peuvent être diffusés.

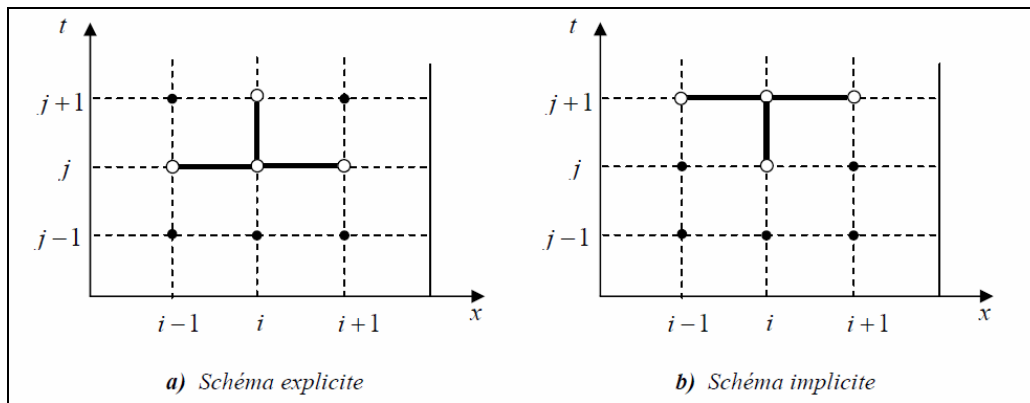


Figure 3.6: Molécules de calcul dans un schéma de différences finies.

Dans ce schéma, les dérivées partielles et les coefficients  $D$  et  $S_f$  des équations régissant le ressaut hydraulique sont approximés comme suit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{k+1} - h_i^*}{\Delta t} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_i^{k+1} - V_i^*}{\Delta t} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (3.40)$$

Dans lequel

$$h_i^* = \frac{1}{2}(h_{i-1}^k + h_{i+1}^k) \quad (3.41)$$

$$V_i^* = \frac{1}{2}(V_{i-1}^k + V_{i+1}^k) \quad (3.42)$$

$$D_i^* = \frac{1}{2}(D_{i-1}^k + D_{i+1}^k) \quad (3.43)$$

$$S_f^* = \frac{1}{2}(S_{f_{i-1}}^k + S_{f_{i+1}}^k) \quad (3.44)$$

Une comparaison entre les deux schémas nécessite au préalable une étude des différents schémas. Selon la comparaison faite par certains chercheurs, on retient les avantages et les inconvénients suivants (*Chaudhry, 2008*):

- La méthode explicite exige une condition de stabilité sur le pas de temps tandis que la méthode implicite ne nécessite aucune.
- La souplesse de programmation offerte par la méthode explicite est beaucoup meilleure que celle offerte par la méthode implicite, surtout lorsque le temps de programmation est limité.
- L'économie de calcul est beaucoup plus importante pour un schéma implicite car il n'y a aucune restriction sur le pas de temps.
- Etant donné que le pas de temps dépend de chaque itération, les valeurs de cette dernière paraissent souvent très petites de sorte que les précisions sur les calculs sont meilleures.
- La méthode explicite est très conseillée dans le cas de problèmes de discontinuité. Dans ce qui suit, on s'intéressera plus particulièrement à la méthode de Lax, qui nous servira à résoudre les équations de *Saint Venant*.

### II.3.5. Application du schéma de LAX aux équations de Saint-Venant

#### a) Forme non conservative :

Soient les deux équations de Saint Venant pour les canaux prismatiques :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + D \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.45)$$

Ou :  $D = \frac{A}{B}$ ,  $A$  : étant la section et  $B$  la largeur du canal.

Equation dynamique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (3.46)$$

En remplaçant les dérivées partielles des équations (3.45) et (3.46) par leurs expressions de différences finies et les coefficients  $D$  et  $S_f$  (les équations 3.37 à 3.44) et par simplification nous obtenons :

$$h_i^{k+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^k + h_{i+1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} D_i^*(V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^*(h_{i+1}^k - h_{i-1}^k) \quad (3.47)$$

$$V_i^{k+1} = \frac{1}{2}(V_{i-1}^k + V_{i+1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} g(h_{i+1}^k - h_{i-1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} V_i^*(V_{i+1}^k - V_{i-1}^k) + g\Delta t(S_0 - S_f^*) \quad (3.48)$$

Il est clair (Fig 3.7) que les coordonnées des points  $(i, k+1)$ ,  $(i, k)$ ,  $(i-1, k)$  et  $(i+1, k)$  sont respectivement :  $(x_0, t_0 + \Delta t)$ ,  $(x_0, t_0)$ ,  $(x_0 - \Delta x, t_0)$  et  $(x_0 + \Delta x, t_0)$ . En étalant un peu plus le développement en série de *Taylor* les termes des équations (3.37) à (3.42) et on les comparant aux équations (3.45) et (3.46) on peut facilement montrer que des termes supplémentaires apparaissent à l'exemple des terme :  $\frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  et  $\frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  qui sont des termes diffusifs d'où le nom du schéma (schéma de diffusion de *Lax*).

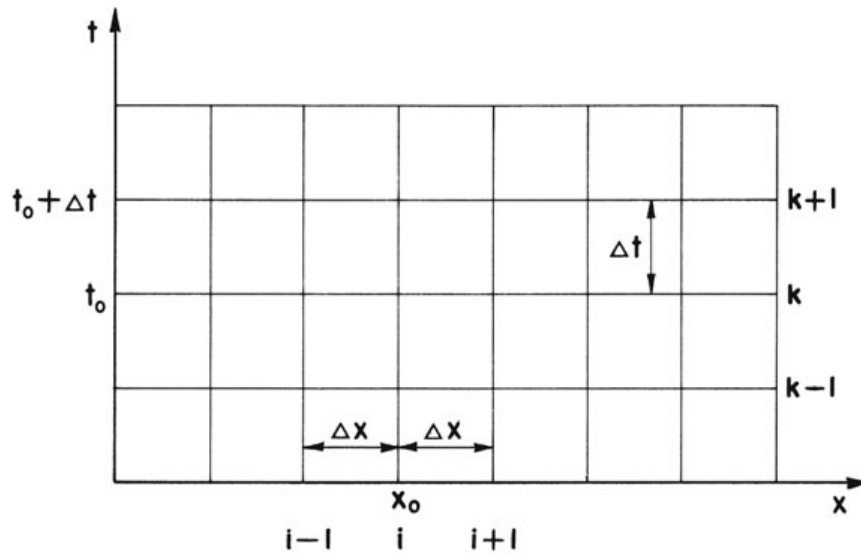


Figure 3.7: Notation pour les grilles de calcul

**b) forme conservative :**

La forme conservative des équations de *Saint Venant* régissant le phénomène du ressaut hydraulique peuvent s'écrire comme suit :

$$U_t + F_x + S = 0 \quad (3.49)$$

Dans le quel :

$$U = \begin{pmatrix} A \\ VA \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} VA \\ V^2 + gA\bar{h} \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Et  $\bar{A}h$  : moment statique de la section d'écoulement sur la surface libre. Ce moment peut être calculer à partir de :

$$\int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(\eta) d\eta \quad (3.51)$$

Dans laquelle  $\sigma$  et la largeur de la surface de l'eau à une profondeur  $\eta$ . Le remplacement des approximations de différences finies des équations (3.37)-(3.44) dans l'équation (3.49) donne :

$$U_i^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^k + U_{i-1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^k - F_{i-1}^k) - S^* \Delta t \quad (3.52)$$

Une fois que les valeurs de  $A$  et  $V.A$  ont été déterminées au temps  $(k+1)$  nous déterminons les variables d'intérêt,  $h$  et  $V$  puis on passe au prochain pas de temps.

Cette méthode est utilisée à l'intérieur de la grille de calcul, cependant elle ne peut pas être utilisée aux limites.

A cet effet, d'autres procédures et méthodes ont été proposées pour résorber cette contrainte dont nous présenterons l'une des méthodes les plus utilisées dans ce contexte notamment la méthode des caractéristiques.

### c) Conditions initiales et conditions aux limites :

Les équations aux différences finies présentées précédemment sont utilisées aux points de la grille intérieure. En commençant les calculs, nous spécifions les conditions initiales et nous incluons les conditions aux limites pour simuler les limites du canal et l'entrée et les conditions d'écoulement aux extrémités du canal. Une bonne inclusion des conditions aux limites est très importante pour une application réussie de toute technique numérique, en particulier pour les systèmes hyperboliques, dans lequel une erreur introduite aux limites est propagée et reflétée tout au long de la grille. Ces erreurs peuvent provoquer une instabilité dans de nombreux cas (*Anderson, et al. 1984*).

#### ▪ Conditions initiales

On suppose que la profondeur et la vitesse de l'écoulement supercritique à la première section (Fig 3.8) sont connues pour calculer la profondeur de l'écoulement initiale ( $h$ ) et la vitesse ( $u$ ) à tous les nœuds de calcul du système. Les conditions initiales sont déterminées en résolvant l'équation d'énergie décrivant l'écoulement graduellement varié dans les canaux ouverts.

L'écoulement permanent graduellement varié dans les canaux ouverts est décrit par l'équation suivante (*Chaudhry, 2008*) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{u^2}{gh}} \quad (3.53)$$

Cette équation est intégrée pour trouver la profondeur d'écoulement le long du canal. Pour ce faire, la méthode d'Euler est utilisée comme suit :

Soit connue la profondeur de l'écoulement  $h_i$  en  $(x = x_i)$  (Fig 3.8), alors la profondeur de l'écoulement en  $(x = x_{i+1})$  est :

$$h_{i+1} = h_i + \Delta x \frac{S_0 - S_{f_i}}{1 - \frac{u_i^2}{gh_i}} \quad (3.54)$$

Par l'utilisation répétée de l'équation. (3.52), le profil d'écoulement le long du canal est calculé par pas de longueur  $\Delta x$  .

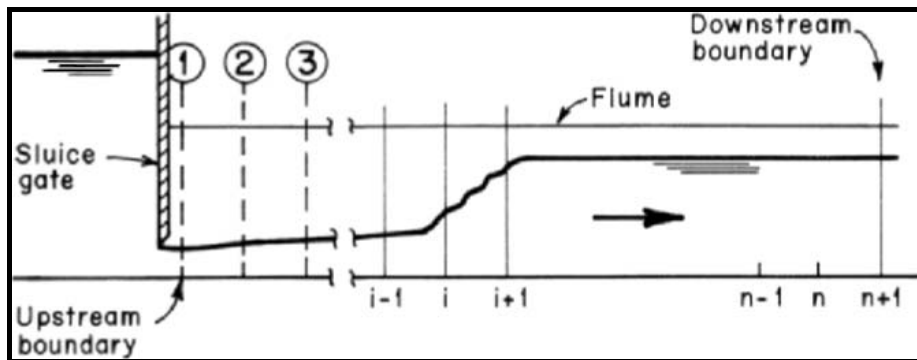


Figure 3.8: Notation pour le calcul des conditions initiales

▪ **Conditions aux limites**

Les différents schémas aux différences finies présentés dans le paragraphe IV4 ont été décrits pour déterminer les conditions aux nœuds de calcul intérieurs.

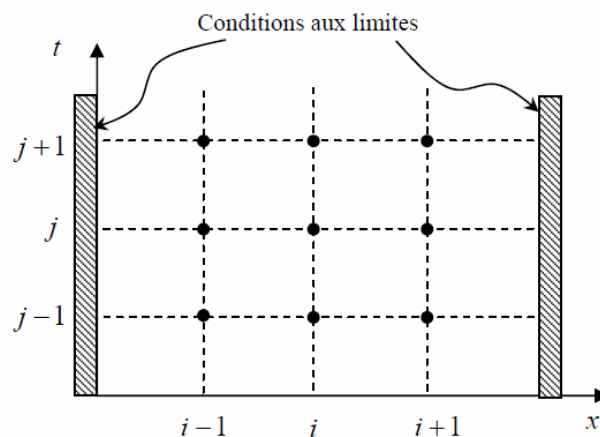


Figure 3.9: Maillage du domaine et conditions aux limites

Aux limites, un traitement différent est requis, comme indiqué dans les paragraphes suivants :

À la limite amont, la profondeur d'écoulement ( $h$ ) et la vitesse ( $u$ ) sont requises et restent inchangées par rapport aux conditions initiales pendant les calculs. À la limite aval, une profondeur d'écoulement constante est spécifiée et la vitesse d'écoulement est calculée en ayant recours à la méthode des caractéristiques (à partir de l'équation caractéristique positive). Une différence finie avant est utilisée dans la forme caractéristique des équations (2.36) et (2.37) comme suit :

La célérité d'une onde de gravité dans un écoulement à surface libre dans un canal rectangulaire à largeur unitaire est donnée par l'expression :

$$c = \sqrt{gh} \quad (3.55)$$

Où  $c$  est la célérité de l'onde. Ensuite, en utilisant l'équation caractéristique positive (nous présenterons en bref cette méthode dans les paragraphes qui suivent et pour plus de détails, voir Chaudhry, 1987) :

$$u_{i+1}^{k+1} = g\Delta t(S_0 - S_f) - \left(\frac{g}{c}\right)_i^k (h_{i+1}^{k+1} - h_i^k) + u_i^k \quad (3.56)$$

La vitesse,  $u_{i+1}^{k+1}$  au temps inconnu  $k + 1$ , est ainsi déterminée. La précision globale du schéma n'est pas altérée si l'ordre de précision des conditions aux limites est inférieur de un à celui des nœuds intérieurs (Chaudhry, 2008).

#### ▪ Méthode des caractéristiques

Dans cette méthode, les équations de *Saint-Venant* sont d'abord converties en équations caractéristiques, qui sont ensuite résolues le long de la courbe caractéristique. La méthode est inadaptée aux systèmes ayant de nombreux changements géométriques, et elle échoue en raison de la convergence de la courbe caractéristique chaque fois qu'un choc se forme. Bien que très populaire dans les années 1960, cette méthode a été remplacée par les méthodes de différences finies.

Cependant, pour certaines méthodes de différences finies, les équations caractéristiques sont utilisées pour développer les conditions aux limites comme il a été indiqué précédemment.

En multipliant l'équation (3.45) par un multiplicateur inconnu  $\lambda$  et en l'ajoutant à l'équation (3.46), nous obtenons :



$$\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (V + \lambda D) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \lambda \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \left( V + \frac{g}{\lambda} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = g(S_0 - S_f) \quad (3.57)$$

Maintenant si nous définissons le multiplicateur inconnu  $\lambda$  tel que  $V + \lambda D = \frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda}$ , nous obtenons que  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{gB}{A}}$ . La célérité d'une onde dans un écoulement en surface libre est donnée par l'expression :

$$C = \sqrt{\frac{gA}{B}} \quad (3.58)$$

Par conséquent,  $\lambda = \frac{g}{C}$ , l'expression précédente de  $\frac{dx}{dt}$  peut être écrite comme :

$$\frac{dx}{dt} = V + C \quad (3.59)$$

En utilisant l'équation (3.59) et l'expression des dérivées totales de  $h$  et  $V$  l'équation (3.55) peut s'écrire :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{C} \frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (3.60)$$

De même pour  $\lambda = -\frac{g}{C}$ , on peut écrire que :

$$\frac{dx}{dt} = V - C \quad (3.61)$$

Alors en utilisant l'équation (3.61) et l'expression des dérivées totales de  $h$  et  $V$  l'équation (3.62) peut s'écrire :

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{C} \frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (3.62)$$

A noter par ailleurs, que l'équation (3.60) n'est valide que si l'équation (3.59) est satisfaite et l'équation (3.62) n'est valide que si l'équation (3.61) est valide. Les équations (3.59) et (3.61)

représentent les courbes caractéristiques (Fig 3.10) dans le plan  $(x, t)$ . En se référant à cette figure et en notant les conditions précédentes pour la validité des équations (3.60) et (3.62) il est clair que l'équation (3.60) est valide le long de la courbe caractéristique positive  $C^+$ , et l'équation (3.62) est valide le long de la courbe caractéristique négative  $C^-$ .

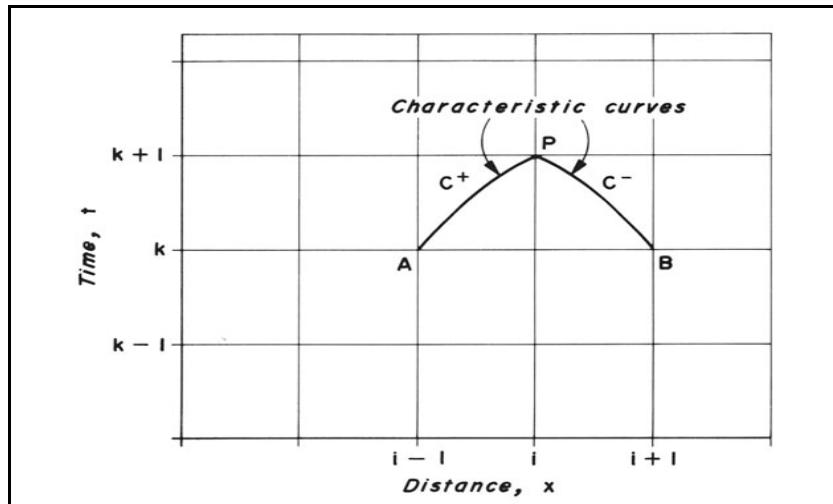


Figure 3.10: Notation pour les équations caractéristiques positives et négatives

En multipliant les équations (3.60) et (3.62) par  $dt$  et intégrant le long de la courbe caractéristique AP et BP, nous obtenons :

$$\int_A^P dV + \int_A^P \frac{g}{C} dh = \int_A^P g(S_0 - S_f) dt \quad (3.63)$$

$$\int_B^P dV - \int_B^P \frac{g}{C} dh = \int_B^P g(S_0 - S_f) dt \quad (3.64)$$

Dans ces équations on cherche les valeurs de  $V$  et  $h$  qui sont les inconnues en fonction d'autres variables, on obtient :

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{C}\right)_A (h_P - h_A) = g(S_0 - S_f)_A \Delta t \quad (3.65)$$

$$V_P - V_B + \left(\frac{g}{C}\right)_B (h_P - h_B) = g(S_0 - S_f)_B \Delta t \quad (3.66)$$

C'est deux équations peuvent être écrites comme suit :

$$V_i^{k+1} = C_p - C_{a_{i-1}} h_i^{k+1} \quad (3.67)$$

Et

$$V_i^{k+1} = C_n + C_{a_{i+1}} h_i^{k+1} \quad (3.68)$$

Dans lesquelles :

$$C_p = V_{i-1}^k + C_{a_{i-1}} h_{i-1}^k + g(S_0 - S_f)_{i-1} \Delta t \quad (3.69)$$

$$C_n = V_{i+1}^k - C_{a_{i+1}} h_{i+1}^k + g(S_0 - S_f)_{i+1} \Delta t \quad (3.70)$$

Avec 
$$C_a = \frac{g}{c} \quad (3.71)$$

#### d) Condition de stabilité : Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Une méthode est dite instable, si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi. Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable.

En mathématique, la condition de stabilité (Courant-Friedrichs-Lewy) ou condition de Courant du nom des auteurs (Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy) est une condition pour résoudre des équations différentielles (équations de *Saint-Venant*) et vérifier leur convergence. Elle est utilisée en général, pour vérifier que le schéma utilisé pour le calcul est stable et qu'il converge vers la solution recherchée, c'est-à-dire vers la solution du système

Pour la stabilité du schéma cité ci-dessus, il faut que le nombre de Courant, ( $C_n$ ), soit inférieur ou égal à 1.

Avec

$$C_n = \Delta t \frac{\max[|V| \pm c]}{\Delta x} \quad (3.72)$$

Ainsi, l'intervalle de temps de calcul dépend de l'espacement spatial de la grille, la vitesse d'écoulement, et la célérité, qui sont des fonctions de la profondeur d'écoulement. Puisque la profondeur d'écoulement et la vitesse d'écoulement peuvent changer de manière significative pendant les calculs.

### III. Conclusion

Les méthodes aux différences finies consistent à discrétiser, moyennant un maillage de calcul prédéfini, chaque dérivée partielle d'une variable dans l'EDP à l'aide du développement en série de *Taylor* de la valeur de cette variable. Ainsi, la discrétisation de l'EDP permet d'obtenir des relations linéaires entre la valeur de la variable en un noeud et les valeurs de cette même variable aux noeuds voisins du maillage de calcul.

Les méthodes aux différences finies apportent, grâce à leur simplicité, la possibilité de construire des schémas numériques d'ordre élevé à faible coût.

Cependant, elles semblent plus difficiles à mettre en œuvre pour les problèmes à géométrie complexe où la construction d'un seul maillage structuré est difficile. Elles sont donc mal adaptées aux écoulements en géométries complexes.

## Chapitre 4

# Application et validation du modèle numérique

Une fois le modèle est mis en œuvre (objet du précédent chapitre), il est de rigueur scientifique de le confronter à des essais expérimentaux afin de tester sa fiabilité et sa performance, c'est le contexte de ce chapitre dans la mesure où l'on compare les résultats obtenus du modèle proposé aux données expérimentales issues des travaux antérieurs.

### I. Base et données expérimentales de validation

La base expérimentale, servant de validation au modèle numérique élaboré dans le cadre de ce travail, a été puisée du travail de *Gharangik (1988)*. Ce travail est l'un des travaux les plus consistant et s'inscrit dans le rang des travaux de références et fondamentales dans ce sujet. Les données de laboratoire ont été obtenues sur une installation d'essais dans le département d'Ingénierie Civile et Environnementale de l'Université de Washington.

#### I.1. présentation de l'installation d'essai

L'installation d'essai est composée d'un canal horizontal à parois de 14.00 mètres de long, de 0.9 mètre de haut et de 0.30 mètre de large avec une section transversale rectangulaire (figure IV.1). Le canal est alimenté en eau à partir d'un grand réservoir à charge constante à travers une vanne murale. Après avoir traversé le canal, l'eau passe par un réservoir de mesure, puis déversé dans un canal de drainage menant à un puisard souterrain. Le ressaut a été formé à une distance de 3 mètres et ceux en ajustant la profondeur de l'eau à l'aide d'une vanne réglable à l'extrémité du canal. L'emplacement du ressaut a ensuite varié en fonction de l'état d'écoulement.

Le débit a été déterminé au moyen du réservoir de mesure. Les profondeurs d'écoulement à l'extrémité amont et dans la section du canal en paroi métallique ont été mesurées à des intervalles équidistants par un limnimètre ayant une précision de 0,03 centimètre. Un système de grille de repérage sur la section vitrée a été utilisé pour mesurer les profils du ressaut et leur emplacement. Les expériences pour chaque ensemble de données ont été répétées pour s'assurer de la précision des résultats du test.

Des tests ont été effectués avec le nombre de Froude incident, allant de 2.30 à 7.0.

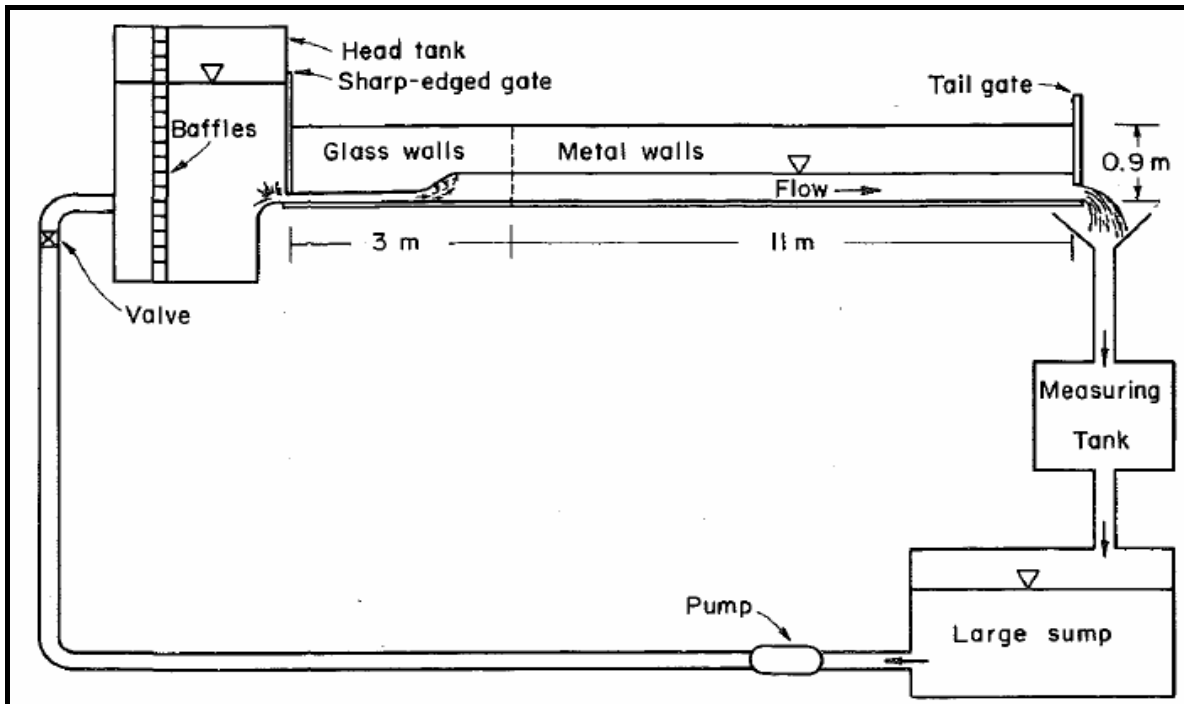


Figure 4.1: Schéma du dispositif expérimental (Gharangik, 1988)

Il est à noter par ailleurs que les profils de surface de l'eau sont mesurés sur la partie du canal où le corps principal du ressaut est formé. La distance,  $x = 30\text{cm}$ , représente la limite amont et est prise comme point de référence pour les mesures. Pour exécuter le modèle numérique, la profondeur et la vitesse d'écoulement en amont et la profondeur en aval doivent être spécifiées. Pour cela, les profondeurs d'écoulement mesurées ont servi au calcul de la vitesse amont pour chaque simulation à partir de l'équation de continuité.

$$Q = Bhu \quad (4.01)$$

Où  $Q$  est le débit d'écoulement,  $B$  la largeur du canal,  $h$  est la hauteur mesurée et  $u$  est la vitesse calculée de l'écoulement. Le nombre de Froude du flux entrant est obtenu à partir de la formule suivante (Chow, 1959) :

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (4.02)$$

Où

$F_r$  = nombre de Froude

$u$  = vitesse d'écoulement, et

$h$  = hauteur d'écoulement.

Les valeurs de la profondeur  $h$  et de vitesse  $u$  à l'état stationnaire ont été spécifiées en tant que conditions initiales et été calculés en supposant que le régime est complètement supercritique. Les calculs instationnaires ont été débutés en augmentant la profondeur en aval à une valeur mesurée expérimentalement. Le modèle numérique du ressaut hydraulique a été exécuté jusqu'à ce que les calculs convergent vers un nouvel état stationnaire.

Le pas de temps est conditionné par le nombre de *Courant* et l'espacement des nœuds de calcul. Le nombre de Courant a été fixé à 0.95, puisque la meilleure résolution du ressaut est obtenue quand il est proche de 1.0. La taille de la grille de calcul a influencé la simulation de la longueur du ressaut hydraulique.

Dans le modèle numérique (*MacCormack*), le coefficient de rugosité de Manning ( $M_n$ ) est approché en mesurant le profil de la surface d'eau dans le canal d'essai pendant le régime supercritique initial et en créant le même profil de surface avec le modèle numérique en utilisant diverses valeurs de ( $M_n$ ) (*Gharangik, 1988*).

Le modèle numérique a été exécuté pour un ensemble de données expérimentales répertoriées dans un tableau illustré ci après.

## **I.2. Liste des données expérimentales (Tableau des tests)**

Le modèle numérique a été testé pour des valeurs expérimentales résumés dans le tableau suivant :

**Tableau 4.1.** Conditions Hydrodynamiques des tests

Numéro du test	Hauteur amont (m)	Vitesse $u_1$ (m/s)	Nombre de Froude	Hauteur aval (m)
1	0.031	3.831	7.0	0.265
3	0.04	3.578	5.74	0.286
4	0.043	2.737	4.23	0.222
6	0.064	1.826	2.30	0.168

## II. Procédure de calcul numérique

La modification locale opérée sur les conditions d'écoulement comme par exemple la manœuvre d'une vanne murale dans un écoulement à surface libre, introduit dans le liquide une discontinuité portant sur les paramètres de cet écoulement et donne ainsi naissance d'une onde de choc connue communément sous le nom de ressaut hydraulique.

Un tel mouvement est régi par les équation de *Saint Venant* et il s'agit d'un système d'équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire de type hyperbolique comme exposé dans les précédents chapitres.

Confronté à l'impossibilité de les résoudre analytiquement, nous faisons appel aux outils qui demeurent depuis une belle lurette des outils d'appoint quant au calcul et la prédiction du champ d'écoulement charcuté par ces ondes de choc à sa surface libre.

Nous nous sommes rabattu sur la méthode des différences finies en utilisant le schéma diffusif de *Lax* qui est un schéma explicite. Suivant cette méthode, la solution est obtenue par une succession de calculs itératifs des variables en démarrant les simulations des conditions initiales et en intégrant des conditions aux frontières, jusqu'à ce qu'un état d'équilibre soit établi.

Pour une simulation correcte et stable, le temps doit impérativement obéir à la condition de stabilité dite de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL). A cet effet la stabilité du schéma de *Lax* se traduit par le nombre de Courant illustré dans le chapitre précédent (Eq 3.70) et le pas de temps doit être choisit de tel sorte que :

$$\Delta t = \frac{C_n \Delta x}{\text{Max}[|V| + c]} \quad (4.03)$$



Avec  $C_n$  pris égale à 0.95 pour toutes les simulations exécutées le long de ce présent travail.

### III. Résultats et discussion

#### III.1. Analyse stationnaire du ressaut

Les calculs de simulation ont été exécutés pour déterminer l'écoulement en régime permanent s'établissant dans le canal rectangulaire suite au changement dans l'écoulement opéré à l'aval du canal à l'exemple de la fermeture d'une vanne murale.

Le but, à cet effet est de tracer le profil de la ligne d'eau  $h(x)$  le long du canal et ainsi localiser rigoureusement l'endroit de l'apparition du ressaut hydraulique et prendre connaissance de tous ces caractéristiques (longueurs caractéristiques et hauteurs conjuguées). Ces résultats sont particulièrement intéressants du point de vue pratique de dimensionnement des ces canaux rectangulaires notamment pour la conception des bassins de dissipation. La prédiction de la position du ressaut pour certains ouvrages à l'exemple des grandes conduite d'assainissement permet la connaissance des points à potentiels de débordement.

Les résultats de calcul sont illustrés, conjointement aux mesures expérimentales établit par *Gharangik* (1988). Les tests menés dans le cadre de ce travail ont concerné quatre (04) cas à différents nombres de *Froude*, comme illustré dans le tableau (IV.1). Les différents graphes obtenus après la simulation des tests sont présentés ci-après (figures 4.2 à 4.5) :

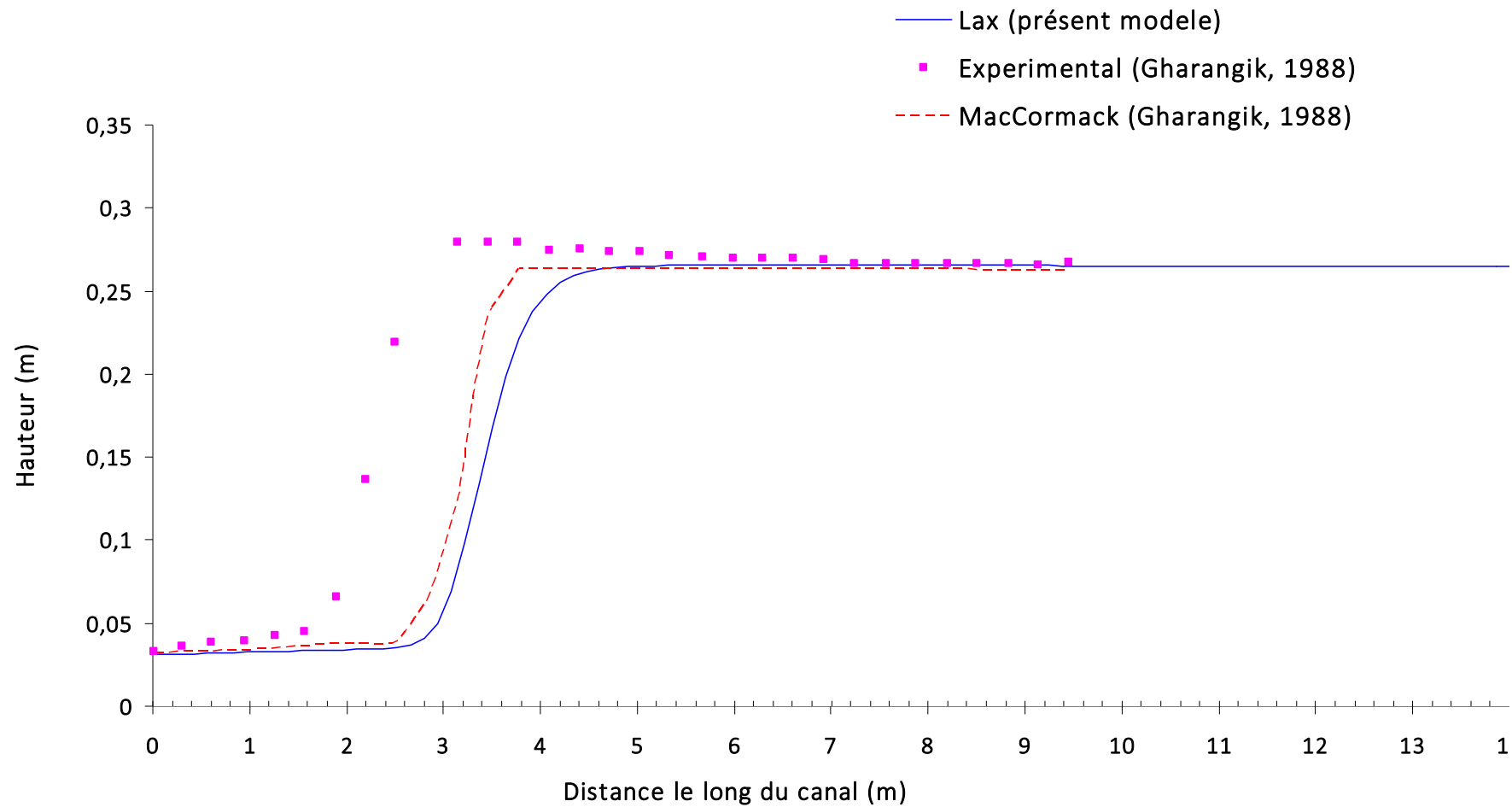


Figure 4.2: Profil du ressaut stabilisé

Nombre de Froude=7.0

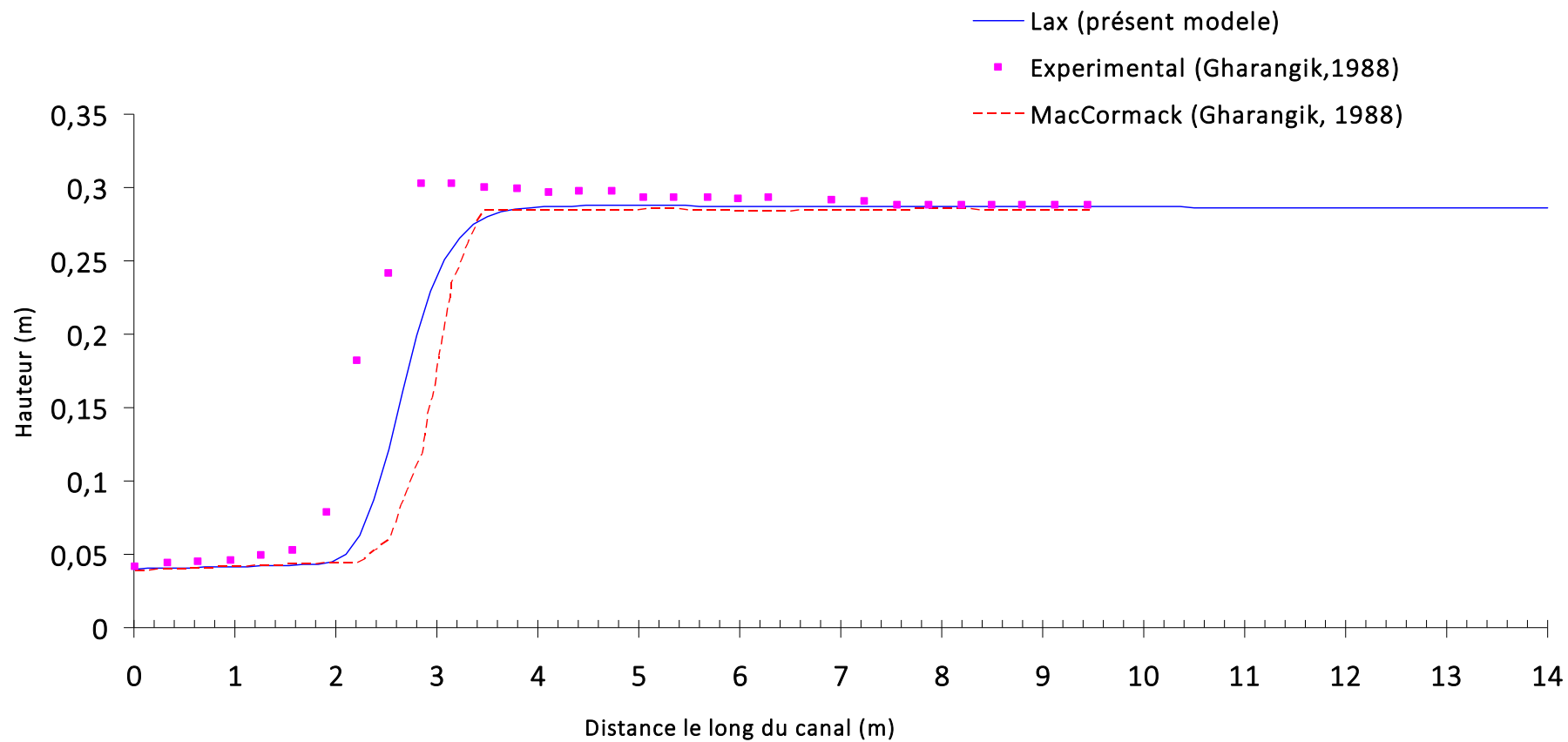


Figure 4.3: Profil du ressaut stabilisé

Nombre de Froude=5.74

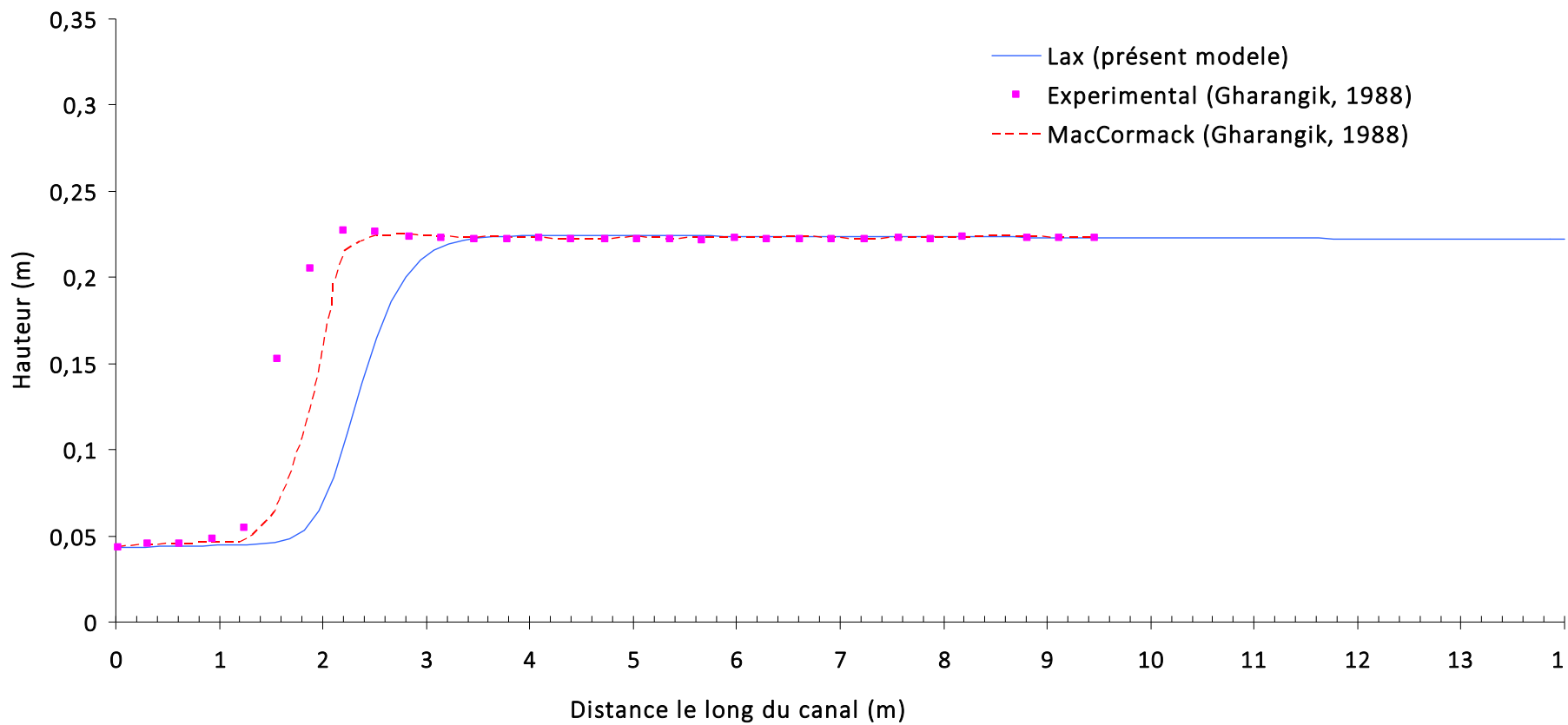
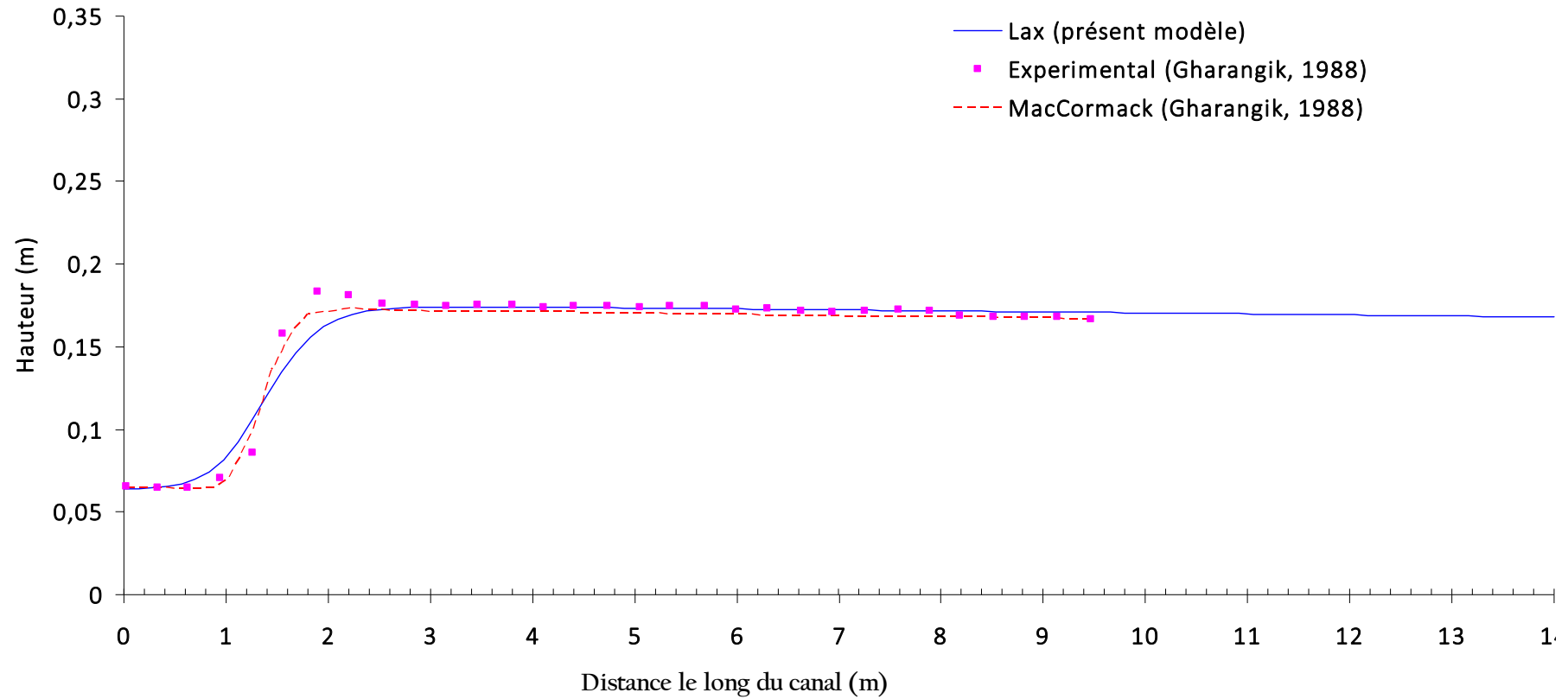


Figure 4.4: Profil du ressaut stabilisé

Nombre de Froude=4.23



*Figure 4.5:* Profil du ressaut stabilisé

Nombre de Froude=2.30

### III.2. Tests N°01, 03 et 04 respectivement pour $Fr= 7.0, 5.74$ et $4.23$

Les résultats de ces simulations sont superposés aux résultats expérimentaux de Gharangik (1988) ainsi que ses calculs numériques en utilisant le schéma de *MacCormack* du second ordre. Les résultats du modèle proposé congruent bien avec les résultats du schéma de *MacCormack* du second ordre calculé par Gharangik (1988).

Concernant la position du ressaut les deux sont légèrement décalés à l'aval par rapport aux résultats expérimentaux (1.16 m par rapport au modèle proposé à  $Fr=7.0$ ). Ce désaccord est dû principalement à l'aspect numérique et concerne le terme source qui résulte des frottements, ce dernier dans le modèle proposé et dans le schéma de *MacCormack* est considéré (lors de la discrétisation) constant en bloc autrement dit constant pour chaque pas de temps ce qui ne reflète pas tout à fait la réalité du fait que les frottements varient continûment dans le temps. Le traitement numérique adopté de ce terme influence la position du ressaut par rapport aux résultats expérimentaux.

### III.3. Tests N°06 pour $Fr= 2.30$

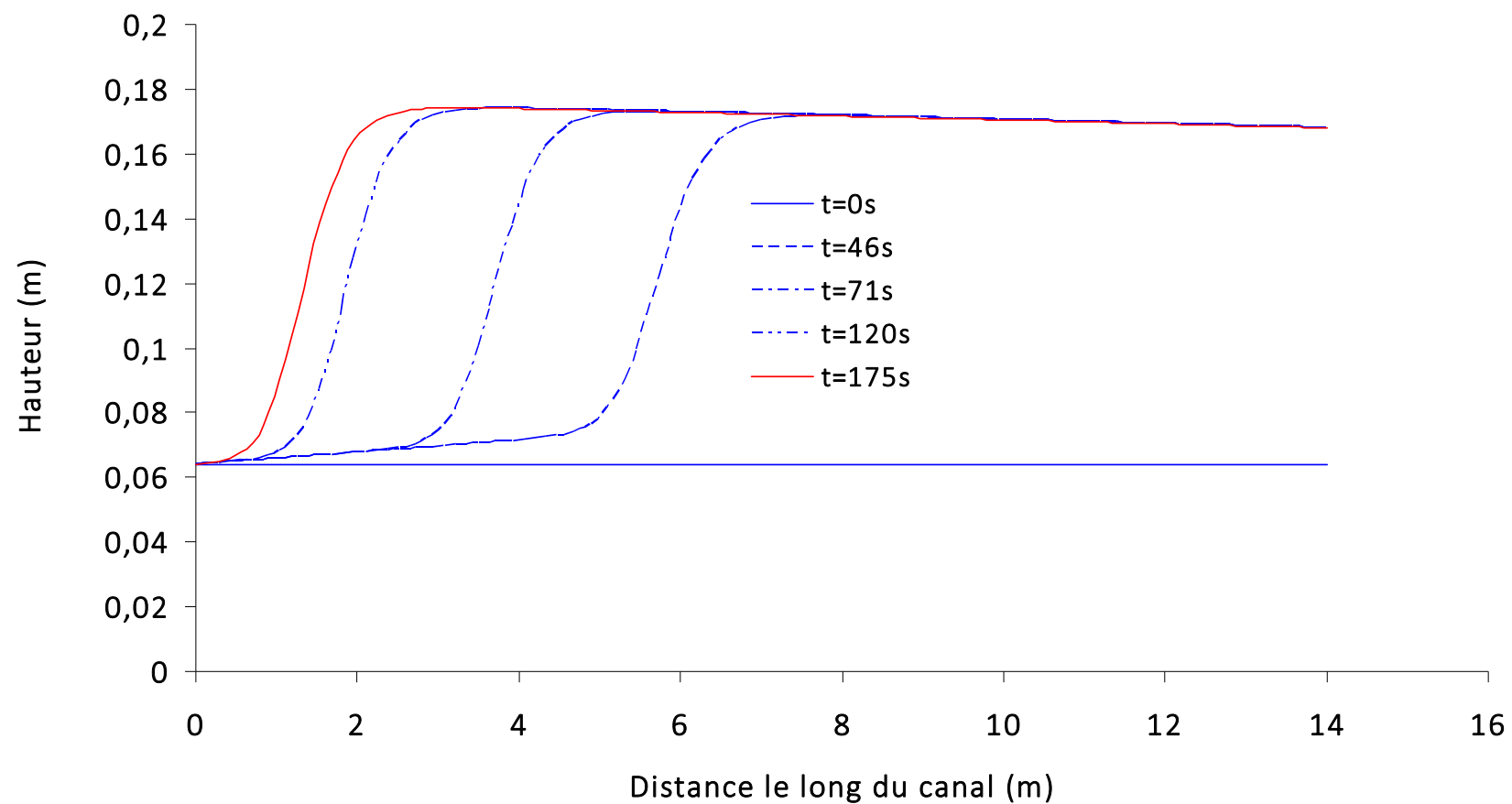
C'est les résultats présentés dans la figure 4.5, il est bien clair que les deux modèles (Lax et *MacCormack*) concordent très bien avec les résultats expérimentaux de Gharangik (1988), le nombre de Froude étant petit ( $Fr=2.30$ ) l'effet de frottement a diminué considérablement et le problème indiqué précédemment pour les cas d'un nombre de Froude grand n'a que peu d'influence.

### III.4. Analyse dynamique du ressaut hydraulique

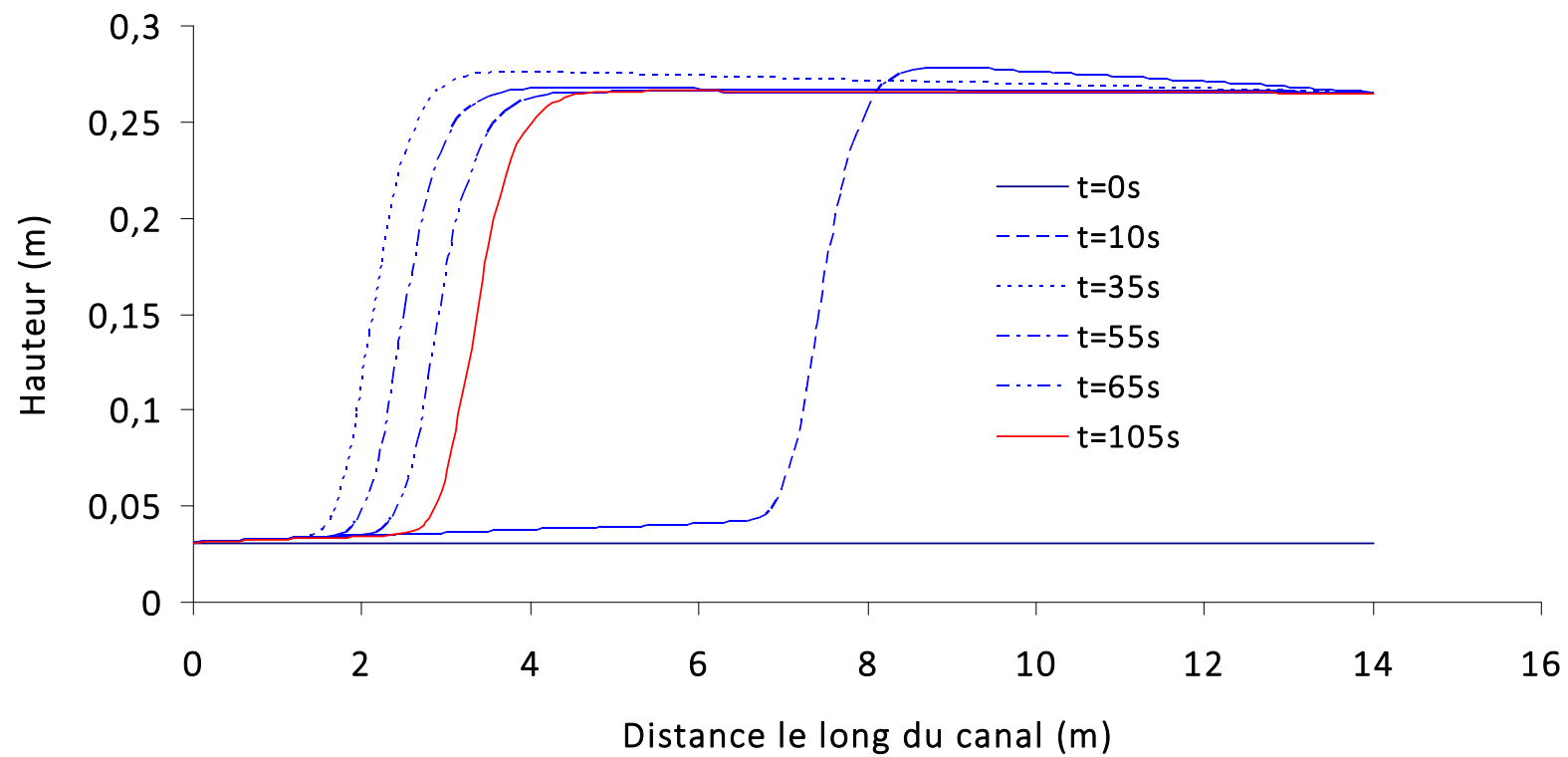
Afin d'étudier le ressaut hydraulique dans son aspect dynamique et voir l'influence du nombre de *Froude* sur l'avancée dynamique du ressaut, nous avons analysé le déplacement du ressaut dans le temps et ce en reconstituant ces différentes positions correspondant à des temps différents et en les superposant sur un même graphe.

Pour ce faire, nous avons analysé les simulations dont le nombre de Froude est égal à 7.0 et 2.30 respectivement, voir les figures 4.6 et 4.7.

- Pour un nombre de *Froude*  $Fr=2.30$ , l'avancée du ressaut débute de l'aval vers l'amont (du régime subcritique vers le régime supercritique) comme c'est illustré dans la figure 4.6 aux temps  $t= 46s, 71s$  jusqu'à sa stabilisation à partir de  $t=120s$ . Le temps à 175s est une confirmation de la position finale du ressaut.



*Figure 4.6:* Profil du ressaut pour différents temps  
Nombre de Froude=2.30



*Figure 4.7:* Profil du ressaut pour différents temps  
Nombre de Froude=7.0



- Pour un nombre de Froude  $Fr=7.0$ , le ressaut avance de l'aval (voir la figure à  $t= 10s$ ) vers l'amont (voir à  $t= 35s$ ). Après un quasi équilibre, le ressaut reprend son mouvement tout en changeant le sens de son déplacement de l'amont vers l'aval (voir à  $t= 55s, 65s$ ) jusqu'à ce qu'il atteigne son équilibre à partir de  $t= 105s$ . Ce comportement peut s'expliquer du point de vue physique par la prépondérance des forces d'inertie qui se traduit par un nombre de *Froude* assez grand (dans notre cas  $Fr=7.0$ ) et qui tente de freiner l'arrivée de la surélévation (ressaut) en arrivant vers l'entrée du canal (régime supercritique), ce dernier est contraint de s'éloigner vers l'aval pour se stabiliser après quelques temps.

#### IV. conclusion

En tentant de valider le modèle proposé, nous avons comparé les résultats issus de ce dernier aux données expérimentales des travaux élaborés par *Gharangik (1988)* et pour une meilleure analyse, ses résultats obtenus par le calcul numérique en utilisant un schéma de *MacCormack* ont été intégrés dans la table de comparaison.

A l'issue des différentes simulations faites pour l'étude stationnaire du ressaut pour des nombres de Froude différents ( $Fr= 7.0, 5.74, 4.23$  et  $2.30$ ), le modèle proposé a donné de bons résultats par rapport aux résultats expérimentaux hormis le léger décalage observé sur la position du ressaut qui nous a révélé que les frottements (le terme source) nécessitent un traitement numérique assez fin car il influe potentiellement la détermination de la position du ressaut.

De l'analyse dynamique, nous avons décelé l'impact et l'effet du nombre de Froude sur l'avancée dynamique du ressaut et comment qu'un « bras de force » est créé entre les forces d'inerties qui tentent de retarder sa progression vers l'amont (l'entrée du canal) et le ressaut lui-même qui avance jusqu'à ce qu'un équilibre soit établi et le ressaut se stabilise.

L'analyse des résultats des différents tests met bien en exergue la faculté du modèle proposé à bien prédire les différentes caractéristiques du ressaut hydraulique.

## Conclusion générale et perspectives

Les chercheurs dans le domaine de l'hydraulique ont toujours été fascinés par l'étude des écoulements à surface libre et ce à la fois à cause de leur complexité et leurs merveilles. Modélisé mathématiquement par l'un des éminent scientifique de son époque un ingénieur, physicien et mathématicien français du nom de *Barré de Saint-Venant* qui a proposé à l'académie des sciences en 1871 un système d'équations aux dérivés partielles basé sur les deux principes de conservation, de la masse et celui de la quantité de mouvement, ce système aboutie à un couple d'équations classé selon la physique mathématique dans la famille des équations hyperboliques non linéaires gouvernant la quasi-totalité des écoulements non permanents. En modifiant les conditions de l'écoulement en un point, ceci donne lieu à l'apparition d'une perturbation se propageant de part et d'autre de ce point sous forme d'onde connue sous le nom d'onde de choc ou Ressaut hydraulique. Résoudre analytiquement l'équation de Saint Venant régissant ce phénomène est dans la pratique sans issue possible, le recours aux méthodes numériques est alors indispensable.

L'objectif de notre travail entreprit fut de proposer un modèle numérique simple, en utilisant la méthode des différences finies avec un schéma explicite de premier ordre à savoir le schéma diffusif de *Lax* pour la prédiction et le calcul du ressaut hydraulique (l'onde de choc).

A cet effet et dans un premier temps, nous avons défini ce qu'est un ressaut hydraulique et quelles sont ses caractéristiques pour ensuite passer en revue la synthèse bibliographique des travaux menés jusqu'à présent quant au calcul numérique du ressaut hydraulique.

Par la suite dans le chapitre deuxième, nous avons retracé les étapes principales marquant l'établissement des équations régissant les écoulement à surface libre (équations de *Saint Venant*).

Tandis que dans le chapitre troisième, nous avons fait le tour des méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) où nous avons mis en premier plan la méthode des différences finies, de même, nous avons décrit les différentes étapes à suivre pour la discrétisation d'une EDP et comme cas concret d'application, nous avons discrétisé les équations de *Saint Venant* objet de notre travail, par la méthode des différences finies en utilisant le schéma diffusif de *Lax*.

Dans l'optique de valider le modèle proposé basé sur le schéma de *Lax*, des simulations numériques ont été effectuées et comparées à des résultats expérimentaux de laboratoire obtenus par les travaux menés par Gharangik (1988). Pour une meilleur analyse, la comparaison a touché aussi ses résultats obtenus à partir des modèles numériques issus d'autres schémas à savoir le schéma de MacCormack précis au second ordre dans l'espace et dans le temps, ceci a constitué le contenu du dernier chapitre.

L'analyse a été scindée en deux parties, la première a porté sur l'état stationnaire du ressaut, autrement dit la position finale du ressaut (siège de l'onde stationnaire), la deuxième partie a concerné l'aspect dynamique du ressaut. Les résultats obtenus ont été très probants et en très bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Cependant de légères différences dans la position du ressaut ont été décelées et celles-ci sont dues au terme source (frottement) ce qui nous mène à affirmer qu'un traitement numérique plus rigoureux de ce terme est potentiellement plus précis quant à la détermination de la position du ressaut. De l'analyse dynamique, nous avons pu mettre en relief l'influence du nombre de *Froude* sur l'avancé dynamique du ressaut, notamment la réaction des forces d'inerties sur la progression du ressaut vers l'amont (l'entrée du canal) jusqu'à l'état d'équilibre (stabilisation du ressaut).

A l'image des résultats obtenus dans le cadre de ce modeste travail, nous pouvons prétendre que le modèle proposé est bien adapté à la prédiction et le calcul du ressaut hydraulique.

Comparativement aux autres schémas, le schéma de *Lax* est d'une très grande simplicité dans sa conception, une facilité dans l'implémentation et abouti à des résultats très satisfaisants vu l'effort moindre qu'il exige, son ordre de précision (premier ordre) empêche l'apparition de phénomène parasite (dispersion numérique). Quant à sa stabilité il est soumis à la condition de Courant (CFL) que nous avons respecté le long de nos calculs.

Ce travail ne représente qu'une modeste contribution au calcul du ressaut hydraulique pour un canal horizontal de forme rectangulaire. Comme nous l'avons déjà signalé ci-dessus, le traitement numérique du terme source influence sensiblement la détermination de la position du ressaut. Manier finement ce terme en utilisant d'autres méthodes numériques à l'image des éléments finis semble être une piste à explorer pour améliorer davantage le calcul et la prédiction du ressaut. Le modèle peut être transposé aux canaux de forme prismatique quelconque (trapézoïdale, circulaire...etc.), ce qui ouvre de nouveaux champs d'investigation pour des recherches ultérieures.

## References Bibliographiques

ABBOTT, M. B. *Computational Hydraulics Elements of the Theory of Free Surface Flows*, Pitman publishing limited Edition, London, 1979

ABBOTT, M. B. et LINDEYER, E. W. Two transients for a radial nearly-horizontal flow. *La Houille Blanche*, 1969, no 1, p. 65-70.

ANDERSON, Dale A., TANNEHILL, John C., et PLETCHER, Richard H. *Computational fluid dynamics and heat transfer*. Washington: Hemisphere, 1984.

BASCO, David R. *Computation of rapidly varied unsteady, free-surface flow*. Department of the Interior, US Geological Survey, 1987.

BASCO, D. R. *Limitations of Saint Venant equations to model flood waves*. In : *Hydraulic Engineering*. ASCE, 1987. p. 758-763.

BERREKSI, A. *Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert*. 2012. Thèse de Doctorat. Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

BERREKSI, A., KETTAB, A., REMINI, B., BENMAMER, S. *Computation of twodimensional unsteady supercritical flows in open channel contraction of spillway chutes*. *Dam Engineering-International Water Power and Dam Construction*, 2008, vol. 19, no 3, p. 149-168.

BRADLEY, J. N. et PETERKA, A. J. *The hydraulic design of stilling basins: hydraulic jumps on a horizontal apron (basin i)*. *Journal of the Hydraulics Division*, 1957, vol. 83, no 5, p. 1-24.

CARVALHO, R. F., LEMOS, C. M., et RAMOS, C. M. Numerical computation of the flow in hydraulic jump stilling basins. *Journal of Hydraulic Research*, 2008, vol. 46, no 6, p. 739-752.

CHAUDHRY, M. H. *Open-channel flow*. Springer Science & Business Media, 2008.

CHAUDHRY, M. H. *Applied hydraulic transients*. Springer New York, 2014.

COURANT, Richard, FRIEDRICHS, Kurt, et LEWY, Hans. *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*. *Mathematische annalen*, 1928, vol. 100, no 1, p. 32-74.

- CUNGE, Jan Andrzej, HOLLY, Forrest M., et VERWEY, Adri. *Practical aspects of computational river hydraulics*. 1980.
- DEBABECHE, M. *Le Ressaut Hydraulique dans les canaux prismatiques*. 2003. Thèse de doctorat. Université de BISKRA.
- FENNEMA, Robert J. *Numerical solution of two-dimensional transient free-surface flows*. 1985. Thèse de doctorat. Washington State University.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks. *Water Resources Research*, 1986, vol. 22, no 13, p. 1923-1930.
- GHARANGIK, Araz M. Numerical simulation of hydraulic jump. Thèse de Master of science in civil engineering, 1988. Washington State University.
- GHARANGIK, A. M. et CHAUDHRY, M. H. Numerical simulation of hydraulic jump. *Journal of hydraulic engineering*, 1991, vol. 117, no 9, p. 1195-1211.
- GOTTLIEB, David et TURKEL, Eli. Dissipative two-four methods for time-dependent problems. *Mathematics of computation*, 1976, vol. 30, no 136, p. 703-723.
- HAGER, W. et SCHLEISS, A. *Traité de Génie Civil, Volume 15—Constructions Hydrauliques—Ecoulements Stationnaires*. PPUR-Presses Polytechniques Romandes, Switzerland, 2009.
- HAGER, Willi H., BREMEN, Roger, et KAWAGOSHI, N. Classical hydraulic jump: length of roller. *Journal of Hydraulic Research*, 1990, vol. 28, no 5, p. 591-608.
- JAMSON, A., SCHMIDT, W., et TURKEL, E. *Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge–Kutta Time Stepping Scheme*. In : *AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conf., Palo Alto, California*. 1981. p. 1-14.
- KATOPODES, Nikolaos D. A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow. *Journal of hydraulic Engineering*, 1984, vol. 110, no 4, p. 450-466.
- LAI, C. Numerical modeling of unsteady open-channel flow. *Advances in hydroscience*, 1986, vol. 14, p. 161-333.
- LAX, Peter D. *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*. *Communications on pure and applied mathematics*, 1954, vol. 7, no 1, p. 159-193.
- LAX, Peter et WENDROFF, Burton. *Systems of conservation laws*. *Communications on Pure and Applied mathematics*, 1960, vol. 13, no 2, p. 217-237.
- MACCORMACK, R. W. *The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering*, *AIAA Paper 69–354*, 1969. *Google Scholar*.

MCCORQUODALE, John A. et KHALIFA, Abdelkawi. *Internal flow in hydraulic jumps. Journal of Hydraulic Engineering*, 1983, vol. 109, no 5, p. 684-701.

MCCOWAN, A. D. *Equation systems for modelling dispersive flow in shallow water. In : PREPRINTED PROCEEDINGS: 21 st CONGRESS, INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR HYDRAULIC RESEARCH, MELBOURNE, 19-23 AUGUST 1985. VOLUME 2. THEME B(PART 1): FUNDAMENTALS AND COMPUTATION OF 2-D AND 3-D FLOWS. 1985. p. 50-57.*

NARAYANAN, Rangaswami. *Wall jet analogy to hydraulic jump. Journal of the Hydraulics Division*, 1975, vol. 101, no 3, p. 347-359.

SAKARYA, A. Burcu Altan et TOKYAY, Nuray Denli. Numerical simulation of A-type hydraulic jumps at positive steps. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2000, vol. 27, no 4, p. 805-813.

TAHAR ABBES Miloud, *Méthodes Numériques, Tome 1 : La méthode des différences finies, les méthodes d'approximations intégrales et variationnelles, OPU, Mai 2007.*

TOKYAY, Nuray Denli, ALTAN-SAKARYA, A. Burcu, et ESKI, Elvan. Numerical simulation of minimum B-jumps at abrupt drops. *International journal for numerical methods in fluids*, 2008, vol. 56, no 9, p. 1605-1623.

VASILIEV, O. F., GLADYSHEV, M. T., PRITVITS, N. A., et al. *Numerical methods for the calculation of shock wave propagation in open channels. In : Proc., 11th Congress, Inter. Assoc. for Hydraulic Research. 1965. p. 14.*

## ملخص

يتناول هذا العمل النمذجة العددية لمشكلة القفزة الهيدروليكية (المائية) الثابتة في قناة مستطيلة بواسطة طريقة الفروق المحددة. إن تحديد ومعرفة خصائص القفزة من موقع وطول وارتفاع وتبديد الطاقة، لها أهمية كبيرة لتصميم وحساب الهياكل والأنظمة الهيدروليكية للسيلان الحر. على أساس فرضيات مبسطة معينة مقبولة عمليا ، تم استخدام النموذج الرياضي (Saint Venant 1D) للحساب الديناميكي لموجة الصدمة. وقد تم الحصول على الحل العددي لزوج من المعادلات التفاضلية الجزئية الزائغة من خلال طريقة الفروق المحدودة وطريقة الخصائص المطبقة في حدود القناة.

تتعلق النتائج بالتنبؤ بالمظهر الديناميكي للسطح الحر للماء بعد التحكم في معدل التدفق والحالة الثابتة للقفزة عند مأخرت القناة. النتائج التي تم الحصول عليها لهذا الغرض تظهر توافق جيد للغاية مقارنة مع القياسات التجريبية والعديد لباحثين آخرين في هذا الميدان.

**كلمات دلالية:** القفزة الهيدروليكية (المائية) ، القناة السطحية الحرة ، معادلات Saint Venant ، طريقة الفروق المحددة.

## Résumé

*Le travail porte sur la modélisation numérique du problème du ressaut hydraulique stationnaire dans un canal rectangulaire par la méthode des différences finies. La détermination et connaissance des caractéristiques du ressaut ; position, longueur, hauteur ainsi que la dissipation d'énergie occasionnée sont alors de première importance pour l'exercice de conception et calcul des ouvrages et systèmes hydrauliques à surface libre. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices admissibles en pratiques le modèle mathématique de Saint-Venant 1D a été utilisé pour le calcul dynamique de l'onde de choc. La solution numérique du couple d'équations aux dérivées partielles hyperboliques a été obtenue par la Méthode des Différences Finies et par la méthode des caractéristiques aux frontières du canal.*

*Les résultats portaient sur la prédiction du profil dynamique de la surface libre d'eau suite à un contrôle aval du débit et l'état stationnaire du ressaut dans le canal. Les résultats obtenus à cet effet montrent une très bonne concordance comparativement aux mesures expérimentales et numériques d'autres chercheurs.*

**Mots-clés :** Ressaut hydraulique, canal à surface libre, Equations de Saint-Venant, Différences Finies.

## Abstract

*This work deals with the numerical modeling of the hydraulic jump problem in a rectangular channel by the finite element method. The determination and knowledge of the jump characteristics; the position, length, height and energy dissipation are of prime importance for the design and calculation of hydraulic structures and systems with free surface flows. On the basis of certain simplifying assumptions that are acceptable in practice, the Saint-Venant 1D mathematical model has been used for the dynamic computation of the shock wave. The numerical solution of the set of hyperbolic partial differential equations was obtained by the Finite Element Method and the Method of Characteristics at the boundaries.*

*The results concerned the prediction of the dynamic water-free profile following a downstream control of the flow rate and the stationary state of the hydraulic jump in the channel. The results obtained for this purpose show a very good agreement with experimental measurements and numerical other researches.*

**Key Words:** Hydraulic jump, free surface channel, Saint-Venant equations, finite differences.