

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Benyahia Jijel
Faculté de la Technologie



Département de Génie Civil et Hydraulique

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Hydraulique

Option : Hydraulique Urbaine

Présenté par :

HAMIMED Nadjoua

CALCUL NUMERIQUE DES ECOULEMENTS À DEBIT SPATIALEMENT VARIE « CAS DU DEVERSOIR LATERAL »

Dirigé par :

- Mr. AMARA Lyes

Soutenu publiquement le 27 / 06 / 2018 devant le jury composé de :

- Président : AINAS Belkacem
- Examineur : ABDI Ishak

Remerciements

Louange à Dieu, tout puissant de m'avoir guidée durant toutes ces années d'étude, et de m'avoir permis de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à adresser ma reconnaissance la plus profonde et mes remerciements les plus sincères à mon encadreur, Monsieur **AMARA LYES** pour ses encouragements, ses conseils, ses orientations, ses commentaires et bien sûr ses critiques constructives.

Je me permets d'exprimer tout mon respect aux membres de jury qui me feront l'honneur d'apprécier mon travail.

Je tiens à présenter pour l'occasion toute ma reconnaissance à tous mes enseignants qui ont assuré ma formation de base, pour l'appui et l'aide qui m'ont apporté le long de mon parcours, spécialement Monsieur **F. BELAABED** et Monsieur **I. ABDI**.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à mes amies pour leur appuie, aide et encouragements, je suis très fière d'eux tous notamment **Amina**, **Imane** et mon cher ami **Mohamed** et tous les autres, chacun à son propre nom.

Je remercie encore tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans la réalisation de ce modeste travail.

Merci à tous.

HAMIMED NADJOUA

Dedicaces

Je prends un grand hommage à travers ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance envers :

Ma mère qui a beaucoup de sacrifiée pour moi.

Mon père qui m'a tout donné pour j'atteigne mon but.

Je le dédie également à :

Mes frères et mes sœurs.

Mes amies : Saliha, Imane, Mounia et Amina.

En un mot, à toute ma famille, mes amies de l'Université de Tiji et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

Pour vous je présente ce travail.

Nadjoua

NOTATIONS

A	Surface mouillée (m ²)
b	Largeur du canal au point de contrôle (m)
B	Largeur variable du canal (m)
c	Coefficient de forme du déversoir (-)
C_d	Coefficient de débit (-)
C_M	Coefficient de De Marchi (-)
D	Diamètre de la conduite (m)
E	Energie spécifique (m)
F_f	Force de frottement avec le fond (N)
F	Nombre de Froude (-)
g	Accélération de la pesanteur (m/s ²)
h	Hauteur d'eau (m)
H	Charge en amont du déversoir (m)
H_e	Charge effective du déversoir (m)
H'_L	Pente de la ligne de charge due au changement du débit (m/m)
L	Longueur du déversoir latéral (m)
L_e	Longueur effective du déversoir (m)
L_1	Longueur du canal (m)
n	Rugosité (s/m ^{1/3})
n^*	Nombre des parois déversantes (-)
P	Hauteur du déversoir (Hauteur de pelle) (m)
Q	Débit en volume (m ³ /s)
Q_a	Débit amont (m ³ /s)

Q_{av}	Débit aval (m ³ /s)
Q_d	Débit déversé (m ³ /s)
Q'	Changement longitudinal du débit (m ³ /s/m)
S_0	Pente du radier (m/m)
S_f	Pente du frottement (m/m)
U	Vitesse latérale (m/s)
V	Vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)
\bar{w}	Poids spécifique (N/m ³)
x	Coordonnées longitudinales (m)
\bar{y}	Profondeur du centre de gravité (m)
Z	Cote géométrique (m)
α	Coefficient correctif de la vitesse (-)
β	Coefficient correctif de la quantité de mouvement (-)
σ	Caractéristique de l'écoulement pseudo-uniforme (-)
ζ	Coefficient caractérisant la sortie (-)
\bar{Q}'	Intensité de débit latéral adimensionnelle, $\bar{Q}' = Q'/(gH^3)^{1/2}$
X	Coordonnée adimensionnel longitudinale (-)
\bar{Y}	Hauteur d'eau adimensionnelle (-)
W	Hauteur adimensionnelle du déversoir (-)
Φ	angle latéral par rapport à l'axe du canal (-)
θ	Changement longitudinal de section (-)
Θ	Changement relatif de section, $\Theta = \theta/\zeta$
Δx	Pas de discrétisation spatiale (m)

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Notations	iii
Table des matières	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre I : Généralités et théorie de base des déversoirs latéraux	
I.1. Déversoirs	3
I.1.1. Définition	3
I.1.2. Types des déversoirs	4
I.1.2.1. Déversoirs en mince paroi	4
I.1.2.2. Déversoir à crête épaisse	9
I.1.3. Conditions préalables	11
I.1.3.1. Protocole de prise de mesure	11
I.1.3.2. Condition d'aération pour un déversoir à crête mince.....	11
I.1.4. Formule du débit passant par les déversoirs.....	12
I.1.4.1. Vitesse d'approche et le coefficient C_v	12
I.1.4.2. La formule du coefficient C_v	13
I.1.4.3. Modélisation mathématique de déversement aux travers d'un déversoir frontal .	13
I.2. Déversoir latéral.....	15
I.2.1. Définition	15
I.2.2. Utilisation et domaines d'application.....	16
I.2.2.1. Structures de contrôle des rivières.....	16
I.2.2.2. Canaux d'irrigation et canaux navigables.....	17
I.2.2.3. Systèmes d'assainissement et traitement des eaux	17
I.2.2.4. Les barrages ou les évacuateurs de crues	17

I.2.3. Modélisation du déversoir latéral	18
I.2.3.1. Fondement théorique	18
I.2.3.2. Modélisation simplifiée	18
I.2.4. Synthèse bibliographique et état de l'art	22
I.3. Conclusion	23

Chapitre II : Equations différentielles du mouvement

II.1. Démonstration des équations différentielles de base	24
II.1.1. Ecoulement avec débit croissant	25
II.1.2. Ecoulement avec débit décroissant	27
II.2. Solution analytique de De Marchi	28
II.2.1. Coefficient de De Marchi CM	31
II.3. Approche de Hager	32
II.3.1. Equations de base	32
II.3.2. Intensité du débit latéral	35
II.3.3. Formulation adimensionnelle	36
II.3.4. Conditions aux limites	37
II.4. Solution graphique de Hager	38
II.5. Conclusion	43

Chapitre III : Modèle numérique de résolution

III.1. Présentation générale de la méthode des Eléments finis	44
III.1.1. Discrétisation du domaine et polynômes d'interpolation	47
III.2. Méthode de Galerkin	49
III.3. MEF par la méthode de Galerkin	51
III.4. Application au cas des déversoirs latéraux	55
III.4.1. Détermination de la matrice élémentaire	55
III.4.2. La matrice globale	59
III.4.2.1. Ecoulement supercritique	59
III.4.2.2. Ecoulement subcritique	60
III.5. Conclusion	61

Chapitre IV : Application

IV.1. Données expérimentales de validation..... 62

IV.1.1. Description du dispositif expérimental 62

IV.1.2. Test numérique..... 67

IV.2. Résultats et discussions..... 67

IV.2.1. Interprétations des résultats..... 71

IV.3. Conclusion 71

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES 72

BIBLIOGRAPHIE 73

Resumé

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale	4
Figure (I.2) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale.....	4
Figure (I.3) : Détails de la crête du déversoir rectangulaire avec contraction latérale.....	5
Figure (I.4) : Vue en perspective d'un déversoir triangulaire	5
Figure (I.5) : Détails de la crête d'un déversoir à échancrure triangulaire.....	5
Figure (I.6) : Coupe transversale d'un déversoir trapézoïdal.....	6
Figure (I.7) : Coupe transversale d'un déversoir circulaire	6
Figure (I.8) : Déversoir labyrinthe	7
Figure (I.9) : Coupe longitudinale d'un déversoir incliné.....	7
Figure (I.10) : Vue en plan d'un déversoir oblique.....	8
Figure (I.11) : Schéma de définition d'un déversoir latéral	8
Figure (I.12) : Les différents types des déversoirs à crête mince.....	9
Figure (I.13) : Les types des déversoirs à crête épaisse	10
Figure (I.14) : Déversoir à paroi épaisse –Schéma de description-.....	10
Figure (I.15) : Vue en perspective d'un déversoir triangulaire à crête épaisse	11
Figure (I.16) : Les différents systèmes d'aération	12
Figure (I.17) : K_1 en fonction de LL_1 (Carlier, 1980)	15
Figure (I.18) : α et β en fonction de LL_1 (Carlier, 1980).....	15
Figure (I.19) : Vue en aval du déversoir latéral à West Drayton Mill, rivière Colne (Bromwich et al, 2003).....	16
Figure (I.20) : Déversoir en terre renforcé avec blocs en béton sur un canal de contrôle des crues	16
Figure (I.21) : Déversoir latéral sur une branche du Grand Canal Union (Bromwich et al, 2003).....	17
Figure (I.22) : Déversoir latéral à l'entrée d'une station de traitement (Bromwich et al, 2003).....	17
Figure (I.23) : Evacuateur de crue du barrage d'Oroville « Californie »	18
Figure (I.24) : Les régimes d'écoulement –schéma de définition-	20
Figure (I.25) : Organigramme de résolution du modèle de Dominguez	21
Figure (II.1) : Forces exercées sur un volume de contrôle (Subramanya, 2009).....	25
Figure (II.2) : Schéma de définition.....	27

Figure (II.3) : Schéma de définition de l'écoulement dans le déversoir latéral (Subramanya, 2009)..	29
Figure (II.4) : Définition des paramètres : (a) coupe longitudinale ; (b) coupe transversale (Hager et Sinniger, 1989).....	33
Figure (II.5) : Condition pseudo-uniforme pour le déversoir latéral (Hager, 1986).....	35
Figure (II.6) : Surface d'eau à écoulement fluvial et contraction linéaire, $\theta < 0$ (Hager, 1986).....	36
Figure (II.7) : Types de profil de surface pour $F < 1$ et $F > 1$, conditions pseudo-uniformes (...); conditions pseudo-critiques (---) (Hager et al, 1989).....	38
Figure (II.8) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta=0$, conditions d'écoulement fluviales (Hager, 1986).....	39
Figure (II.9) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,1$, conditions d'écoulement fluviales.....	39
Figure (II.10) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,2$, conditions d'écoulement fluviales.....	40
Figure (II.11) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,4$, conditions d'écoulement fluviales.....	40
Figure (II.12) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = 0$, conditions d'écoulement torrentielles.....	41
Figure (II.13) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,1$, conditions d'écoulement torrentielles.....	41
Figure (II.14) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,2$, conditions d'écoulement torrentielles.....	42
Figure (II.15) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\theta = -0,4$, conditions d'écoulement torrentielles.....	42
Figure (III.1) : Organigramme de la méthode des éléments finis (Hoffman, 2001)	45
Figure (III.2) : Discrétisation en éléments finis	46
Figure (III.3) : Domaine de solutions globales discrétisées.....	48
Figure (III.4) : La fonction de forme linéaire pour l'élément (i)	48
Figure (III.5) : La fonction de forme pour le nœud i	53
Figure (IV.1) : Dispositif adopté pour l'étude du fonctionnement du déversoir latéral (Hager, 1981).....	63
Figure (IV.2) : Photographies du dispositif expérimental « vue en perspective » (Hager, 1981).....	64
Figure (IV.3) : Photographies du dispositif expérimental « vue de face » (Hager, 1981)	65
Figure (IV.4) : Limnimètre à pointe (Hager, 1981)	66
Figure (IV.5) : Micro-moulinet giratoire (Hager, 1981)	66
Figure (IV.6) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai J).....	68
Figure (IV.7) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai D).....	68
Figure (IV.8) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai E)	69
Figure (IV.9) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai F)	69
Figure (IV.10) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai G).....	70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (I.1) : Valeurs du coefficient m (Carlier, 1980)	19
Tableau (I.2) : Valeurs des coefficients φ_1 et φ_0 (Carlier, 1980)	20
Tableau (II.1) : point de contrôle pour l'écoulement dans les déversoirs latéraux (Hager,1986).....	37
Tableau (IV.1) : Données expérimentales (Hager, 1981)	67
Tableau (IV.2) : Tableau récapitulatif des résultats obtenus dans les essais	70

INTRODUCTION

GÉNÉRALE.

L'un des problèmes fréquemment rencontrés dans l'exercice de conception et calcul des ouvrages et systèmes hydrauliques à surface libre est celui des débits variables dans l'espace. L'ouvrage typique de ce genre d'écoulement est le déversoir latéral.

Les déversoirs latéraux ont été utilisés de manière extensive pour contrôler le niveau d'eau pour l'irrigation et les systèmes de canaux de drainage, afin de dévier les excès d'eau dans les canaux des ouvrages de protection contre les crues. Ils ont également été utilisés comme déversoirs d'orage pour les réseaux d'assainissement urbain.

L'importance de ce type de déversoirs a conduit à une multitude de recherches théoriques et expérimentales à l'image de celle de Yen et Wenzel (1970), Subramanya et Awasthy (1972), El-Khashab et Smith (1976) et Ranga Raju et al (1979). Cependant, une solution analytique complète pour les écoulements à débit spatialement variés par les déversoirs n'est pas possible. Jusqu'à peu, des méthodes approchées fondées sur des expérimentations réalisées à partir d'un éventail limité des nombreuses variables impliquées ont été utilisés.

Comme tout problème de la mécanique des fluides, et de physique en général, ce problème obéit à des concepts mécanistes et est décrit en conséquence par un modèle mathématique bien défini. Ce dernier étant obtenu par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le milieu fluide étudié. L'application de ces principes permet alors de formuler l'équation du mouvement régissant l'écoulement étudié qui est dans ce cas une équation aux dérivées ordinaires (EDO) de premier ordre, non linéaire.

En fait, l'étude et dimensionnement des déversoirs latéraux présentent des difficultés accrues vu la complexité physique du phénomène du déversement non ponctuel. Ainsi, diverses approches simplifiées ont été proposées pour évaluer le débit de déversement en fonction des caractéristiques hydrauliques du déversoir. Cependant ces approches simplistes souffrent de beaucoup de manques et conduisent à des résultats erronés dans plusieurs cas. Pour pallier ces insuffisances, l'approche mathématique reposant sur la phénoménologie réelle du couplage déversement-ligne d'eau en fonction de l'espace s'avère le seul outil rigoureux dont on dispose.

Parmi tant de méthodes vouées à la résolution numérique des équations différentielles, on citera la méthode des éléments finis (MEF). Cette méthode est l'une des méthodes numériques les plus puissantes et répandues actuellement dans le domaine de la mécanique des fluides et l'hydraulique et qui est basée sur l'application systématique des formulations intégrales.

Ainsi, le présent travail s'inscrit dans le cadre de procéder à l'étude numérique du déversoir latéral dans un canal prismatique à profil rectangulaire. Les résultats issus du modèle numérique seront validés sur les expériences de Hager (1981) dans un canal de laboratoire. Alors qu'une discussion et analyse des résultats obtenus permettront de juger la véracité de l'approche numérique dans l'étude de ce genre de problème hydraulique.

Pour atteindre l'objectif fixé, ce travail s'articule autour de quatre chapitres principaux :

Le premier chapitre aura pour objectif de présenter une analyse bibliographique dans laquelle nous rappelons, d'une part, les différents types de déversoirs qui peuvent être trouvés, d'autre part, une étude détaillée des déversoirs latéraux, où nous avons présenté quelques méthodes pour le calcul du débit déversé selon un nombre de chercheurs.

Quant au second chapitre, il est consacré à la modélisation mathématique, dans lequel les équations gouvernant l'écoulement à travers les déversoirs latéraux seront données en adoptant les hypothèses de base qui sont données par De Marchi (1934) et Hager (1986).

Par la suite, une modélisation numérique par la méthode des éléments finis (MEF) sera évoquée au troisième chapitre, noyau de notre travail, quant à lui scindé en quatre parties. La première concerne la présentation générale de la méthode des éléments finis, la seconde est consacré pour la présentation de la méthode de Galerkin, la troisième concerné la méthode des éléments finis par Galerkin, tandis que la dernière sera focalisée sur l'application au cas des déversoirs latéraux.

Dans le dernier chapitre, des applications numériques sont faites sur cinq testes numériques où une comparaison entre les calculs numériques et celles de l'expérimentation permettra de juger la véracité de l'approche numérique dans ce genre de problème hydraulique.

Nous achevons ce mémoire par une conclusion générale et perspectives envisageables dans l'axe de portée du présent travail.

" La science signifie constamment marcher sur une corde raide entre la foi aveugle et la curiosité ; entre expertise et créativité ; entre biais et ouverture ; entre expérience et épiphanie ; entre ambition et passion ; et entre arrogance et conviction, en un mot, entre un vieil aujourd'hui et un nouveau demain."

Heinrich Rohrer

I.

GÉNÉRALITÉS ET THÉORIE DE BASE DES DÉVERSOIRS LATÉRAUX

Dans ce premier chapitre, nous essayons de donner une vue générale sur les caractéristiques et les classifications des déversoirs. Puis nous soulignerons plus spécifiquement les déversoirs latéraux. Il sera ensuite enchaîné par une présentation de l'état de l'art, où nous présenterons un aperçu bibliographique des principaux résultats de recherche dans le domaine de calcul des déversoirs latéraux.

I.1. Déversoirs

I.1.1. Définition

Un déversoir est un dispositif qu'on utilise pour mesurer ou contrôler le débit s'écoulant dans les canaux. Un déversoir est essentiellement une paroi, mince ou épaisse, ayant une hauteur qui peut être variable. Il est disposé verticalement pour obstruer plus ou moins la section du canal.

- A l'amont, le niveau d'eau supposé constant s'abaisse sensiblement au-dessus du seuil. On appelle charge, la hauteur d'eau entre le niveau amont constant et le niveau du seuil.
- A l'aval du seuil, la lame déversante peut prendre différentes formes en rapport avec la charge et la hauteur d'eau à l'aval (Carlier, 1980).

I.1.2. Types des déversoirs

La classification des déversoirs est basée sur leurs caractéristiques telles que le profil et dimensions de la section transversale de la paroi, la forme de l'échancrure, disposition en plan, conditions amont du courant.

I.1.2.1. Déversoirs en mince paroi

Le déversoir est à mince paroi ou à crête mince, si l'épaisseur de la crête est inférieure à la moitié ou même quelquefois aux deux tiers de la charge (Carlier, 1980).

a) *DEVERSOIR RECTANGULAIRE SANS CONTRACTION LATÉRALE : « DEVERSOIR DE BAZIN »*

Sur le déversoir rectangulaire sans contraction latérale, habituellement désigné par déversoir de Bazin, il existe un grand nombre d'observation, ce qui permet d'obtenir une bonne précision dans la mesure des débits (Lancastre, 1996). (Figure I.1)

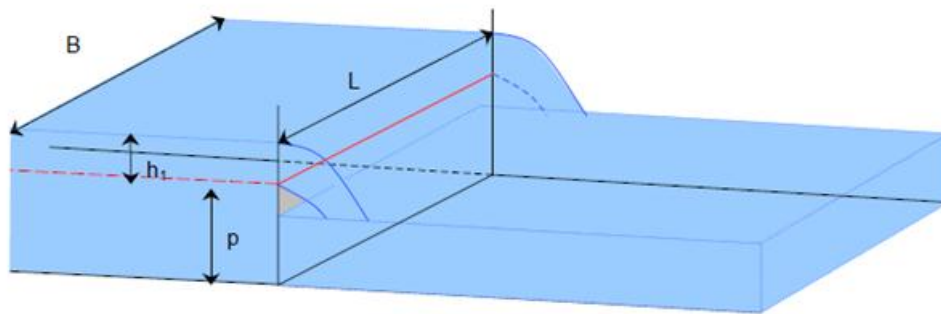


Figure (I.1) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale

b) *DEVERSOIR RECTANGULAIRE AVEC CONTRACTION LATÉRALE*

Un déversoir rectangulaire est dit « avec contraction latérale » lorsque la largeur du canal B est supérieure à la largeur d'écoulement L du déversoir (Figure I.2). Le détail de l'échancrure est illustré sur la figure (I.3).

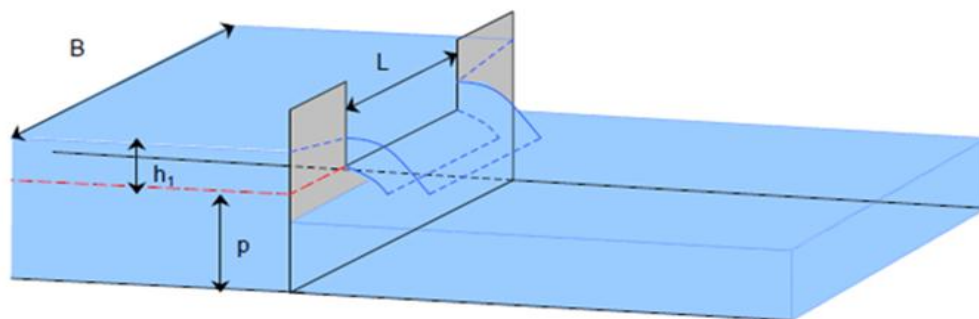


Figure (I.2) : Vue en perspective d'un déversoir rectangulaire avec contraction latérale

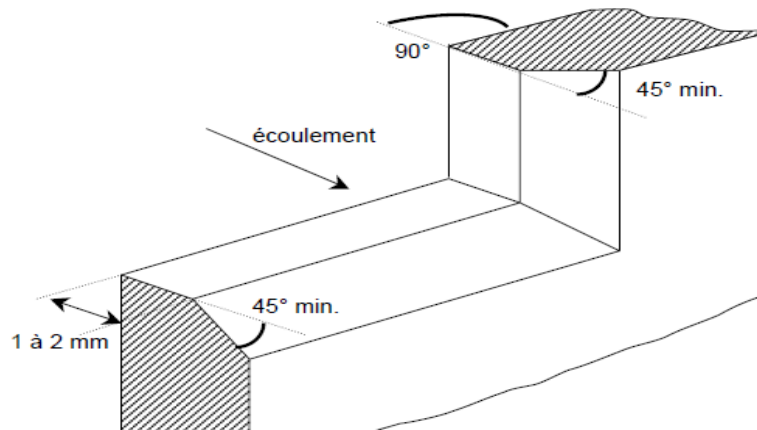


Figure (I.3) : Détails de la crête du déversoir rectangulaire avec contraction latérale

c) DEVERSOIR TRIANGULAIRE

Ce type de déversoir comporte une pelle (P) dont l'échancrure en forme de V est symétrique par rapport à l'axe du canal (la bissectrice est verticale). Il est généralement appelé le déversoir de Thomson (MFTETM, 2005). Le détail de l'échancrure est illustré dans la figure (I.5).

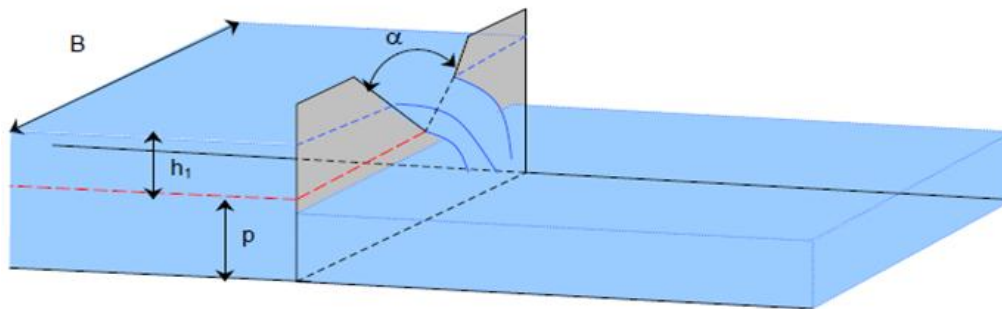


Figure (I.4) : Vue en perspective d'un déversoir triangulaire

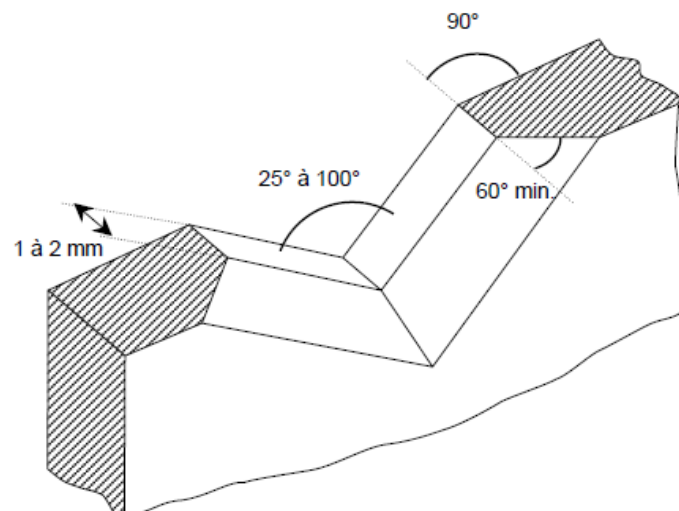


Figure (I.5) : Détails de la crête d'un déversoir à échancrure triangulaire

d) *DEVERSOIR TRAPEZOIDAL : « DEVERSOIR DE CEPOLETTI »*

D'une manière générale, la section de contrôle d'un déversoir trapézoïdal a la forme d'un trapèze isocèle. Le déversoir trapézoïdal le plus fréquemment utilisé est désigné par *déversoir Cipoletti*, dont la crête est constituée par la plus petite base, de largeur L ; la pente des cotés est de 1/4 (horizontale/verticale) comme il est illustré dans la figure (I.6) (Lancastre, 1996).

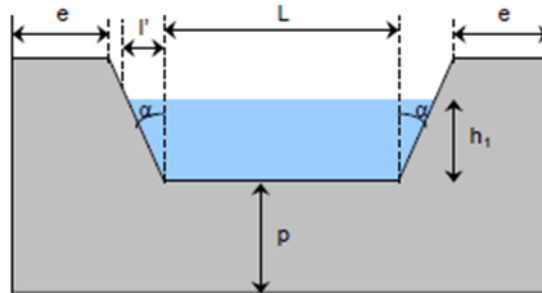


Figure (I.6) : Coupe transversale d'un déversoir trapézoïdal

e) *DEVERSOIR CIRCULAIRE*

Ce type de déversoir, assez similaire à un écoulement de type orifice du point de vue géométrique, n'en est pas moins totalement différent du point de vue hydraulique (figure I.7).

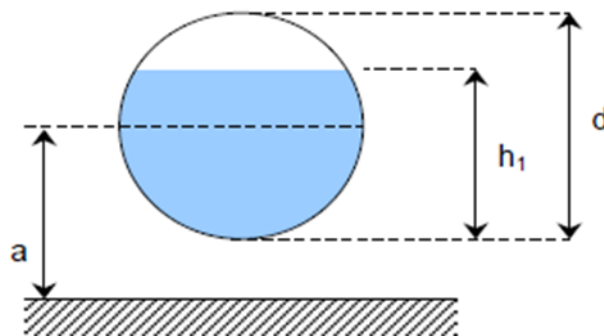


Figure (I.7) : Coupe transversale d'un déversoir circulaire

En effet, ce type de déversoir comporte une section d'écoulement à surface libre et présente les avantages suivants :

- Simplicité et facilité d'exécution et de mise en place (il n'y a ni à placer le seuil parfaitement horizontalement comme c'est le cas pour un déversoir rectangulaire, ni à placer la bissectrice parfaitement verticalement comme c'est le cas pour un déversoir triangulaire),
- Facilité de ventilation de la nappe,
- Une plus grande précision que le déversoir rectangulaire pour la mesure des petits débits (MFTETM, 2005).

f) *DEVERSOIR LABYRINTHE*

Ce type de déversoir permet d'augmenter la longueur de la crête du déversoir. De ce fait, la capacité de débit en est augmentée. La capacité du déversoir est fonction de la longueur totale de la crête, de la longueur effective et du coefficient de crête (figure I.8).

Le coefficient de crête dépend de la longueur totale de la crête, de la hauteur du déversoir, de son épaisseur, de la forme de la crête, du sommet de la crête et de l'angle des côtés du déversoir (MFTETM, 2005).

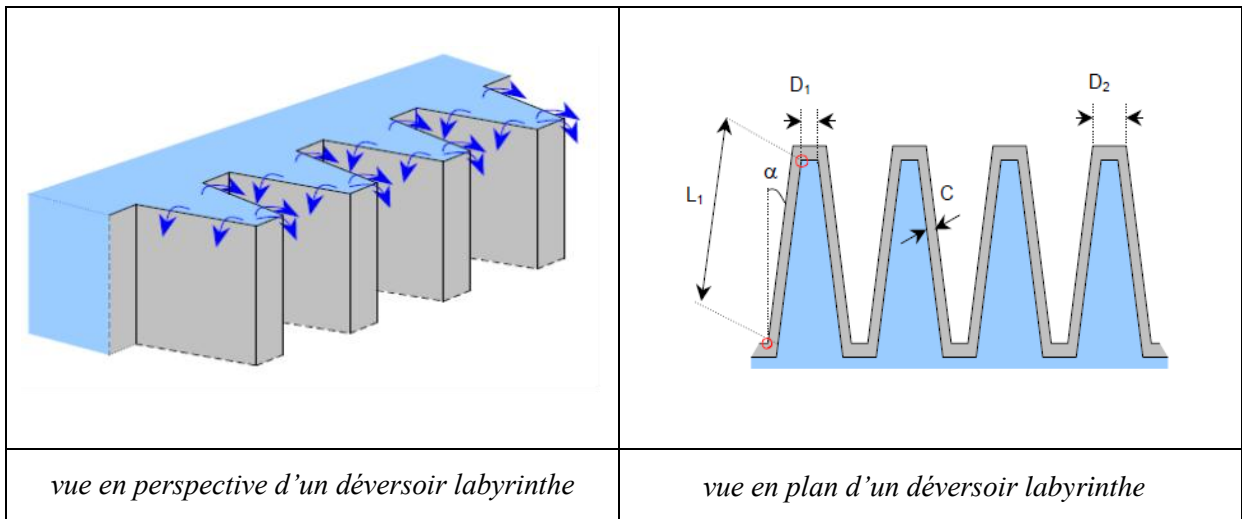


Figure (I.8) : Déversoir labyrinthe

g) *DEVERSOIR INCLINE*

Le déversoir incliné a une crête perpendiculaire à l'axe du canal, mais le plan qui le contient est incliné par rapport à la verticale d'un angle i en degrés figure(I.9).

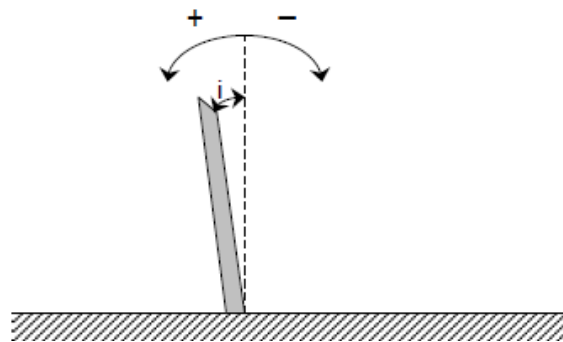


Figure (I.9) : Coupe longitudinale d'un déversoir incliné

Ce dernier est compté positivement si le déversoir est incliné vers l'amont (dans ce cas le débit est diminué) et compté négativement s'il est incliné vers l'aval (dans ce cas le débit est augmenté).

h) *DEVERSOIR OBLIQUE*

C'est un déversoir sur un plan vertical dont la crête est oblique par rapport à l'axe longitudinal du canal où il est installé (Lancastre, 1996). Le schéma de définition est illustré dans la figure(I.10).

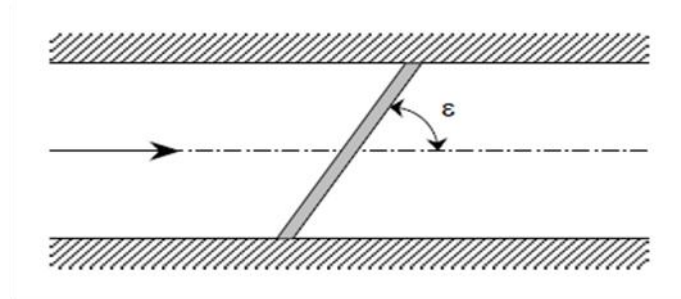


Figure (I.10) : Vue en plan d'un déversoir oblique

i) *DEVERSOIR LATERAL*

Le déversoir latéral est un déversoir à déversement libre situé sur le côté d'un canal, parallèlement à son axe, qui permet à une partie du liquide de se répandre sur le côté lorsque la surface de l'écoulement dans le canal s'élève au-dessus de la crête de déversoir (Subramanya, 2009).

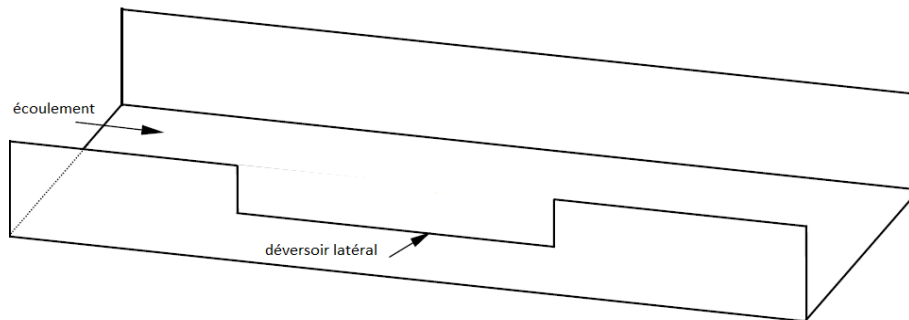


Figure (I.11) : Schéma de définition d'un déversoir latéral

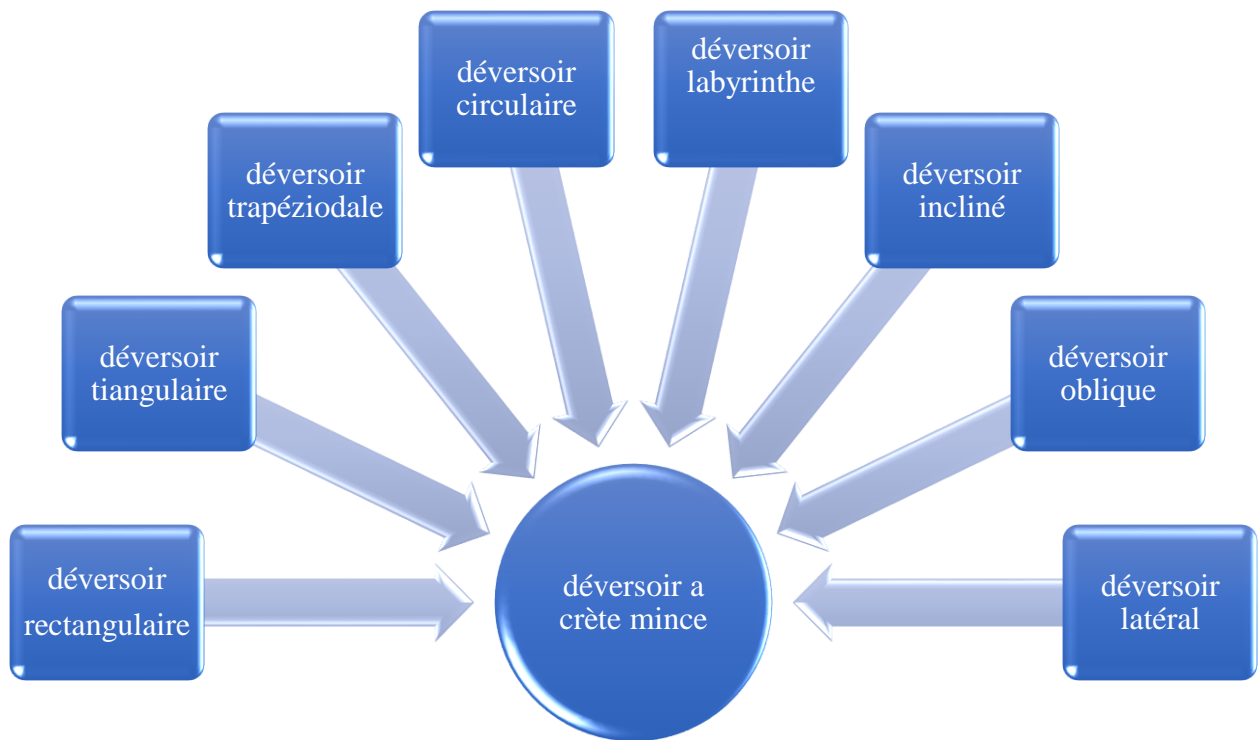


Figure (I.12) : Les différents types des déversoirs à crête mince

j) CHOIX D'UN DEVERSOIR DE MESURE EN MINCE PAROI

La description des différents types de déversoirs permet de nous dire que les déversoirs en mince paroi permettent d'obtenir une bonne précision. Le déversoir rectangulaire est plus précis ($\epsilon \approx 1\%$), mais moins sensible que le déversoir triangulaire ($\epsilon \approx 1$ à 2%). Les déversoirs triangulaires sont utilisés pour la mesure des petits débits, car il est recommandé de ne pas utiliser de déversoir rectangulaire de moins de 30 litres par seconde, soit lorsque la gamme de débits à mesurer est très étendue et que l'on ne peut pas admettre une grande variation de la hauteur de lame déversant (Bennis, 2014).

I.1.2.2. Déversoir à crête épaisse

On désigne par déversoir à crête épaisse, ou à large seuil, une structure sur laquelle les lignes de courant peuvent atteindre, tout au moins sur une courte distance, un parallélisme tel que, la section de contrôle, l'on puisse admettre qu'il existe une distribution hydrostatique des pressions à la section de contrôle. Pour ce type de déversoir, on distingue deux grandes formes par rapport à sa longueur qui sont divisés en plusieurs types à lui-même. Les différents types de ce dernier sont classés suivant le schéma ci-dessous.

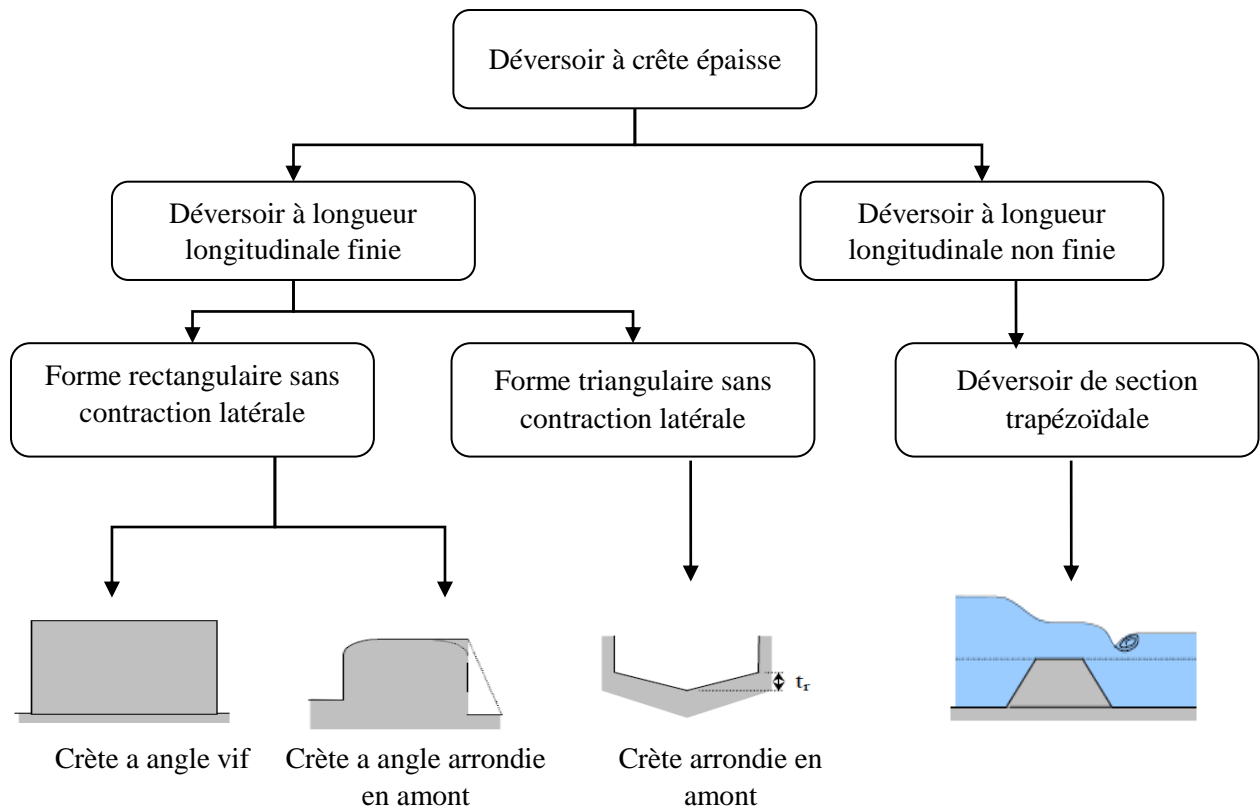


Figure (I.13) : Les types des déversoirs à crête épaisse

a. DEVERSOIR RECTANGULAIRE A SEUIL EPAISSE

Ce seuil est normalisé (BSI-British Standard Institution 3680 ,1969). Le bloc déversant doit être placé dans un canal rectangulaire et les surfaces doivent être lissées. On veillera spécialement à ce que l'arête d'amont soit bien définie et que l'angle soit à 90°, figure (I.13).

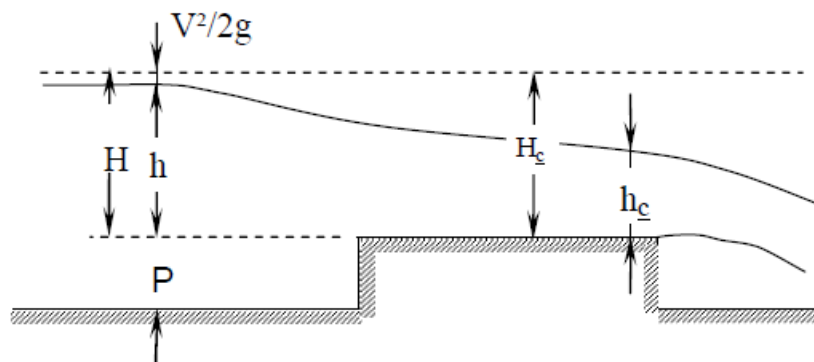


Figure (I.14) : Déversoir à paroi épaisse –Schéma de description-

b. DEVERSOIR A PROFIL EN LONG TRIANGULAIRE

Il y a parfois avantage à utiliser une section de contrôle triangulaire quand on se propose de mesurer une vaste game de débits. Les débits seront donnés avec une précision raisonnable, même quand ils sont reletivement faibles (Lancastre,1996).

Les éléments géométriques de ce type de déversoir sont définis sur la figure (I.14).

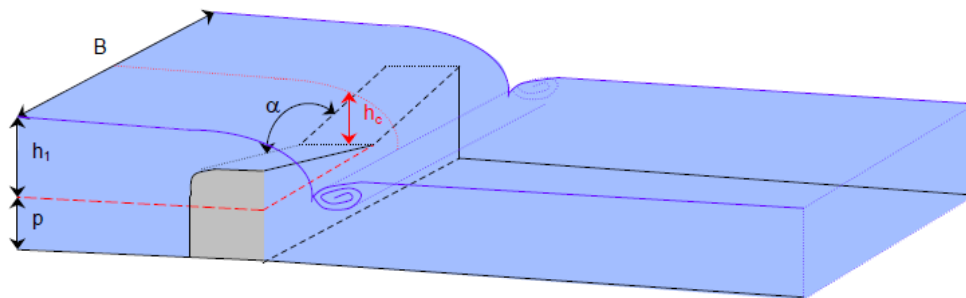


Figure (I.15) : Vue en perspective d'un déversoir triangulaire à crête épaisse

I.1.3. Conditions préalables

Deux conditions essentielles doivent être remplies pour pouvoir employer les formules de calcul de débit.

I.1.3.1. Protocole de prise de mesure

La mesure de la hauteur d'eau en amont du déversoir par rapport à la crête du seuil doit être effectuée à une distance d'environ 3 à 4 fois la hauteur d'eau maximale que peut évacuer le déversoir dans les conditions d'utilisation. La nature et la facilité des accès pour cette prise de mesure peuvent toutefois influencer sur cette préconisation.

La mesure de la hauteur d'eau amont est, en effet, très aléatoire, on essaie en pratique de prendre la mesure là où la ligne d'eau est hors d'influence du déversoir.

I.1.3.2. Condition d'aération pour un déversoir à crête mince

Outre la raison environnementale (besoin des êtres vivants en oxygène), un déversoir doit être aéré du fait d'endommagements de l'ouvrage susceptibles de se produire sans cette aération. En effet, le déversement de la lame d'eau au-dessus du seuil à crête mince provoque l'emprisonnement de l'air situé sous la nappe déversant. La fluctuation de la pression de l'air piégé entre la lame déversant et le seuil peut alors entraîner des vibrations dommageables à l'ouvrage du fait de l'apparition du phénomène de cavitation. C'est pourquoi, pour rétablir la pression atmosphérique sous la lame déversant, il est nécessaire de prévoir des dispositifs d'aération.

Pour assurer l'aération indispensable de la lame déversante, divers dispositifs peuvent être réalisés selon l'épaisseur de la lame d'eau (MFTETM, 2005).

Ainsi, pour les lames d'eau épaisses, il peut être envisagé de :

- créer symétriquement dans les parois du canal des orifices mettant en communication la surface inférieure de la lame avec l'atmosphère,
- rétrécir la lame d'eau déversante afin de mettre en communication l'air extérieur avec celui emprisonné sous la nappe

Pour les lames d'eau faibles, il peut être envisagé d'ajouter des becs de fractionnement sur la crête du déversoir.

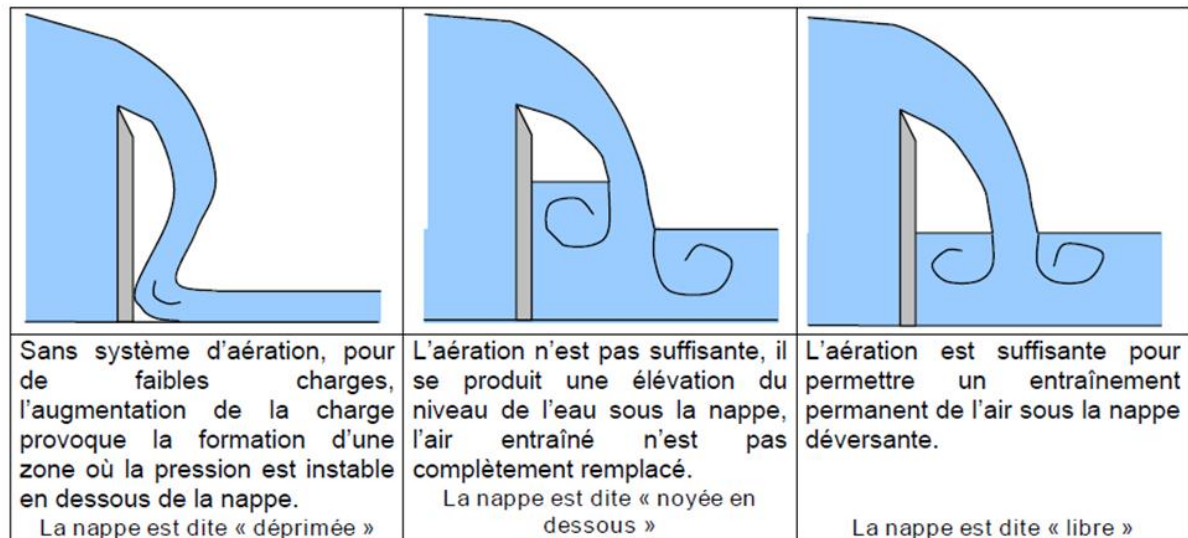


Figure (I.16) : Les différents systèmes d'aération

I.1.4. Formule du débit passant par les déversoirs

Quelque soit la nature du déversoir, la formule générale pour la détermination du débit est la suivante (Carlier, 1980) :

$$Q = C_d L \sqrt{2g} H^2 \quad (I.1)$$

Tels que :

- L : La largeur du déversoir[m] ;
- H : La charge amont sur le déversoir[m] ;
- C_d : Le coefficient de débit ;
- g : L'accélération de la pesanteur [m/s²].

I.1.4.1. Vitesse d'approche et le coefficient C_v

Pour la précision des mesures et la validité du coefficient de débit C_d , il est essentiel qu'en amont du déversoir, l'écoulement soit aussi calme que possible et que la répartition des vitesses soit bien régulière. L'écoulement doit respecter les conditions suivantes (MFTETM, 2005) :

- des vitesses d'approche assez faibles,
- une répartition des vitesses régulière et symétrique par rapport à l'axe longitudinale de l'écoulement et sur toute sa largeur,
- assurer un profil de vitesse normal au plan de symétrie de l'écoulement.

La charge amont H_1 utilisée dans les formules est généralement prise égale à la hauteur d'eau h_1 à l'amont du déversoir, sachant que l'approximation faite est corrigée par le Coefficient de débit (en utilisant un coefficient multiplicateur intégré dans celui-ci).

En effet, le terme de vitesse est pris en compte sous la forme d'un coefficient de vitesse d'approche, noté C_v , que l'on multiplie au coefficient de débit. Quand les vitesses sont négligeables, ce coefficient est pris égal à 1 et la charge amont est assimilable à la hauteur d'eau amont. Par contre, si les vitesses sont élevées à l'emplacement de la mesure de la hauteur d'eau amont, le terme $V^2/2g$ doit être pris en compte dans les formules de débit sous la forme du coefficient de vitesse C_v que l'on multiplie au coefficient de débit.

I.1.4.2. La formule du coefficient C_v

- La formule générale s'écrit alors (Richard, 1985) :

$$C_v = (H_1/h_1)^u \quad (I.2)$$

Avec :

u : Est la puissance de la variable h dans l'équation de débit. Par exemple :

$u = 1,5$ Pour un déversoir rectangulaire ;

$u = 2,5$ Pour un déversoir triangulaire.

- Pour un déversoir rectangulaire à crête mince ces formules sont transposées comme suit :

- o Pour une vitesse d'approche négligeable : $Q = C_d L (h_1)^{3/2} \sqrt{2g}$

- o Pour une vitesse d'approche non négligeable : $Q = C_d C_v L (h_1)^{3/2} \sqrt{2g}$

Le débit Q s'exprime donc en fonction de la largeur d'écoulement L , de la hauteur d'eau amont au-dessus de la crête du seuil h_1 , d'un coefficient de débit C_d et d'un coefficient C_v prenant en compte le terme de vitesse à l'amont du déversoir. Pour certains cas particuliers, notamment de part la forme du déversoir (triangulaire, circulaire,...), d'autres paramètres entrent en compte, tels que l'angle d'ouverture de l'échancrure du déversoir triangulaire ou le diamètre du déversoir circulaire, par exemple.

La littérature recense diverses formules pour déterminer l'expression du débit déversé par chaque type de déversoirs qui sont mentionnés précédemment et à partir de cette différence nous pouvons trouver plusieurs formules du coefficient de débit qui ont été proposées par plusieurs chercheurs dans le passé.

I.1.4.3. Modélisation mathématique de déversement aux travers d'un déversoir frontal

Les déversoirs frontaux sont couramment rencontrés dans les réseaux d'assainissement. La formule permettant de calculer le débit dérivé par un déversoir à seuil mince peut être déduite de l'application de l'équation de Bernoulli. On aboutit après simplification à la formule suivante :

$$Q = C_d L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad (I.3)$$

Pour un déversoir à seuil mince, sans contraction latérale, Bazin a proposé en 1888 la formule suivante pour le calcul du coefficient de débit C_d :

$$C_d = \left(0,405 + \frac{0,003}{H}\right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right] \quad (I.4)$$

Avec :

H : La charge en amont du déversoir [m] ;

g : L'accélération de la pesanteur [m/s²] ;

P : La hauteur de seuil [m] ;

L : La largeur du déversoir [m].

Cette formule est applicable dans les limites suivantes des divers paramètres :

LIMITES D'APPLICATION

$$0,08m < H < 0,7m$$

$$0,2m < P < 2m$$

$$L > 4H$$

L'association Internationale de Normalisation(ISO) a adopté la formule de (Carter et al, 1957) où la formule du coefficient de débit C_d est plus élaboré. La formule générale est :

$$Q = C_d \frac{2}{3} \sqrt{2g} L_e H_e^{\frac{3}{2}} \quad (I.5)$$

Tels que :

Q : Débit en volume [m³/s] ;

C_d : Coefficient de débit ;

g : Accélération de la pesanteur [m/s²] ;

L_e : Longueur " effective" du déversoir [m] ;

H_e : Charge "effective" du déversoir [m] ;

L_1 : Largeur du canal [m].

$$L_e = l + K_1$$

$$H_e = H + K_h$$

$K_h = 1mm$ quelque soit la largeur du canal et du déversoir

K_1 est donné par la courbe de la figure (I.17)

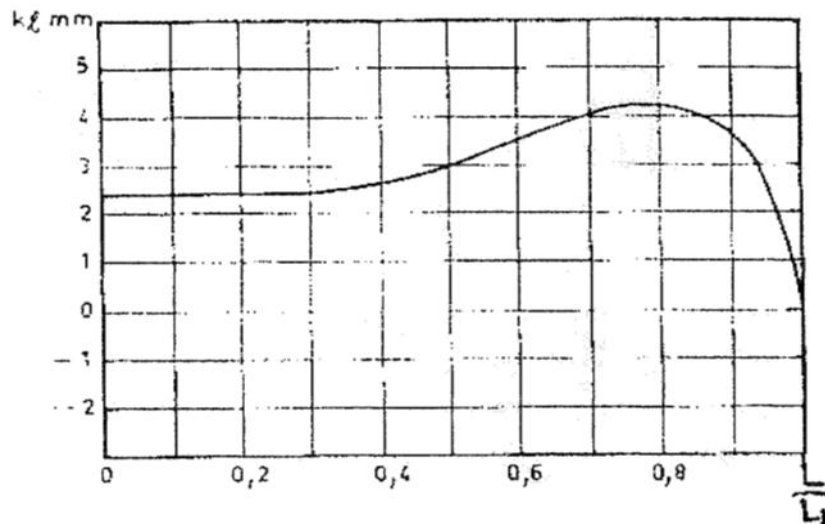


Figure (I.17) : K_1 en fonction de L/L_1 (Carlier, 1980)

Le coefficient de débit C_d est une fonction linéaire du rapport H/P , suivant la loi :

$$C_d = \alpha + \beta \frac{H}{P} \quad (I.6)$$

Avec α et β sont variés avec le rapport L/L_1 suivant les courbes de la figure (I.18)

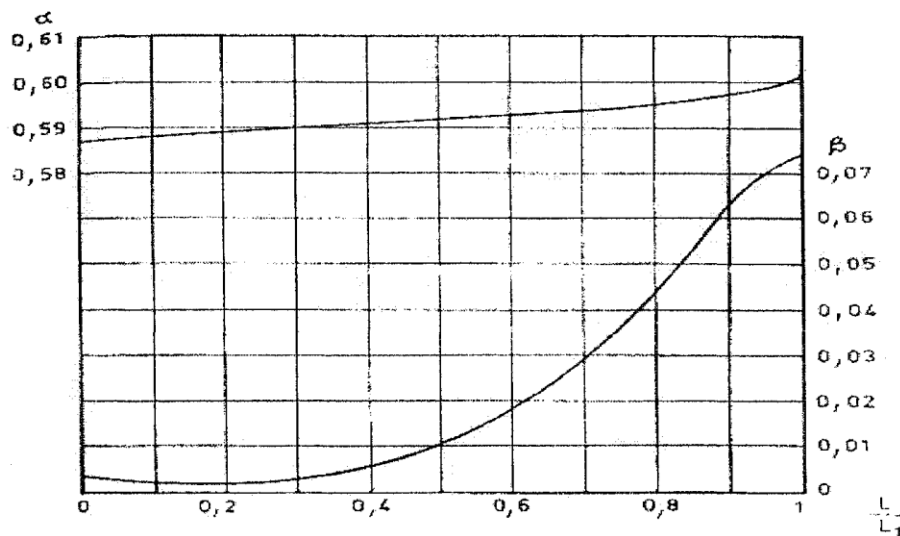


Figure (I.18) : α et β en fonction de L/L_1 (Carlier, 1980)

I.2. Déversoir latéral

I.2.1. Définition

Le déversoir latéral est un déversoir ménagé dans la paroi latérale d'un canal. Nous supposons sa crête horizontale de longueur L et désignerons par P la hauteur de pelle. Le fond du canal sera supposé horizontal sur la courte distance considérée (Carlier, 1980).



Figure (I.19) : Vue en aval du déversoir latéral à West Drayton Mill, rivière Colne

(Bromwich et al, 2003)

I.2.2. Utilisation et domaines d'application

Les déversoirs latéraux sont des structures de contrôle hydraulique utilisées pour détourner le flux d'un canal principal ou secondaire dans un canal latéral lorsque le niveau d'eau dépasse une limite spécifiée. Dans ce qui suit, on donne des exemples d'applications typiques pour les déversoirs latéraux.

I.2.2.1. Structures de contrôle des rivières

Dans les rivières, les déversoirs latéraux sont généralement utilisés pour détourner les débits d'inondation vers un stockage temporaire en dehors des cours d'eau. (Rickard et al, 2003)



Figure (I.20) : Déversoir en terre renforcé avec blocs en béton sur un canal de contrôle des crues

(Bromwich et al, 2003)

1.2.2.2. Canaux d'irrigation et canaux navigables

Où on trouve des bifurcations du canal principal pour but de déverser une quantité de débit vers un autre côté.



Figure (I.21) : Déversoir latéral sur une branche du Grand Canal Union (Bromwich et al, 2003)

1.2.2.3. Systèmes d'assainissement et traitement des eaux

Le déversoir latéral est utilisé dans les réseaux d'assainissement, sous le nom de déversoir d'orage, permettant de déverser le trop-plein des conduites, pour éviter le risque d'inondation de la station d'épuration aux cas des crues exceptionnelles. Donc ce type de déversoir est un ouvrage de réglage et de contrôle.



Figure (I.22) : Déversoir latéral à l'entrée d'une station de traitement (Bromwich et al, 2003)

1.2.2.4. Les barrages ou les évacuateurs de crues

La maîtrise des crues est généralement assurée par l'équipement du barrage par un évacuateur de crues qui assure le passage des crues sans incident. Ce dernier est doté par un seuil de déversoir pour mieux déverser le débit de crues.



Figure (I.23) : Evacuateur de crue du barrage d'Oroville « Californie »

I.2.3. Modélisation du déversoir latéral

L'écoulement par les déversoirs latéraux est particulièrement complexe à modéliser. Les études réalisées pour le calcul du débit au travers d'un déversoir latéral remontent au début de siècle. De Marchi en 1934 et Ackers en 1957 sont les premiers à avoir fourni des modèles simples pour le calcul du débit dérivé par les seuils latéraux. Ces modèles s'appliquent pour des seuils de faible longueur. Ces études ont été reprises et perfectionnées par Smith en 1973 et El-Khashab et al en 1976 qui ont généralisé ces approches pour tout type de déversoir latéral. Les modèles simplifiés ont continué néanmoins à être développés. On peut citer les travaux de Dominguez en 1945, de Subramanya et al en 1972 et d'Allen en 1957 (Yared, 2003).

I.2.3.1. Fondement théorique

On se propose dans cette partie de fournir les bases théoriques qui nous permettent de calculer le volume d'eau déversé par un déversoir latéral. On décrira deux modèles simplifiés pouvant être utilisés pour un calcul rapide du débit déversé.

I.2.3.2. Modélisation simplifiée

Comme nous avons vu précédemment, la formule générale pour le calcul du débit déversé par un déversoir latéral est identique à celle du déversoir frontal :

$$Q = C_d L \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \quad (I.7)$$

Avec la valeur de la charge H prise en compte varie suivant les hauteurs. Ça peut être la charge en amont ou en aval du déversoir ou la moyenne des deux. Le coefficient de débit C_d varie en fonction de la vitesse, de la hauteur de la crête du déversoir, du rapport du débit déversé avec le débit dans le canal principal (Hager, 1987).

Dans le cadre de ce travail on s'intéresser à deux méthodes simplifiées, la méthode de Dominguez (1945) et la méthode d'Allen (1956).

a. METHODE DE DOMINGUEZ (1945)

Dominguez a proposé une méthode simple pour le calcul du débit déversé au travers d'un déversoir latéral à partir d'une formule de type :

- Si le régime d'écoulement est fluvial

$$Q = \varphi_1 m L \sqrt{2g} h_1^{\frac{3}{2}} \quad (I.8)$$

Dans ce cas, l'écoulement est sous la dépendance des conditions à l'aval, ces conditions fixent donc la charge h_1 à l'aval de l'échancrure.

Le coefficient m dépend des caractéristiques géométriques du déversoir (charge et forme de la crête) ; il peut être pris égal aux valeurs moyennes données dans le tableau suivant :

Tableau (I.1) : Valeurs du coefficient m (Carlier, 1980)

Charge moyenne(m) $\frac{h_0 + h_1}{2}$	0.10	0.15	0.20	0.30	0.50	0.70
Crête mince, nappe libre	0.370	0.360	0.355	0.350	0.350	0.350
Crête épaisse et arrondie	0.315	0.320	0.320	0.325	0.325	0.330
Crête épaisse à arrête vives	0.270	0.270	0.273	0.275	0.276	0.280

La détermination du coefficient φ_1 nécessite la connaissance des caractéristiques de l'écoulement. Pour cela on introduit un coefficient k qui s'exprime par :

$$k = \frac{h_0}{h_1} \quad (I.9)$$

Tel que :

h_0 : La charge à l'amont du déversoir ;

h_1 : La charge à l'aval du déversoir.

- Si le régime d'écoulement est torrentiel

$$Q = \varphi_0 m L \sqrt{2g} h_0^{\frac{3}{2}} \quad (I.10)$$

Dans ce cas, l'écoulement est sous la dépendance des conditions à l'amont qui fixeront donc la charge h_0 à l'amont de l'échancrure. Le coefficient m ayant les valeurs indiquées précédemment et le coefficient φ_0 dépendant du rapport de k (Carlier, 1980).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de φ pour l'écoulement fluvial (φ_1) et pour l'écoulement torrentiel (φ_0) en fonction de k , suivi par un schéma de définition des deux types de régime d'écoulement Figure (I.22).

Tableau (I.2) : Valeurs des coefficients (φ_1) et (φ_0) (Carlier, 1980)

Régime fluvial $k (= \frac{h_0}{h_1}) < 1$	Régime torrentiel $k (= \frac{h_0}{h_1}) > 1$	φ_1 ou φ_0
0	∞	0.400
0.05	20	0.417
0.1	10	0.443
0.2	5	0.491
0.3	3.33	0.543
0.4	2.50	0.598
0.5	2	0.659
0.6	1.67	0.722
0.7	1.43	0.784
0.8	1.25	0.856
0.9	1.11	0.924
1	1	1

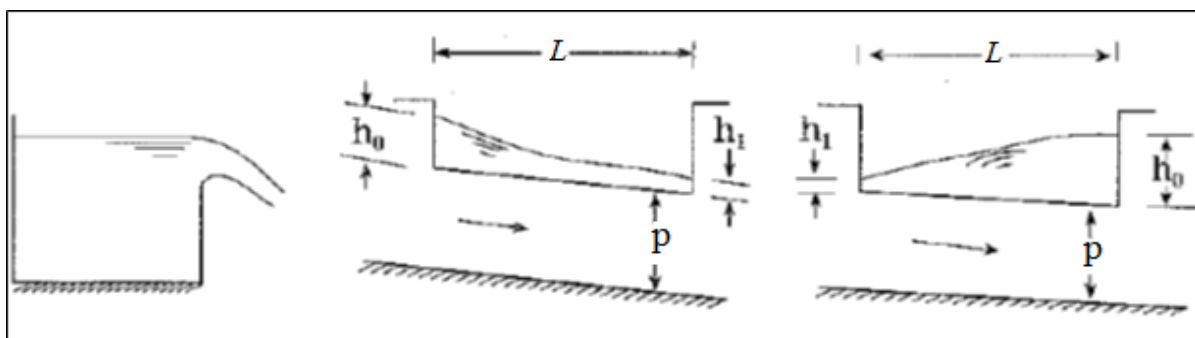


Figure (I.24) : Les régimes d'écoulement –schéma de définition-

b. ALGORITHME DE RESOLUTION DU MODELE DE DOMINGUEZ

On se sert des caractéristiques géométriques et physiques du conduit et du déversoir ainsi que du débit amont, pour déterminer le régime de l'écoulement (fluvial ou torrentiel). On commence le calcul en faisant une hypothèse sur le débit en aval du déversoir. On détermine la charge en aval à l'aide de l'équation de Manning, ensuite on détermine le débit déversé par la formule de Dominguez. Après on fait une vérification de débit, si le débit en amont est égal à la somme du débit aval supposé et le débit déversé calculé. On réitère ces calculs jusqu'à la convergence des deux valeurs de débit (Yared, 2003).

La figure ci-après représente l'organigramme de calculs du débit déversé pour ce modèle où :

Q_a = débit amont

Q_{av} = débit aval

Q_d = débit déversé

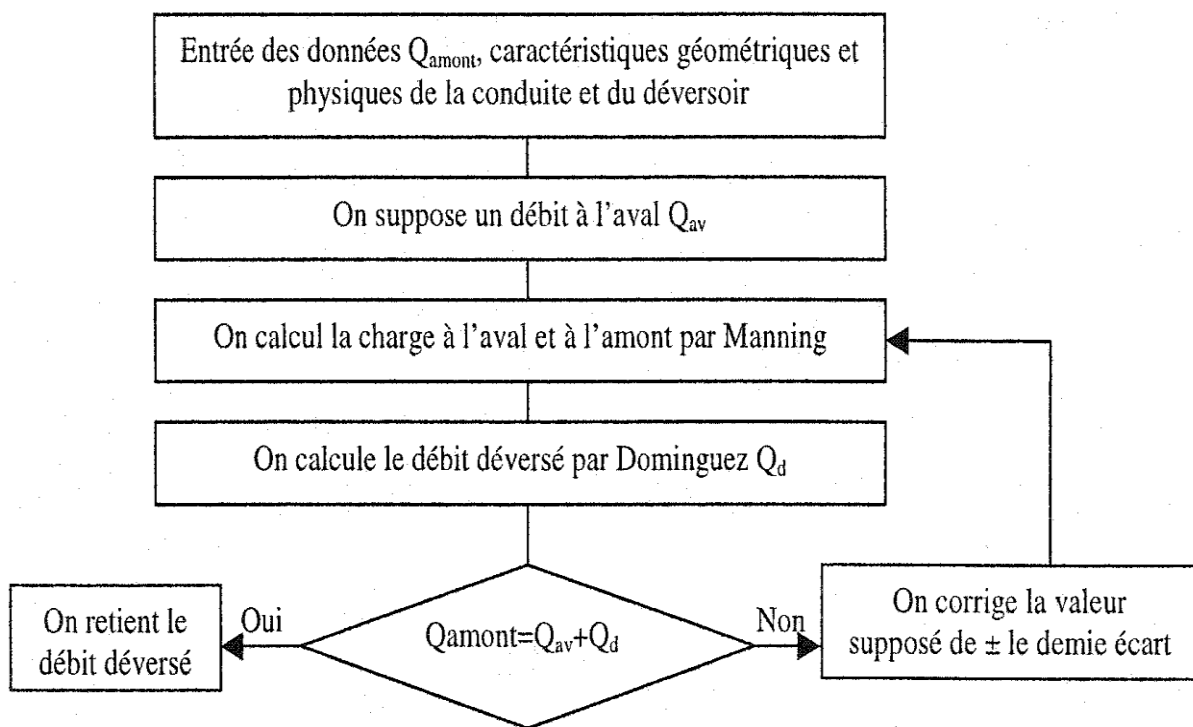


Figure (I.25) : Organigramme de résolution du modèle de Dominguez

c. METHODE D'ALLEN (1956)

C'est une méthode simple qui suppose l'écoulement systématiquement torrentiel. Cette méthode appliquée à un déversoir latéral dans une conduite circulaire ne demande que la connaissance du débit à l'amont du déversoir, (Allen, 1957). La formule générale est donnée par :

$$\frac{Q_e}{Q_p} = 0,22 \left(\frac{L}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\left[\frac{Q}{Q_p} - 1,6549 \left(\frac{C}{D}\right)^{1,9766}\right]}{1,4305 \left(\frac{C}{D}\right)^{-3,756}} \quad (I.11)$$

Avec :

Q : est le débit amont [m^3/s] ;

Q_e : est le débit déversé [m^3/s] ;

Q_p : est le débit dans la conduite pleine [m^3/s] ;

L : est la longueur du déversoir dans le sens de l'écoulement [m] ;

D : est le diamètre de la conduite [m] ;

C : est la hauteur du seuil [m].

I.2.4. Synthèse bibliographique et état de l'art

L'écoulement sur les déversoirs latéraux est un cas typique d'écoulement spatialement varié. Une solution analytique complète des équations régissant le déversement sur les déversoirs latéraux étant compliquée. Les déversoirs latéraux sont extrêmement utiles dans les systèmes d'irrigation et de drainage comme un moyen de détourner l'excès d'eau en relief des canaux de protection contre les inondations et de débordement des systèmes d'égouts urbains. Les études existantes portent principalement sur l'application du principe énergétique dans l'analyse d'écoulement du déversoir latéral.

De Marchi (1934), a été l'un des premiers enquêteurs à donner des équations pour écoulement sur les déversoirs latéraux. Subramanya et Awasthy (1972), ont étudié la variation du coefficient de débit avec le nombre de Froude dans des conditions subcritiques et supercritiques. A partir des études expérimentales, ils ont trouvé que dans un état supercritique pour les déversoirs latéraux, le coefficient de débit à hauteur nulle varie linéairement avec le nombre de Froude.

Hager (1987) a discuté du fait que, lorsque l'analyse unidimensionnelle est utilisée, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement du déversement latéral provoquent un changement de la charge supplémentaire qui peut être positif ou négatif, en fonction des conditions d'écoulement. Bremen et Hager (1989) ont travaillé sur des déversoirs à canal latéral rectangulaire. Les résultats des observations expérimentales sont présentés avec une attention particulière aux effets d'une section non prismatique, et pente sur le profil de la surface libre. Pour l'écoulement subcritique, la différence des profils de surface le long l'axe du canal et les

parois latérales sont soulignées. Les configurations du débit avec incidence supercritique et la formation possible de ressauts hydrauliques le long de la longueur d'entrée latérale ont été également établis. Les observations sont comparées avec des prédictions basées sur une approche théorique.

Hager (1999), a discuté les concepts et les équations de base régissant l'écoulement dans les canaux latéraux. D'autres investigateurs comme Khashab et Smith (1976), Frazer (1957), Cheong (1991), Uyumaz (1997), Uyumaz et Smith (1981) et Smith (1973) ont contribué à la fois expérimentalement et analytiquement à l'étude de l'écoulement sur les déversoirs latéraux pour différentes conditions d'écoulement (Durga Rao et Pillai, 2007).

I.3. Conclusion

La compréhension profonde des phénomènes hydrauliques est indispensable pour toute étude dans le domaine. Le premier chapitre de notre étude est consacré à identifier et examiner dans un premier temps les différents types de déversoirs qui peuvent être trouvés. Dans un second temps nous nous sommes penchés sur l'étude détaillée des déversoirs latéraux, où nous avons présenté quelques méthodes pour le calcul du débit déversé selon un nombre de chercheurs. Le chapitre suivant sera consacré aux méthodes rigoureuses qui seront basées sur les équations différentielles ordinaires.

" Les équations aux dérivées partielles sont la base de tous les théorèmes physiques. Dans la théorie des ondes dans les gaz, liquides et solides, dans l'étude de l'élasticité, dans les systèmes optiques, partout les équations aux dérivées partielles formulent les lois fondamentales de la nature qui peuvent être vérifiées par l'expérience."

Bernhard Riemann

II.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT

Après avoir présenté quelques aspects théoriques relatifs aux déversoirs et exposé l'état de l'art sur le sujet, nous aborderons à présent la modélisation mathématique du phénomène. L'application simultanée des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement permettra de formuler le système d'équations différentielles qui gouvernent l'écoulement à travers les déversoirs. Une discussion du système d'équation proposé dans la littérature et sa solution générale seront données.

II.1. Démonstration des équations différentielles de base

Pour l'étude de l'écoulement spatialement varié, les hypothèses suivantes seront faites (Chow, 1959) :

- La distribution de pression est hydrostatique ;
- La méthode d'analyse unidimensionnelle est utilisée (le facteur de correction d'énergie cinétique α est utilisé pour représenter adéquatement la non-uniformité de la distribution des vitesses) ;
- Les pertes par frottement sont adéquatement représentées par la formule de Manning ;
- Le déversement de l'eau n'affecte pas le contenu énergétique par unité de masse d'eau dans le canal ;
- L'écoulement est considéré permanent ;
- Le canal est prismatique et de pente faible.

Le débit varie le long du canal en raison de l'ajout ou du déversement latéral. Ainsi, le débit spatialement variable peut être classé en deux catégories : avec décharge croissante et avec décharge décroissante. Comme il existe une différence considérable dans le flux et l'analyse de ces deux catégories, la discussion est donnée séparément pour l'écoulement avec un débit croissant et l'écoulement avec un débit décroissant (Subramanya, 2009).

II.1.1. Ecoulement avec débit croissant

Considérons un volume de contrôle formé par deux sections 1 et 2 distantes d'un incrément spacial Δx (figure II.1).

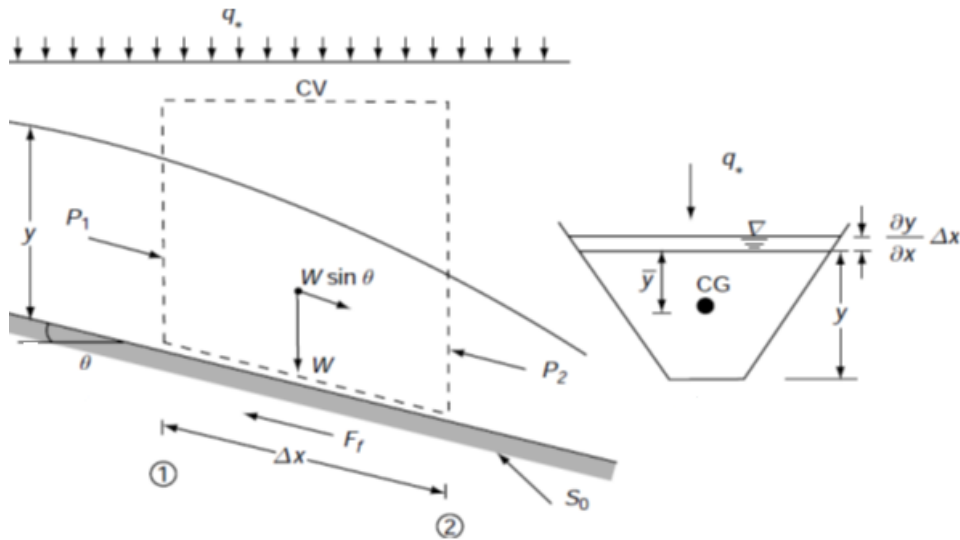


Figure (II.1) : Forces exercées sur un volume de contrôle (Subramanya, 2009)

En appliquant l'équation de quantité de mouvement dans la direction longitudinale x entre les deux sections, on trouve :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q \Delta \vec{V} \tag{II.1}$$

Les forces extérieures s'exerçant sur la tranche liquide projetées sur l'axe x du canal se composent de :

- Les forces de pressions : $P = \bar{\omega} A \bar{y}$;
- La composante du poids du volume de contrôle dans la direction x : $W \sin \theta$;
- La force de frottement avec le fond : $F_f = \bar{\omega} A S_f \Delta x$.

Où :

\bar{y} : La profondeur du centre de gravité ;

S_f : La pente du frottement ;

$\bar{\omega}$: Le poids spécifique de l'eau ;

A : La surface mouillée.

Ainsi, l'équilibre dynamique des forces extérieures de surface et de volume s'écrira :

$$M_2 - M_1 = P_1 - P_2 + W \sin \theta - F_f \quad (II.2a)$$

Ou :

$$\Delta M = -\Delta P + W \sin \theta - F_f \quad (II.2b)$$

Avec :

M : La quantité de mouvement par unité de temps qui est égale à : $\left(\beta \rho \frac{Q^2}{A}\right)$.

Et : β : coefficient tenant compte de l'inégalité répartition de vitesse (coefficient de Boussinesq).

En divisant l'équation (II.2.b) par Δx et passant aux limites $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{dP}{dx} + \bar{\omega} A S_0 - \bar{\omega} A S_f \quad (II.3)$$

Avec : S_0 est la pente du fond.

La dérivée du premier membre de l'équation (II.3) permet de trouver :

$$\frac{dM}{dx} = \rho \beta \left(\frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dx} \right) \quad (II.3a)$$

$$\frac{dM}{dx} = \rho \beta \left(\frac{2Q}{A} q_* - \frac{Q^2 B}{A^2} \frac{dy}{dx} \right) \quad (II.3b)$$

Où :

$q_* = \frac{dQ}{dx}$: est le débit par unité de longueur entrant dans le canal.

La dérivée du second membre nous donne :

$$\frac{dP}{dx} = \bar{\omega} \left(A \frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{y} \frac{dA}{dx} \right) \quad (II.3c)$$

En prenant les moments des zones autour de la nouvelle surface de l'eau après un petit changement de profondeur, figure (II.2),

$$A(\bar{y} + dy) + dA \frac{dy}{2} = (A + dA)(\bar{y} + d\bar{y}) \quad (II.4)$$

Après simplification, on obtient :

$$A dy + \frac{dA dy}{2} = \bar{y} dA + A d\bar{y} + dA d\bar{y} \quad (II.5)$$

En omettant les termes de second ordre dans l'expression (II.5) et en simplifiant, on obtient :

$$A d\bar{y} + \bar{y} dA = A dy \quad (II.6)$$

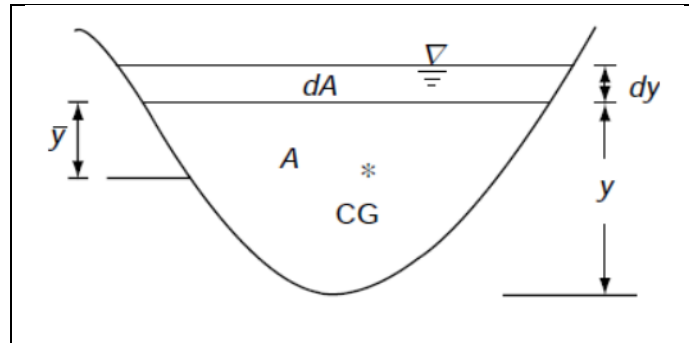


Figure (II.2) : Schéma de définition

Par conséquent, l'équation (II.3.c) devient :

$$\frac{dP}{dx} = \bar{\omega} A \frac{dy}{dx} \quad (II.7)$$

En remplaçant l'équation (II.7) et (II.3.b) dans l'équation (II.3) et en divisant par le terme $\bar{\omega}A$, on obtient :

$$\frac{2\beta Q q_*}{gA^2} - \frac{\beta Q^2 B}{gA^3} \frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dx} + (S_0 - S_f) \quad (II.8)$$

Finalement :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - (2\beta Q q_* / gA^2)}{1 - \beta \frac{Q^2 B}{gA^3}} \quad (II.9)$$

L'équation (II.9) c'est l'équation différentielle de base régissant le mouvement dans l'écoulement spatialement variable avec une augmentation de débit. C'est une équation non linéaire de premier ordre. Les solutions sous forme close ne sont pas possibles, sauf dans les cas très simplifiés.

En général, q_* est une fonction de x . Cependant, dans un déversoir latéral, le débit q_* est constant. Compte tenu de la non uniformité élevée de la distribution des vitesses dans la section transversale du canal, il est nécessaire d'utiliser des valeurs appropriées du facteur de correction de l'impulsion β .

II.1.2. Ecoulement avec débit décroissant

Les écoulements spatialement variés avec des décharges décroissantes se produisent dans une variété de situations sur le terrain, les exemples typiques étant les déversoirs latéraux. Il est habituel de supposer que la perte d'énergie due au déversement de l'eau est nulle et que

l'équation d'énergie est utilisée pour dériver l'équation de base du mouvement. Les hypothèses qui sont illustrées précédemment demeurent toujours applicables.

Considérons alors l'équation d'énergie :

$$H = Z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (II.10)$$

Et l'équation de continuité :

$$Q = V \cdot A \quad (II.11)$$

Par dérivation par rapport à (x) , l'équation (II.10) devient :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dZ}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) \quad (II.12)$$

Et :

$$\frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = \frac{\alpha}{2g} \left[\frac{2Q}{A^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{2Q^2}{A^3} \frac{dA}{dx} \right] \quad (II.13)$$

Cependant, par définition :

$$\frac{dH}{dx} = -S_f \quad ; \quad \frac{dZ}{dx} = -S_0 \quad ; \quad \frac{dA}{dy} = B \quad ; \quad \frac{dQ}{dx} = q_*$$

Donc, l'équation (II.12) peut simplifier comme suit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q q_*}{gA^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}} \quad (II.14)$$

L'équation (II.14) c'est l'équation différentielle de base régissant le mouvement dans l'écoulement spatialement variable avec un débit décroissant, avec α est un coefficient pour tenir compte de l'inégalité répartition des vitesses le long de la section transversale considérée qui s'appelle coefficient de Coriolis.

II.2. Solution analytique de De Marchi

En se référant à l'esquisse de définition (Figure II.3), pour dériver une équation à l'écoulement du déversoir latéral, les hypothèses suivantes sont faites :

1. Le canal est de forme rectangulaire et prismatique ;
2. Le déversoir latéral est de faible longueur et l'énergie spécifique est considérée comme constante entre les sections 1 et 2. Cela équivaut à supposer $(S_0 - S_f) = 0$ ou $(S_0 = 0$ et $S_f = 0)$. Des études expérimentales ont montré que c'est une hypothèse raisonnable ;
3. Le déversoir latéral est supposé être un déversoir à arêtes vives avec une aération appropriée de la nappe et se déchargeant librement (écoulement dénoyé) ;
4. Le facteur de correction de l'énergie cinétique α est pris égal à l'unité.

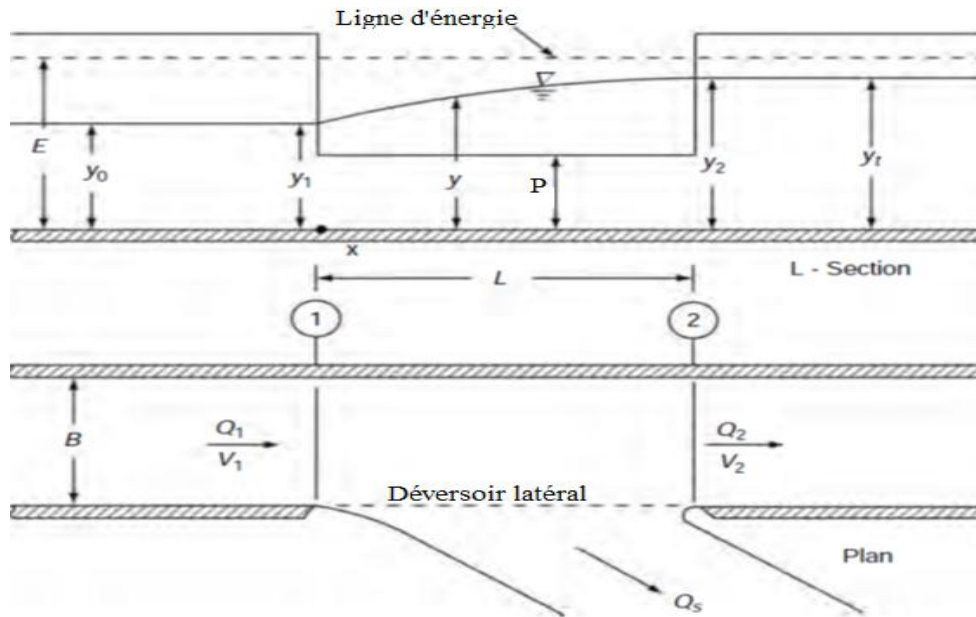


Figure (II.3) : Schéma de définition de l'écoulement dans le déversoir latéral (Subramanya, 2009)

La figure (II.3) est une esquisse de définition du débit sur un déversoir latéral. Les déversoirs latéraux sont généralement des structures courtes avec $L / B \leq 3$. Il est évident, d'après des considérations énergétiques spécifiques (section 1.2), que la surface longitudinale de l'eau devrait augmenter dans la direction aval lorsque le débit du canal principal est subcritique partout.

De même, le profil de la surface de l'eau serait une courbe décroissante pour le débit supercritique dans le canal (Subramanya, 2009).

L'équation différentielle de l'écoulement spatialement varié (II.14) avec les hypothèses ci-dessus et après simplifications deviendrait (Featherstone et Nalluri, 1995) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Qy \left(-\frac{dQ}{dx} \right)}{gB^2y^3 - Q^2} \quad (II.15)$$

Le débit de sortie est égal à la décharge sur le déversoir latéral par unité de longueur et égale à (Carlier, 1980) :

$$\frac{-dQ}{dx} = \frac{2}{3} C_M \sqrt{2g} (y - P)^{3/2} \quad (II.16)$$

Tel que :

C_M : est un coefficient de débit connu sous le nom de coefficient De Marchi. Ce coefficient, C_M , est donné pour une crête épaisse du déversoir latéral par :

$$C_M = 0,81 - 0,60F_1 \quad (II.17)$$

De plus, étant donné que l'énergie spécifique E est supposée constante, le débit dans le canal à n'importe quelle section est donné par :

$$Q = By\sqrt{2g(E - y)} \quad (II.18)$$

En prenant l'équation (II.16) et (II.18) et en remplaçant dans l'équation (II.15), on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{By^2\sqrt{2g(E - y)} \left(\frac{2}{3} C_M \sqrt{2g} (y - P)^{3/2} \right)}{gB^2y^3 - [B^2y^2 2g(E - y)]} \quad (II.19)$$

Donc :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{3} C_M B y^2 \sqrt{2g} \sqrt{(E - y)} \sqrt{2g} \sqrt{(y - P)^3}}{gB^2y^2[y - 2(E - y)]} \quad (II.20)$$

Après simplification de l'équation (II.20), on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4}{3} C_M \sqrt{(E - y)} (y - P)^3}{B[y - 2(E - y)]} \quad (II.21)$$

On obtient en définitif la forme suivante pour l'équation (II.15) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 C_M \sqrt{(E - y)} (y - P)^3}{4 B (3y - 2E)} \quad (II.22)$$

En admettant que le coefficient de De Marchi est indépendant de x , l'intégration donne l'équation du profil d'écoulement comme :

$$X = \frac{3B}{2C_M} \Phi_M(y, E, P) + Const \quad (II.23)$$

Dans lequel :

$$\Phi_M(y, E, P) = \frac{2E - 3P}{E - P} \sqrt{\frac{E - y}{y - P}} - 3 \sin^{-1} \sqrt{\frac{E - y}{E - P}} \quad (II.24)$$

L'équation (II.23) est connue sous le nom d'équation De Marchi et la fonction $\Phi_M(y, E, P)$ est connue sous le nom de fonction de flux varié De Marchi.

En appliquant l'équation (II.23) aux sections 2 et 1, on obtient :

$$X_2 - X_1 = L = \frac{3}{2} \frac{B}{C_M} (\Phi_{M_2} - \Phi_{M_1}) \quad (II.25)$$

Connaissant L , P et (Q et y) à 2 ou 1, le débit déversé sur le déversoir latéral Q_s peut être calculé par l'équation (II.25) et par l'équation de continuité :

$$Q_s = Q_1 - Q_2 \quad (II.26)$$

II.2.1. Coefficient de De Marchi C_M

Les études expérimentales et théoriques de Subramanya et Awasthy (Subramanya, 2009) ont montré que dans un écoulement subcritique, le principal paramètre de débit affectant le coefficient de De Marchi est le nombre de Froude du flux qui l'approche. La relation fonctionnelle entre C_M et le nombre initial de Froude qui doit être montrée comme :

$$C_M = 0,611 \sqrt{1 - \frac{3F_1^2}{(F_1^2 + 2)}} \quad (II.27)$$

$$D'où : F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}}$$

L'équation (II.27) peut être simplifiée en tant que :

$$C_M = 0,864 \sqrt{\frac{1 - F_1^2}{2 + F_1^2}} \quad (II.28)$$

Cependant, pour un écoulement d'approche supercritique, l'effet du nombre de Froude d'approche est insignifiant et la variation de C_M pour $F_1 > 2$ est obtenue comme suit :

$$C_M = 0,36 - 0,008F_1 \quad (II.29)$$

Il y a eu de nombreuses études sur les déversoirs latéraux dans les canaux rectangulaires depuis les trois dernières décennies. La majorité de ces études portent sur l'état de l'écoulement subcritique, car il s'agit de la situation la plus courante dans la pratique.

Borghi et al (1999) ont étudié l'effet des paramètres, P/y_1 et L/B , et proposent l'équation obtenue expérimentalement suivante pour l'estimation du C_M de De Marchi pour l'approche subcritique :

$$C_M = 0,7 - 0,48F_1 - 0,3 \frac{P}{y_1} + 0,06 \frac{L}{B} \quad (II.30)$$

Olivetto et al (2001) ont étudié l'écoulement du déversoir latéral dans des canaux rectangulaires et circulaires, par des approches théoriques et expérimentaux. Les études portent sur le cas d'un écoulement subcritique dans le canal d'approche avec un écoulement supercritique le long des déversoirs latéraux. Ghodsian (2004) a étudié expérimentalement les caractéristiques hydrauliques des déversoirs latéraux triangulaires aigus. Pour cette situation de flux, l'équation de De Marchi a été exprimée par :

$$C_M = A - BF_1 - C \frac{P}{y_1} \quad (II.31)$$

Où P égal la hauteur du sommet du déversoir triangulaire au-dessus du lit du canal. Les coefficients A , B et C sont des fonctions de l'angle de déversoir θ . Uyumaz (1992) a étudié le comportement d'un déversoir latéral rectangulaire dans un canal triangulaire et a dérivé l'équation du débit correspondante. Le canal étudié avait un côté vertical et le déversoir latéral était situé du côté vertical. Le coefficient de débit C_M , donné par les équations (II.27) et (II.29) ont été jugés adéquats pour ce cas également.

Cependant, si le déversoir est placé dans le côté incliné du canal, on peut s'attendre à ce que le coefficient C_M soit également fonction de l'inclinaison du côté.

II.3. Approche de Hager

Le but de cette section sera de présenter une approche simple pour la détermination des caractéristiques d'écoulement dans les déversoirs latéraux à section rectangulaire, non prismatique. Les développements visent l'application immédiate des solutions.

II.3.1. Equations de base

Les écoulements à débit localement varié possèdent normalement -comme à débit constant- une direction d'écoulement principale le long de l'axe du canal. Le principe de Bernoulli et le théorème de la quantité de mouvement s'applique donc également dans de tel cas (Hager, 1986).

Dans ce qui suit, et pour être en conformité avec les notations de Hager, il sera convenu de noter y par h .

En admettant une répartition uniforme des vitesses et une pression hydrostatique en une section donnée, la puissance spécifique E est :

$$E = Q.H = \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) Q \quad (II.32)$$

Où $V = Q/A$ est la vitesse moyenne, h la hauteur d'eau, g l'accélération gravitationnelle, $Q = Q(x)$ le débit et $A = A(x, h)$ la section mouillée.

La variation de E par rapport à la coordonnée longitudinale x se compose du gain de niveau (dû à la pente S_0), de la perte de charge due au frottement, S_f , et de la perte d'énergie mécanique due au débit sortant latéralement, donc :

$$\frac{dE}{dx} = (S_0 - S_f)Q + \frac{dQ}{dx} \left(p + \frac{U^2}{2g} \right) \quad (II.33)$$

Où $p = p(x)$ et $U = U(x)$ sont la hauteur de pression et la vitesse au bord déversant du canal considéré figure (II.4), $dQ/dx = Q' \leq 0$ correspond à l'intensité du débit sortant.

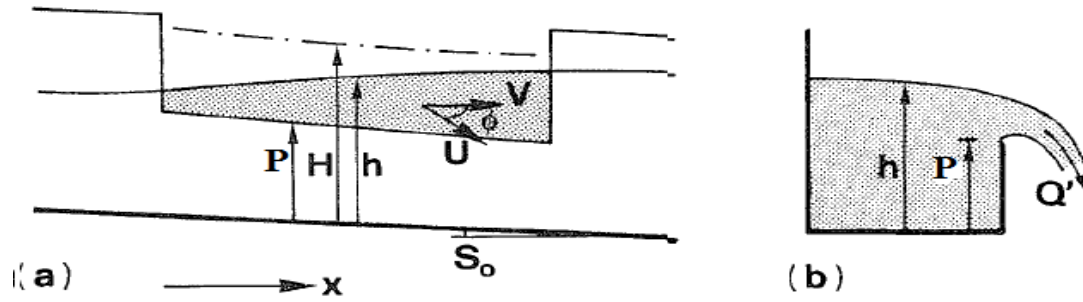


Figure (II.4) : Définition des paramètres : (a) coupe longitudinale ; (b) coupe transversale (Hager et Sinniger, 1989)

En dérivant l'équation (II.32) par rapport à x et en tenant compte de l'équation (II.33), on obtient :

$$\frac{Q'}{Q} \left(h + \frac{QQ'}{2gA^2} \right) + \left(h' + \frac{QQ'}{gA^2} + \frac{Q^2 A}{gA^3} \right) = S_0 - S_f + \frac{Q'}{Q} \left(p + \frac{U^2}{2g} \right) \quad (II.34)$$

En posant : $\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial h} \left(\frac{dh}{dx} \right)$ pour la variation totale de la section mouillée et

$F^2 = \frac{Q^2(\partial A/\partial h)}{gA^3}$ pour le nombre de Froude, on obtient :

$$h' = \frac{S_0 - S_f + \frac{Q'}{Q} \left[p - h + \frac{U^2 - 3V^2}{2g} \right] + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{1 - F^2} \quad (II.35)$$

Il est intéressant de noter que, pour $Q' \equiv 0$, on retrouve l'équation générale des courbes de remous. Pour $\partial A/\partial x \equiv 0$ et $Q' \equiv 0$ on retrouve l'équation valable pour les canaux prismatiques.

D'une manière analogue, en considérant un élément infiniment court, l'application du théorème de la quantité de mouvement dans la direction longitudinale mène à (Hager, 1981) :

$$h' = \frac{S_0 - S_f + \frac{Q'}{Q} \left[\frac{VU \cos \Phi - 2V^2}{g} \right] + \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x}}{1 - F^2} \quad (II.36)$$

Où $U \cos \Phi$ est la composante de la vitesse du courant sortant en direction de l'axe x , figure (II.4). Pour que l'inclinaison de la surface d'eau h' des équations (II.35) et (II.36) doivent correspondre.

Pourtant la relation entre V et U que l'on tire de ces deux équations ne peut pas être utilisée puisqu'elle contient les inconnues p et Φ . Par contre, on peut démontrer que l'équation (II.36) peut également être déduite du système (Hager, 1986) :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (II.37a)$$

$$H' = S_0 - S_f - \frac{QQ'}{gA^2} \left(1 - \frac{U \cos \Phi}{V} \right) \quad (II.37b)$$

Donc la variation longitudinale de la charge H' se compose par des effets de la pesanteur (S_0), de frottement (S_f) et du débit localement varié est ce qui aboutit à :

$$H'_L = -\frac{QQ'}{gA^2} \left(1 - \frac{U \cos \Phi}{V}\right) \quad (II.38)$$

En notant que $Q' < 0$ et U , $\cos \Phi$ et V sont positifs, on obtient :

$$\begin{cases} V > U \cos \Phi \rightarrow H'_L > 0; \\ V = U \cos \Phi \rightarrow H'_L = 0; \\ V < U \cos \Phi \rightarrow H'_L < 0. \end{cases} \quad (II.39)$$

Pour un canal dans lequel $S_0 = S_f$, la charge H croit dans la direction longitudinale dans le cas (II.39.a), mais décroît dans le cas (II.39.c). Le cas (II.39.a) présente une particularité qui est aussi constatée pour les bifurcations de courant, pour lesquelles le coefficient de perte de charge, ξ , peut être négatif. Ce gain d'énergie mécanique du courant principal est compensé par une perte accentuée dans la sortie latérale.

Pour les déversoirs latéraux avec une direction de l'écoulement sortant latéralement non perturbée, les observations montrent que le cas (II.39.b), $V \approx U \cos \Phi$, est une bonne approximation de la réalité (Hager et Sinniger, 1989). Ce fait facilite le développement des équations (II.37).

En réalité, la zone dans laquelle l'écoulement varie localement est relativement courte par rapport à la longueur totale du canal. Dans des conditions pseudo-uniformes figure (II.5), la pente est nulle, l'équation dynamique d'un écoulement à débit décroissant est alors donnée par :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (II.40a)$$

$$H' = h' + \frac{Q'Q}{gA^2} - \frac{Q^2 A'}{gA^3} = 0 \quad (II.40b)$$

Tel que : $H' = \frac{dH}{dx}$

En éliminant le débit Q entre les équations (II.40.a) et (II.40.b) et en simplifiant, l'équation de la surface libre devient finalement :

$$h' \left[1 - \frac{2(H-h)}{A} \frac{\partial A}{\partial h} \right] = \frac{2(H-h)}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q' \sqrt{2g(H-h)}}{gA} \quad (II.41)$$

Cette équation différentielle en $h(x)$ doit être résolue en spécifiant l'intensité du débit sortant $Q'(x)$ et en partant d'une condition limite, $h_{x=0} = h_0$.

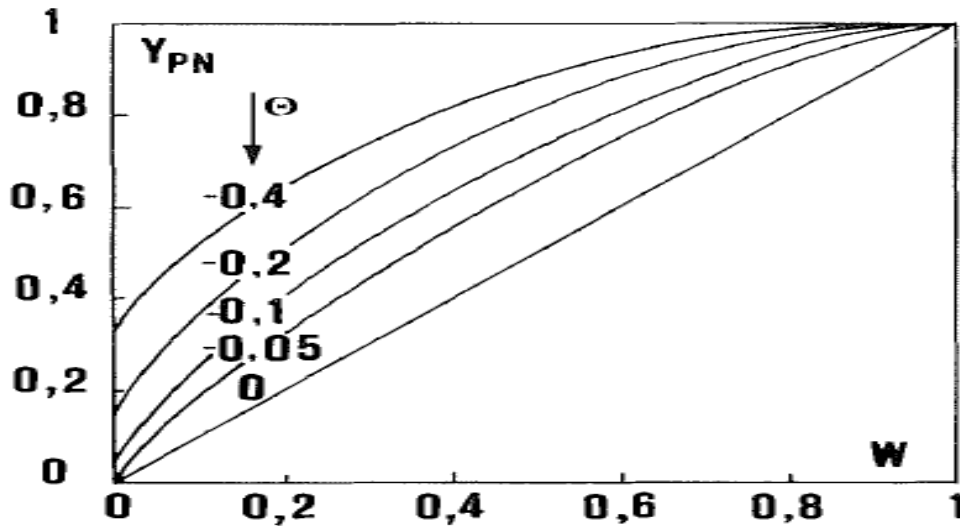


Figure (II.5) : Condition pseudo-uniforme pour le déversoir latéral (Hager, 1986)

II.3.2. Intensité du débit latéral

En ce qui concerne le calcul de $'(x)$, plusieurs formules ont été proposées. L'approche la plus simple tient compte des lois conventionnelles pour le déversoir. On peut démontrer, d'autre part, que les effets de la vitesse dans le canal (V) et la direction (Φ) du débit sortant par rapport à l'orientation de l'axe du canal sont importants.

Pour des canaux presque prismatiques à faible pente, l'angle local Φ par rapport à l'axe du canal est donné par :

$$\sin \Phi = \left(\frac{\bar{Y} - W}{3 - 2\bar{Y} - W} \right)^{1/2} \quad (II.42)$$

Avec : $\bar{Y} = \frac{h}{H}$; $W = \frac{P}{H}$. Il faut noter que $\Phi = 90^\circ$ pour $\bar{Y} = 1$, par contre $\Phi \rightarrow 0$ pour $\bar{Y} \rightarrow W$.

L'approche habituelle qui consiste à faire comme hypothèse $\Phi = 90^\circ$, quel que soit le nombre de Froude local F , est donc éloignée de la réalité.

En tenant compte de l'équation (II.42), le débit sortant latéralement par unité de longueur Q' , devient (Hager et Sinniger, 1989) :

$$Q' = -\frac{3}{5} n^* c \sqrt{gH^3} (\bar{Y} - W)^{3/2} \left(\frac{1 - W}{3 - 2\bar{Y} - W} \right)^{1/2} \left[1 - \theta \left(\frac{3(1 - \bar{Y})}{\bar{Y} - W} \right)^{1/2} \right] \quad (II.43)$$

Tel que :

n^* : indique si la sortie latérale se trouve sur une paroi ($n^* = 1$) ou sur les deux parois ($n^* = 2$).

c : est le coefficient de forme du déversoir, soit $c=1$ pour une mince paroi, pour d'autres formes de déversoir (à seuil épais, à crête arrondie), c est défini en fonction de la géométrie de la crête.

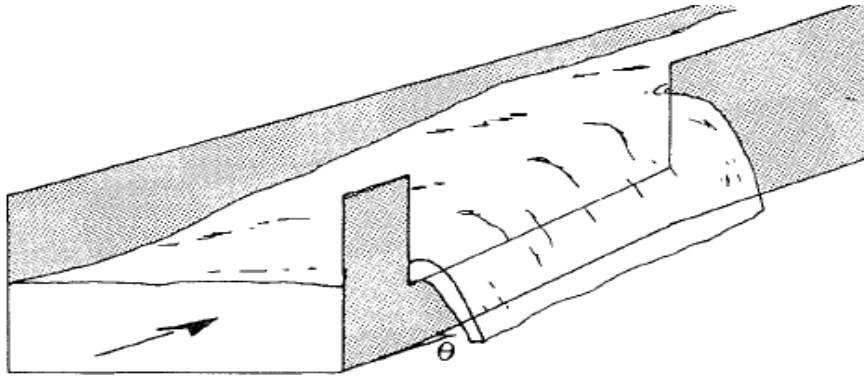


Figure (II.6) : Surface d'eau à écoulement fluvial et contraction linéaire, $\theta < 0$ (Hager, 1986)

Le terme entre crochets dans l'équation (II.43) notamment $\theta = (1/h)(\partial A/\partial x)$, permet de considérer des canaux non prismatiques figure (II.6).

II.3.3. Formulation adimensionnelle

Le nombre élevé de paramètres intervenant dans la description de la surface libre, $h(x)$, et le développement longitudinal du débit, $Q(x)$, conduit à adopter une représentation adimensionnelle. Pour une section rectangulaire non prismatique pour laquelle :

$$A = Bh \quad , \quad B = b + \theta x \quad (II.44)$$

Où :

$B(x=0) = 0$, et θ est le changement longitudinal de la largeur, les dérivées partielles deviennent $\partial A/\partial h = (b + \theta x)$, $\partial A/\partial x = -\theta h$.

En introduisant les valeurs adimensionnelles, avec $\zeta = n^*c$ un coefficient caractérisant la forme géométrique de la sortie :

$$X = \zeta x / b \quad , \quad \bar{Y} = h/H \quad , \quad \Theta = \theta/\zeta \quad , \quad W = P/H \quad (II.45)$$

L'équation (II.41) devient :

$$\bar{Y}' = \frac{2\Theta\bar{Y}(1-\bar{Y}) - \bar{Q}'\sqrt{2(1-\bar{Y})}/\zeta}{(3\bar{Y}-2)(1+\Theta X)} \quad (II.46)$$

Tel que : $\bar{Q} = \dot{Q}/\sqrt{gH^3}$ est le débit relatif. D'après l'équation (II.43) ce terme devient :

$$\frac{\bar{Q}'}{\zeta} = -\frac{3}{5}(\bar{Y}-W)^{3/2} \left(\frac{1-W}{3-2\bar{Y}-W} \right)^{1/2} \left[1 - \Theta \left(\frac{3(1-\bar{Y})}{\bar{Y}-W} \right)^{1/2} \right] \quad (II.47)$$

Le profil de la surface libre $y(x)$ à partir du système ci-dessus, ne dépend donc que la hauteur adimensionnelle du déversoir W et de Θ .

II.3.4. Conditions aux limites

L'équation (II.46) peut être résolue numériquement une fois qu'une condition à la limite est posée, $(X = X_0) = y_0$, donc la solution générale considère tous les cas possibles où $W \leq \bar{Y} \leq 1$ (pour $\bar{Y} < W$, le débit latéral étant nul).

Le cas $F=1$ ($\bar{Y} = 2/3$) correspond au passage de conditions fluviales aux conditions torrentielles, dans ce cas la pente \bar{Y}' devient infinie. Une analyse détaillée indique cependant que le profil de surface auprès du point singulier de l'équation (II.46) ne s'exprime pas seulement en fonction des paramètres de l'équation (II.45).

Etant donné que la zone de l'écoulement critique est très localisée, on peut approcher la transition de $F < 1$ à $F > 1$ par la condition pseudo-critique ($F = 1, \bar{Y}' \rightarrow \infty$). Cette procédure simplifie fortement la représentation des solutions et est en accord avec les hypothèses sur lesquelles (II.46) est basée. Il faut noter que la solution $\bar{Y}(x)$ qui en résulte doit pourtant être exclue lorsque $0,6 < \bar{Y} < 0,7$ (Hager, 1986).

Les écoulements fluviaux se calculent de l'aval vers l'amont, alors que la direction de calcul et de l'écoulement est la même pour de conditions torrentielles. Pour le déversoir latéral prismatique $\Theta = 0$, les conditions aux limites sont donc :

- Pour $\Theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{Y}_{x=0} = 1 \text{ pour } \frac{2}{3} < \bar{Y} < 1 ; \\ \bar{Y}_{x=0} = \frac{2}{3} \text{ pour } W < \bar{Y} < \frac{2}{3} . \end{cases}$
- Pour $\Theta < 0 \Rightarrow$ il faut considérer en plus la hauteur pseudo-uniforme ;
- Pour $F < 1$ et $\frac{2}{3} < \bar{Y}_{PN} < 1$:
 - $\begin{cases} \bar{Y} = 1 \text{ pour } y_{PN} < \bar{Y} < 1 , \text{ correspond au point de contrôle;} \\ \bar{Y} = \frac{2}{3} \text{ pour } \frac{2}{3} < \bar{Y} < y_{PN} , \end{cases}$ a la fonction de ce point.

De même manière on peut démontrer pour $F > 1$ que les points de contrôles soient :

$$\begin{cases} \bar{Y} = W \text{ pour } W < \bar{Y} < \bar{Y}_{PN}; \\ \bar{Y} = \frac{2}{3} \text{ pour } \bar{Y}_{PN} < \bar{Y} < \frac{2}{3} . \end{cases}$$

Le résumé de ces valeurs est illustré dans la figure (II.6) ci-dessus et dans le tableau (II.1).

Tableau (II.1) : point de contrôle pour l'écoulement dans les déversoirs latéraux (Hager, 1986)

Nombre de Froude	$\Theta = 0$	$\Theta < 0$
$F < 1$	$\bar{Y} = 1$	$\bar{Y} = 1 ; \bar{Y}_{PN} < \bar{Y} < 1$
		$\bar{Y} = 2/3 ; 2/3 < \bar{Y} < \bar{Y}_{PN}$
$F > 1$	$\bar{Y} = 2/3$	$\bar{Y} = 2/3 ; \bar{Y}_{PN} < \bar{Y} < 2/3$
		$\bar{Y} = W ; W < \bar{Y} < \bar{Y}_{PN}$

II.4. Solution graphique de Hager

Les solutions de l'équation (II.46) dépendent du nombre de Froude $F^2 = 2(1 - \bar{Y})/\bar{Y}$ et de σ qui est défini par : $\sigma = \Theta \bar{Y} \sqrt{2(1 - \bar{Y})} - \bar{Q}'/\zeta = 0$.

Etant donné que $\frac{B}{b} = (1 + \Theta X) \geq 0$, la pente de la surface libre $\bar{Y}'(X)$ devient positive pour $\sigma > 0, F < 1$, et pour $\sigma < 0, F > 1$.

Les extrêmes de $\bar{Y}(X)$ se trouvent à l'endroit où $\bar{Y}'=0$, donc $\sigma = 0, F \neq 1$ (conditions pseudo-uniforme) et $\bar{Y}=1$.

La condition pseudo-critique ($F = 1, \sigma \neq 0$) apparaît pour $\bar{Y} = 2/3$. La figure (II.7) montre les solutions possibles en fonction de F et Θ .

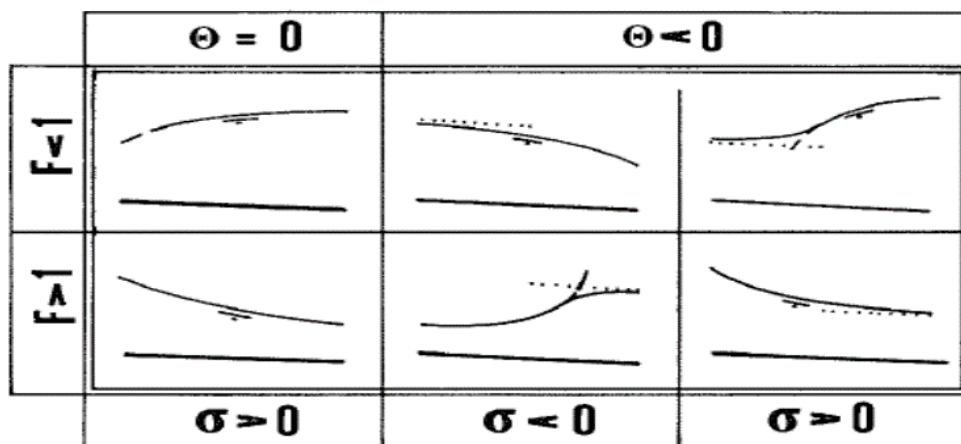


Figure (II.7) : Types de profil de surface pour $F < 1$ et $F > 1$, conditions pseudo-uniformes (...); conditions pseudo-critiques (---) (Hager, 1986)

La solution $\bar{Y}(X)$ de l'équation (II.46) est représentée dans les figures ci-dessous qui donnent les diagrammes des profils de surface pour différentes hauteurs du déversoir, pour $\Theta = 0, -0,1, -0,2$ et $-0,4$. Avec $W < \bar{Y} < \frac{2}{3}$ représente les conditions torrentielles et $\frac{2}{3} < \bar{Y} < 1$ représente les conditions fluviales.

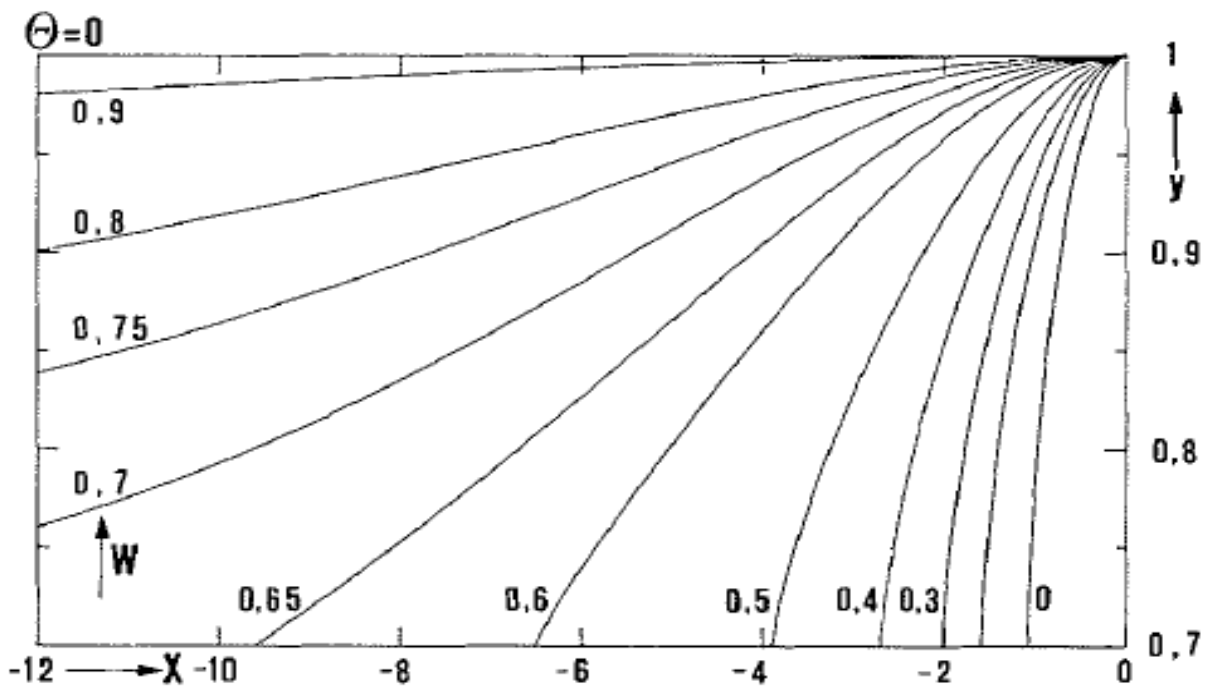


Figure (II.8) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta=0$, conditions d'écoulement fluviales (Hager, 1986)

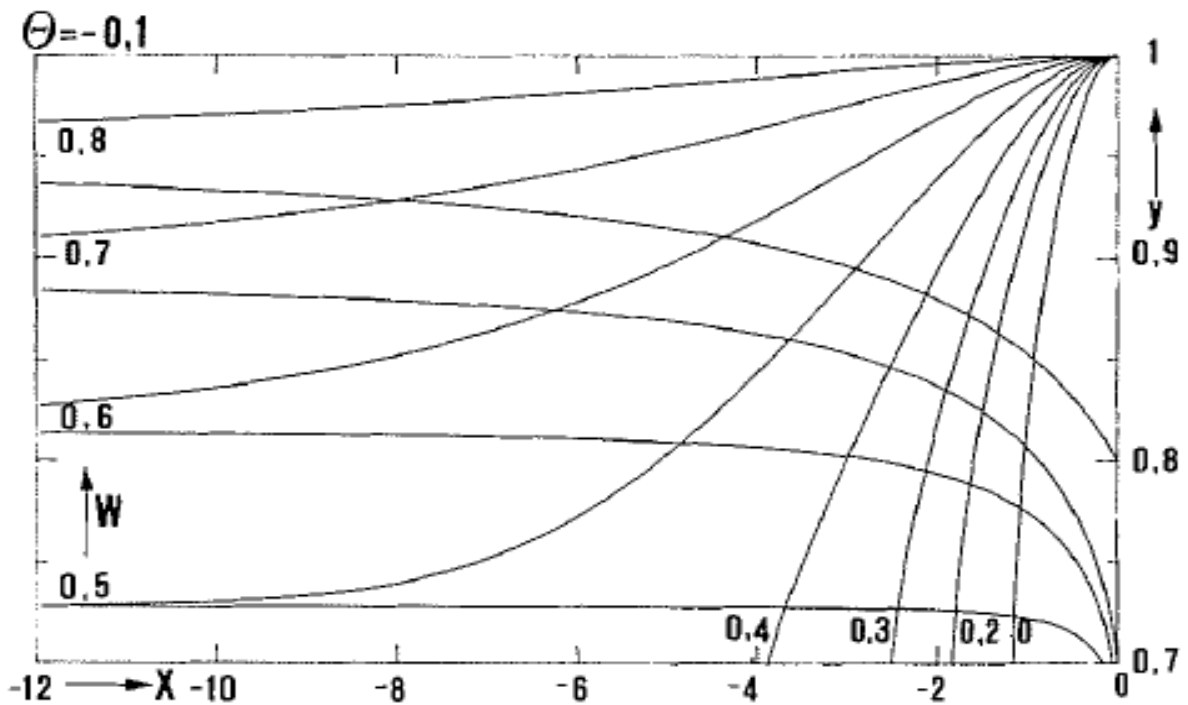


Figure (II.9) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,1$, conditions d'écoulement fluviales

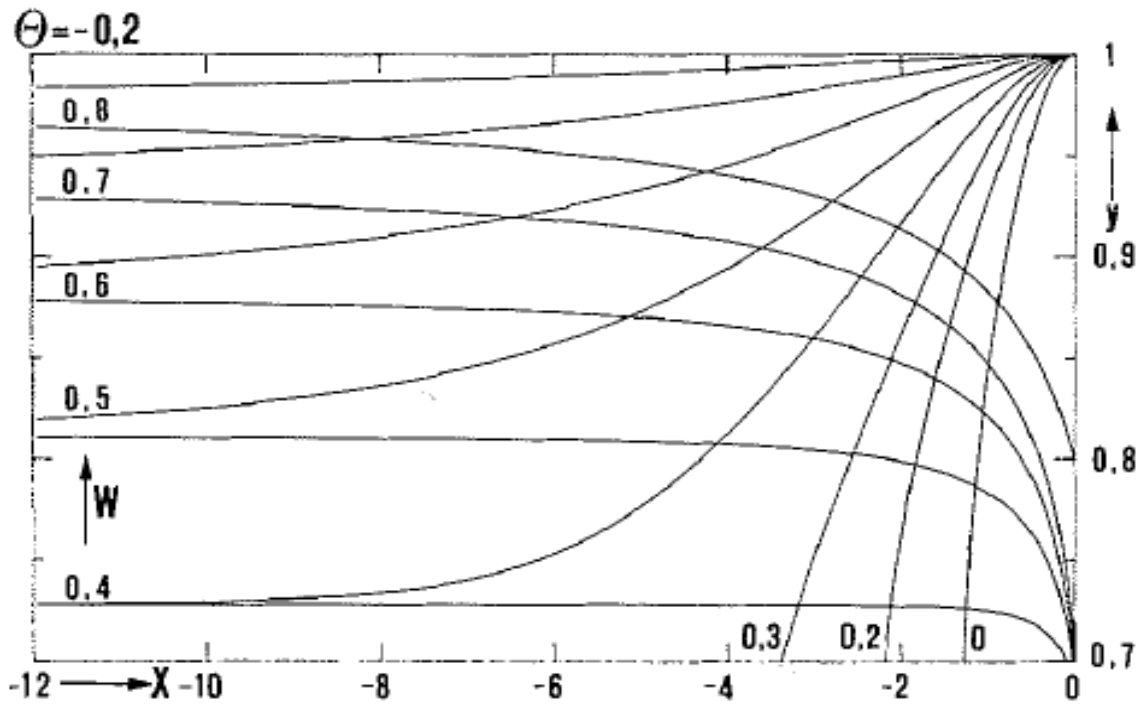


Figure (II.10) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,2$, conditions d'écoulement fluviales

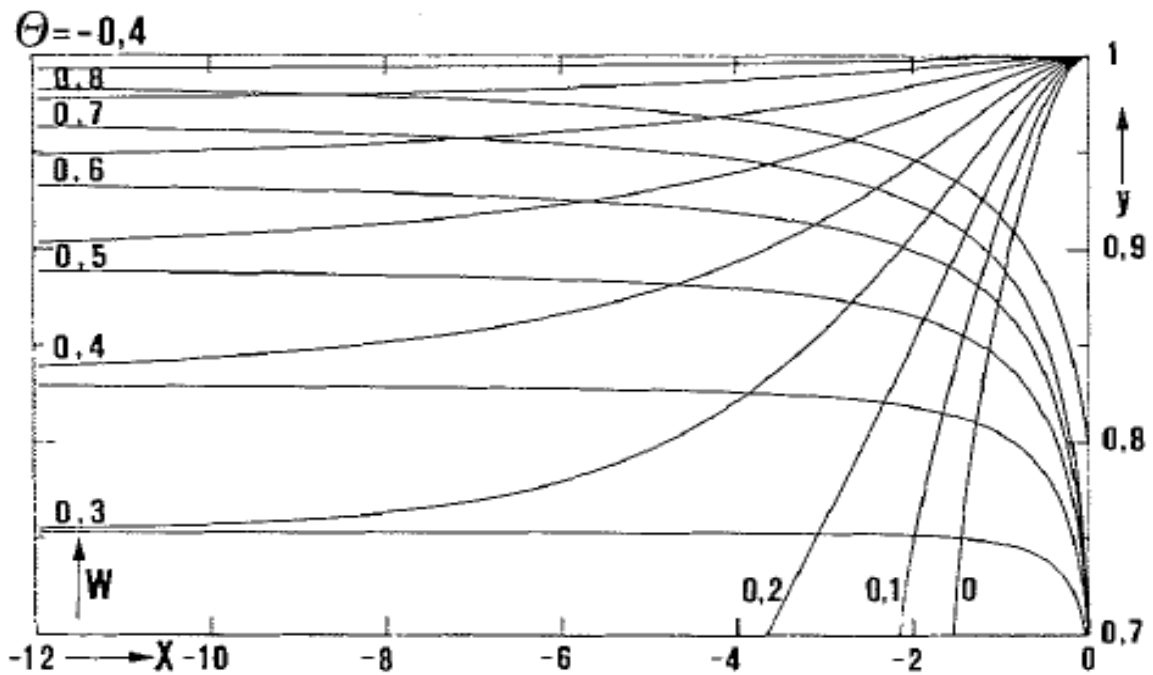


Figure (II.11) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,4$, conditions d'écoulement fluviales

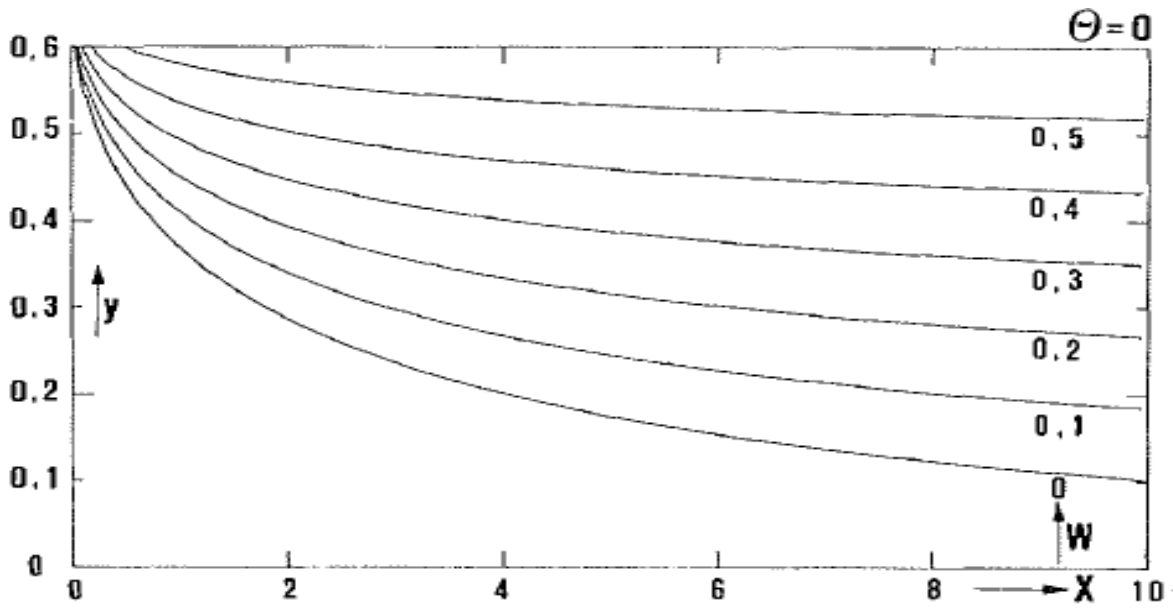


Figure (II.12) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = 0$, conditions d'écoulement torrentielles

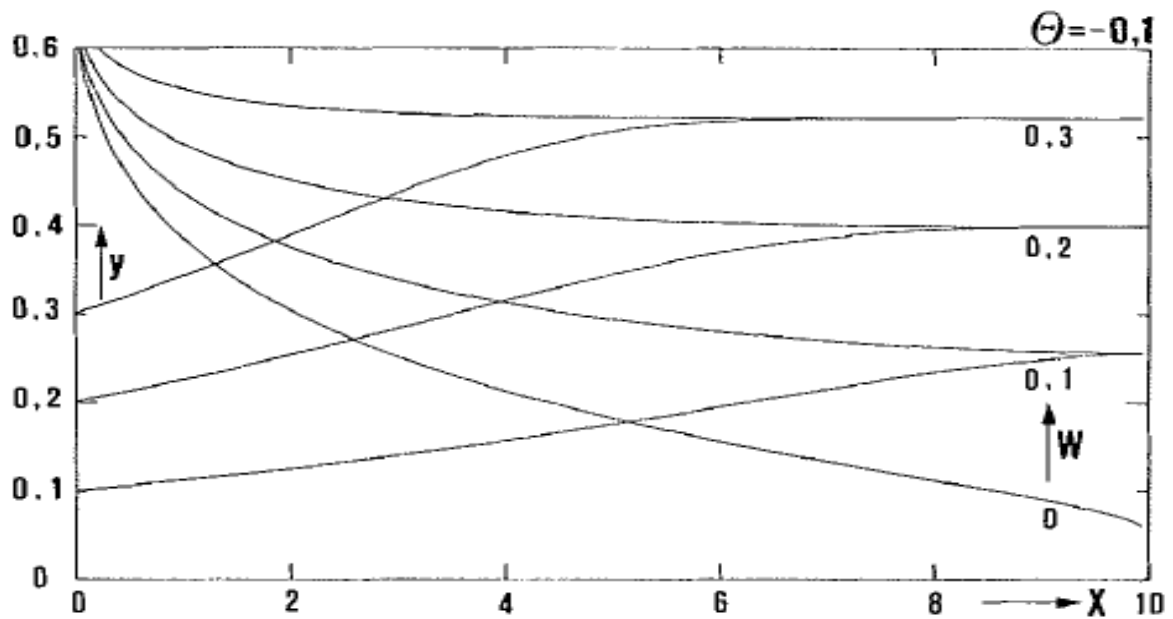


Figure (II.13) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,1$, conditions d'écoulement torrentielles

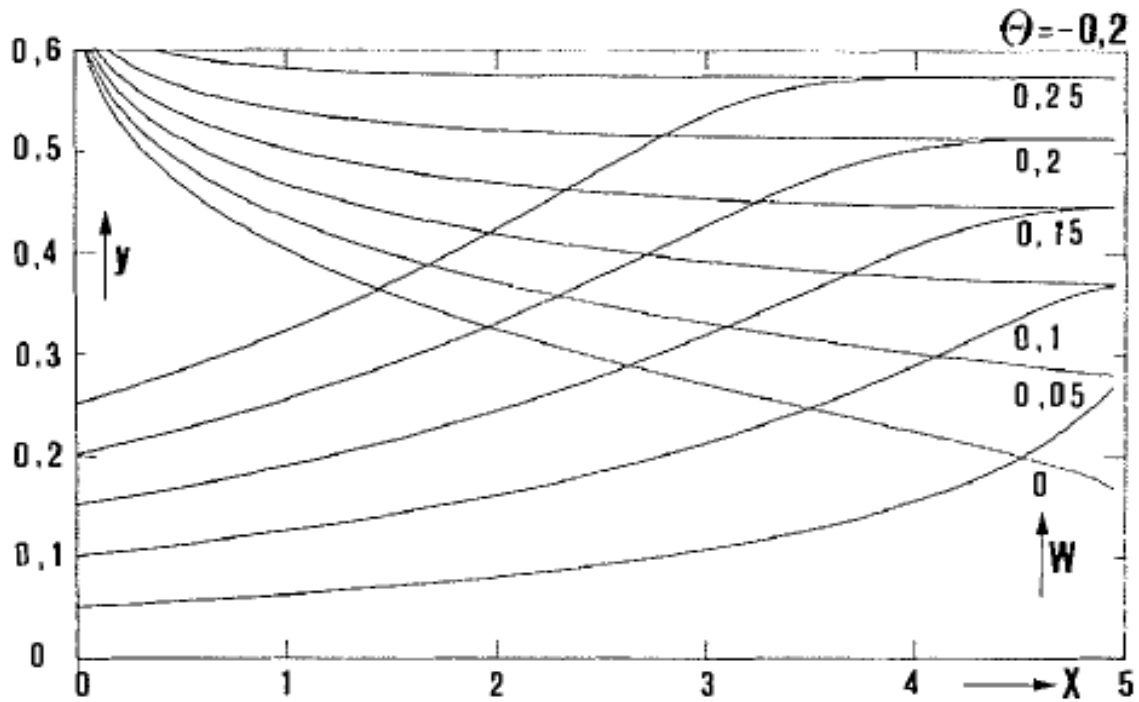


Figure (II.14) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,2$, conditions d'écoulement torrentielles

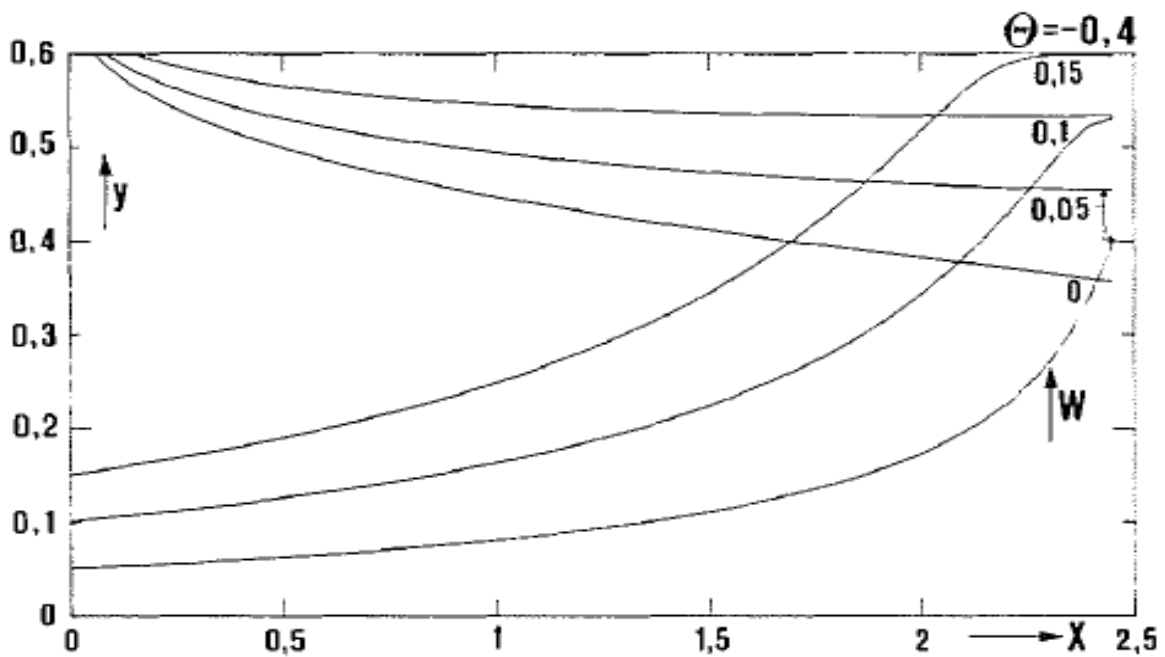


Figure (II.15) : Profil de surface, $y(x)$, pour diverses hauteurs du déversoir, $W=w/H$ et $\Theta = -0,4$, conditions d'écoulement torrentielles

II.5. Conclusion

Nous avons, au cours du présent chapitre, formulé les équations différentielles de base gouvernant l'écoulement à travers les déversoirs latéraux. Il en résulte alors de l'application des principes de conservation de la masse et de quantité de mouvement donne lieu à une équation aux dérivées ordinaires de premier ordre pour laquelle des solutions ont été trouvées soit analytiques par De Marchi (1934) ou graphiques par Hager (1986). Ces équations ont découlés de certaines hypothèses simplificatrices généralement acceptables en pratique.

Dans le chapitre qui en suivra, en s'appuyant sur les notions vues précédemment, une solution numérique aux éléments finis sera formulée et appliquée.

"... Puisqu'une solution générale doit être jugée impossible par biais de l'analyse, nous devons être contents avec la connaissance de quelques cas spéciaux, puisque le développement de divers cas semble être le seul moyen de nous amener enfin à une connaissance plus parfaite..."

Leonhard Euler

III.

MODÈLE NUMÉRIQUE DE RÉSOLUTION

Le présent chapitre s'axera sur la résolution numérique des problèmes aux limites par l'application de la méthode des éléments finis. En premier lieu, on s'attachera à l'exposition de la discrétisation par la méthode des éléments finis d'une manière générale, après quoi on met l'accent sur la mise en œuvre de l'une des méthodes les plus précises qui est la méthode de Galerkin. Cette méthode nous permet d'obtenir une approximation de la solution exacte des équations différentielles gouvernant ces problèmes aux limites.

III.1. Présentation générale de la Méthode des Éléments Finis

Nous rappelons brièvement les méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des équations différentielles. Il existe trois grandes familles de ces méthodes : les méthodes de différences finies, de volumes finis et enfin les méthodes d'éléments finis qui contiennent en particulier les approches de type Galerkin qui nous intéressent plus spécifiquement dans ce travail.

La méthode des éléments finis, bien connue aujourd'hui, est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode réside principalement dans sa formulation, elle réunit les principes les plus forts de la méthode des différences finies et ceux de la méthode des équations intégrales : respectivement la discrétisation du domaine d'intégration et le principe de construction de l'approximation et sa formulation (Tahar Abbes, 2007).

L'idée de base de la méthode des éléments finis repose sur une discrétisation de l'espace fonctionnel dans lequel le problème continu est posé. A partir du problème initial écrit sous forme variationnelle (ou faible) dans un espace fonctionnel de dimension infinie, il s'agit de chercher une caractérisation d'une solution approchée, choisie dans un sous-espace de dimension finie.

La méthode des éléments finis peut être appliquée pour résoudre des équations aux dérivées ordinaires par la méthode de Rayleigh-Ritz, de collocation et de Galerkin ; et pour résoudre des équations aux dérivées partielles telles que l'équation de Poisson et l'équation de diffusion. Tous ce qui concerne la méthode des éléments finis sont illustré dans la figure (III.1).

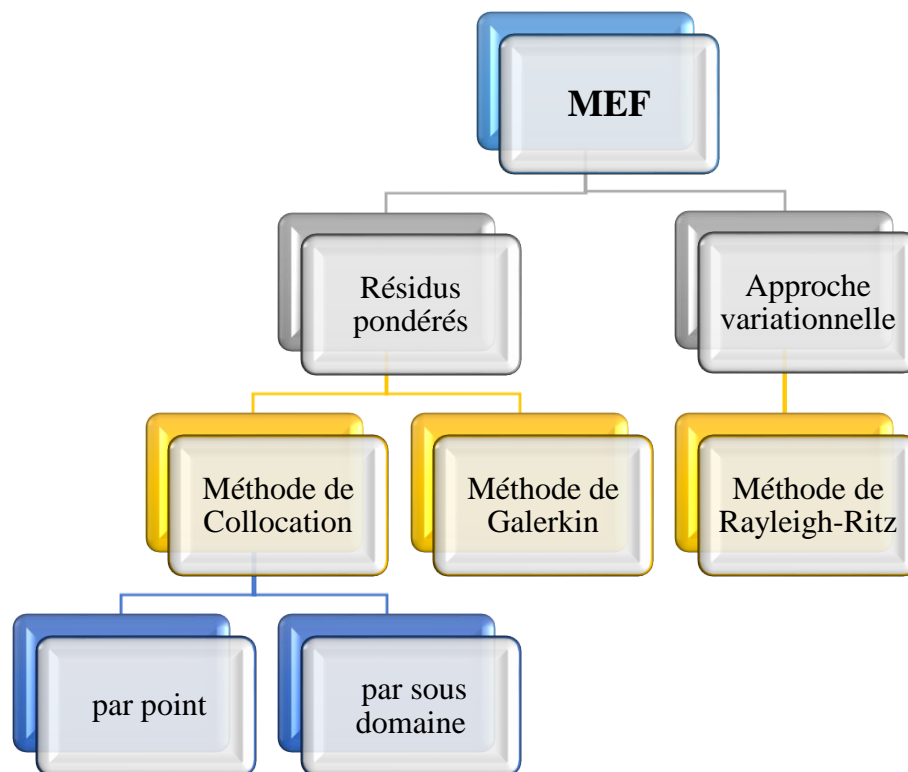


Figure (III.1) : Organigramme de la méthode des éléments finis (Hoffman, 2001)

Le concept qui sous-tend l'extension de la base de l'approche Rayleigh-Ritz ou l'approche des résidus pondérés de Galerkin à l'approche par éléments finis est illustré sur la figure(III.2). La figure (III.2a) illustre le domaine de solution global $D(x)$. La fonctionnelle $I[C_i]$ de l'approche de Rayleigh-Ritz, ou l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$ de l'approche des résidus pondérés de Galerkin, s'applique à l'ensemble du domaine de la solution globale $D(x)$. La figure (III.2b) illustre la solution globale discrétisée le domaine $D(x)$ qui est discrétisé en I nœuds et $I - 1$ éléments. Notez que le symbole I étant utilisé pour la fonctionnelle $I[C_i]$, l'intégrale pondérée $I(C_i)$, et le nombre de nœuds. L'indice i désigne les points de la grille, ou nœuds, et l'exposant (i) indique l'élément. L'élément (i) commence au nœud i et se termine au nœud $i+1$. Les longueurs d'élément (c'est-à-dire, la grille incréments) sont $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

La figure (III.2c) illustre la discrétisation de l'intégrale globale I dans la somme des intégrales discrétisées $I^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, I - 1$). Chaque intégrale discrétisée $I^{(i)}$ sur la figure (III.2c) est évaluée exactement comme l'intégrale globale I dans Figure (III.2a). Ce processus donne un ensemble d'équations reliant les valeurs nodales dans chaque élément, que l'on appelle les équations nodales.

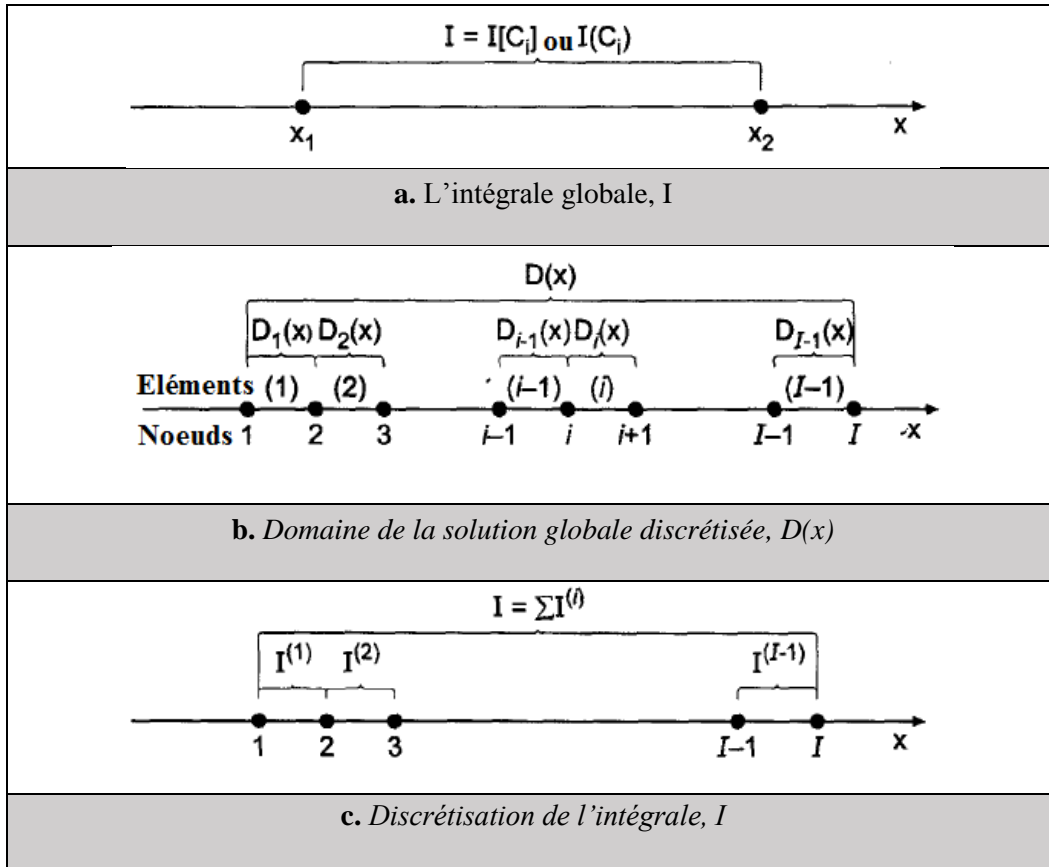


Figure (III.2) : Discrétisation en éléments finis

L'intégrale globale $I = \sum I^{(i)}$ pourrait être différenciée directement par rapport à C_i dans une étape en différenciant toutes les intégrales d'éléments individuels (c'est-à-dire, $\partial I^{(i)} / \partial C_i$) et résumer les résultats. Cette approche produirait immédiatement des équations pour I nœuds de valeurs C_i . Cependant, l'algèbre est considérablement simplifiée en différenciant une seule intégrale discrétisée générique $I^{(i)}$ par rapport à tout C_i présent dans $I^{(i)}$, ensemble d'équations impliquant les valeurs de C_i . Ces équations sont appelées les équations d'élément. Cet ensemble générique d'équations d'élément est ensuite appliqué à tous les éléments discrétisés pour obtenir un ensemble complet d'équations I pour les valeurs nodales C_i . Cet ensemble complet des équations d'élément est appelée l'équation du système.

L'équation du système est ajustée pour tenir compte des conditions aux limites, et résolue pour les valeurs nodales C_i ($i = 1, 2, \dots, I$).

La procédure générale de résolution par éléments finis est donnée par les étapes suivantes (Hoffman, 2001) :

1. Formuler le problème. Si l'approche de Rayleigh-Ritz doit être utilisée, trouver la fonctionnelle I à extraire. Si l'approche des résidus pondérés de Galerkin doit être utilisée, déterminer l'équation différentielle à résoudre.
2. Discrétiser le domaine de solution globale $D(x)$ en sous-domaines (c'est-à-dire en éléments) $D_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, I$). Spécifier le type d'élément à utiliser (c'est-à-dire, linéaire, quadratique, etc.).
3. Supposer la forme fonctionnelle de la solution approximative $y(x)$ dans chaque élément, et choisir les fonctions d'interpolation pour les éléments.
4. Pour le modèle de Rayleigh-Ritz, substituer l'approximation solution $y(x)$ dans la fonctionnelle I pour déterminer $I[C_i]$. Pour l'approche des résidus pondérés de Galerkin, substituer la solution approximative $y(x)$ dans l'équation différentielle et déterminer le résidu $R(x)$ avec les fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ et former l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$.
5. Déterminer les équations des éléments. Pour l'approche Rayleigh-Ritz, évaluer les dérivées partielles de la fonctionnelle $I[C_i]$ par rapport aux valeurs nodales C_i , et les assimiler à zéro. Pour l'approche des résidus pondérés de Galerkin, évaluer les dérivées partielles de l'intégrale résiduelle pondérée $I(C_i)$ par rapport aux valeurs nodales C_i et les égalent à zéro.
6. Assembler les équations des éléments pour déterminer l'équation du système.
7. Ajuster l'équation du système pour prendre en compte les conditions aux limites.
8. Résoudre l'équation du système ajustée pour les valeurs nodales C_i .

D'où la discrétisation du domaine de la solution globale et la spécification des polynômes d'interpolation sont réalisées de la même manière pour l'approche Rayleigh-Ritz et l'approche des résidus pondérés par Galerkin.

III.1.1. Discrétisation du domaine et polynômes d'interpolation

Nous allons discrétiser le domaine de la solution globale $D(x)$ en nœuds I et en éléments $I-1$, comme illustré sur la Figure (III.3). En admettant que le problème peut être formulé initialement par une équation différentielle ordinaire avec les conditions aux limites appropriées, on a :

$$\bar{y}'' + Q\bar{y} = F \quad (III.1)$$

Où : $Q = Q(x)$ et $F = F(x)$

Supposons que la solution globale exacte $\bar{y}(x)$ soit approximée par la valeur globale de la solution approximative $y(x)$ qui est la somme d'une série de polynômes d'interpolation locaux $y^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, I-1$) qui sont valables dans chaque élément. La solution approchée donnée par :

$$y(x) = y^{(1)}(x) + y^{(2)}(x) + \dots + y^{(i)}(x) + \dots + y^{(I-1)}(x) = \sum_{i=1}^{I-1} y^{(i)}(x) \quad (III.2)$$

Sachant que les polynômes locaux $y^{(i)}(x)$ sont définis comme suit :

$$y^{(i)}(x) = y_i N_i^{(i)}(x) + y_{i+1} N_{i+1}^{(i)}(x) \tag{III.3}$$

Où y_i et y_{i+1} sont les valeurs de $y(x)$ aux nœuds i et $i + 1$, respectivement, et $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ sont des polynômes linéaires dans l'élément (i) . L'indice i désigne le point de grille, où $N_i^{(i)}(x) = 1.0$, et l'exposant (i) désigne l'élément dans lequel $N_i^{(i)}(x)$ s'applique. Les polynômes d'interpolation sont généralement appelées fonctions de forme dans la littérature des éléments finis (Chandrupatla et Belegundu, 2002). Les fonctions de forme sont définies pour être unité à leurs respectifs nœuds, zéro aux autres nœuds, et zéro partout en dehors de leur élément. Ainsi, $y^{(i)}(x_i) = y_i$, les y_i représentent la solution aux nœuds. La Figure (III.4) illustre les fonctions de forme linéaire pour l'élément (i) .

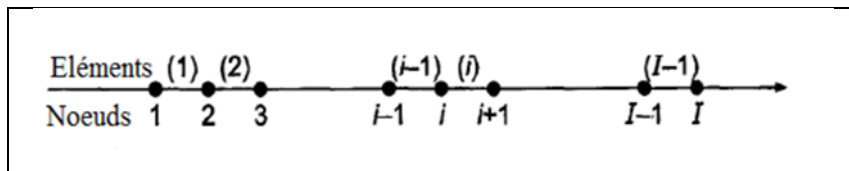


Figure (III.3) : Domaine de solutions globales discrétisées

De la figure (III.3), on obtient :

$$N_i^{(i)}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} \tag{III.4}$$

$$N_{i+1}^{(i)}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \tag{III.5}$$

En substituant les équations (III.4) et (III.5) dans l'équation (III.3), on obtient :

$$y^{(i)}(x) = y_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i} \right) + y_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right) \tag{III.6}$$

L'équation (III.6) est en fait un polynôme linéaire de Lagrange appliqué à l'élément (i) .

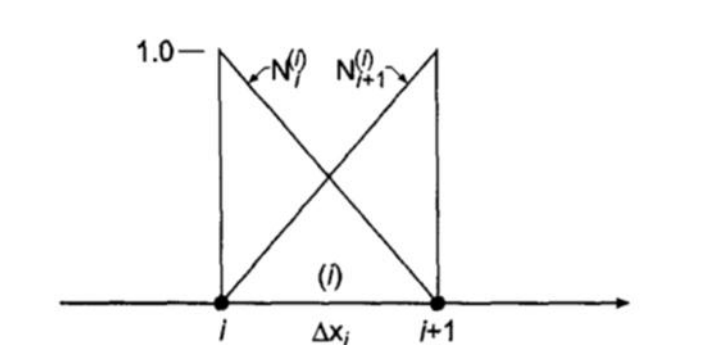


Figure (III.4) : La fonction de forme linéaire pour l'élément (i)

Le polynôme d'interpolation représenté dans l'équation (III.6) est un polynôme linéaire, et l'élément correspondant est appelé un élément linéaire. Ainsi, il y a $(I - 1)$ éléments, il y a $2(I - 1)$ fonctions de forme dans le domaine de la solution globale $D(x)$. Les $2(I - 1)$ formes des fonctions dans l'équation (III.4) et (III.5) forment un ensemble linéairement indépendant.

III.2. Méthode de Galerkin

La méthode des résidus pondérés de Galerkin est basée sur l'intégrale du résidu sur le domaine d'intérêt. En fait, le résidu $R(x)$ est pondérée sur le domaine d'intérêt en multipliant $R(x)$ par des fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$), intégrant les résidus pondérés sur la plage d'intégration, et mettant les intégrales des résidus pondérés égaux à zéro donnent des équations pour l'évaluation des coefficients C_i des fonctions de base $y_i(x)$ (Chandrupatla et Belegundu, 2002).

Galerkin a montré que les fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ sont basées sur les fonctions de base $y_i(x)$ de la solution approximative $y(x)$ donnent des résultats exceptionnellement bons. Ce choix est présenté dans l'analyse suivante.

Les étapes de la méthode de Galerkin sont les suivantes (Hoffman, 2001) :

- Déterminer l'équation différentielle à résoudre, par exemple équation (III.1) ;
- Supposer que la forme fonctionnelle de la solution d'approximation $y(x)$ est donnée par :

$$\bar{y}(x) \approx y(x) = \sum_{i=1}^I C_i y_i(x) \quad (III.7)$$

Choisir la forme fonctionnelle des fonctions de base $y_i(x)$ et s'assurer qu'elles sont linéairement indépendantes et satisfassent les conditions aux limites ;

- Introduire la solution d'approximation $y(x)$ dans l'équation différentielle et définir le résidu $R(x)$:

$$R(x) = y'' + Qy - F \quad (III.8)$$

- Choisir les fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) ;
- Définir les intégrales des résidus pondérés $\Psi_j(x)R(x)$ égaux à zéro ;

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi_j(x) R(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (III.9)$$

- Intégrer l'équation (III.9) et résoudre le système d'intégrales des résidus pondérés pour les coefficients C_i ($i = 1, 2, \dots, I$).

Pour illustrer la méthode des résidus pondérés de Galerkin, appliquons-la pour résoudre le problème de valeur aux limites spécifié par l'équation (III.1) avec les conditions spécifiques données par : $\bar{y}(0,0) = 0,0$ et $\bar{y}(1,0) = Y$, on suit les étapes ci-dessous :

- **Étape 1.** L'équation différentielle à résoudre est donnée par l'équation (III.1).
- **Étape 2.** Supposer que la forme fonctionnelle des solutions d'approximations $y(x)$ donnée par l'équation :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 x + C_2 x(x - 1) + C_3 x^2(x - 1) \quad (III. 10)$$

Les trois fonctions de base dans (III.10) sont linéairement indépendantes. En appliquant les conditions aux limites, on obtient : $C_1 = Y$. Ainsi, la solution approchée est donnée par :

$$y(x) = Yx + C_2 x(x - 1) + C_3 x^2(x - 1) \quad (III. 11)$$

- **Étape 3.** Définir le résidu $R(x)$:

$$R(x) = y'' + Qy - F \quad (III. 12)$$

De l'équation (III.11), on trouve :

$$y'' = 2C_2 + C_3(6x - 2) \quad (III. 13)$$

La substitution des équations (III.11) et (III.13) dans l'équation (III.12) donne :

$$R(x) = 2C_2 + C_3(6x - 2) + Q[Yx + C_2(x^2 - x) + C_3(x^3 - x^2)] - F \quad (III. 14)$$

- **Étape 4.** Choisir deux fonctions de pondération $\Psi_2(x)$ et $\Psi_3(x)$. Soit $\Psi_2(x) = y_2(x)$ et $\Psi_3(x) = y_3(x)$, ainsi on a l'équation ainsi :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 x + C_2(x^2 - x) + C_3(x^3 - x^2) \quad (III. 15)$$

Donc :

$$\Psi_2(x) = x^2 - x \quad \text{et} \quad \Psi_3(x) = x^3 - x^2 \quad (III. 16)$$

- **Étape 5.** Définir les intégrales des résidus pondérés égales à zéro. Ainsi donc :

$$\int_0^1 (x^2 - x)[2C_2 + C_3(6x - 2) + Q[Yx + C_2(x^2 - x) + C_3(x^3 - x^2)] - F] dx = 0 \quad (III. 17a)$$

$$\int_0^1 (x^3 - x^2)[2C_2 + C_3(6x - 2) + Q[Yx + C_2(x^2 - x) + C_3(x^3 - x^2)] - F] dx = 0 \quad (III. 17b)$$

Les fonctions $Q=Q(x)$ et $F=F(x)$ doivent être substituées dans l'équation (III.17) avant d'intégrer.

- **Étape 6.** Intégrer l'équation (III.17), pour $Q = \text{constante}$ et $F = \text{constante}$, après évaluation des résultats, et collection des termes, le résultat final est :

$$C_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{Q}{30} \right) + C_3 \left(\frac{1}{6} - \frac{Q}{60} \right) = -\frac{QY}{12} + \frac{F}{6} \quad (III.18a)$$

$$C_3 \left(\frac{1}{6} - \frac{Q}{60} \right) + C_3 \left(\frac{2}{15} - \frac{Q}{105} \right) = -\frac{QY}{20} + \frac{F}{12} \quad (III.18b)$$

La résolution de l'équation (III.18) donne les valeurs des coefficients C_2 et C_3 , et la substitution de ces derniers dans l'équation (III.11) permet d'obtenir l'approximation $y(x)$.

III.3. MEF par la méthode de Galerkin

L'approche des résidus pondérés de Galerkin est généralement la méthode la plus simple comparativement aux autres, puisqu'il n'est pas nécessaire de rechercher la fonctionnelle correspondante à l'EDO aux limites. La méthode d'élément fini est basée sur l'approche de Galerkin est illustrée dans cette section, en l'appliquant pour résoudre le problème aux limites linéaire donné par l'équation (III.1).

Le résidu $R(x)$ donné par l'équation (III.8) est multiplié par un ensemble de facteurs de pondération $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) et intégré sur le domaine globale $D(x)$ pour obtenir l'intégrale pondérée donné par :

$$I(y(x)) = \int_a^b \Psi_j(x) R(x) dx = 0 \quad (III.19)$$

En remplaçant l'équation (III.8) dans l'équation (III.19), on trouve :

$$I(y(x)) = \int_a^b \Psi_j(x) (y'' + Qy - F) dx = 0 \quad (III.20)$$

On intègre le premier membre de l'équation (III.20) par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \Psi_j y'' dx &= - \int_a^b y' \Psi_j' dx + y' \Psi_j \Big|_a^b \\ &= - \int_a^b y' \Psi_j' dx + y'_b \Psi_j(b) - y'_a \Psi_j(a) \end{aligned} \quad (III.21)$$

Les deux derniers termes de l'équation (III.21) impliquent la dérivée aux points limites. Pour conditions aux limites de Dirichlet, ces termes ne sont pas nécessaires. Pour la condition de Neumann, ces deux termes introduisent les conditions de dérivées aux limites du domaine de la solution globale. En substituant l'équation (III.21) dans l'équation (III.20), on obtient :

$$I(y(x)) = \int_a^b (-y' \Psi'_j + Qy \Psi_j - F \Psi_j) dx + y'_b \Psi_j(b) - y'_a \Psi_j(a) = 0 \quad (III. 22)$$

En termes de solution approximative globale $y(x)$ et du domaine de solution globale discrétisée illustré sur la figure (III.3), l'équation (III.22) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} I(y(x)) &= I^{(1)}(y(x)) + I^{(2)}(y(x)) + \dots + I^{(i-1)}(y(x)) + I^{(i)}(y(x)) + \dots + I^{(l-1)}(y(x)) \\ &\quad + y'_b \Psi_j(b) - y'_a \Psi_j(a) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (III. 23)$$

D'où $I^{(i)}(y(x))$ est donné par :

$$\begin{aligned} I^{(i)}(y(x)) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-y' \frac{d[\Psi_j(x)]}{dx} + Qy \Psi_j - F \Psi_j \right) dx + y'_b \Psi_j(b) - y'_a \Psi_j(a) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (III. 24)$$

Où $y^{(i)}(x)$ est le polynôme d'interpolation et $\Psi_j(x)$ indique les fonctions de pondération applicable à l'élément (i). Le polynôme d'interpolation $y^{(i)}(x)$ est donné par l'équation (III.3). Avec les fonctions de forme $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ sont données par l'équation (III.4) et (III.5). Dans l'approche des résidus pondérés de Galerkin, les fonctions de pondération $\Psi_j(x)$ sont choisissent les fonctions de forme $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$. Rappelons que ces deux derniers sont nulles partout à l'extérieur de l'élément (i).

Sachant que $\Psi_j(x) = N_i^{(i)}(x)$, on remplaçant dans l'équation (III.24) et on obtient :

$$I(y(x)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-y' \frac{d[N_i^{(i)}(x)]}{dx} + Qy N_i^{(i)} - F N_i^{(i)} \right) dx = 0 \quad (III. 25)$$

De même $\Psi_j(x) = N_{i+1}^{(i)}(x)$, on remplaçant dans l'équation (III.24) et on obtient :

$$I(y(x)) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-y' \frac{d[N_{i+1}^{(i)}(x)]}{dx} + Qy N_{i+1}^{(i)} - F N_{i+1}^{(i)} \right) dx = 0 \quad (III. 26)$$

Les équations (III.25) et (III.26) sont des équations d'éléments pour l'élément (i). Une autre approche est basée sur la fonction $N_i(x)$ illustrée dans la figure (III.5). Ainsi :

$$N_i(x) = N_i^{(i-1)}(x) + N_i^{(i)}(x) \quad (III. 27)$$

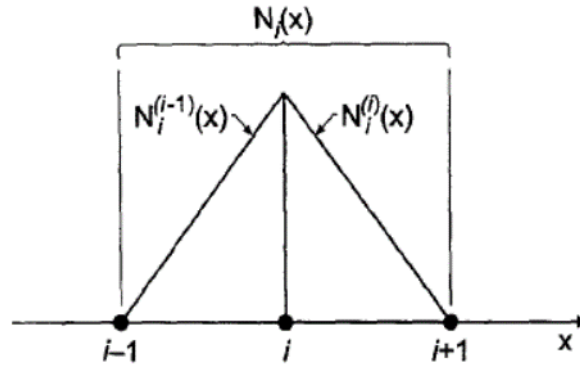


Figure (III.5) : La fonction de forme pour le nœud i

L'équation (III.27) exprime simplement le fait que $N_i(x) = N_i^{(i-1)}(x)$ dans l'élément ($i-1$) et $N_i(x) = N_i^{(i)}(x)$ dans l'élément (i). On prend $\Psi_j(x) = N_i(x)$ et remplaçant dans l'équation (III.22), on aboutit à une fonction pour le nœud i , donne :

$$I(y(x)) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-y' \frac{d(N_i^{(i-1)}(x))}{dx} + QyN_i^{(i-1)} - FN_i^{(i-1)} \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-y' \frac{d(N_i^{(i)}(x))}{dx} + QyN_i^{(i)} - FN_i^{(i)} \right] dx = 0 \quad (III.28)$$

L'équation (III.28) est l'équation nodale pour le nœud i . Notez que l'équation (III.25), qui est l'équation du premier élément pour l'élément (i), est identique à la deuxième intégrale de l'équation (III.28). Lorsque les équations élémentaires sont développées pour élément ($i-1$), on trouve que l'équation du second élément pour l'élément ($i-1$), qui correspond à (III.26) pour l'élément (i), est identique à la première intégrale de l'équation (III.28).

Ainsi, l'équation (III.28) peut être obtenue en combinant les équations d'éléments ($i-1$) et (i). Ce processus s'appelle assemblage des équations d'éléments. Ainsi, l'approche par équation élémentaire et l'approche par équation nodale donnent des résultats identiques.

Pour les domaines unidimensionnels, il n'y a pas de différence appréciable dans la quantité d'effort impliqué dans les deux approches. Cependant, pour les domaines bidimensionnels et tridimensionnels, l'approche élémentaire est considérablement plus simple, ainsi l'approche par éléments est utilisée dans le reste de cette section. Pour l'illustrer en appliquant l'approche de Galerkin pour résoudre l'équation (III.1).

Les étapes de calcul sont décrites à la section précédente, pour élément (i), les fonctions de forme et la fonction polynomiale d'interpolation linéaire sont données par les équations (III.4) à (III.6) et les équations d'élément pour l'élément (i) sont données par (III.25) et (III.26).

Donc, de l'équation (III.4) et (III.5) on trouve les dérivées des fonctions de formes sont :

$$\frac{d[N_i^{(i)}(x)]}{dx} = -\frac{1}{\Delta x_i} \quad (III.29)$$

$$\frac{d[N_{i+1}^{(i)}(x)]}{dx} = \frac{1}{\Delta x_i} \quad (III.30)$$

En substituant les équations (III.29) et (III.30) dans les équations. (III.25) et (III.26) respectivement, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^{(i)} Q y dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^{(i)} F dx = 0 \quad (III.31a)$$

$$-\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1}^{(i)} Q y dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1}^{(i)} F dx = 0 \quad (III.31b)$$

L'équation (III.31) nécessite les fonctions $y(x)$, $y'(x)$, $N_i^{(i)}(x)$ et $N_{i+1}^{(i)}(x)$ qui sont données par les équations (III.6), (III.4) et (III.5). Substituer toutes ces expressions dans l'équation (III.31), et évaluant $Q(x)$ et $F(x)$ comme des valeurs moyennes pour chaque élément on obtient :

$$\bar{Q}^{(i)} = \frac{(Q_i + Q_{i+1})}{2} \quad (III.32)$$

$$\bar{F}^{(i)} = \frac{(F_i + F_{i+1})}{2} \quad (III.33)$$

L'intégration et l'évaluation des résultats aux limites d'intégration donnent les équations à deux éléments :

$$-y_i \left(\frac{1}{\Delta x_i} - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{3} \right) + y_{i+1} \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i}{2} = 0 \quad (III.34)$$

$$y_i \left(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{6} \right) - y_{i+1} \left(\frac{1}{\Delta x_i} - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x_i}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x_i}{2} = 0 \quad (III.35)$$

Les deux équations (III.34) et (III.35) sont valables pour Δx non uniforme. En fixant $\Delta x_i = \Delta x = \text{constant}$ et multipliant par Δx , on aura :

$$-y_i \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{3} \right) + y_{i+1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x^2}{2} = 0 \quad (III.36)$$

$$y_i \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{6} \right) - y_{i+1} \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i)} \Delta x^2}{2} = 0 \quad (III.37)$$

Ces deux dernières équations sont valables pour Δx uniforme. En assemblant les équations des éléments pour une grille uniforme, équations (III.36) et (III.37). En les appliquant pour l'élément (i-1), on obtient :

$$-y_{i-1} \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x^2}{3} \right) + y_i \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x^2}{6} \right) - \frac{\bar{F}^{(i-1)} \Delta x^2}{2} = 0 \quad (III.38)$$

$$y_{i-1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x^2}{6} \right) - y_i \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x^2}{3} \right) - \frac{\bar{F}^{(i-1)} \Delta x^2}{2} = 0 \quad (III.39)$$

Et pour l'élément (i) on obtient les mêmes que (III.36) et (III.37). L'addition des équations (III.39) et (III.36) donne l'équation nodale pour le nœud i . Ainsi :

$$\begin{aligned} y_{i-1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i-1)} \Delta x^2}{6} \right) - 2y_i \left(1 - \frac{\bar{Q}^{(i-1)} + \bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{6} \right) + y_{i+1} \left(1 + \frac{\bar{Q}^{(i)} \Delta x^2}{6} \right) \\ = \left(\frac{\bar{F}^{(i-1)} + \bar{F}^{(i)}}{2} \right) \Delta x^2 \end{aligned} \quad (III.40)$$

A présent, on va appliquer les détails que l'on vient de voir à l'EDO régissant l'écoulement à travers le déversoir latéral.

III.4. Application au cas des déversoirs latéraux

III.4.1. Détermination de la matrice élémentaire

Soit l'équation qui caractérise l'écoulement sur les déversoirs latéraux s'écrivant sous la forme : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; selon la méthode de Galerkin on écrit :

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0 = R \quad (III.41)$$

En écrivant l'équation du résidu pour le domaine Ω , on aura :

$$\int_{\Omega} R N_i d\Omega = 0 \quad (III.42)$$

Pour un élément :

$$\int_{x_i}^{x_j} \left[\frac{dy}{dx} - f(x, y) \right] N_i dx = 0 \quad i = 1, 2 \quad (III.43)$$

Sachant que :

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \quad (III.44)$$

D'où :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 - f(x, y) \right] N_i dx = 0 \quad (III.45)$$

Pour le nœud $i=1$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[N_1 \frac{dN_1}{dx} y_1 + N_1 \frac{dN_2}{dx} y_2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_1 dx \quad (III.46)$$

Pour le nœud $i=2$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[N_2 \frac{dN_1}{dx} y_1 + N_2 \frac{dN_2}{dx} y_2 \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_2 dx \quad (III.47)$$

Donc, on peut écrire sous forme matricielle :

$$\int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} N_1 \frac{dN_1}{dx} & N_1 \frac{dN_2}{dx} \\ N_2 \frac{dN_1}{dx} & N_2 \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} f(x, y) N_1 \\ f(x, y) N_2 \end{bmatrix} dx \quad (III.48)$$

Ayant :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{x_j - x}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{\Delta x} \\ N_2 = \frac{x - x_i}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \end{cases} \quad (III.49)$$

D'où l'on déduit la matrice de rigidité de l'élément :

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} -N_1 & +N_1 \\ \frac{\Delta x}{\Delta x} & \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ -N_2 & +N_2 \\ \frac{\Delta x}{\Delta x} & \frac{\Delta x}{\Delta x} \end{bmatrix} dx \quad (III.50)$$

En intégrant le premier terme de la matrice (III.50) en détail, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{-N_1}{\Delta x} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-1}{\Delta x} \right) \left(\frac{x_j - x}{\Delta x} \right) dx = \frac{-1}{\Delta x} \left[\frac{x_j}{\Delta x} x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{-1}{\Delta x} \left[x_j \frac{\Delta x}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2\Delta x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{\Delta x} \left[x_j - \frac{\Delta x}{2} \right] = \frac{-1}{\Delta x} \left[\Delta x - \frac{\Delta x}{2} \right] \\
 &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{III.51}$$

De manière analogue pour les autres termes, on trouve :

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \frac{N_1}{\Delta x} dx = \frac{1}{2} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{-N_2}{\Delta x} dx = \frac{1}{2} \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{N_2}{\Delta x} dx = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{III.52}$$

Donc, la matrice élémentaire écrit comme suit :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} f(x, y) N_1 \\ f(x, y) N_2 \end{bmatrix} dx \tag{III.53}$$

❖ Calcul des intégrales $\int f(x, y) N_i dx$

Pour une approximation linéaire de forme : $f(x, y) = f_i + \frac{x}{\Delta x} (f_{i+1} - f_i)$, on a :

$$f(x, y) = f_i + \frac{x}{\Delta x} f_{i+1} - \frac{x}{\Delta x} f_i = f_i \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) + f_{i+1} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \tag{III.54}$$

L'équation (III.54) est sous la forme : $f(x, y) = F_1 N_1 + F_2 N_2$

En portant l'expression de $f(x, y)$ dans l'équation (III.54) et en intégrant pour le nœud $i=1$, on aura :

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_1 dx &= \int_{x_1}^{x_2} [F_1 N_1 + F_2 N_2] N_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[F_1 \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) + F_2 \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right] N_1 dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[F_1 \left(N_1 - \frac{x}{\Delta x} N_1 \right) + F_2 \left(\frac{x}{\Delta x} N_1 \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} [F_1 (N_1 \Delta x - N_1 x)] dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} [F_2 (x N_1)] dx \\
 &= \frac{F_1}{\Delta x} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx - \int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx \right\} + \frac{F_2}{\Delta x} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx \right\}
 \end{aligned} \tag{III.55}$$

En portant le résultat de l'équation (III.54) et en divisant par $\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx$, on aura :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx \frac{F_1}{\Delta x} \left[1 - \frac{\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx}{\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx} \right] + \int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx \frac{F_2}{\Delta x} \quad (III.56)$$

En posant que : $\theta = \frac{\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx}{\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx}$ (facteur de pondération)

❖ Evaluation du paramètre θ :

- Calcul du numérateur :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} \right] x dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[x - \frac{x^2}{\Delta x} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\Delta x} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (III.57)$$

Après intégration et simplification, on obtient :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 x dx = \frac{\Delta x^2}{6} \quad (III.58)$$

- Calcul du dénominateur :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{x}{\Delta x} \right) \Delta x dx = \Delta x \left[x - \frac{x^2}{2\Delta x} \right]_{x_1}^{x_2} = \Delta x \left[\Delta x - \frac{\Delta x^2}{2\Delta x} \right] \quad (III.59)$$

Après simplification, on obtient :

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 \Delta x dx = \frac{\Delta x^2}{2} \quad (III.60)$$

Ainsi, de l'équation (III.58) et l'équation (III.60), on déduit facilement que $\theta = \frac{1}{3}$.

L'introduction de ce paramètre dans l'équation (III.56) donne :

$$\frac{\Delta x^2}{2} \frac{F_1}{\Delta x} [1 - \theta] + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{F_2}{\Delta x} [\theta] = \frac{F_1 \Delta x}{2} [1 - \theta] + \frac{F_2 \Delta x}{2} [\theta] \quad (III.61)$$

En remplaçant θ par leur valeur dans l'équation (III.61), cette dernière deviendra alors :

$$\frac{\Delta x}{2} F_1 \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{\Delta x}{2} F_2 \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{2}{3} F_1 + \frac{1}{3} F_2 \right] \quad (III.62)$$

Alors :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_1 dx = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{2}{3} f_1(x, y) + \frac{1}{3} f_2(x, y) \right] \quad (III.63)$$

Par un raisonnement similaire, on obtient aussi :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) N_2 dx = \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{1}{3} f_1(x, y) + \frac{2}{3} f_2(x, y) \right] \quad (III.64)$$

En groupant tous ces résultats dans la matrice élémentaire, on aura :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} f_1(x, y) + \frac{2}{3} f_2(x, y) \\ \frac{2}{3} f_1(x, y) + \frac{1}{3} f_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (III.65)$$

Ou encore :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} f_1(x, y) + 2f_2(x, y) \\ 2f_1(x, y) + f_2(x, y) \end{bmatrix} \quad (III.66)$$

III.4.2. La matrice globale

On appelle matrice globale la matrice correspondant à l'assemblage de toutes les matrices élémentaires que nous avons obtenu dans (III.66) pour l'ensemble du domaine de calcul, donc on peut l'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (III.67)$$

On peut conclure que c'est une matrice ($n \times n$) selon le nombre des inconnus du problème à calculer, dont la diagonale est égale à l'assemblage successive des matrices de rigidité élémentaires. Pour procéder au calcul, on doit définir les deux cas de l'écoulement qu'on peut distinguer ; à savoir, supercritique ou subcritique.

III.4.2.1. Ecoulement supercritique

Pour le cas supercritique ça sera un problème à valeur initiale, où l'amont est indépendant de l'aval. Dans ce cas, on aura une équation non linéaire à résoudre dans chaque pas d'espace, que l'on appelle communément formule de récurrence.

III.4.2.2. Ecoulement subcritique

Pour le cas subcritique ça sera un problème aux limites, où l'on a besoin des conditions de frontière amont et aval. Ainsi, ce cas est calculé par une approche matricielle, d'où il faut noter que les résultats trouvés précédemment sont représentés par un système matricielle non linéaire, qu'on va résoudre généralement par la méthode des substitutions successives. Cette dernière est appliquée pour deux méthodes qui sont les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel, dans cette partie nous nous intéressons à la méthode de Jacobi.

➤ Méthode de Jacobi (Boumahrat et Gourdin, 1993) :

Si l'on peut réécrire chaque équation du système (III.67) sous la forme :

$$X_i = F_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (III.68)$$

La méthode s'écrit par :

$$\begin{cases} X_i^{(k+1)} = F_i(X^{(k)}) \\ X^{(k)} = [X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}]^t \end{cases} \quad (III.69)$$

L'équation (III.68) étant équivalente au système (III.67), alors la solution X^* du système (III.67) vérifie :

$$\begin{cases} X_i^* = F_i(X^*) \quad i = 1, 2, \dots, n \\ X^* = [X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*]^t \end{cases} \quad (III.70)$$

La soustraction de l'équation (III.70) à l'équation (III.69) donne :

$$X_i^{(k+1)} - X_i^* = F_i(X^{(k)}) - F_i(X^*) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (III.71)$$

En supposant $X^{(k)}$ proche de X^* , et si les F_i sont continus et continûment dérivable dans le voisinage de X^* alors, par développement en série de Taylor tronquée après les termes fonctions des dérivées premières, on obtient :

$$\begin{aligned} F_i(X^*) &= F_i(X^{(k)}) - (X^{(k)} - X^*) \\ &= F_i(X^{(k)}) - \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_1} \Big|_{X=X^{(k)}} (X_1^{(k)} - X_1^*) - \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_2} \Big|_{X=X^{(k)}} (X_2^{(k)} - X_2^*) - \dots \\ &\quad \dots - \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_n} \Big|_{X=X^{(k)}} (X_n^{(k)} - X_n^*) \end{aligned} \quad (III.72)$$

En remplaçant l'équation (III.72) dans l'équation (III.71), on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k+1)} - X_1^* \\ X_2^{(k+1)} - X_2^* \\ \vdots \\ X_n^{(k+1)} - X_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1(X)}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2(X)}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(X)}{\partial X_1} & \dots & \dots & \frac{\partial F_n(X)}{\partial X_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1^{(k)} - X_1^* \\ X_2^{(k)} - X_2^* \\ \vdots \\ X_n^{(k)} - X_n^* \end{bmatrix} \quad (III.73)$$

Ou sous forme matricielle :

$$X^{(k+1)} - X^* = E(X^{(k)} - X^*) \quad (III.74)$$

Où :

$$E_{ij} = \left\{ \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j} \right\}_{X=X^{(k)}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (III.75)$$

Ainsi, dans un voisinage proche de la solution X^* , le procédé de résolution est linéarisable et les conditions suffisantes de convergence sont celles qui gouvernent la convergence des systèmes linéaires et par analogie entre les itérations linéaires et linéarisées (III.74), la condition suffisante pour que les itérations soient asymptotiquement stables (erreur décroissante quand k augmente), s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_i(X)}{\partial X_j} \right|_{X=X^*} < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (III.76)$$

Cette condition ne suffit pas à assurer la convergence : si la condition est vérifiée pour $X = X^{(k)}, \forall k$ alors la convergence est assurée sinon, elle peut converger ou non.

III.5. Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons exposé l'une des méthodes les plus puissants pour la résolution numérique des équations différentielles caractérisant l'écoulement à débit spatialement varié, qui est la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, on a présenté la méthode des éléments finis avec son principe de mise en œuvre. Après, dans un second temps, un développement détaillé de la discrétisation de la méthode des éléments finis par la méthode de Galerkin a été donné.

Enfin, et pour terminer, l'application au cas du déversoir latéral a été donné dans laquelle la démonstration de la matrice globale a été faite. Reste donc à mettre en application et à expérimenter ces concepts pour des cas pratiques.

"...Dans chaque recherche mathématique, la question se posera si nous pouvons appliquer nos résultats mathématiques au monde réel."

V.I. Arnold

IV.

APPLICATION

Après avoir élaboré, dans le chapitre qui a précédé, le fondement théorique de la méthode des éléments finis avec ses différents processus de calcul numérique, qui permettant la résolution des équations régissant l'écoulement dans les déversoirs latéraux. Dans ce présent chapitre, nous examinerons des applications pour des différents modèles, à savoir, numérique et expérimental.

IV.1. Données expérimentales de validation

Dans cette partie, on se réfère à certains nombres d'expériences effectuées au laboratoire de l'ETH Zurich par Hager (1981) et qui ont fait l'objet de sa thèse de Doctorat.

Cette application a pour objet la comparaison entre les résultats du calcul numérique et celles de l'expérimental, en utilisant la méthode des éléments finis (MEF).

Notons que l'on fera usage de la méthode des éléments finis de Galerkin.

IV.1.1. Description du dispositif expérimental

On distingue, dans ce qui suit, deux modèles hydrauliques (Hager, 1981) :

- ✓ Un modèle de longueur de 6 m et de largeur $B = 0,3$ m, servit à faire des investigations de l'écoulement interne (détermination du champ de vitesse, des angles des lignes de courant et de la surface d'eau).
- ✓ Un deuxième modèle, de longueur 50 m et avec $B = 0,3$ m, a apporté des informations concernant le mécanisme d'écoulement à travers les déversoirs latéraux ; aux total huit déversoirs, de longueur $L = 0,2$ m et de hauteur $P = 0,1$ m, ont été montés.

Une série de n déversoirs est remplacée par un déversoir latéral de substitution de même hauteur et longueur. Toutefois, la longueur totale de la zone de débit localement varié doit être conservée pour la détermination des effets de frottement. À part cette modification, une série de déversoirs latéraux se calcule de la même manière que le déversoir latéral de substitution (Hager, 1986).

Les vérifications que nous allons présenter dans ce travail se rapportent sur une seule ouverture latérale à paroi mince. La figure (IV.1), donne le plan des dispositions adoptées dans la réalisation du modèle hydraulique utilisé pour l'étude du fonctionnement du déversoir latéral avec quelques vus d'ensemble de ce modèle qui sont données par les photographies de la figure (IV.2) et (IV.3). Sachant que les dispositifs de mesure utilisés pour chacun de la hauteur d'eau et de la vitesse sont montrés dans les figures (IV.4) et (IV.5) respectivement :

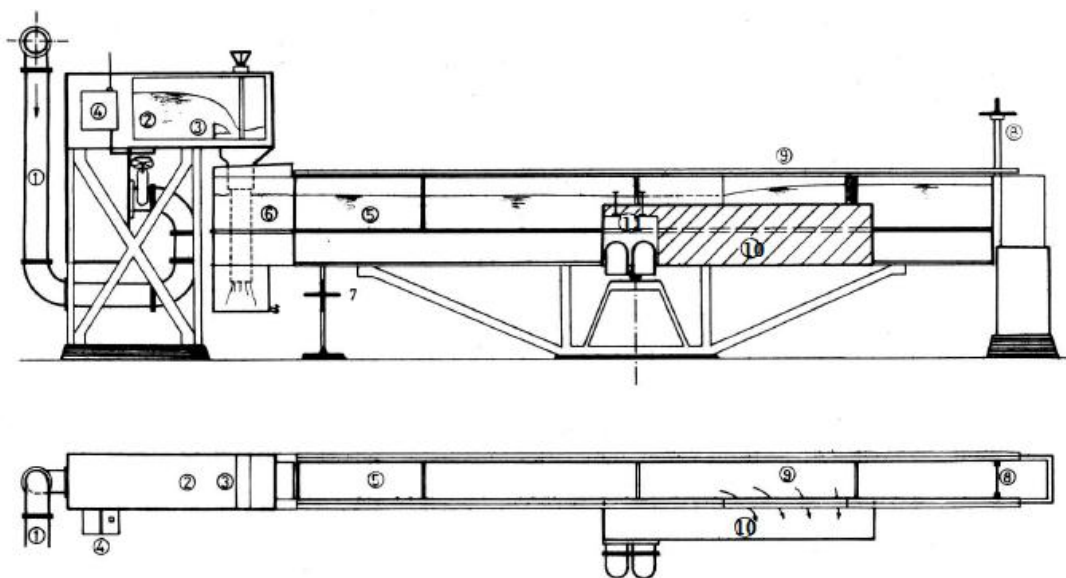


Figure (IV.1) : Dispositif adopté pour l'étude du fonctionnement du déversoir latéral (Hager, 1981)

Nomenclature :

- 1- Conduite d'arrivée (alimentation) ;
- 2- Chambre de mise en charge ;
- 3- Déversoir (guide-eau) ;
- 4- Boite de mesure de niveau à capteur ;
- 5- Canal ;
- 6- Chambre de tranquillisation ;
- 7- Support de variation de pente ;
- 8- Vanne wagon de réglage aval ;
- 9- Déversoir latéral ;
- 10- Canal latéral de récupération ;
- 11- Conduites de restitution.

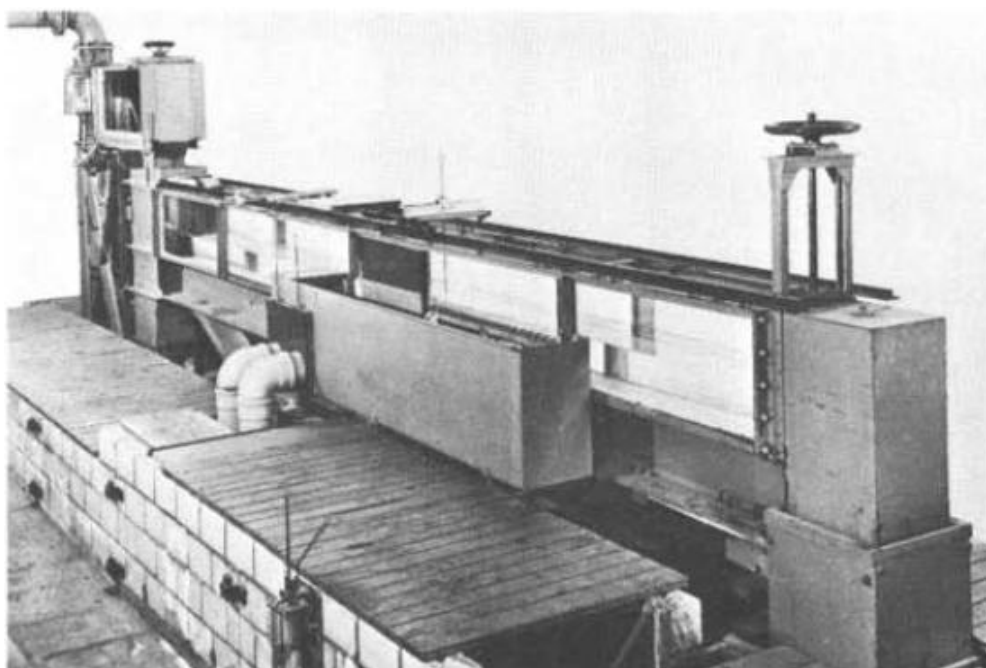
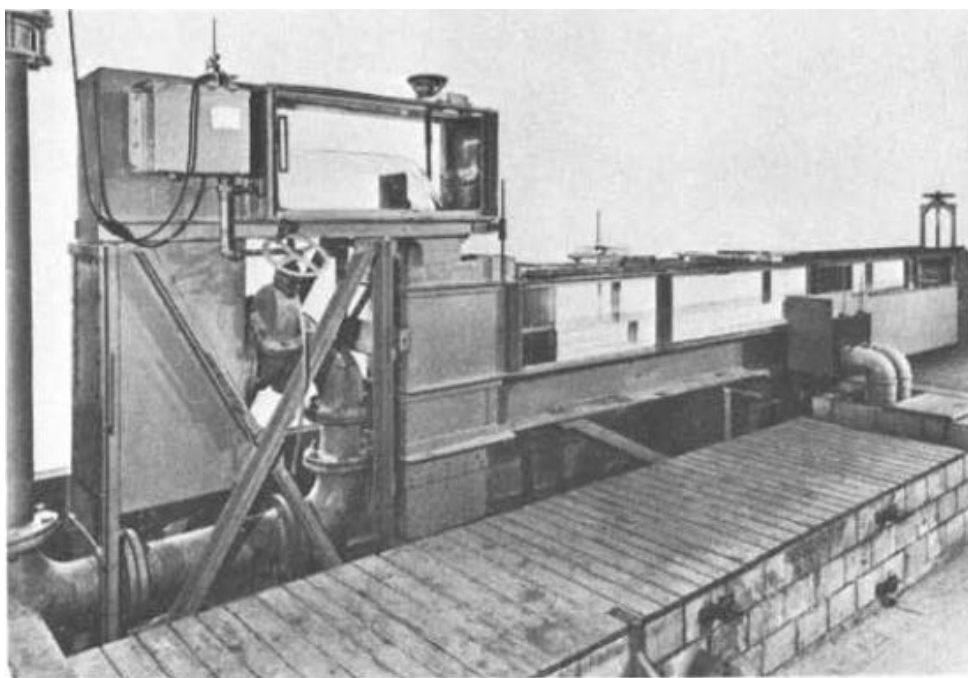


Figure (IV.2) : Photographies du dispositif expérimental « vue en perspective » (Hager, 1981)

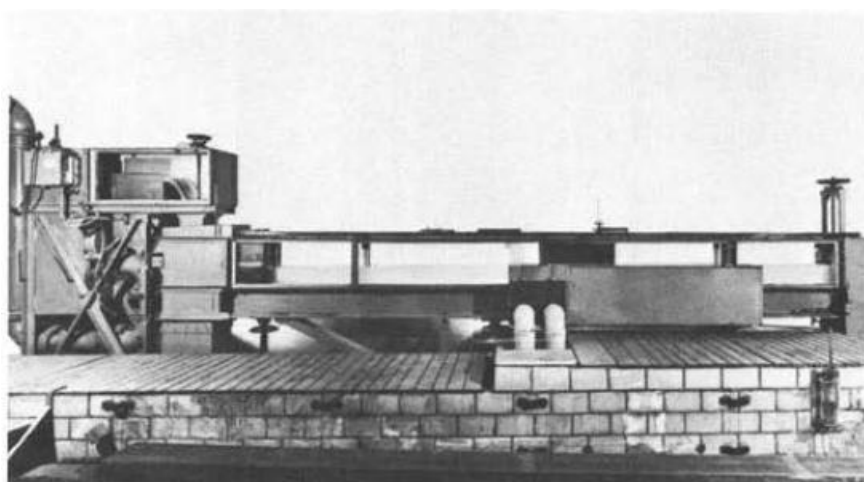
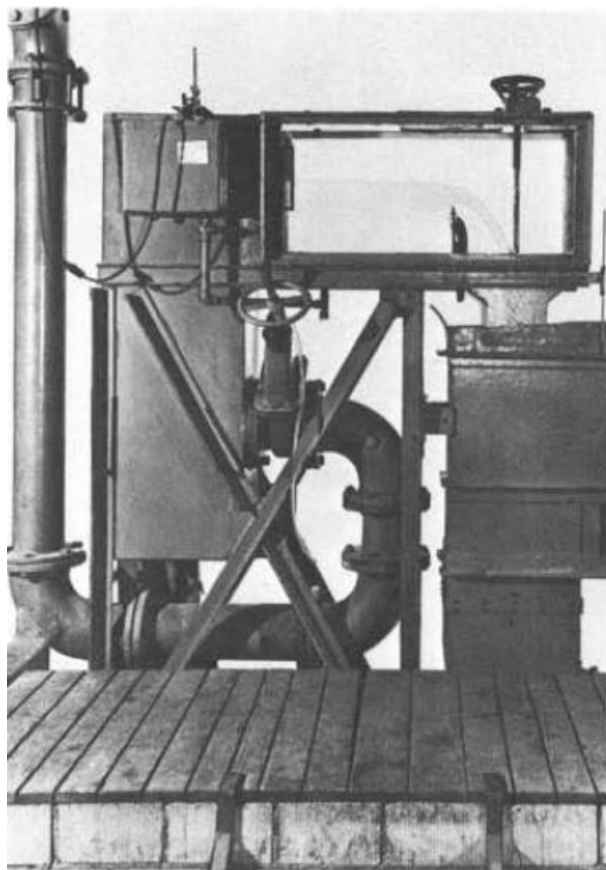


Figure (IV.3) : Photographies du dispositif expérimental « vue de face » (Hager, 1981)

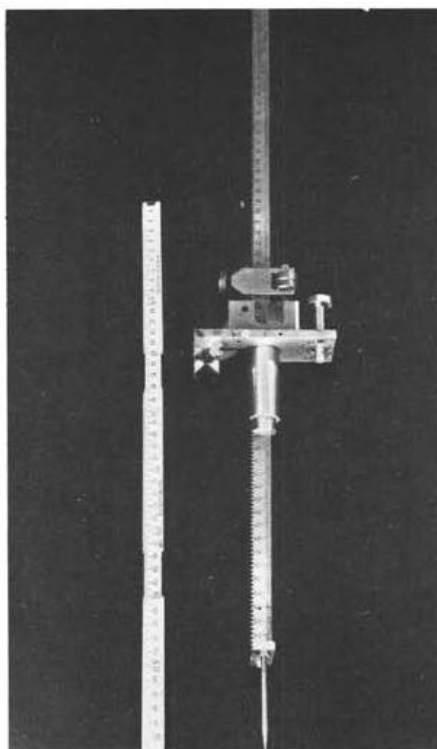


Figure (IV.4) : Limnimeètre à pointe (Hager, 1981)

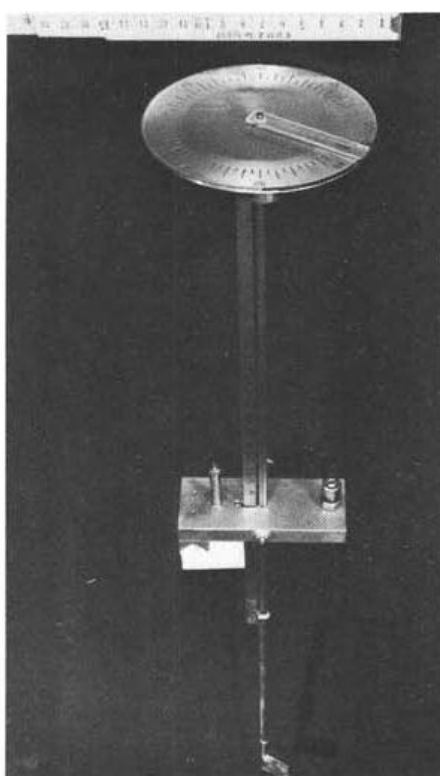


Figure (IV.5) : Micro-moulinet giratoire (Hager, 1981)

IV.1.2. Test numérique

Pour l'application numérique, on prend comme référence les valeurs qui ont été établies par Hager (1981) dans ses recherches théoriques et expérimentales sur les écoulements à travers les déversoirs latéraux effectuées au laboratoire de l'ETHZ.

Dans le but de déterminer les variations de la ligne d'eau le long du déversoir, plusieurs expériences ont été effectuées dans le dispositif expérimental présenté précédemment avec des différences paramétriques d'une expérience à une autre. Parmi ces expériences, on fera usage de cinq d'entre-elles, où l'on a un seul cas supercritique et quatre cas subcritiques.

Les données de ces expériences sont regroupées dans le tableau (IV.1) ci-dessous :

Tableau (IV.1) : Données expérimentales (Hager, 1981)

Données expérimentales	Essai «J»	Essai «D»	Essai «E»	Essai «F»	Essai «G»
Longueur du déversoir (m)	1	1	1	1	1
Largeur du canal (m)	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
La rugosité (n)	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Hauteur d'eau (m)	0	0,01	0,15	0,2	0,15
La pente du fond (m/m)	0,02	0,0005	0,003	0,005	0,002
Débit amont (m ³ /s)	0,04	-	-	-	-
Débit aval (m ³ /s)	-	0,020	0,0195	0,0217	0,0296

Appliquant à présent la méthode des éléments finis de Galerkin pour ces données expérimentales pour chacun des cas ci-dessus.

IV.2. Résultats et discussions

Avant d'aborder cette partie, rappelant que dans notre travail, on a deux types de régime d'écoulement. Le premier régime supercritique, traduit par l'essai «J», tandis que, le deuxième régime est régime subcritique, qui est traduit par les essais D, E, F et G.

Les résultats calculés, obtenus pour les cinq expériences citées précédemment sont illustrées dans les figures ci-dessous qui montrent la variation du niveau d'eau sur le seuil du déversoir en fonction de l'espace.

Avant d'entamer la procédure de calcul, nous avons subdivisé le domaine global de l'étude ($L = 1\text{m}$) en cinq sous-domaines, selon Hager (1981). Ainsi, nous obtenons cinq éléments, chacun d'eux est considéré comme un domaine d'étude élémentaire, ce qui nous permet d'obtenir un pas d'espace estimé par $\Delta x = 0,2\text{ m}$.

Pour les données précédentes, et pour un pas d'espace de $0,2\text{ m}$; le calcul numérique par la méthode des éléments finis nous donne les résultats des courbes représentées respectivement sur les figures (IV.5), (IV.6), (IV.7), (IV.8) et (IV.9) ci-après :

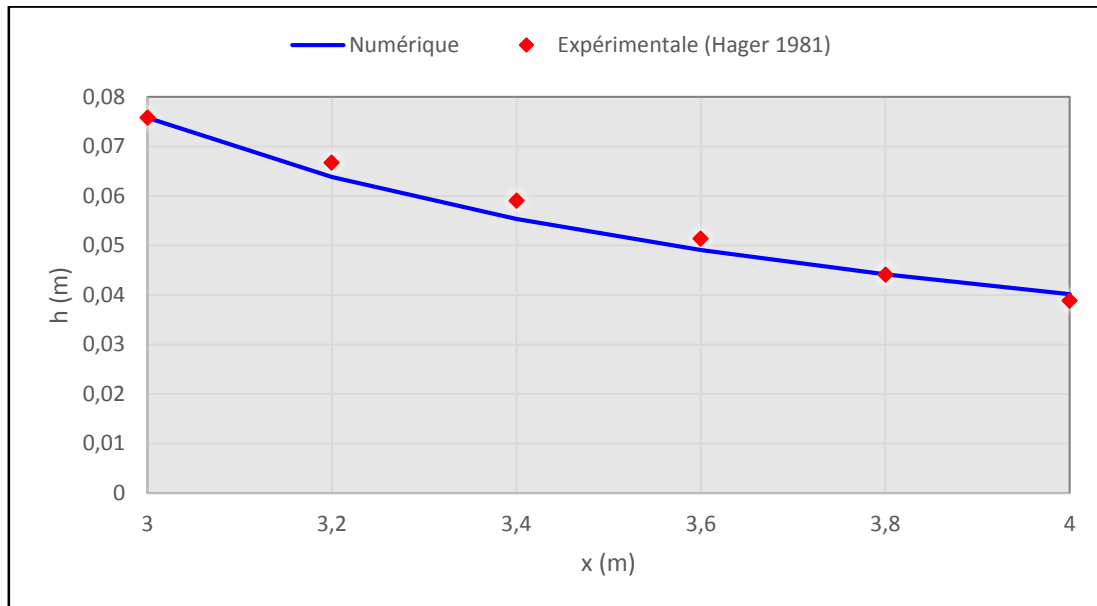


Figure (IV.6) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai J)

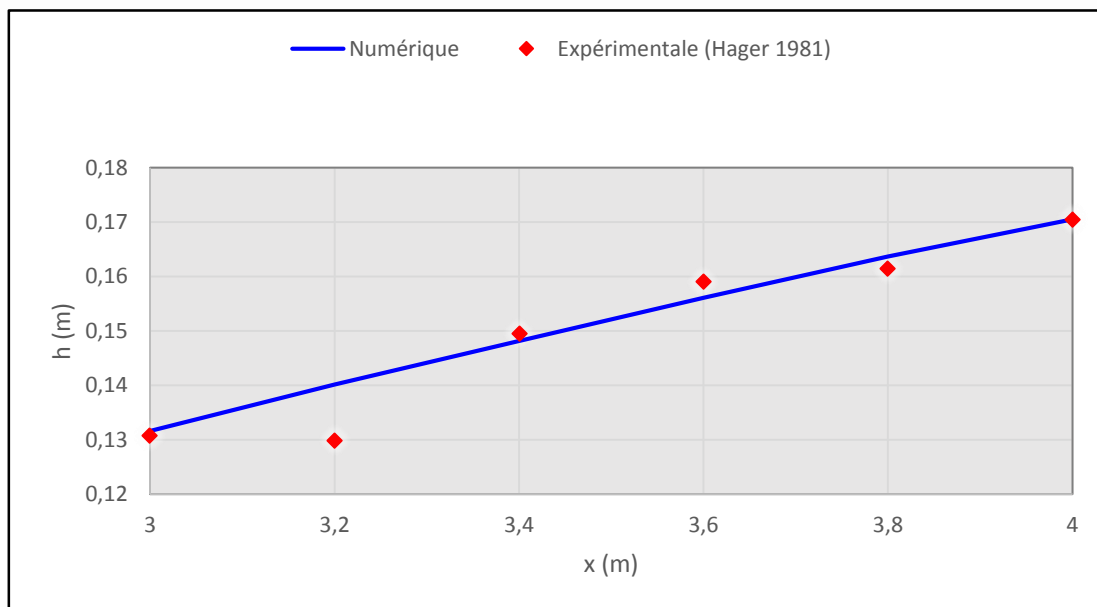


Figure (IV.7) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai D)

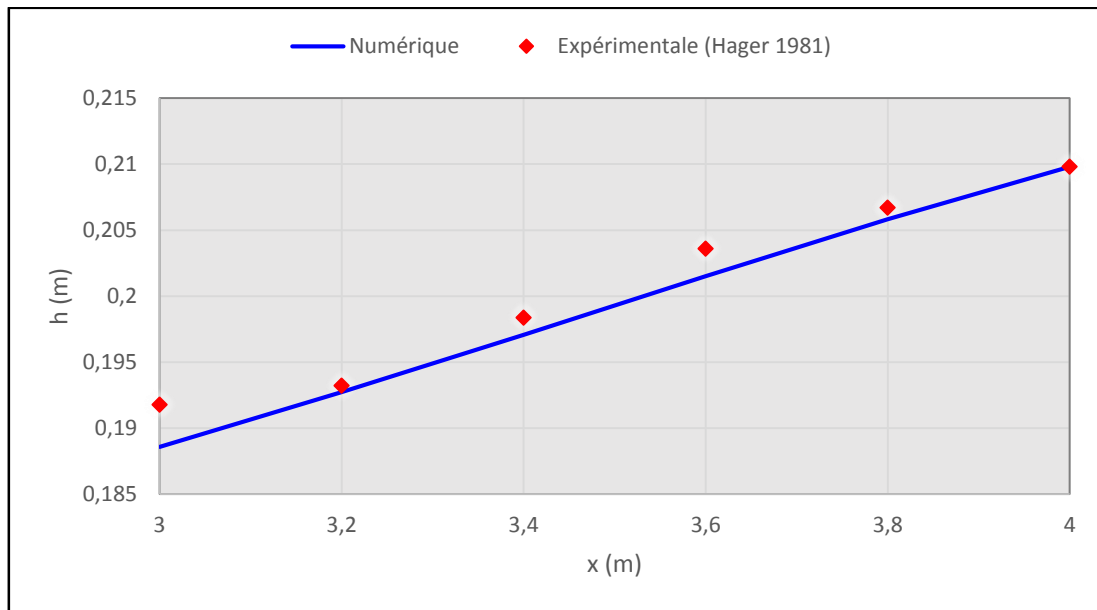


Figure (IV.8) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai E)

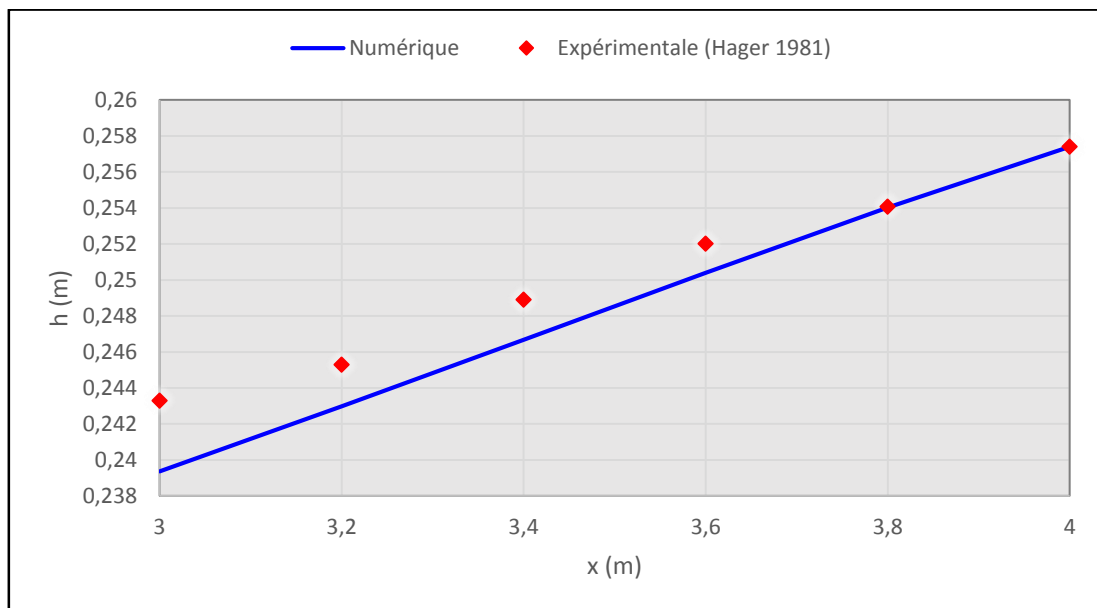


Figure (IV.9) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai F)

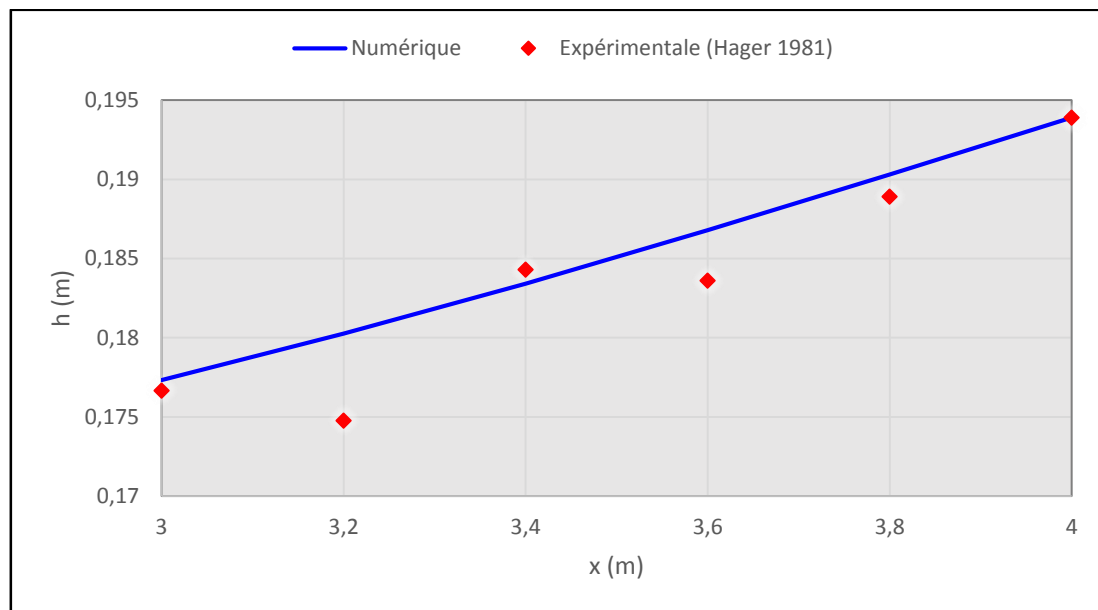


Figure (IV.10) : Variation spatiale de la ligne d'eau sur le déversoir (essai G)

Nous donnons dans le tableau (IV.2), qui suit le récapitulatif des résultats numériques que nous avons obtenus dans ce travail avec celles qui sont données par Hager (1981), dans le but d'illustrer les différences entre nos résultats et ceux de ce dernier.

Tableau (IV.2) : Tableau récapitulatif des résultats obtenus dans les essais

Essai	Paramètres	Numériques	Expérimentales	Erreur relative (%)
J	Débit aval (m^3/s)	0,021	0,022	4,5
	Hauteur d'eau aval (m)	0,040	0,039	2,5
D	Débit amont (m^3/s)	0,040	0,039	2,5
	Hauteur d'eau amont (m)	0,1316	0,1307	0,7
E	Débit amont (m^3/s)	0,041	0,039	5,2
	Hauteur d'eau amont (m)	0,1886	0,1918	1,7
F	Débit amont (m^3/s)	0,044	0,040	10
	Hauteur d'eau amont (m)	0,2394	0,2433	1,6
G	Débit amont (m^3/s)	0,040	0,039	2,5
	Hauteur d'eau amont (m)	0,1773	0,1767	0,3

IV.2.1. Interprétations des résultats

Au vu de la figure (IV.3), portant sur l'essai «J», nous constatons qu'il y a une concordance absolue entre nos résultats et ce qui est donné expérimentalement, avec une différence de 1 l/s pour le débit aval, et 1 mm concernant la hauteur d'eau, comme elles sont illustrées dans le tableau (IV.2).

Concernant l'essai «D» illustré sur la figure (IV.4), on observe l'existence d'une ressemblance importante au niveau des résultats avec un léger décalage au point de mesure $x = 3,2\text{m}$, où la hauteur d'eau est de $h = 0,1316\text{m}$, selon le calcul numérique, comparativement aux mesures expérimentaux ($h = 0,1307$), au moment où le débit atteint une différence de 1 l/s seulement. Ceci est dû à des effets dynamiques de transition.

Quant aux essais «E» et «F», les figures (IV.5) et (IV.6), ainsi que le tableau (IV.2) montrent clairement que les résultats sont bons, par conséquent elles sont acceptées avec une très faible différence entre les deux modèles numérique et expérimental, où les hauteurs d'eau prennent une différence de $3,2\text{ mm}$ et $3,9\text{ mm}$ respectivement.

Pour le dernier test portant sur l'essai G, dans ce cas ; et d'un point de vue physique, on peut dire qu'il y a une perturbation de la surface d'eau déversante, ce qui nous donne l'allure montrée sur la figure (IV.7) aux points $x = 3,2\text{ m}$ et $x = 3,6\text{ m}$. Alors que le premier et le dernier point sont identiques dans les deux calculs.

Au vu des résultats obtenus, on peut en déduire que le modèle numérique utilisant la méthode des éléments finis est parfaitement adapté à ce genre de problème.

IV.3. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons fait une application directe de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique de l'équation différentielle caractérisant l'écoulement spatialement varié sur un déversoir latéral. Cette méthode nécessite un calcul algébrique laborieux, où on doit résoudre une équation non linéaire à chaque pas d'espace. De ce fait, l'algorithme de calcul sera par conséquent plus lourd.

Cette application a été effectuée pour les deux types de régimes supercritique et subcritique, pour but de tester l'efficacité de la méthode des éléments finis et de comparer la solution numérique avec celle donnée par les résultats expérimentaux. À l'issue, de ces résultats, on peut dire que l'adoption de cette problématique peut se révéler très prometteuse et concurrentielle aux autres techniques numériques.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.

A travers ce modeste travail, nous avons essayé de toucher à l'un des problèmes importants et complexes en hydraulique, en l'occurrence celui des écoulements à débit spatialement varié en cas du déversoir latéral et ceci par voie numérique.

L'intérêt de ce sujet se trouve de connaître de quel manière l'eau se déversera le long du seuil du déversoir. Dans cette optique, notre travail s'inscrivait dans ces efforts de modélisation et de calcul numérique, faisant usage de la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, nous avons donné l'équation différentielle de base régissant le problème, laquelle est obtenue en utilisant les principes de conservation de la quantité de mouvement et celui de la conservation de la masse, et ceci moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

Ensuite et pour résoudre l'équation différentielle mise en jeu, nous avons présenté l'une des méthodes numériques comme étant l'une des plus performantes. Ainsi, nous avons donné les fondements et les applications de la méthode des résidus pondérés de Galerkin, l'une des méthodes distinguant la MEF, où nous l'avons appliqué à l'équation différentielle non linéaire du déversoir latéral.

Dans un second temps, en quatrième chapitre, formant le noyau de notre travail, nous avons fait une application directe pour but de comparer les résultats du modèle numérique avec ceux expérimentaux obtenus par des expériences effectuées par Hager (1981), les résultats sont représentés sous forme graphique. Comparaison faite, il a été jugé que ceux découlant du calcul numérique concordent assez bien avec ceux obtenus expérimentalement, étant donné les hypothèses et restrictions admise en amont de la modélisation selon les régimes d'écoulement traités.

A la lumière des expérimentations numériques effectuées dans ce travail, nous pouvons affirmer que la méthode des éléments finis est parfaitement adaptée à ce genre de problème.

Enfin, au terme de ce modeste travail, nous espérons avoir contribué à la modélisation et résolution numérique d'un des problèmes de l'écoulement spatialement varié par les déversoirs latéraux, qui reste un vaste domaine de recherche. Nous savons pertinemment que l'ampleur des problèmes et questions restant à analyser est telle que nous espérons que d'autres travaux se porteront sur celui-ci, par d'autres modèles numériques, calcul bidimensionnel.

BIBLIOGRAPHIE

BENNIS, S. : "*Hydraulique et Hydrologie*". Troisième édition, Presse de l'Université du Québec, 2004.

BORGHI, S.M. et al. (1999), "*Discharge Coefficient for Sharp-crested Side Weirs in Sub-critical Flow*", Journal of hyd. Engg., ASCE, vol. 125, No.10, pp.1051-1056.

BROMWICH, B.C., MAY, R.W.P., GASOWSKI, Y., RICKARD, C.E. : "*Hydraulic design of side weirs*". HR Wallingford, London, 2003.

CARLIER, M. : "*Hydraulique générale et appliquée*". Eyrolles, Paris, 1980.

CHANDRUPATLA, T.R., et BELEGUNDU, A.D. : "*Introduction to Finite Elements in Engineering*". Troisième édition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002.

CHOW, V.T. : "*Open-channel hydraulics*". McGraw-Hill, New York, 1959.

DURGA RAO, K.H.V., et PILLAI, C.R.S. (2007), "*Study of Flow Over Side Weirs Under Supercritical Conditions*". Water Resour Manage, 22 : 131-143.

EL- KHASHAB, A., et SMITH, K.V.H. (1976), "*Experimental investigation of flow over side weirs*". ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 102(HY9), pp. 1255-1268.

FEATHERSTONE, R.E., et NALLURI, C. : "*Civil Engineering Hydraulics*". Troisième édition, Blackwell Science, 1995.

FRENCH, Richard.H. : "*Open-channel Hydraulics*". McGraw-Hill, Inc., New York, 1985.

GHODSIAN, M. (2004), "*Flow Over Triangular Side Weirs*". Scientia Iranica, Vol.11,No.1&2, pp.114-120.

GOURDIN, A. et BOUMAH RAT, M. : "*Méthodes Numériques Appliquées*". Office des Publications Universitaires, Alger, 1993.

HAGER, W.H. (1981), "*Die Hydraulik von Verteilkanalen (L'Hydraulique des canaux à débit décroissant)*". Thèse de Doctorat en sciences techniques, Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, ETH,Zurich, Suisse, N°6948, partie I et II.

HAGER, W.H. (1986), "*L'écoulement dans les déversoirs latéraux*". Can.J.Civ.Eng.13 :501-509.

- HAGER, W.H. (1987), "*Lateral outflow over side weirs*". Journal of Hydraulic Engineering, 113 (4) : 491-504.
- HAGER, W.H. et SINNIGER, R.O. : "*Construction Hydrauliques*". Volume 15, Presses Polytechniques Romandes, 1989.
- HOFFMAN, Joe.D. : "*Numerical Methods for Engineers and Scientists*". Deuxième édition, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.
- LENCASTRE, A. : "*Hydraulique générale*". Eyrolles, Paris, 1996.
- MFTEM (Ministère Française de transport de l'équipement du tourisme et de la mer). "*Notice sur les déversoirs : synthèse des lois d'écoulement au droit des seuils et déversoirs*", 2005.
- OLIVETTO, G. et al. (2001), "*Hydraulic Features of Supercritical Flow Along Prismatic Side Weirs*". Journal of Hyd. Research, IAHR, Vol.39, No.1, pp.73-82.
- RANGA RAJU, K.G. et al. (1979), "*Side weir in rectangular channel*". ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 105(HY5), pp.547-554.
- SUBRAMANYA, K. et AWASTHY, S.C. (1972), "*Spatially varied flow over side weirs*". ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 98(HY1), pp.1-10.
- SUBRAMANYA, K. : "*Flow in Open Channels*". Troisième édition, McGraw-Hill, New Delhi, 2009.
- TAHAR ABBES, M. : "*Méthodes Numériques*". Office de Publications Universitaires, Alger, 2007.
- UYUMAZ, A. (1992), "*Side Weir in Triangular Channel*". Journal of IRR. And Drainage Engg., ASCE, Vol.118, No.6, pp.965-970.
- YARED, R. "*Validation Expérimentale des formules de déversoirs latéraux*". Mémoire présenté à l'école de technologie supérieure, 2003.
- YEN, B.C. et WENZEL, H.G. (1970), "*Dynamic equations for steady spatially varied flow*". ASCE, Journal of the Hydraulics Division, 96(HY3), pp.801-814.

RÉSUMÉ

L'un des problèmes rencontrés dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien est celui des débits variables dans l'espace au-dessus d'un déversoir latéral. Le présent travail a alors porté sur une approche mathématique reposant sur le couplage déversement-ligne d'eau en fonction de l'espace. Après avoir rappelé les équations différentielles régissant le problème, la modélisation numérique est donnée et ceci par usage de la méthode des éléments finis de Galerkin. Les performances de cette méthode sont confrontées aux mesures expérimentales par cinq tests effectués sur deux types de régime d'écoulement selon différentes données.

Mots clés : Déversoir latéral, Ecoulement à surface libre, Modèle numérique, Equation différentielle non linéaire, Méthode des éléments finis (MEF), Simulation numérique.

ABSTRACT

One of the problems encountered in the practice of the hydraulic engineer is that of spatially varied flow above a side weir. The present work then took a mathematical approach based on the coupling water line of water as a function of space. After recalling the differential equations governing the problem, numerical modeling is given by using the Galerkin finite element method. The performances of this method are compared with the experimental measurements by five tests carried out on two types of flow regime according to different data.

Keywords: Side weir, Open channel flow, Numerical model, Nonlinear differential equation, Finite element method (FEM), Numerical simulation.

ملخص:

واحدة من المشاكل التي يتعرض لها مهندس الري في الميدان التطبيقي هي معادلات التدفق المتغير في الفضاء فوق عتبة الهدار الجانبي. حيث اخذ العمل الحالي نهجا رياضيا يعتمد على اقتران خط انسكاب الماء بدلالة طول الهدار، اذ يتم اعطاء النمذجة العددية التطورية في الفضاء وذلك باستخدام طريقة العناصر المحددة والمعتمدة أساسا على طريقة Galerkin. تتم مقارنة أداء هذه الاخيرة مع القياسات التجريبية المعطاة من خلال خمسة اختبارات أجريت على نوعين من أنظمة التدفق وذلك وفقا لبيانات مختلفة.

الكلمات المفتاحية: الهدار الجانبي، التدفق السطحي الحر، نموذج عددي، معادلة تفاضلية غير خطية، طريقة العناصر المحددة، محاكاة عددية.