République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur
Et de La Recherche Scientifique
Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et informatique

Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER

Filière : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par

Nadjet Kerada

Thème

Solution du problème de deux ondes planes par l'approche stochastique de Parisi-Wu

Soutenue le : 13/07/2019

Devant le Jury:

Président :	Dj. Bouaziz	Prof.	Univ.MSBY, Jijel
Rapporteur :	N. Chine	MCB.	Univ.MSBY, Jijel
Examinatrice :	R. Rekioua	MAA.	Univ.MSBY, Jijel

Remerciements

Tout mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté la santé et la patience qu'il m'a donnés pour terminer ce mémoire.

Je tiens tout particulièrement à remercier la personne sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour, à savoir mon encadreur M. Nadia Chine professeur à l'université de Jijel. Que ce soit au niveau de la proposition du sujet, ou au niveau du déroulement du travail, ses avis furent toujours remarquable et pertinents.

Je remercie trés sincèrement M Djamil Bouaziz professeur à l'université de Jijel pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie également et sincèrement à M. Radja Rekioua maître conférence à l'université de Jijel pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail en acceptant de le juger.

Je remercie également toutes les enseignants de département de physique à l'université de Jijel, en particulier les enseignants de physique Théorique.

J'adresse mes plus sinsècres remerciements à H. Lamri la secritère du laboratoire de physique théorique pour les services et l'encouragement.

Je remercie également toutes les collèges de la promotion 2018/2019. Que ce mémoire conserve conserve le souvenir de leur amitié.

Enfin, je remercie ma famille et mes proches qui ont toujours cru en moi et m'en toujours soutenu, et plus précisement ma mère pour l'extraordinaire patience dont elle ont fit preuve tout au long de la préparation de ce travail.

NADJET

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Il est connu que dans le domaine quantique certains phénomènes non relativistes s'expliquent de manière satisfaisante par l'équation de Schrödinger. Dans le domaine relativiste par contre, il est plus approprié d'utiliser des équations comme celle de Klein Gordon (KG) et de Dirac, au lieu de l'équation de Schrödinger.

Cependant en vue de comprendre simplement ces équations il s'est développé parallèlement diverses approches. Citons par exemple l'approche de Schwinger, de Heisenberg, et plus particulièrement celle de Feynman basée sur des notions familières de mécanique classique comme l'action, les trajectoires etc....

Une autre approche moins connue et proche de celle Feynman existe : il s'agit de la mécanique quantique stochastique (MQS).

Introduit en 1981 par G. Parisi et Wu[1], ce formalisme, récent-à cheval sur les intégrales de chemins et les équations différentielles stochastiques, est aussi un outil de compréhension de la mécanique quantique. Bien que sa formulation soit simple, il n'a pas eu cependant le mérite d'être développé comme le sont actuellement les autres approches. Brièvement, le principe sur lequel est bâti la MQS est le suivant : on se donne un système physique qui interagit avec son environnement ; l'interaction est en général modélisée par un bruit. Sa variable dynamique devient alors aléatoire et son évolution est décrite par une équation dite de Langevin. C'est ainsi que des quantités physiques s'obtiennent à partir de la solution de cette équation.

A cette formulation, il est ajouté en plus de l'équation de Langevin qui décrit la relation entre la variable et le bruit, une notion plus commode de probabilité (réelle). Cette probabilité est solution d'une équation connue dite de Fokker-Planck (FP). C'est une équation du 1er ordre par rapport au temps et qui se ramène à celle de Schrödinger par une simple rotation de Wick.

Par ailleurs, dans l'approche de Parisi et Wu, la description nécessite l'introduction d'un temps supplémentaire qui est fictif. En prenant la $lim \longrightarrow \infty$, ce temps permet du point de vue statistique de trouver un certain équilibre. En principe, les résultats de la MQ habituelle doivent émerger naturellement puisque à l'équilibre, la probabilité prend la forme standard de Feynman de poids en $exp(Action)$.

Nous nous proposons dans ce mémoire dans une 1ère étape de voir les possibilités de ce formalisme en étudiant le mouvement d'une particule relativiste, sans spin ; régie donc par l'équation de Klein Gordon, soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétiques planes et orthogonales.

Le champ dont il est question est décrit simplement par un potentiel vecteur donné par la superposition suivante

$$V_\mu = A_\mu(\varphi) + B_\mu(\chi), \tag{1.1}$$

où $A_\mu(\varphi) = A_\mu(kx)$, $B_\mu(\chi) = B_\mu(Kx)$ et $k \neq K$. Ce champ est en outre assujetti à la condition de jauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu B^\mu = 0$) condition qui équivaut à

$$kA = KB = 0, \tag{1.2}$$

avec le caractère relatif aux photons

$$k^2 = K^2 = 0, \tag{1.3}$$

ainsi que les conditions d'orthogonalité des deux champs d'ondes planes c'est à dire :

$$AB = kK = KA = kB = 0. \tag{1.4}$$

La solution du problème avec une seule onde est considéré dans [6], [7].

Nous allons refaire les calculs déja existants dans la littérature [2]

Ce mémoire est composé de 4 chapitres.

Dans le le chap. 2, à titre de rappel nous présentons la formulation de la MQS de Parisi-WU [4] et au chap.3 nous montrons à partir des équations de Langevin comment calculer la fonction de Green relative à une particule de KG (spin 0) en utilisant la formulation du propagateur par la MQS donnée par [4]. Le calcul est d'abord fait dans l'espace des phases, le mouvement étant régi par l'hamiltonien. Grâce aux caractéristiques de deux ondes électromagnétiques planes, le traitement perturbatif [5] se simplifie énormément. Avec quelques itérations, l'action ainsi que le facteur de fluctuation sont déterminés. Le calcul est effectué pour une particule relativiste soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétiques planes et orthogonales.

Le même problème est encore repris au chap.4 mais cette fois ci dans l'espace de configuration. Le lagrangien est utilisé à la place de l'hamiltonien. Nous avons ainsi une seule équation de Langevin à considérer. Comme précédemment,l'action classique et le facteur de fluctuation sont recalculés et la fonction de Green alors déterminée à l'équilibre.

Enfin, nous terminons par une conclusion.

Chapitre 2

La quantification stochastique de Parisi-Wu

2.1 Equation de Langevin

Dans ce chapitre, nous allons donner un aperçu assez détaillé sur la méthode de quantification stochastique de Parisi-Wu.

La mécanique stochastique est basée principalement sur l'équation de Langevin, qui décrit la relation entre la variable et le bruit. C'est une équation différentielle au premier ordre par rapport au temps "s"

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(x(s)) + \eta(s), \tag{2.1}$$

où $\eta(s)$ est un bruit.

Si le bruit η satisfait les deux propriétés suivantes :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(s) \rangle = 0, \tag{2.2}$$

b- et le produit de corrélation égal à une fonction de Dirac δ

$$\langle \eta(s)\eta(s')\rangle = \Omega\delta(s-s^{'}), \tag{2.3}$$

il est dit " blanc".

Avec la condition initiale $x(0) = x_0$ à l'instant $s = 0$, la solution de cette équation (2.1) est dépendévidement du bruit.

$$x(s) = x_0 + \int_0^s d\tau f(x(\tau)) + \int_0^s d\tau \eta(\tau). \tag{2.4}$$

Dont sa moyenne se réduit à

$$\langle x(s)\rangle = x_0 + \int_0^s d\tau \, \langle f(x(\tau))\rangle \,. \tag{2.5}$$

2.2 Mécanique stochastique de Parisi-Wu

Succinctement, la formulation de Parisi-Wu consiste à :

- associer au temps réel s un temps u fictif. La variable dynamique devient alors une fonction de 2 variables : $x(s) \to x(s,u)$.

- régir l'évolution de cette variable au moyen de ce temps fictif u. L'évolution est maintenant décrite par l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial u} x(s,u) = f(x(s,u)) + \eta(s,u), \tag{2.6}$$

avec

$$f(x(s,u)) = i\frac{\delta S}{\delta x(s,u)}, \tag{2.7}$$

où S représente l'action classique relative au système et $\eta(s,u)$ un bruit choisi encore blanc à cause de ses deux propriétés :

a- moyenne nulle

$$\langle \eta(s,u)\rangle = 0. \tag{2.8}$$

b- le produit de corrélation égal au produit de deux fonctions δ

$$\langle \eta(s,u)\eta(s',u')\rangle = \Omega\delta(s-s^{'})\delta(u-u'). \tag{2.9}$$

- pour $u \longrightarrow \infty$, nous obtenons les quantités physiques de la mécanique quantique.

La moyenne en mécanique quantique se définit par

$$\langle x(s_1)x(s_2)\rangle = \frac{\langle x_f, s_f \mid T(x(s_i)x(s_f)) \mid x_i, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle}, \tag{2.10}$$

qui est exactement la moyenne en mécanique stochastique

$$\frac{\langle x_f, s_f \mid T(x(s_i)x(s_f)) \mid x_i, s_i\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle} = \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x(s_i,u)x(s_f,u)\rangle\,, \tag{2.11}$$

Cette moyenne peut être encore définie via l'introduction d'une probabilité $P\,[x,u]$,

$$\langle x(s_i,u)x(s_f,u)\rangle = \int_{x_i,x_f} Dxx(s_i)x(s_f)P\,[x,u]\,, \tag{2.12}$$

$$x(s_f) = x_f, \quad x(s_i) = x_i, \tag{2.13}$$

et cette probabilité P est solution de l'équation habituelle de Fokker- Plank, mais cette fois ci généralisée.

$$\frac{\partial}{\partial u}P\,[x,u] = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\frac{\delta}{\delta x(s)}\left(\frac{\delta}{\delta x(s)} - i\frac{\delta S}{\delta x(s)}\right)P\,[x,u]\,, \tag{2.14}$$

avec bien sûr la condition de normalisation

$$\langle 1\rangle = \int_{s_a}^{s_b} DxP\,[x,u] = 1. \tag{2.15}$$

A la limite $u \to \infty$, il est clair que

$$\frac{\partial}{\partial u}P\,[x,u] = 0$$

dans ce cas la fonction de corrélation (2.12) devient exactement le propagateur de Feynman

$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x(s_i,u)x(s_f,u)\rangle = \frac{\displaystyle\int Dxx(s_i)x(s_f)e^{iS}}{\displaystyle\int D_x e^{iS}}$$

$$= \langle 0|\, Tx(s_i)x(s_f)\,|0\rangle\,. \tag{2.16}$$

Chapitre 3

Formulation stochastique du propagateur

En mécanique quantique, le calcul de la section efficace par exemple nécessite la connaissance de l'amplitude de transition ou propagateur. Sa détermination est donc essentielle. Le but de ce chapitre est de voir comment le détérminer par la mécanique stochastique (SQM) de Parisi et Wu.

Donnons la formulation stochastique pour calculer le propagateur.

Relions d'abord l'amplitude de transition $\langle x_f, s_f \, | x_i, s_i \rangle$ à la valeur moyenne de l'hamiltonien H [4] :

Considérons d'abord un vecteur d'état de Heisenberg vérifiant

$$|x_i, s_i\rangle = T \exp\left[i \int_{s_0}^{s_i} H(s) ds \right] |x_i, s_0\rangle \,, \tag{3.1}$$

où $H(s)$ est l'hamiltonien qui régit la dynamique du système.

Dérivons par rapport au temps s, nous obtenons l'équation d'évolution

$$\frac{\partial}{\partial s_i} |x_i, s_i\rangle = i H(s_i) |x_i, s_i\rangle \,. \tag{3.2}$$

En multipliant à gauche par le bra $\langle x_f, s_f|$

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \ln \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle = i \frac{\langle x_f, s_f| \, H(s_i) \, |x_i, s_0\rangle}{\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i\rangle}, \tag{3.3}$$

et en intégrant, l'amplitude se calcule

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp\left[i \int^{s} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H(s_i, u) \rangle \, ds_i \right]. \tag{3.4}$$

Nous voyons qu'elle se calcule en déterminant la moyenne stochastique $\langle H(s_i, u) \rangle$. La constante c étant indépendante de s_i que nous fixons par la condition

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = \delta(x_f - x_i), \qquad \lambda = (s_f - s_i)\,. \tag{3.5}$$

Associons maintenant à l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ un hamiltonien classique. Effectuons d'abord la séparation suivante

$$\begin{cases} x = x_{cl} + x_Q \\ p = p_{cl} + p_Q \end{cases}, \tag{3.6}$$

L'hamiltonien $H(s, u)$ suivant [4] et également en deux parties

$$H(s, u) = H_{cl}(s, u) + H_Q(s, u). \tag{3.7}$$

Alors la moyenne de l'hamiltonien $H(s, u)$ est comme suit

$$\langle H(s, u) \rangle = \langle H_{cl}(s) \rangle + \langle H_Q(s, u) \rangle\,. \tag{3.8}$$

- le premier terme est une partie classique indépendante du temps fictif u est reliée à l'action classique (calculée suivant le chemin classique)

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial s_i} = H_{cl}(s_i). \tag{3.9}$$

- et le deuxième terme contient des déviations à cause des bruits qui ont dévié la particule de sa trajectoire classique. En principe ce terme donne un facteur dit de fluctuation.

Le propagateur est alors égal à

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp\left[i S_{cl} \right] \exp\left[i \int^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(s_i, u) \rangle \, ds_i \right]. \tag{3.10}$$

Finalement la détermination du propagateur passe par le calcul

- de la partie classique

- et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(s_i, u)\rangle$.

Pour des actions quadratiques, cette moyenne $\langle H_Q(s_i, u)\rangle$ a été calculée. C'est ainsi que les cas relatifs à la particule libre, soumise à une force harmonique ou à un champ magnétique ont été considérés exactement en utilisant l'espace des configurations et l'espace des phases. Le cas où la variable est de type Grassmman a été considéré pour calculer le facteur de fluctuation [4].

Notre but dans le chapitre suivant est d'ajouter à la liste des propagateurs calculables suivant cette approche (MQS) le propagateur relatif à une particule relativiste soumise à l'action de deux ondes planes et orthogonales. Considérons la solution de ce problème d'abord dans l'espace des phases.

Chapitre 4

Formulation dans l'espace des phases

4.1 Propagateur d'une particule de spin 0 dans le champ de deux ondes planes et orthogonales

Nous proposons, dans ce chapitre, en utilisant une nouvelle méthode à savoir la mécanique quantique stochastique (MQS), de calculer la fonction de Green pour une particule scalaire (spin 0) relativiste chargée soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes planes, que nous prenons pour faciliter les calculs, orthogonales.

La fonction de Green $\Delta(x_b, x_a)$ en question est solution de l'équation de Klein Gordon

$$(\pi^2 - m^2)\Delta(x_b, x_a) = \delta^4(x_b - x_a). \tag{4.1}$$

Avec un temps propre λ, $\Delta(x_b, x_a)$ peut être représentée sous la forme d'une intégrale

$$\Delta(x_b, x_a) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty d\lambda \exp\left[\frac{-im^2\lambda}{2}\right] K(x_b, x_a; \lambda), \tag{4.2}$$

faisant intervenir un noyau K ou propagateur dont nous proposons de le calculer ici.

Notre étude se fait dans l'espace des phases .Il est donc naturel d'utiliser le formalisme hamiltonien avec évidemment les 2 variables $(x_Q\ , p_Q)$ qui deviennent des variables aléatoires dans l'approche de la MQS.

Au chapitre 2, il a été montré que l'expression du propagateur à calculer

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i \int_0^s \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(s_i, u) \rangle \, ds_i \right], \tag{4.3}$$

passe par la détermination de la partie classique et de la partie relative aux fluctuations quantiques $\langle H_Q(s_i, u) \rangle$.

Commençons par la partie classique.

4.1.1 Calcul de l'action classique $\mathbf{S}_{cl.}$

L'hamiltonien qui régit le mouvement de la particule de spin 0 est

$$H = -\frac{1}{2} (p - eV)^2 , \tag{4.4}$$

et l'action est la suivante

$$S = -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[p(s)\dot{x}(s) - \frac{1}{2} (p(s) - eV)^2 \right], \tag{4.5}$$

où V est un potentièl vecteur donné par la superposition suivante

$$V_\mu = A_\mu(kx) + B_\mu(Kx) \tag{4.6}$$

Dans toute la suite nous designons kx par ϕ et Kx par χ.

Soit maintenant la trajectoire classique d'équation x_{cl}. Cette équation se détermine par les 2 équations d'Hamilton, puisque nous somme dans l'espace des phases.

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{cl\mu} &= \frac{\partial H}{\partial x^\mu} = (p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}) . \left(ek_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + eK_\mu \frac{dB}{d\chi} \right), \\
\dot{x}_{cl\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial p^\mu} = p_{cl\mu} - eA_{cl\mu} - eB_{cl\mu}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En éliminant l'impulsion, respectivement

$$p_{cl\mu} = \dot{x}_{cl\mu} + eA_{cl\mu} + eB_{cl\mu}. \tag{4.8}$$

Alors, l'équation qui donne la trajectoire classique est

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu) = e\left(p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}\right) . \left(k_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + K_\mu \frac{dB}{d\chi} \right), \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu) &= e\dot{x}.\left(k_\mu \frac{dA_{cl}}{d\phi} + K_\mu \frac{dB}{d\chi}\right) \\ &= ek_\mu\left(\dot{x}.\frac{dA_{cl}}{d\phi}\right) + eK_\mu\left(\dot{x}.\frac{dB}{d\chi}\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

où $\phi = k.x$ et $\chi = Kx$

Intégrons une 1ère fois $/s$, il vient

$$\dot{x}_\mu + eA_\mu + eB_\mu = c_\mu + \int_{s_a}^{s} ds' \left[ek_\mu\left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'}\right) + eK_\mu\left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'}\right)\right], \tag{4.11}$$

ou encore

$$\dot{x}_\mu = c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + e\int_{s_a}^{s} ds' \left[k_\mu\left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'}\right) + K_\mu\left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'}\right)\right], \tag{4.12}$$

avec $\phi' = kx(s')$, $\chi' = Kx\,(s')$ et c^μ un quadri -vecteur constant.

Nous voyons que la connaissance de $\dot{x}$ au temps s nécessite au préalable la connaissance de $\dot{x}$ au temps s'.

Résolvons cette equation par itération

En effet réutilisons l'équation pour un temps s' et en reportons la dans l'éqauation (4.12).

Il vient successivement

$$\dot{x}_\mu = c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu\int_{s_a}^{s} ds'\left(\dot{x}(s').\frac{dA}{d\phi'}\right) + eK_\mu\int_{s_a}^{s} ds'\left(\dot{x}(s').\frac{dB}{d\chi'}\right), \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu \;=\;& c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu\int_{s_a}^{s} ds'\left[\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e\left(\left(A_\nu + B_\nu\right).\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right. \\ & \left. + ek_\nu\int_{s'_a}^{s'} ds''\left(\dot{x}(s'').\frac{dA}{d\phi''}\right).\frac{dA^\nu}{d\phi'} + eK_\upsilon\int_{s'_a}^{s'} ds''\left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''}\right).\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right] + \\ & + eK_\mu\int_{s_a}^{s} ds'\left[\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e\left(\left(A_\nu + B_\nu\right).\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) + \right. \\ & \left. + \, ek_\nu\int_{s'_a}^{s'} ds''\left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''}\right).\frac{dB^\nu}{d\chi'} + eK_\upsilon\int_{s'_a}^{s'} ds''\left(\dot{x}(s'').\frac{dB}{d\chi''}\right).\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous avons adopté la jauge de Lorentz, c'est à dire que : $kA = KB = 0$ et nous avons utilisé le caractère relatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB = kK = KA = kB = 0$, le quadri-vitesse a pour expression

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + ek_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e\left(A_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right] \\ &\quad + eK_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e\left(B_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right)\right], \qquad (4.15)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + k_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e^2\left(A_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right] \\ &\quad + K_\mu \int_{s_a}^{s} ds' \left[e\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e^2\left(B_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right)\right]. \qquad (4.16)\end{aligned}$$

Il nous est utile de trouver une équation simple.

Multiplions les 2 membres par k^μ ensuite par K^μ alors

$$\begin{cases} k^\mu \dot{x}_\mu = k^\mu c_\mu = \alpha_1 \\ \\ K^\mu \dot{x}_\mu = K^\mu c_\mu = \alpha_2 \end{cases}, \qquad (4.17)$$

et par intégration, le produit

$$\begin{cases} \phi = kx = k^\mu x_\mu = \alpha_1 s + \beta_1 \\ \\ \chi = Kx = K^\mu x_\mu = \alpha_2 s + \beta_2 \end{cases},, \qquad (4.18)$$

est une fonction linéaire de la variable s.

En utilisant les conditions aux limites

$$\begin{cases} kx_a = \alpha_1 s_a + \beta_1 \\ kx_b = \alpha_1 s_b + \beta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} Kx_a = \alpha_2 s_a + \beta_2 \\ Kx_b = \alpha_2 s_b + \beta_2 \end{cases} \qquad (4.19)$$

nous pouvons tirer les valeurs des constantes α_1 et α_2

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{k^\mu (x_b - x_a)_\mu}{s_b - s_a} = \frac{(k.\triangle x)}{\lambda}, \\ \alpha_2 &= \frac{K^\mu (x_b - x_a)_\mu}{s_b - s_a} = \frac{(K.\triangle x)}{\lambda}, \qquad (4.20)\end{aligned}$$

on ainsi que celle de β_1 et β_2.

Comme il existe un lien entre le pseudo temps s et ϕ et entre s et χ

$$\begin{cases} d\phi = \alpha_1 ds \\ d\chi = \alpha_2 ds \end{cases}, \tag{4.21}$$

le 4-vecteur $\dot{x}_\mu$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{\phi_a=\alpha_1 s_a+\beta_1}^{\phi=\alpha_1 s+\beta_1} d\phi' \left[e\left(c_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right) - e^2\left(A_\nu.\frac{dA^\nu}{d\phi'}\right)\right] \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{\chi_a=\alpha_2 s_a+\beta_2}^{\chi=\alpha_2 s+\beta_2} d\chi' \left[e\left(c_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right) - e^2\left(B_\nu.\frac{dB^\nu}{d\chi'}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= c_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(c.A(\phi)\right) - e\left(c.A(\phi_a)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi) + \frac{e^2}{2}A^2(\phi_a)\right] \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi)\right) - e\left(c.B(\chi_a)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi) + \frac{e^2}{2}B^2(\chi_a)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu &= D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(c.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right], \end{aligned} \tag{4.22}$$

où nous avons posé

$$D_\mu = c_\mu - \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[ec.A(\phi_a) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi_a)\right] - \frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(c.B(\chi_a)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi_a)\right]. \tag{4.23}$$

Remarquons que $c_\mu \neq D_\mu$ mais que

$$\begin{cases} k\dot{x} = kc = kD \\ \\ A^\mu c_\mu = A^\mu D_\mu \end{cases} . \quad \begin{cases} K\dot{x} = Kc = KD \\ \\ B^\mu c_\mu = B^\mu D_\mu \end{cases} \tag{4.24}$$

Comme

$$A^\mu \dot{x}_\mu = A^\mu c_\mu - eA_\mu^2 = A^\mu D_\mu - eA_\mu^2, \quad \text{et} \quad B^\mu \dot{x}_\mu = B^\mu c_\mu - eB_\mu^2 = B^\mu D_\mu - eB_\mu^2 \tag{4.25}$$

nous pouvons encore écrire le 4-vitesse comme suit

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= D_\mu - e\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\left(D.A(\phi)\right) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\left(D.B(\chi)\right) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right].\end{aligned} \tag{4.26}$$

Intégrons cette dernière équation une deuxième fois par rapport à s nous arrivons à

$$\begin{aligned}x_\mu &= C_\mu + D_\mu s - e\int_{s_a}^{s} ds'\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s} ds'\left[e\left(D.A\right) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s} ds'\left[e\left(D.B\right) - \frac{e^2}{2}B^2\right].\end{aligned} \tag{4.27}$$

où C_μ est encore un autre 4-vecteur constant.

Ces 2 constantes peuvent être fixées.

En effet, nous avons pour $s = s_a$

$$x_a = C_\mu + D_\mu s_a, \tag{4.28}$$

et pour $s = s_b$

$$\begin{aligned}x_b &= C_\mu + D_\mu s_b - e\int_{s_a}^{s_b} ds\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.A\right) - \frac{e^2}{2}A^2\right] \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.B\right) - \frac{e^2}{2}B^2\right],\end{aligned} \tag{4.29}$$

et en faisant la différence des 2 équations

$$\begin{aligned}\triangle x &= x_b - x_a \\ &= D_\mu(s_b - s_a) - e\int_{s_a}^{s_b} ds\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.A\right) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.B\right) - \frac{e^2}{2}B^2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle x &= D_\mu\lambda - e\int_{s_a}^{s_b} ds\left(A_\mu + B_\mu\right) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.A\right) - \frac{e^2}{2}A^2\right] + \\ &+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\left(D.B\right) - \frac{e^2}{2}B^2\right].\end{aligned} \tag{4.30}$$

Alors

$$D_\mu = \frac{\triangle x}{\lambda} + \frac{e}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu)_\mu - \frac{k_\mu}{\lambda\alpha_1}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[eD.A - \frac{e^2}{2}A^2\right]$$
$$-\frac{K_\mu}{\lambda\alpha_2}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[e\,(D.B) - \frac{e^2}{2}B^2\right]. \tag{4.31}$$

Ayant déterminé complètement la trajectoire classique, calculons l'action qui lui est relative

$$S_{cl} = -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}^2\,(s) + eA_{cl}.\dot{x}_{cl}\,(s) + eB_{cl}.\dot{x}_{cl}\,(s)\right]. \tag{4.32}$$

Le 1er terme (énergie cinétique) est simplement égal à

$$\dot{x}_\mu = D_\mu - e\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{k_\mu}{\alpha_1}\left[e\,(D.A(\phi)) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right] +$$
$$+\frac{K_\mu}{\alpha_2}\left[e\,(D.B(\chi)) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right]. \tag{4.33}$$

$$\frac{\dot{x}_\mu^2}{2} = \frac{D^2}{2} + \frac{e^2}{2}\,(A_\mu + B_\mu)^2 - eD.\,(A_\mu + B_\mu) + \frac{D_\mu k^\mu}{\alpha_1}\left[eD.A(\phi) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right]$$
$$+\frac{D_\mu K^\mu}{\alpha_2}\left[eD.B(\chi) - \frac{e^2}{2}B^2(\chi)\right]$$
$$= \frac{D^2}{2}, \tag{4.34}$$

Où nous avons adopté la jauge de Lorentz, c'est à dire que : $kA = KB = 0$ et nous avons utilisé le caractère relatif aux photons $k^2 = K^2 = 0$ ainsi que les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB = kK = KA = kB = 0$, et nous avons utilisé aussi

$$\frac{D_\mu k^\mu}{\alpha_1} = 1, \qquad \alpha_1 = \frac{(k.\triangle x)}{\lambda}, \tag{4.35}$$

$$\frac{D_\mu K^\mu}{\alpha_2} = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{(K.\triangle x)}{\lambda}, \tag{4.36}$$

tandis que le 2ème terme est

$$\begin{aligned} A^{\mu}\dot{x}_{\mu} &= A^{\mu}\left[D_{\mu}-e\left(A_{\mu}+B_{\mu}\right)+\frac{k_{\mu}}{\alpha_{1}}\left(e\left(D.A(\phi)\right)-\frac{e^{2}}{2}A^{2}(\phi)\right)+\right. \\ &\left.+\frac{K_{\mu}}{\alpha_{2}}\left(e\left(D.B(\chi)\right)-\frac{e^{2}}{2}B^{2}(\chi)\right)\right] \\ &= A.D-eA^{2}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

et finalement le dernier terme est égale à

$$\begin{aligned} B^{\mu}\dot{x}_{\mu} &= B^{\mu}\left[D_{\mu}-e\left(A_{\mu}+B_{\mu}\right)+\frac{k_{\mu}}{\alpha_{1}}\left(e\left(D.A(\phi)\right)-\frac{e^{2}}{2}A^{2}(\phi)\right)+\right. \\ &\left.+\frac{K_{\mu}}{\alpha_{2}}\left(e\left(D.B(\chi)\right)-\frac{e^{2}}{2}B^{2}(\chi)\right)\right] \\ &= B.D-eB^{2}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

reportons les résultats suivants (4.34),(4.37) et (4.38) dans l'action classique (4.32). nous obtenons

$$\begin{aligned} S_{cl} &= -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{D^{2}}{2}+eA.D-e^{2}A^{2}+eB.D-e^{2}B^{2}\right], \\ &= -\frac{\lambda D^{2}}{2}-eD\int_{s_a}^{s_b}dsA+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsA^{2}-eD\int_{s_a}^{s_b}dsB+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsB^{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =\ & -\frac{\lambda}{2}\left[\frac{\triangle x}{\lambda}+\frac{e}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b}ds\left(A_{\mu}+B_{\mu}\right)_{\mu}-\frac{k_{\mu}}{\lambda\alpha_{1}}\int_{s_a}^{s_b}ds\left[eD.A-\frac{e^{2}}{2}A^{2}\right]-\frac{K_{\mu}}{\lambda\alpha_{2}}\int_{s_a}^{s_b}ds\left[e\left(D.B\right)-\frac{e^{2}}{2}B^{2}\right]\right]^{2} \\ & -eD\int_{s_a}^{s_b}dsA+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsA^{2}-eD\int_{s_a}^{s_b}dsB+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsB^{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{cl} = & -\frac{\lambda}{2}\left[\frac{\triangle x^{2}}{\lambda^{2}}+\frac{e^{2}}{\lambda^{2}}\left[\int_{s_a}^{s_b}ds\left(A_{\mu}+B_{\mu}\right)\right]^{2}+2\frac{e\triangle x}{\lambda^{2}}\int_{s_a}^{s_b}ds\left(A_{\mu}+B_{\mu}\right)-2\frac{k_{\mu}.\triangle x}{\lambda^{2}\alpha_{1}}\int_{s_a}^{s_b}ds\left(eD.A-\frac{e^{2}}{2}A^{2}\right)\right. \\ & \left.-2\frac{K_{\mu}.\triangle x}{\lambda^{2}\alpha 2}\int_{s_a}^{s_b}ds\left(eD.B-\frac{e^{2}}{2}B^{2}\right)\right]-eD\int_{s_a}^{s_b}dsA+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsA^{2}-eD\int_{s_a}^{s_b}dsB+e^{2}\int_{s_a}^{s_b}dsB^{2}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

Reportons les résultats (4.35) et (4.36) dans cette dernière équation. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda} - \frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu)\right]^2 - \frac{e \triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) \\
&+ \frac{(k_\mu . \triangle x)\,\lambda}{\lambda\,(k. \triangle x)}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) + \frac{(K_\mu . \triangle x)\,\lambda}{\lambda\,(K. \triangle x)}\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.B - \frac{e^2}{2}B^2\right) \\
&- eD\int_{s_a}^{s_b} dsA + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2 - eD\int_{s_a}^{s_b} dsB + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda} - \frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu)\right]^2 - \frac{e \triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) + \\
&\int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) + \int_{s_a}^{s_b} ds\left(eD.B - \frac{e^2}{2}B^2\right) \\
&- eD\int_{s_a}^{s_b} dsA + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsA^2 - eD\int_{s_a}^{s_b} dsB + e^2\int_{s_a}^{s_b} dsB^2, \\
&= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda} - \frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsA_\mu\right]^2 - \frac{e^2}{2\lambda}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsB_\mu\right]^2 - \frac{e \triangle x}{\lambda}\int_{s_a}^{s_b} ds\,(A_\mu + B_\mu) \\
&+ \frac{e^2}{2}\left[\int_{s_a}^{s_b} dsA^2 + \int_{s_a}^{s_b} dsB^2\right]. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

et aprés quelques simplifications

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= -\frac{\triangle x^2}{2\lambda} - \frac{e \triangle x}{\lambda\alpha_1}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A_\mu + \frac{e^2}{2\alpha_1}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A^2 - \frac{e^2}{2\lambda\alpha_1^2}\left[\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi A_\mu\right]^2 \\
&- \frac{e \triangle x}{\lambda\alpha_2}\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B_\mu + \frac{e^2}{2\alpha_2}\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B^2 - \frac{e^2}{2\lambda\alpha_2^2}\left[\int_{\chi_a}^{\chi_b} d\chi B_\mu\right]^2. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{cl} = -\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \quad & -\frac{e(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)}\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - \frac{e(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)}\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \\
& + \frac{\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)}\left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A\right]^2\right] \\
& + \frac{\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)}\left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B\right]^2\right], \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

nous obtenons l'action classique.

Cette action est une fonction de x_a, s_a, x_b, s_b.

Passons au calcul du facteur de fluctuation.

4.1.2 Calcul du facteur de fluctuation

Désignons par x_Q^μ et par p_Q^μ respectivement la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ et de l'impulsion p^μ par rapport à p_{cl}^μ

$$\left\{\begin{array}{l} x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu \\ \\ p^\mu = p_{cl}^\mu + p_Q^\mu \end{array}\right. . \tag{4.43}$$

L'action se décompose

$$\begin{aligned} S &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[p(s)\dot{x}(s) - \frac{1}{2}\left(p(s) - eA_\mu(\varphi) - eB_\mu(\chi)\right)^2\right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\left(p_{cl} + p_Q\right)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) - \frac{1}{2}\left(p_{cl} + p_Q - eA_\mu(\varphi) - eB_\mu(\chi)\right)^2\right] \\ &= S_{cl} + S_Q, \end{aligned} \tag{4.44}$$

aussi :

- une partie classique S_{cl} peut être extraite

$$S_{cl} = -\int_{s_i}^{s_f} ds \left[p_{cl}(s)\frac{dx_{cl}(s)}{ds} - \frac{1}{2}\left[p_{cl}(s) - eA_{cl} - eB_{cl}\right]^2\right], \tag{4.45}$$

et une autre S_Q

$$\begin{aligned} S_Q = -\int_{s_i}^{s_f} & ds \left[p_{cl}.\dot{x}_Q + p_Q.\dot{x}_Q - e\left[A_{cl} + B_{cl} - \left(A(\varphi) + B(\chi)\right)\right]\left(p_{cl} + p_Q\right)\right. \\ & \left. -\frac{e^2}{2}\left[\left(A(\varphi) + B(\chi)\right)^2 - \left(A_{cl} + B_{cl}\right)^2\right] - \frac{1}{2}p_Q^2\right], \end{aligned} \tag{4.46}$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$x_Q(s_a) = x_Q(s_b) = 0. \tag{4.47}$$

L'hamiltonien, se décompose lui aussi en 2 parties

$$H = H_{cl} + H_Q, \tag{4.48}$$

$$H_{cl} = -\frac{1}{2}\left[p_{cl} - eA_{cl} - eB_{cl}\right]^2, \tag{4.49}$$

- et un 2ème hamiltonien

$$\begin{aligned} H_Q &= H - H_{cl} \\ &= -\frac{1}{2}p_Q^2 - p_{cl}p_Q - \frac{e^2}{2}\left[A(\varphi) + B(\chi)\right]^2 + e\left(p_{cl} + p_Q\right)\left(A(\varphi) + B(\chi)\right) \\ &\quad + \frac{e^2}{2}\left(A_{cl} + B_{cl}\right)^2 - ep_{cl}\left(A_{cl} + B_{cl}\right). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Ajoutons, à ce niveau un temps fictif u au temps réel s, afin de passer à la MQS. Nous avons alors

- pour les positions avec les conditions aux limites

$$x(s) \longrightarrow x(s,u), \tag{4.51}$$

$$x(s_a,u) = x(s_b,u) = 0, \tag{4.52}$$

- et pour les impulsions

$$p(s) \longrightarrow p(s,u). \tag{4.53}$$

Leurs évolutions sont sujettes aux 2 équations de Langevin

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x^\mu(s,u)}{\partial u} &= i\frac{\delta S_Q}{\delta x^\mu(s,u)} + \eta^\mu(s,u) \\ \frac{\partial p^\mu(s,u)}{\partial u} &= i\frac{\delta S_Q}{\delta p^\mu(s,u)} + \xi^\mu(s,u) \end{aligned} \right. , \tag{4.54}$$

avec toujours les propriétés standard pour les bruits

$$\begin{gathered} \langle \eta^\mu(s,u)\rangle = 0, \;\; \langle \xi^\mu(s',u')\rangle = 0, \;\; \langle \eta^\mu(s,u)\xi_\nu(s',u')\rangle = 0 \\ \langle \eta^\mu(s,u)\eta_\nu(s',u')\rangle = \langle \xi^\mu(s,u)\xi_\nu(s',u')\rangle = 2\delta^\mu_\nu\delta(s-s')\delta(u-u'). \end{gathered} \tag{4.55}$$

Un calcul simple utilisant comme par exemple

- les dérivations

$$\frac{\delta}{\delta x_Q(s,u)}A(\phi) = \frac{dA}{d\phi}k\delta(s-s'), \tag{4.56}$$

- et la règle d'intégration bien connue

$$\int_{s_a}^{s_b} dx f(x)\delta'(x-a) = -f^{'}(a), \tag{4.57}$$

nous donne d'abord

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_Q}{\partial u} &= i\left[\dot{p}_Q + \dot{p}_{cl} + \frac{e^2}{2}\left(k\frac{dA^2}{d\varphi} + K\frac{dB^2}{d\chi}\right) - e\left(k\frac{dA}{d\varphi} + K\frac{dB}{d\chi}\right)(p_{cl} + p_Q)\right] + \eta(s,u), \\
\frac{\partial p_Q}{\partial u} &= i\left[p_Q - \dot{x}_Q + e\left[(A_{cl} + B_{cl}) - (A(\varphi) + B(\chi))\right]\right] + \xi(s,u),
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Sous forme de matrice, ce système d'équation nous l'écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} &= i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{\partial}{\partial s} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{p}_{cl} + \frac{e^2}{2}\left(k\frac{dA^2}{d\varphi} + K\frac{dB^2}{d\chi}\right) - e\left(k\frac{dA}{d\varphi} + K\frac{dB}{d\chi}\right).(p_{cl} + p_Q) \\ e\left[(A_{cl} + B_{cl}) - (A(\varphi) + B(\chi))\right] \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \eta(s,u) \\ \xi(s,u) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.59}$$

et prend la forme vectorielle suivante.

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X} = M\overrightarrow{X} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}. \tag{4.60}$$

Nous généralisons donc la solution du système suivant [5].

$$\overrightarrow{X}(s,u) = \overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) + \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u')\, \overrightarrow{w}(s',u'), \tag{4.61}$$

où $\overrightarrow{X}_Q^{(0)}$ est la solution libre qui vérifie cette équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) = M^{(0)}\overrightarrow{X}_Q^{(0)} + \overrightarrow{v}, \tag{4.62}$$

$$\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) = \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u')\, \overrightarrow{v}(s',u'), \tag{4.63}$$

et $G(s,u \mid s',u')$ la fonction de Green associée au système libre ($A=0, B=0$).

Cette fonction de Green est de type matriciel (2×2). Nous pouvons la présenter par

$$G(s,u \mid s',u') = \begin{pmatrix} G_{11}(s,u \mid s',u') & G_{12}(s,u \mid s',u') \\ G_{21}(s,u \mid s',u') & G_{22}(s,u \mid s',u') \end{pmatrix}. \tag{4.64}$$

Les élément de la fonction de Green libre $G(s,u \mid s',u')$ qui vérifie le système d'équation de Langevin libre peuvent être trouver dans [7].

Passons au calcul du facteur de fluctuation

$$\exp\left[i\int_0^{s_i}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle\, ds_i\right]. \tag{4.65}$$

Tout d'abord, commençons par la moyenne de H_Q

$$\begin{aligned}\langle H_Q\rangle &= -\frac{1}{2}\langle p_Q^2\rangle - p_{cl}\langle p_Q\rangle - \frac{e^2}{2}\left[\langle A(\phi)\rangle + \langle B(\chi)\rangle\right]^2 + ep_{cl}\langle A(\phi)\rangle + ep_{cl}\langle B(\chi)\rangle \\ &\quad +e\langle p_Q A(\phi)\rangle + +e\langle p_Q B(\chi)\rangle + \frac{e^2}{2}(A_{cl}+B_{cl})^2 - ep_{cl}(A_{cl}+B_{cl}).\end{aligned} \tag{4.66}$$

Il est utile de considérer 2 vecteurs de base $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e}_2$

$$\overrightarrow{X}(s,u) = \begin{pmatrix} x_Q \\ p_Q\end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}x_Q(s,u) + \overrightarrow{e}_2 p_Q(s,u), \tag{4.67}$$

où

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{4.68}$$

pour trouver les expressions de $x_Q(s,u)$ et de $p_Q(s,u)$

$$\begin{cases} x_Q(s,u) = \overrightarrow{e}_1^{+}\overrightarrow{X} \\ \\ p_Q(s,u) = \overrightarrow{e}_2^{+}\overrightarrow{X}\end{cases},$$

$$\begin{cases} x_Q(s,u) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) + \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du' G(s,u \mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right) \\ \\ p_Q(s,u) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) + \int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du' G(s,u \mid s',u')\,\overrightarrow{w}(s',u')\right)\end{cases}, \tag{4.69}$$

en fonction des bruits.

Par ailleurs les deux champs $A(\phi)$ et $B(\chi)$ contient aussi la déviation $x_Q(s,u)$. Cette déviation apparaît explicitement si on développe les deux champs en série au voisinage du chemin classique.

$$A|_{k(x_{cl}+x_Q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (kx_Q)^n \left. \frac{d^n A}{d\varphi^n} \right|_{\varphi = kx_{cl}}, \quad B|_{K(x_{cl}+x_Q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Kx_Q)^n \left. \frac{d^n B}{d\chi^n} \right|_{\chi = Kx_{cl}}, \quad (4.70)$$

Il est évident que la déviation $x_Q(s,u)$ dépend du bruit, via l'équation de Langevin.

Nous avons besoin dans une 1ère étape de calculer des moyennes sur $\phi_Q = kx_Q$.

Multiplions par k les équations (4.69).

Comme $k^2 = 0$ et $kA = 0$ et à cause du fait que $k\overrightarrow{w}(s', u') = 0$

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \\ \\ kp_Q(s,u) = k \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \end{cases}, \quad \begin{cases} Kx_Q(s,u) = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \\ \\ Kp_Q(s,u) = K \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u \mid s',u') & G_{12}(s,u \mid s',u') \\ G_{21}(s,u \mid s',u') & G_{22}(s,u \mid s',u') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(s',u') \\ \xi(s',u') \end{pmatrix} \\ \\ kp_Q(s,u) = k \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \begin{pmatrix} G_{11}(s,u \mid s',u') & G_{12}(s,u \mid s',u') \\ G_{21}(s,u \mid s',u') & G_{22}(s,u \mid s',u') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(s',u') \\ \xi(s',u') \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (4.71)$$

nous avons

$$\begin{cases} kx_Q(s,u) = k \int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{11}(s,u \mid s',u')\, \eta(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u')\, \xi(s',u') \right] \\ \\ kp_Q(s,u) = k \int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}(s,u \mid s',u')\, \eta(s',u') + G_{22}(s,u \mid s',u')\, \xi(s',u') \right] \end{cases}. \quad (4.72)$$

La dépendance du bruit dans $A(\phi)$

$$A \Big|_{k(x_{cl}+x_Q)} = \sum_n \frac{1}{n!} (kx_Q)^n \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}}, \quad (4.73)$$

se trouvant au niveau des $(kx_Q(s,u))^n$, alors la moyenne est

$$\langle A(\phi) \rangle \Big|_{\phi = k\left(x_{cl}+x_Q\right)} = \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \langle (kx_Q)^n \rangle$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \left|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \left(k \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{11}(s,u \mid s',u') \eta(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u') \xi(s',u') \right] \right)^n \right\rangle . \right. \tag{4.74}$$

Pour $n = 0$, il est clair que le terme de la série

$$= \frac{d^0 A}{d\phi^0} \left|_{\phi = kx_{cl}} \langle 1 \rangle = A(\phi_{cl}) . \right. \tag{4.75}$$

Pour $n = 1$ le 2ème terme de la série

$$\begin{aligned} &= \frac{dA}{d\phi} \left|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \left(k \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{11}(s,u \mid s',u') \eta(s',u') + G_{12}(s,u \mid s',u') \xi(s',u') \right] \right) \right\rangle \right. \\ &= \frac{dA}{d\phi} \left|_{\phi = kx_{cl}} k \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{11}(s,u \mid s',u') \langle \eta(s',u') \rangle + G_{12}(s,u \mid s',u') \langle \xi(s',u') \rangle \right] \right. \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.76}$$

est nul à cause du fait que $\langle \eta(s',u') \rangle = \langle \xi(s',u') \rangle = 0$.

Pour $n = 2$ le 3ème terme de la série est aussi, nul du fait que $k^2 = 0$

Finalement

$$\langle A(\phi) \rangle = A(\phi_{cl}) . \tag{4.77}$$

Le même raisonnement peut être fait pour $\langle A^2(\phi) \rangle$

$$\left\langle A^2(\phi) \right\rangle = A^2(\phi_{cl}) . \tag{4.78}$$

même chose pour le champ

$$\langle B(\chi) \rangle = B(\chi_{cl}) , \quad \left\langle B^2(\chi) \right\rangle = B^2(\chi_{cl}) , \tag{4.79}$$

Calculons la moyenne de $p_Q A(\phi)$ qui est le 3 ème terme de $\langle H_Q \rangle$.

L'impulsion, comme nous pouvons le voir

$$p_{\mu Q}(s,u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\overrightarrow{X}_Q^{(0)}(s,u) + \int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u') \overrightarrow{w}(s',u') \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u') \overrightarrow{v}(s',u') + \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G(s,u \mid s',u') \overrightarrow{w}(s',u') \right)$$

$$= \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \Big\{ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \eta_\mu(s',u') + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \xi_\mu(s',u')$$
$$+G_{21(s,u|s',u')} \left[\dot{p}'_{\mu cl} - ek_\mu \left(p'_{cl} + p'_Q\right) . \frac{dA'}{d\phi'} + \frac{e^2}{2} k_\mu \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} \right] + eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left[A'_{\mu cl} - A'_\mu\left(\phi\right) \right] \Big\}, \tag{4.80}$$

dépend des bruits.

Utilisons le fait que $k.A = KB = 0$ et $\dot{p_{cl}}.A = 0$. Alors

$$p_{\mu Q} A^\mu\left(\phi\right) = \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \eta_\mu(s',u') + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \xi_\mu(s',u') \right.$$
$$\left. +eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left(A'_{\mu cl} - A'_\mu\left(\phi\right)\right) \right] A^\mu\left(\phi\right), \tag{4.81}$$

et prenons la moyenne sur les bruits

$$\begin{aligned}
\left\langle p_{\mu Q} A^\mu\left(\phi\right) \right\rangle &= \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \left\langle \eta_\mu(s',u') A^\mu\left(\phi\right) \right\rangle + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left\langle \xi_\mu(s',u') A^\mu\left(\phi\right) \right\rangle \\
&\quad +eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) A'_{\mu cl} \left\langle A^\mu\left(\phi\right) \right\rangle - eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left\langle A'_\mu\left(\phi\right) A^\mu\left(\phi\right) \right\rangle . \\
&= \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \eta_\mu(s',u') \left(kx_Q\right)^n \right\rangle \\
&\quad +G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \xi_\mu(s',u') \left(kx_Q\right)^n \right\rangle \\
&\quad +eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) A'_{\mu cl} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \left(kx_Q\right)^n \right\rangle \\
&\quad - - eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \sum_m \frac{1}{m!} \frac{d^m A}{d\phi^m} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{d\phi^n} \Big|_{\phi = kx_{cl}} \left\langle \left(kx_Q\right)^m \left(kx_Q\right)^n \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Nous trouvons un résultat simple qui signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre p_Q et x_Q.

Calculons maintenant la moyenne de p_Q

$$\begin{aligned}
\langle p_Q\rangle &= \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \Big\{ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\left\langle \eta_\mu(s',u')\right\rangle + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right)\left\langle \xi_\mu(s',u')\right\rangle \\
&\quad + G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\left[\dot{p}'_{\mu cl} - ek_\mu p'_{cl}.\left\langle \frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle - ek_\mu\left\langle p'_Q.\frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle + \frac{e^2}{2}k_\mu\left\langle \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'}\right\rangle\right] \\
&\quad + eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right)\left[A'_{\mu cl} - \left\langle A'_\mu\left(\phi\right)\right\rangle\right]\Big\}, \\
&= \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G_{21}\left[\dot{p}'_{\mu cl} - ek_\mu p'_{cl}.\left\langle \frac{dA'}{d\phi'}\right\rangle + \frac{e^2}{2}k_\mu\left\langle \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'}\right\rangle\right]. \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

Il a été tenu compte de

$$\langle \eta(s,u)\rangle = \left\langle \xi_\mu(s,u)\right\rangle = 0 \ et\ de\ \left\langle p_Q.\frac{dA}{d\phi}\right\rangle = 0. \qquad (4.84)$$

Le résultat est encore simple

$$\langle p_Q\rangle = 0 \qquad (4.85)$$

Reste à calculer $\left\langle p_Q^2\right\rangle$

Comme

$$\begin{aligned}
p_{\mu Q} &= k_\mu \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[\frac{e^2}{2}G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} - eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\left(p'_{cl} + p'_Q\right).\frac{dA'}{d\phi'}\right] \\
&\quad + \int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{s_a}^{s_b} du' \Big\{ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\eta_\mu(s',u') + G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right)\xi_\mu(s',u') \\
&\quad + eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right)\left[A'_{\mu cl} - A'_\mu\left(\phi\right)\right] + G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right)\dot{p}'_{\mu cl}\Big\}, \qquad (4.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{\mu Q}^{2} &= \int_{s_a}^{s_b} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du'' \Big\{ 2k_\mu \left[\frac{e^2}{2} G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} \eta^\mu(s'',u'') \right. \\
&\left. - eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) p'_Q . \frac{dA'}{d\phi'} \eta^\mu(s'',u'') \right] \\
&+ 2k_\mu \left[\frac{e^2}{2} G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \frac{dA^{2\prime}}{d\phi'} \xi^\mu(s'',u'') \right. \\
&- eG_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \\
&\left. \times\, p'_Q . \frac{dA'}{d\phi'} \xi^\mu(s'',u'') \right] + G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \eta_\mu(s',u') \eta^\mu(s'',u'') \\
&+ 2eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \left[A'_{\mu cl} - A'_\mu(\phi) \right] \eta^\mu(s'',u'') \\
&+ G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \xi_\mu(s',u') \xi^\mu(s'',u'') \\
&+ 2eG_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \xi_\mu(s',u') \left[A_{cl}^{\mu\prime\prime} - A^{\mu\prime\prime}(\phi) \right] \\
&+ e^2 G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) \left[A_{cl}^{\mu\prime} - A^{\mu\prime}(\phi) \right] \left[A''_{\mu cl} - A''_\mu(\phi) \right] \Big\}, \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

et après quelques manipulations

$$\begin{aligned}
\left\langle p_Q^2 \right\rangle &= \int_{s_a}^{s_b} ds' ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du' du'' \Big\{ G_{21}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{21}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \left\langle \eta_\mu(s',u') \eta^\mu(s'',u'') \right\rangle \\
&+ G_{22}\left(s,u \mid s',u'\right) G_{22}\left(s',u' \mid s'',u''\right) \left\langle \xi_\mu(s',u') \xi^\mu(s'',u'') \right\rangle \Big\} \\
&= 2 \int ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left[G_{21}^2\left(s,u \mid s',u'\right) + G_{22}^2\left(s,u \mid s',u'\right) \right]. \qquad (4.88)
\end{aligned}$$

Substituons les équations (4.77) , (4.78) , (4.82) , (4.85) et (4.88) dans (4.66) nous obtenons

$$\langle H_Q \rangle = -\frac{1}{2} \langle p_Q^2 \rangle$$

$$\langle H_Q \rangle = -\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left(G_{21}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) + G_{22}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) \right), \tag{4.89}$$

c'est à dire que la moyenne de H_Q calculée avec le champ d'une onde plane est égale à la moyenne sans champ (libre)

$$\langle H_Q \rangle \big|_{A \neq 0, B \neq 0} = \langle H_Q \rangle \big|_{A=0, B=0} . \tag{4.90}$$

Le propagateur dans ce cas est

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp \left[i S_{cl} \right] \exp \left[i \int_0^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \langle H_Q(s_i, u) \rangle \, ds_i \right]$$

$$\begin{aligned} \langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle &= c \exp \left[i S_{cl} \right] \\ &\times \exp \left[-i \int_0^{s_i} \lim_{u \longrightarrow \infty} \left(\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' \left(G_{21}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) + G_{22}^2 \left(s, u \mid s', u' \right) \right) \right) ds_i \right] . \end{aligned} \tag{4.91}$$

Où seul intervient la fonction de Green $G \left(s, u \mid s', u' \right)$ relative au système de Langevin libre (sans champ).

4.1.3 Conclusion

Le problème des particules relativistes de Klein Gordon en interaction avec le champ relatif à deux ondes planes et orthogonales a été résolu dans le formalisme stochastique de Parisi et Wu et ceci dans l'espace des phases. Le calcul du propagateur a été effectué en deux étapes. Nous avons d'abord déterminé l'action classique en utilisant le chemin classique et ensuite le facteur de fluctuation. Grâce aux propriétés de l'onde plane et un traitement perturbatif, la solution obtenue est analytique et exacte.

Recalculons le propagateur en considérant cette fois ci l'espace de configuration.

Chapitre 5

Formulation dans l'espace de configuration

5.1 Propagateur d'une particule de spin 0 dans le champ de deux ondes planes et orthogonales

Ce chapitre a pour but une fois de plus la determination du propagateur ou fonction de Green relatif au même problème précédent.

Il est plus avantageux de calculer le propagateur dans l'espace de configuration et donc d'utiliser le formalisme lagrangien au lieu du formalisme hamiltonien qui nécessite deux variables stochastiques (x_Q, p_Q) au lieu d'une seule qui est x_Q .

Effectuons le passage de l'espace des phases à l'espace des configurations.

Notons d'abord qu'en terme de moyenne, nous avons en général

$$\langle H_Q(s_i, u)\rangle = -\left\langle p_Q(s_i, u)\frac{\partial x_Q(s_i, u)}{\partial s}\right\rangle + \langle L_Q(s_i, u)\rangle \,, \tag{5.1}$$

avec

$$\langle L_Q(s_i, u)\rangle = -\frac{1}{2}\lim_{s_1, s_2 \longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\langle x_Q(s_1, u)x_Q(s_2, u)\rangle - eA_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle x_Q(s, u)\rangle - eB_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\langle x_Q(s, u)\rangle \,. \tag{5.2}$$

et la moyenne de $H_Q(s_i,u)$ pour des V quadratiques est égale dans ce cas

$$\begin{aligned}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle &= -\lim_{u\longrightarrow\infty}\left\langle p_Q(s_i,u)\frac{\partial x_Q(s_i,u)}{\partial s}\right\rangle-\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle\\ &\quad -eA_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s,u)\rangle-eB_{cl}\lim_{s\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s,u)\rangle\,. \qquad (5.3)\end{aligned}$$

Pour une particule libre par exemple, les deux variables stochastiques se calculent par les deux équations de Langevin qui les régissent

$$\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u}=i\frac{\delta S_Q}{\delta p_Q(s,u)}+\eta_Q(s,u), \qquad (5.4)$$

avec

$$S_Q=\int_{s_a}^{s_b}ds\left(p_Q\frac{\partial x_Q}{\partial s}+H_Q\right),\qquad H_Q=-\frac{1}{2}\left[p_Q-eA\left(\phi\right)-eB\left(\chi\right)\right]^2. \qquad (5.5)$$

Alors

$$\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u}=i\left(\frac{\partial x_Q}{\partial s}-p_Q+eA\left(\phi\right)+eB\left(\chi\right)\right)+\eta_Q(s,u), \qquad (5.6)$$

Il est facile de s'assurer que dans le produit

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial p_Q(s,u)}{\partial u}\right\rangle &= i\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial x_Q(s,u)}{\partial s}\right\rangle-i\left\langle p_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle\\ &\quad +ieA_{cl}\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle+ieB_{cl}\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle+\left\langle\eta_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle, \qquad (5.7)\end{aligned}$$

le 1èr et le 6ème terme sont nuls à la limite $u\longrightarrow\infty$ et que le 3ème terme est simplement égal à

$$\left\langle p_Q(s,u)\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\frac{\partial x_Q(s,u)}{\partial s}\right\rangle+eA_{cl}\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle+eB_{cl}\left\langle\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}\right\rangle. \qquad (5.8)$$

Autrement dit la substitution de p_Q par $\frac{\partial x_Q(s',u)}{\partial s}$ est permise uniquement à l'équilibre $(\lim_{u\longrightarrow\infty})$.

Ainsi donc (5.3)

$$\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle=\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\longrightarrow s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\longrightarrow\infty}\langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle\,, \qquad (5.9)$$

et le propagateur dans ce cas est égale à[4]

$$\langle x_f, s_f \mid x_i, s_i \rangle = c \exp\left[iS_{cl}\right] \exp\left[i\frac{1}{2}\int_0^s \lim_{s_1,s_2 \longrightarrow s_i} \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2} \lim_{u\longrightarrow\infty} \langle x_Q(s_1,u)x_Q(s_2,u)\rangle\, ds_i\right]. \quad (5.10)$$

Cette expression dans l'espace de configuration est valable pour la particule relativiste sans spin

Revenons à notre problème qui est celui de deux ondes planes et orthogonales.

Notre particule relativiste est sans spin. Dans la formulation intégrale de chemins [11], il est facile de montrer que les chemins sont affectés d'un poids en $exp(iS)$ où

$$\begin{aligned} S &= \int_{s_a}^{s_b} dsL\left[x(s), \dot{x}(s)\right] \\ &= -\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + eA\dot{x}(s) + eB\dot{x}(s)\right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

contient l'action dans le système des coordonnées

$$x^{\mu} = x^{\mu}(s), \quad (5.12)$$

paramétrisé par la variable s.

Suivant la MQS il est nécessaire d'abord de calculer S_{cl} et ensuite le facteur de fluctuation.

5.1.1 Calcul de l'action classique $\mathbf{S}_{cl}$

Cherchons au sens de la mécanique classique la trajectoire suivie par notre particule relativiste.

L'équation de la trajectoire se détermine à partir de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}_{\mu} + eA_{\mu} + eB_{\mu}) = ek\dot{x}.\frac{dA}{d\phi} + eK.\frac{dB}{d\chi}, \quad (5.13)$$

où $\phi = k.x$ et $\chi = K.x$.

Nous voyons que

- l'équation de la trajectoire

- ainsi que l'action classique

sont les mêmes que celles déjà trouvées au chapitre précédent

Par conséquent, il est inutile de refaire les calculs qui se trouvent dans le chapitre 3

L'action classique est

$$
\begin{aligned}
S_{cl} = -\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \quad & -\frac{e(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)} \int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - \frac{e(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)} \int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \\
& + \frac{\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A \right]^2 \right], \\
& + \frac{\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \right]^2 \right],
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

5.1.2 Calcul du facteur de fluctuation

Désignons par x_Q^μ la déviation de x^μ par rapport à la trajectoire classique x_{cl}^μ

$$
x^\mu = x_{cl}^\mu + x_Q^\mu. \tag{5.15}
$$

Avec cette décomposition l'action S

$$
\begin{aligned}
S &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(s) + eA(\phi)\dot{x}(s) + eB(\chi)\dot{x}(s) \right] \\
&= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right)^2 + eA(\phi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) \right] \\
&= S_{cl} + S_Q,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

est donc la somme de 2 actions : l'une classique

$$
S_{cl} = -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}_{cl}.\dot{x}_{cl} + eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl} \right], \tag{5.17}
$$

et d'une autre S_Q ($S_Q = S - S_{cl}$) qui contient les termes restants

$$
\begin{aligned}
S_Q &= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{x}_Q.\dot{x}_Q + \dot{x}_{cl}.\dot{x}_Q + eA(\phi).(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + \right. \\
&\quad \left. + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{x}_Q\right) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right] \\
&= -\int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}_{cl}.\dot{y} + eA(\phi).(\dot{x}_{cl} + \dot{y}) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + eB(\chi)\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}\right) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right],
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

avec évidemment les conditions aux bords

$$
x_Q(s_a) = x_Q(s_b) = 0. \tag{5.19}
$$

Notons par $x_Q = y$,

$$
\phi_{cl} = kx_{cl}, \quad \chi_{cl} = Kx_{cl}, \tag{5.20}
$$

et par

$$
\phi = k\left(x_{cl} + x_Q\right), \quad \chi = K\left(x_{cl} + x_Q\right) \tag{5.21}
$$

A ce niveau nous ajoutons au temps réel s, le temps fictif u :

$$
y(s) \rightarrow y(s,u) \text{ avec } y(s_a,u) = y(s_b,u) = 0. \tag{5.22}
$$

L'équation de Langevin qui régit le mouvement y^μ est la suivante

$$
\frac{\partial y^\mu(s,u)}{\partial u} = i\frac{\delta S_Q}{\delta y^\mu(s,u)} + \eta^\mu(s,u), \tag{5.23}
$$

avec comme propriétés pour les bruits

$$
\begin{aligned}
\langle \eta^\mu(s,u)\rangle = 0,\ \ \langle \xi^\mu(s',u')\rangle = 0,\ \ \langle \eta^\mu(s,u)\xi_\nu(s',u')\rangle = 0 \\
\langle \eta^\mu(s,u)\eta_\nu(s',u')\rangle = \langle \xi^\mu(s,u)\xi_\nu(s',u')\rangle = 2\delta^\mu_\nu\delta(s-s')\delta(u-u').
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\langle \eta^\mu(s,u)\rangle = 0 \\
\langle \eta^\mu(s,u)\eta^\nu(s',u')\rangle = 2g^{\mu\nu}\delta(s-s')\delta(u-u')
\end{array}
\right. . \tag{5.25}
$$

Développons l'équation de Langevin

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y(s,u)}{\partial u} &= -i\frac{\delta}{\delta y(s,u)}\int_{s_a}^{s_b} ds' \left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \dot{x}_{cl}.\dot{y} + eA(\phi).(\dot{x}_{cl} + \dot{y}) - eA(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} + \right. \\
&\quad \left. + eB(\chi).(\dot{x}_{cl} + \dot{y}) - eB(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl}\right] + \eta(s,u),
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

en utilisant les dérivations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta y(s,u)} A(\phi_{cl}).\dot{x}_{cl} = 0, \\ \\ \dfrac{\delta}{\delta y(s,u)} B(\chi_{cl}).\dot{x}_{cl} = 0 \end{cases}, \tag{5.27}$$

et

$$\frac{\delta}{\delta y(s,u)} A(\phi) = \frac{dA}{d\phi} k\delta(s-s'), \qquad \frac{\delta}{\delta y(s,u)} B(\chi) = \frac{dB}{d\chi} K\delta(s-s') \tag{5.28}$$

ainssi que la règle connue

$$\int_{s_a}^{s_b} dx f(x)\delta'(x-a) = -f^{'}(a). \tag{5.29}$$

Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(s,u)}{\partial u} &= -i\int_{s_a}^{s_b} ds' \Big[\dot{y}\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + \dot{x}_{cl}\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + e\frac{\delta}{\delta y(s,u)} A(\phi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) \\ &\quad + eA(\phi)\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') + e\frac{\delta}{\delta y(s,u)} B(\chi).(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + eB(\chi)\frac{\partial}{\partial s'}\delta(s-s') \Big] + \eta(s,u), \end{aligned} \tag{5.30}$$

et finalement l'équation de Langevin est la suivante

$$\frac{\partial y(s,u)}{\partial u} = i\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}(y+x_{cl}) - ek\frac{dA}{d\phi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + e\frac{\partial A}{\partial s} - eK\frac{dB}{d\chi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y}) + e\frac{\partial B(\chi)}{\partial s}\right] + \eta(s,u). \tag{5.31}$$

Supposons que la solution y est la superposition de deux solutions. L'une sans la présence du champ A_μ c'est à dire :

- libre : $y^{(0)}(s,u)$
- plus la partie restante $y'(s,u)$:

$$y(s,u) = y^{(0)}(s,u) + y^{'}(s,u). \tag{5.32}$$

Décomposons la solution libre $y^{(0)}(s,u)$ encore en deux termes

$$y^{(0)}(s,u) = y_{cl}^{(0)}(s) + y_Q^{(0)}(s,u), \tag{5.33}$$

où le 1er terme désigne $y_{cl}^{(0)}(s)$ la solution de l'équation classique.

Puisque

$$\frac{d^2}{ds^2}y_{cl}^{(0)}(s) = 0,$$

il est clair que $y_{cl}^{(0)}(s) = 0$.

En effet par intégration nous avons

$$y_{cl}^{(0)}(s) = as + b, \tag{5.34}$$

et comme il y a une deuxième conditions aux limites

$$\begin{cases} y_{cl}^{(0)}(s_a) = as_a + b = 0 \\ \qquad\qquad et \\ y_{cl}^{(0)}(s_b) = as_b + b = 0 \end{cases}, \tag{5.35}$$

alors

$$a = b = 0, \tag{5.36}$$

et par conséquent

$$y_{cl}^{(0)}(s) = 0. \tag{5.37}$$

La déviation $y_Q^{(0)}(s,u)$ par rapport au libre est régie maintenant par l'équation de Langevin suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}y_Q^{(0)}(s,u) = i\frac{\partial^2}{\partial s^2}y_Q^{(0)}(s,u) + \eta(s,u), \tag{5.38}$$

avec toujours les conditions aux limites

$$y_Q^{(0)}(s_a,u) = y_Q^{(0)}(s_b,u) = 0. \tag{5.39}$$

Désignons par $G^{(0)}(s,s';u-u')$ la fonction de Green libre. Elle est solution de

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)G^{(0)}(s,s';u-u') = \delta(s-s')\delta(u-u'), \tag{5.40}$$

les condition aux limites sont

$$G^{(0)}(s,s';u-u')=0, \qquad pour \quad s\,(ou\ s')=s_a,s_b \quad ou \quad u<u'. \tag{5.41}$$

Il est facile de trouver l'expression de $G^{(0)}(s,s';u-u')$

$$G^{(0)}(s,s';u-u')=\theta(u-u')\frac{2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s'-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u-u')\right]. \tag{5.42}$$

D'où la solution de l'équation libre de Langevin (5.38) est

$$y_Q^{(0)}(s,u)=\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G^{(0)}(s,s';u-u')\eta(s',u'), \tag{5.43}$$

et finalement la solution de l'équation de Langevin en présence du champ $(A_\mu(\phi)\neq 0, B_\mu(\chi)\neq 0)$ (5.31) est la suivante

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(y+x_{cl})-ek\frac{dA}{d\phi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial A}{\partial s}-eK\frac{dB}{d\chi}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial B(\chi)}{\partial s}$$

$$\begin{aligned}y(s,u) &= y_Q^{(0)}(s,u)+i\int_{s_a}^{s_b}ds'\int_{-\infty}^{+\infty}du'G^{(0)}(s,s';u-u')\times\\ &\left[\ddot{x_{cl}}(s')-ek\frac{dA}{d\phi'}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial A}{\partial s'}-eK\frac{dB}{d\chi'}.(\dot{x}_{cl}+\dot{y})+e\frac{\partial B}{\partial s'}\right].\end{aligned} \tag{5.44}$$

Grâce aux proprietés de la jauge $kA=KB=0$, ainsi que le caractère relatif aux photons $k^2=K^2=0$ et les conditions d'orthogonalités des deux champs d'ondes planes c'est à dire $AB=kK=KA=kB=0$, nous pouvons trouver la solution $y(s,u)$ par une simple itération.

Notons d'abord que

$$k\ddot{x}_{cl}=0, \quad K\ddot{x}_{cl}=0$$

et aussi

$$k.\dot{y}(s,u)=k.\dot{y}_Q^{(0)}(s,u), \qquad K.\dot{y}(s,u)=K.\dot{y}_Q^{(0)}(s,u) \tag{5.45}$$

En passant par la dérivée suivante

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial s} &= \frac{dA}{d\phi}\left|_{k(x+y)}k.\left(\dot{x}_{cl}+\dot{y}(s,u)\right)\right.\\ &= \frac{dA}{d\phi}\left|_{k(x+y)}k.\left(\dot{x}_{cl}+\dot{y}_Q^{(0)}(s,u)\right)\right..\end{aligned} \tag{5.46}$$

même chose pour le champ $B(\chi)$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = \frac{dB}{d\chi}\left|_{K(x+y)} K.\left(\dot{x}_{cl} + \dot{y}_Q^{(0)}(s,u)\right)\right. . \tag{5.47}$$

Alors la solution de l'équation (5.31) est

$$\begin{aligned}
y(s,u) &= y_Q^{(0)}(s,u) + i\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u') \times \\
&\left[\ddot{x_{cl}}(s') + e\frac{dA}{d\phi'}\Big|_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right) + e\frac{dB}{d\chi'}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u')\right)\right] \\
&-iek\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\frac{dA}{d\phi'}\Big|_{k(x+y)} \times \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u') + i\int_{s_a}^{s_b} ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \frac{\partial}{\partial s'} G^{(0)}(s',s'';u'-u'')\left(\ddot{x_{cl}}(s'') + e\frac{\partial A}{\partial s''}\right)\right] \\
&-ieK\int_{s_a}^{s_b} ds' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s,s';u-u')\frac{dB}{d\chi'}\Big|_{K(x+y)} \times \\
&\left[\dot{x}_{cl}(s') + \dot{y}_Q^{(0)}(s',u') + i\int_{s_a}^{s_b} ds'' \int_{-\infty}^{+\infty} du'' \frac{\partial}{\partial s'} G^{(0)}(s',s'';u'-u'')\left(\ddot{x_{cl}}(s'') + e\frac{\partial B}{\partial s''}\right)\right] .
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Nous sommes alors en position de calculer la fonction de corrélation libre à deux points $\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle$

$$\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle =$$

$$\begin{aligned}
= \; & \Bigg\langle \Bigg\{ y_Q^{(0)}(s_1,u_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \\
& \times \left[\ddot{x}_{cl}(s_1') + e\frac{dA}{d\phi_1'}\Big|_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right) + e\frac{dB}{d\chi_1'}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1')\right)\right] \\
& -iek\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \frac{dA}{d\phi_1'}\Big|_{k(x+y)} \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_1'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1'' \frac{\partial}{\partial s_1'} G^{(0)}(s_1',s_1'';u_1'-u_1'')\left(\ddot{x}_{cl}(s_1'') + e\frac{\partial A}{\partial s_1''}\right)\right] \\
& -ieK\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1') \frac{dB}{d\chi_1'}\Big|_{K(x+y)} \times \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s_1') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_1',u_1') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_1'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1'' \frac{\partial}{\partial s_1'} G^{(0)}(s_1',s_1'';u_1'-u_1'')\left(\ddot{x}_{cl}(s_1'') + e\frac{\partial B}{\partial s_1''}\right)\right]\Bigg\} \\
& \times \Bigg\{ y_Q^{(0)}(s_2,u_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \\
& \times \left[\ddot{x}_{cl}(s_2') + e\frac{dA}{d\phi_2'}\Big|_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right) + e\frac{dB}{d\chi_2'}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2')\right)\right] \\
& -iek\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \frac{dA}{d\phi_2'}\Big|_{k(x+y)} \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_2'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2'' \frac{\partial}{\partial s_2'} G^{(0)}(s_2',s_2'';u_2'-u_2'')\left(\ddot{x}_{cl}(s_2'') + e\frac{\partial A}{\partial s_2''}\right)\right] \\
& -ieK\int_{s_a}^{s_b} ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du' G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') \frac{dB}{d\chi'}\Big|_{K(x+y)} \times \\
& \left[\dot{x}_{cl}(s_2') + \dot{y}_Q^{(0)}(s_2',u_2') + i\int_{s_a}^{s_b} ds_2'' \int_{-\infty}^{+\infty} du_2'' \frac{\partial}{\partial s_2'} G^{(0)}(s_2',s_2'';u_2'-u_2'')\left(\ddot{x}_{cl}(s_2'') + e\frac{\partial B}{\partial s_2''}\right)\right]\Bigg\}\Bigg\rangle
\end{aligned} \quad (5.49)$$

Utilisons le fait que $k^2 = K^2 = 0$ et $kA = KB = 0$ ainsi que la propriété de la moyenne

$$< y_Q^{(0)}(s,u) >= 0, \quad (5.50)$$

et

$$k\ddot{x}_{cl.}(s) = 0, \quad (5.51)$$

pour simplifier.

Alors le produit de corrélation devient

$$\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle$$

$$\begin{aligned}
= & \left\langle y_Q^{(0)}(s_1,u_1).y_Q^{(0)}(s_2,u_2)\right\rangle - \int_{s_a}^{s_b} ds'_1 ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 du'_2 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1)G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2) \\
& \times \left\langle \left[\ddot{x_{cl}}^{\mu}(s'_1) + e\frac{dA^{\mu}}{d\phi'_1}\mid_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_1}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right)\right]\right. \\
& \left.\times \left[\ddot{x}_{cl\mu}(s'_2) + e\frac{dA_{\mu}}{d\phi'_2}\mid_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_2}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right)\right]\right\rangle \\
& + ie\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_2 G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2) \\
& \left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\left[\frac{dA_{\mu}}{d\phi'_2}\mid_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_2}\mid_{k(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2)\right)\right]\right\rangle \\
& - iek_{\mu}\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_2 G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2) \times \left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dA}{d\phi'_2}\mid_{k(x+y)}\right. \\
& \left.\times\left[\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du''_2 \frac{\partial}{\partial s'_2} G^{(0)}(s'_2,s''_2;u'_2-u''_2)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_2)+e\frac{\partial A}{\partial s''_2}\right)\right]\right\rangle \\
& - ieK_{\mu}\int_{s_a}^{s_b} ds'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_2 G^{(0)}(s_2,s'_2;u_2-u'_2) \times \left\langle y_Q^{(0)\mu}(s_1,u_1)\frac{dB}{d\chi'_2}\mid_{K(x+y)}\right. \\
& \left.\times\left[\dot{x}_{cl}(s'_2)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_2,u'_2) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_2 \int_{-\infty}^{+\infty} du''_2 \frac{\partial}{\partial s'_2} G^{(0)}(s'_2,s''_2;u'_2-u''_2)\left(\ddot{x_{cl}}(s''_2)+e\frac{\partial B}{\partial s''_2}\right)\right]\right\rangle \\
& - ie\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1) \\
& \left\langle\left[\frac{dA^{\mu}}{d\phi'_1}\mid_{k(x+y)} k.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right) + e\frac{dB}{d\chi'_1}\Big|_{K(x+y)} \times K.\left(\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1)\right)\right] y_{Q\mu}^{(0)}(s_2,u_2)\right\rangle \\
& - ie\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1) \\
& \times\left\langle \frac{dA}{d\phi'_1}\mid_{k(x+y)} .\left[\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du''_1 \frac{\partial}{\partial s'_1} G^{(0)}(s'_1,s''_1;u'_1-u''_1)\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\ddot{x_{cl}}(s''_1)+e\frac{\partial A}{\partial s''_1}\right)\right] k^{\mu} y_{Q\mu}^{(0)}(s_2,u_2)\right\rangle. \\
& - ie\int_{s_a}^{s_b} ds'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du'_1 G^{(0)}(s_1,s'_1;u_1-u'_1) \\
& \times\left\langle \frac{dB}{d\chi'_1}\mid_{K(x+y)} .\left[\dot{x}_{cl}(s'_1)+\dot{y}_Q^{(0)}(s'_1,u'_1) + i\int_{s_a}^{s_b} ds''_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du''_1 \frac{\partial}{\partial s'_1} G^{(0)}(s'_1,s''_1;u'_1-u''_1)\right.\right. \\
& \left.\left.\left(\ddot{x_{cl}}(s''_1)+e\frac{\partial B}{\partial s''_1}\right)\right] K^{\mu} y_{Q\mu}^{(0)}(s_2,u_2)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Après quelques manipulations, le produit de corrélation devient respectivement égal à

$$\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle = \left\langle y_Q^{(0)}(s_1,u_1).y_Q^{(0)}(s_{2,}u_2)\right\rangle, \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
&= \int_{s_a}^{s_b} ds_1' ds_2' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' du_2' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1')G^{(0)}(s_2,s_2';u_2-u_2') < \eta^\mu(s_1',u_1')\eta_\mu(s_2',u_2') > \\
&= 8\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \int_{-\infty}^{+\infty} du_1' G^{(0)}(s_1,s_1';u_1-u_1')G^{(0)}(s_2,s_1';u_2-u_1'),
\end{aligned} \tag{5.54}$$

(la contraction sur les indices μ conduit à un facteur 4 en plus).

Reportons les expressions des fonctions de Green $G^{(0)}$

$$\begin{aligned}
&\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
&= \frac{32}{\lambda^2}\sum_{n,l} \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\int_{-\infty}^{+\infty} du_1'\theta(u_1-u_1')\theta(u_2-u_1') \\
&\quad \times\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1-u_1')\right]\exp\left[\frac{il^2\pi^2}{\lambda^2}(u_2-u_1')\right],
\end{aligned} \tag{5.55}$$

et calculons l'intégrale sur s_1'

Comme

$$\int_0^\lambda ds\cos\frac{m\pi}{\lambda}s = \lambda\delta_{m,0}, \tag{5.56}$$

alors

$$\int_{s_a}^{s_b} ds_1' \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1'-s_i)\sin\frac{l\pi}{\lambda}(s_1'-s_i) = \frac{\lambda}{2}\delta_{n,l}. \tag{5.57}$$

En remplaçant dans la dernière expression, il vient

$$
\begin{aligned}
& \langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle \\
= & \frac{16}{\lambda}\sum_n \sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\int_{-\infty}^{+\infty} du'\theta(u_1-u')\theta(u_2-u')\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}(u_1+u_2-2u')\right] \\
= & \sum_n \frac{8i\lambda}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\exp\left[\frac{in^2\pi^2}{\lambda^2}\left|u_1-u_2\right|\right], \qquad (5.58)
\end{aligned}
$$

et à la limite $u_1 = u_2 \longrightarrow \infty$ l'exponentielle disparait. Il reste à calculer la série $\sum_n$.

Transformons $\left[\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}(s_2-s_i)\right]$ en $\left[\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_1-s_2)-\cos\frac{n\pi}{\lambda}(s_1+s_2-2s_i)\right]$ et utilisons l'identité suivante

$$
\sum\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4}, \qquad [0\leq x\leq 2\pi], \tag{5.59}
$$

nous obtenons le résultat simple pour le produit de corrélation

$$
\lim_{u_1=u_2\longrightarrow\infty}\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle=\frac{4i}{\lambda}(s_2-s_i)(s_f-s_1). \tag{5.60}
$$

En dérivant 2 fois/ $s_1$et s_2 et à l'équilibre

$$
\lim_{u\to\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle=\frac{1}{2}\lim_{s_1,s_2\to s_i}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial s_2}\lim_{u\to\infty}\langle y(s_1,u_1).y(s_2,u_2)\rangle, \tag{5.61}
$$

$$
\lim_{u\to\infty}\langle H_Q(s_i,u)\rangle=-\frac{2i}{\lambda}, \tag{5.62}
$$

nous obtenons pour le propagateur $K(x_b,x_a;\lambda)$ l'expression

$$
\begin{aligned}
K(x_b,x_a;\lambda) &= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[i\int_0^s-\frac{2i}{\lambda}ds_i\right] \\
&= c\exp\left[iS_{cl}\right]\exp\left[-2\log\lambda\right] \\
&= \frac{c}{\lambda^2}\exp\left[iS_{cl}\right]. \qquad (5.63)
\end{aligned}
$$

Fixons la constante c. Comme elle est indépendante de s_i et s_f.

A la limite $\lambda = s_f - s_i \longrightarrow 0$

$$
\lim_{\lambda\to 0}K(x_b,x_a;\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{c}{\lambda^2}\exp\left[-i\frac{(x_b-x_a)^2}{2\lambda}\right]=\delta^4(x_b-x_a). \tag{5.64}
$$

Par intégration sur x_b sur la gaussienne et de la fonction δ, nous pouvons voir que

$$c = \frac{i}{(2\pi)^2}. \tag{5.65}$$

D'où le propagateur

$$\begin{aligned} K(x_b, x_a; \lambda) &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{\lambda^2} \exp\left\{ -\frac{ie(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)} \int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - \frac{ie(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)} \int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B - \frac{i(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \right. \\ &+ \frac{i\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)} \times \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} A d\phi \right]^2 \right] \\ &\left. + \frac{i\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \right]^2 \right] \right\}, \end{aligned} \tag{5.66}$$

et finalement la fonction de Green relative à la particule de Klein-Gordon soumise à l'onde plane

$$\begin{aligned} \triangle(x_b, x_a) &= \frac{1}{8\pi^2} \exp\left\{ -i\frac{e(x_b - x_a)}{k(x_b - x_a)} \int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A - i\frac{e(x_b - x_a)}{K(x_b - x_a)} \int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \right\} \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} \exp\left\{ -i\frac{m^2\lambda}{2} - i\frac{(x_b - x_a)^2}{2\lambda} \right. \\ &+ \frac{i\lambda e^2}{2k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A^2 - \frac{1}{k(x_b - x_a)} \left[\int_{kx_a}^{kx_b} d\phi A \right]^2 \right] \\ &\left. + \frac{i\lambda e^2}{2K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B^2 - \frac{1}{K(x_b - x_a)} \left[\int_{Kx_a}^{Kx_b} d\chi B \right]^2 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Cette expression a la même forme exacte que celle obtenue par l'approche path integral [12]

5.1.3 Conclusion

Nous avons réussi encore une fois à calculer la fonction de Green pour des particules relativistes de Klein Gordon en interaction avec le champ relatif à deux ondes planes et orthogonales en utilisant le formalisme stochastique de Parisi et Wu et ceci dans l'espace de configuration. Le calcul du propagateur a été effectué en deux étapes. D'abord nous avons trouvé la même action classique. Ensuite le facteur de fluctuation. Le calcul itératif et perturbatif a parmis d'obtenir la fonction de Green sous forme compacte et notre résultat par cette approche est comparable à celui obtenu par l'approche des intégrales de chemins [12].

Par conséquent notre propagateur est le même que celui déterminé dans l'espace des phases.

Chapitre 6

Conclusion générale

Ce mémoire s'intéresse à la détermination de la fonction de Green pour une particule relativiste, sans spin et soumise à l'action combinée de deux champs d'ondes électromagnétique planes et orthogonales suivant la (MQS) de Parisi-WU et ceci dans l'espace des phases et de configuration.

En premier lieu, nous avons exposer un rappel assez détaillé sur ce formalisme.

Dans l'espace des phases, l'action classique pour une particule de KG a été d'abord extraite et le facteur de fluctuation a été ensuite déterminé exactement en résolvant les équations de Langevin pour x_Q et p_Q. Notons que le traitement perturbatif de type matriciel a été nécessaire pour cela.

En suivant la même démarche précédente, la fonction de Green relative à KG a été recalculée pour la 2ème fois dans l'espace des configurations. L'action classique une fois extraite, le facteur de fluctuation a été encore retrouvé grâce à un calcul itératif et grâce à l'espace de configuration, nous avons utilisé une seule équation de Langevin au lieu de deux pour l'espace des phases.

Dans les deux espaces, la fonction de Green obtenue par cette nouvelle approche est exactement la même que celle obtenue suivant l'approche des intégrales de chemins [12].

Chapitre 7

appendix A :

7.1 les élements de la matrice

la fonction de Green $G^{(0)}(s{,}u\ |s'\ {,}u')$,vérifie le systéme d'équation de langevin libre

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}-M^{(0)}\right)G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u')\ =\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= -\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= -\sigma_y\ \partial_s-\frac{i}{2}\sigma_z+\frac{i}{2} \\ &= \vec{\sigma}\ \vec{A}+\frac{i}{2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Avec

$$\vec{A}=\begin{pmatrix} 0 & -\partial_s & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

Et σ_y , σ_z représentant les matrices de Pauli.

L'expression de la fonction de Green liber

$$G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial u} - M^{(0)}\right)}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \tag{7.4}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial u} + \sigma_y\ \partial_s + \frac{i}{2}\sigma_z - \frac{i}{2}\right)}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \tag{7.5}$$

devient

$$G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = \frac{1}{\left(\partial_u - \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \tag{7.6}$$

Nous pouvons donc écrire a fonction $G^{(0)}(s,u\ |s'\ ,u')$sous la form matricielle

$$G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = \frac{\left(\partial_u + \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)}{\left(\partial_u - \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)\left(\partial_u + \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \tag{7.7}$$

Et

$$\begin{aligned}\left(\partial_u - \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)\left(\partial_u + \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right) &= \partial_u^2 + \partial_s^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - i\ \partial_u + \partial_s^2 \\ &= \partial_u^2 - i\ \partial_u + \partial_s^2 \end{aligned}\tag{7.8}$$

$$\begin{aligned} G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') &= \frac{\left(\partial_u + \vec{\sigma}\ \vec{A} - \frac{i}{2}\right)}{\partial_u^2 - i\ \partial_u + \partial_s^2}\delta\left(s-s'\right)\delta\left(u-u'\right) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_u - i & i\ \partial_s \\ -i\ \partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \frac{1}{\partial_u^2 - i\ \partial_u + \partial_s^2} \int \frac{dp}{2\pi} \exp ip\left(u-u'\right) \\ &\quad \times \frac{2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right) \\ &= \frac{2}{\lambda}\begin{pmatrix} \partial_u - i & i\ \partial_s \\ -i\ \partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \int \frac{dp}{2\pi}\frac{\exp ip\left(u-u'\right)}{-p^2+p+\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2} \times \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right) \end{aligned}\tag{7.9}$$

Faisonsle changement de variables suivant

$$\begin{aligned} Z &= p - \frac{1}{2} \Longrightarrow p = Z + \frac{1}{2} \\ dp &= dZ \end{aligned} \tag{7.10}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} G^{(0)}(s, u\,|s'\,, u') &= -\frac{2}{\lambda} \begin{pmatrix} \partial_u - i & i\,\partial_s \\ -i\,\partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \int \frac{dZ}{2\pi} \frac{\exp ip\,(u-u')}{Z^{\,2} + \frac{1}{4} + Z - Z - \frac{1}{2} - \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s - s_i) \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s' - s_i) \\ &= -\frac{2}{\lambda} \begin{pmatrix} \partial_u - i & i\,\partial_s \\ -i\,\partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \int \frac{dZ}{2\pi} \frac{\exp ip\,(u-u')}{Z^{\,2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s - s_i) \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s' - s_i) \\ &= -\frac{2}{\lambda} \begin{pmatrix} \partial_u - i & i\,\partial_s \\ -i\,\partial_s & \partial_u \end{pmatrix} \int \frac{dZ}{2\pi} \frac{\exp ip\,(u-u')}{Z^{\,2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2 + 1\right)} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s - s_i) \sin \frac{n\pi}{\lambda}\,(s' - s_i) \end{aligned} \tag{7.11}$$

L'expression ci-dessus posséde deux poles

$$\Longrightarrow \quad Z^{\,2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2 + 1\right) \neq 0 \tag{7.12}$$

$$\Longrightarrow \quad Z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2 + 1} \tag{7.13}$$

appliquons la méthode des résidus

$$G^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') \;=\; \theta\,(u-u')\,\frac{4}{\lambda}\begin{pmatrix}\partial_u - i & i\ \partial_s \\ -i\ \partial_s & \partial_u\end{pmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s'-s_i)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\,(u-u')$$
$$\times\exp\frac{i\ (u-u')}{2} \tag{7.14}$$

On va donc calculer tous les éléments de la matrice de green,mencons par $G^{(0)}_{11}(s,u\,|s'\ ,u')$,nous obtenons alors

$$G^{(0)}_{11}(s,u\,|s'\ ,u') \;=\; \theta\,(u-u')\,\frac{4}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s'-s_i)$$
$$\times\,(\partial_u - i\ )\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\,(u-u')\exp\frac{i\ (u-u')}{2}\right] \tag{7.15}$$

$$G^{(0)}_{11}(s,u\,|s'\ ,u') \;=\; \theta\,(u-u')\,\frac{4}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s-s_i)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\,(s'-s_i)$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\,(u-u')+\frac{i}{2\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\,(u-u')\right]$$
$$\times\exp\frac{i\ (u-u')}{2}$$
$$\frac{-i}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\,(u-u')\exp\frac{i\ (u-u')}{2} \tag{7.16}$$

$$G_{11}^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = -\theta\left(u-u'\right)\frac{2i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right)$$
$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\right]\left(u-u'\right)+i\cos\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\left(u-u'\right)\right]\right\}$$
$$\times\exp\frac{i\ \left(u-u'\right)}{2} \tag{7.17}$$

$$G_{12}^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = \theta\left(u-u'\right)\frac{4i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\lambda}\cos\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\left(u-u'\right)\right]\exp\frac{i\ \left(u-u'\right)}{2} \tag{7.18}$$

et

$$G_{21}^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = -\theta\left(u-u'\right)\frac{4i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\lambda}\cos\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\left(u-u'\right)\right]\exp\frac{i\ \left(u-u'\right)}{2} \tag{7.19}$$

et finalement

$$G_{22}^{(0)}(s,u\,|s'\ ,u') = \theta\left(u-u'\right)\frac{2i}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s-s_i\right)\sin\frac{n\pi}{\lambda}\left(s'-s_i\right)$$
$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}\sin\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\right]\left(u-u'\right)-i\cos\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\lambda}\right)^2+1}}{2}\left(u-u'\right)\right]\right\}$$
$$\times\exp\frac{i\ \left(u-u'\right)}{2} \tag{7.20}$$

Bibliographie

[1] G.Parisi et Y.-S. Wu, Sci. Sin. 24 (1981), 483.

[2] N. Chine and L. Chetouani. Phys.Scr. 84 (2011), 015011

[3] Namiki M, *Stochastic Quantization* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1992).

[4] H. Hüffel et H. Nakazato, Mod. Phys. Lett. A9 (1994), 2953.

[5] K. Yuasa et H. Nakazato, lanl.arXiv.org :hep-th-9610209.

[6] N. Chine and L. Chetouani, Czech. J. Phys. 56 (2006) 565 ; Turk. J. Phys. 31 (2007) 1.

[7] Z. Lehtihet and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C42 (2005) 243.

[8] Nakazato H. and Yamanaka Y., Phys. Rev. D **34** (1986) 492.

[9] Nakazato H., Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 20.

[10] Lehtihet Z and Chetouani L 2008 Cent. Eur. J. Phys. 6 372

[11] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi et T. F. Hammann Physica Scripta. 46 289 (1992).

[12] Taleb-Hacine Skander, Thèse de Magister, Université Mentouri, Constantine (2007).