République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

Thème

Structures algébriques sur les espaces de fonctions

Présenté par :

- Hiba Zabat.
- Imen Chaabna.

Devant le jury :

Président	: N. Touafek	Professeur	Université M.S.B.Y Jijel
Encadreur	: A. Bouchair	Maître de conférences A	Université M.S.B.Y Jijel
Examinateur	: I. Dekkar	Maître de conférences B	Université M.S.B.Y Jijel
Examinateur	: M. Boulouh	Maître assistante	Université M.S.B.Y Jijel

Promotion **2018/2019**

Table des matières

Remerciements

*En tout premier lieu, nous remercions "**ALLAH**", de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

*Nous voudrions avant tout adresser nos profonds remerciements et nos profondes gratitudes à notre encadreur de mémoire, Monsieur **A. BOUCHAIR**, qui nous a fait l'honneur de nous avoir encadré. Qu'il soit aussi remercie pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente, son aide et de l'attention qu'il a portée à notre travail.*

*Nous tenons également à exprimer nos sincères remerciements, au président du jury Monsieur **N. TOUAFEK** de nous avoir honorées de sa présence. Merci également aux membres du jury Mesdemoiselles **I.DEKKAR** et **M. BOULOUH** pour l'intérêt qu'elles ont porté à notre travail en acceptant de l'évaluer.*

Nos reconnaissances vont aux professeurs de département de mathématiques, notamment de mathématiques fondamentales et discrètes.

Nous tenons à saluer aussi nos amies et collègues qui nous ont apporté leurs soutien moral et intellectuel.

Une petite pensée à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Merci également à tous ceux qui ont fait le déplacement pour assister à notre soutenance.

Enfin, le plus grand merci revient, bien évidement, à nos familles, plus particulièrement nos parents, pour leurs conseils, leurs encouragements et leur soutien inconditionnel.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, de ma vie et de mon bonheur ... ***Ma très chère mère.***

A mon exemple éternel, ma source d'amour, de générosité et des sacrifices ... ***Mon très chère père.***

A mes chers frères et mes très chères sœurs ***Ghania, Nadia, Fatima et Samia*** *pour leurs soutien inconditionnel.*

A tous les membres de ma famille.

A mes amies et a tous mes professeurs.

A tous mes collèges d'étude, spécialement ***Hiba, Yousra, Amira et Hadjer.***

A tous ceux qui sont présent dans mon cœur.

Imen

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A ma très chère mère "**Noura**" source de tendresse, symbole de bonté, exemple de sacrifice, vous qui n'a cessé de m'encourager et de m'enthousiasmer dans mes études et qui a toujours prié pour moi.*
*A mon chère père "**Aissa**" pour tous les effort déployés le jour comme de nuit dans mon éducation, et mon bien être, pour la présence permanente dans le suivi de mon cycle de formation. Pour touts vos orientations fructueuses.*
*A mon frère **Kamel** et mes sœurs **Nouha, Nada, Ilhem** et son époux et leur fils **Adam**, qui m'ont offert un climat familiale de plus exemplaires.*
A tous les membres de ma grande famille pour leur soutien moral.
*A tous mes collègues et amies de la promotion que j'ai le plaisir de connaître surtout : **Imen , Amira, Yousra, Hadjer et Amina**.*
Enfin à tous ce qui occupent une bonne place dans mon cœur.

Hiba

Introduction

La topologie, est une branche de mathématiques qui étudie la nature qualitative de l'espace et la position relative des points ou ensembles de points qui le constituent. Dans l'étude d'un espace topologique on s'intéresse aux propriétés topologiques, citons par exemple la compacité, le premier axiome de dénombrabilité, la séparabilité,... etc. Ces propriétés sont préservées par homéomorphismes entre espaces topologiques. C'est à dire, deux espaces topologiques homéomorphes possèdent les mêmes propriétés topologiques. Cela nous ramène à l'un des problèmes fondamentaux en mathématiques et en particulier dans la topologie générale : le problème de classification des espaces.

L'un des outils utilisés pour résoudre ce genre de problème est la topologie algébrique (Groupes de Poincaré, Groupes d'homologie).

L'espace des applications continues définies d'un espace topologique X dans un autre espace topologique E, noté $C(X, E)$, (en particulier $C(X)$ si $E = \mathbb{R}$) a été introduit par les mathématiciens en dix neuvième siècle. L'idée principale d'associer une topologie à l'ensemble $C(X, E)$ se découle des notions de la convergence simple et de la convergence uniforme des suites de fonctions. Par conséquent, plusieurs topologies ont été développées par les topologues pour qu'ils puissent étudier les espaces topologiques et leurs propriétés. Les topologies classiques les plus connues sur les espaces des applications continues sont la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme. Les topologies set-open ont été introduites en 1951 par Arens et Dugundji comme généralisation de la première citée précédemment.

Après des études approfondies sur ces espaces, les topologues ont observé un lien entre les propriétés d'un espace topologique X et les propriétés de l'espace des applications $C(X, E)$ muni de la topologie de la convergence simple, notée ultérieurement par $C_p(X, E)$, et à partir de ça ils se sont intéressés à l'interprétation de cette relation, d'où des nouveaux résultats ont été abordés, notamment, les notions de t-équivalence et l-

équivalence.
Pour nous limiter à l'essentiel, on s'intéresse dans ce travail à l'étude des structures algébriques sur l'espace des applications continues muni de la topologie de la convergence simple $C_p(X, E)$.

Ce manuscrit se compose de quatre chapitres. Dans le premier, on va élaborer quelques notions de base de la topologie générale ; à savoir la compacité, les axiomes de séparation et les structures uniformes. Ensuite, on va introduire les topologies set-open, en particulier la topologie de la convergence simple, sur l'espace des applications continues ; en parlant de ses propriétés et des résultats nécessaires dont on va l'utiliser dans ce qui suit. Dans le deuxième chapitre on va développer la notion d'une topologie compatible avec des lois internes et externes d'une structure algébrique définie sur un ensemble, de tel sorte que ce dernier va posséder des nouvelles structures dont on va les connaitre après sous le nom de groupe (resp. anneau, module) topologique. Dans le troisième chapitre, on va préciser quand est ce que l'espace des applications continues définies d'un espace topologique X dans un espace topologique E, $C_p(X, E)$, muni de la topologie de la convergence simple possède la structure de groupe (resp. anneau, module) topologique. Ainsi on définit l'application évaluation canonique et on étudie ses propriétés. On va également introduire les notions de R-complète régularité et R-Tychonoff. Dans le dernier chapitre, on va introduire les notions de $t_p(E)$-équivalence et $l_p(E)$-équivalence. Ensuite, nous allons donner le Théorème de Nagata. On montre que les anneaux topologiques $C_p(X, E)$ et $C_p(Y, E)$ sont topologiquement isomorphes si et seulement si les espaces X et Y sont homéomorphes. Puis on conclue ce travail par le Théorème de Gelfand-Kolmogorov. On montre que si X et Y sont deux espaces topologiques compacts alors $C_p(X)$ et $C_p(Y)$ sont homéomorphes si et seulement si X et Y sont homéomorphes.

Chapitre 1

Topologies sur l'ensemble des applications continues

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de base sur la topologie générale et nous définissons des topologies sur les espaces des applications (fonctions) continues. On commence d'abord par les espaces topologiques en parlant de quelques propriétés topologiques : axiomes de séparation et compacité. Ensuite, on va aborder les espaces uniformes et ses structures. Enfin, on va introduire les topologies set-open sur l'espace des applications (fonctions) continues et en particulier la topologie de la convergence simple. Pour développer ces notions on peut consulter [1],[3] et [5].

Dans tout ce mémoire, on note par $\mathcal{T}_X$ la topologie d'un espace topologique X et par $\mathcal{V}(x)$ la collection des voisinages d'un point x.

1.1 Notions de la topologie générale

Soit X un ensemble non vide.

Définition 1.1. *On appelle topologie sur X toute famille $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. *Pour tous* $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, *on a* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.
3. *Pour toute sous famille* $(U_i)_{i \in I}$ *de* $\mathcal{T}$, *on a* $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Dans ce cas, $(X, \mathcal{T})$ est dit espace topologique et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de X.

Exemple 1.2.

1. *La famille* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ *est une topologie sur* X*, appelée topologie grossière.*
2. *La famille* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$*, la famille de tous les sous ensembles de* X*, est une topologie sur* X*, appelée topologie discrète et* X *muni de cette topologie* $\mathcal{T}$ *est appelé espace discret.*
3. *La famille* $\mathcal{T}$ *constituée de tous les intervalles ouverts et des réunions d'intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$ *appelée la topologie usuelle.*

Définition 1.3. *Soient* X *un espace topologique et* $A \subseteq X$*. On appelle topologie induite de* X *sur* A*, la famille*

$$\mathcal{T}_A = \{ \; \Omega \cap A : \Omega \in \mathcal{T} \; \}.$$

Définition 1.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$*. On dit que* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$*, si tout élément de* $\mathcal{T}$ *est une réunion d'éléments de* $\mathcal{B}$*. i.e.,*

$$\forall \, \Omega \in \mathcal{T}, \; \exists \; (U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \; : \Omega = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Exemple 1.5.

1. *La famille* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{]a, b[: \; a, b \in \mathbb{R}\}$ *est une base de la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Soit* X *un ensemble. Alors* $\mathcal{B} = \{\{x\}, x \in X\}$ *est une base de la topologie discrète sur* X*.*

Proposition 1.6. *Toute base* $\mathcal{B}$ *d'un espace topologique* X *jouit des deux propriétés suivantes :*

B_1) *Pour tout* $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$*, si* $x \in U_1 \cap U_2$ *il existe* $U \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in U \subset U_1 \cap U_2$*.*

B_2) $\forall \, x \in X, \exists \, U \in \mathcal{B} : x \in U$*.*

Proposition 1.7. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$*. Alors* $\mathcal{B}$ *est une base de* $\mathcal{T}$ *si et seulement si pour tout point* $x \in X$ *et pour tout voisinage ouvert* V *de* x*, il existe* $U \in \mathcal{B}$ *tel que* $x \in U \subset V$*.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. Soient $x \in X$ et $V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V$. Alors

$$V \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists (U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} : V = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in U_{i_0} \Rightarrow x \in U_{i_0} \subset V.$$

Inversement, soit $\Omega \in \mathcal{T}$ et $x \in \Omega$. D'après l'hypothèse, il existe $U_x \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in U_x \subset \Omega.$$

Alors

$$\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} U_x \subset \Omega.$$

Ce qui implique que

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} U_x.$$

D'où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$. □

Proposition 1.8. *Soit X un ensemble et soit $\mathcal{B}$ une famille non vide de sous ensembles de X qui possède les propriétés (B_1) et (B_2) de la Proposition 1.6. Soit*

$$\mathcal{T} = \{\ \Omega \subseteq X \ /\ \exists\ \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} : \Omega = \cup \mathcal{B}_0\ \}$$

où $\cup\mathcal{B}_0 = \cup\{A : A \in \mathcal{B}_0\}$. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et la famille $\mathcal{B}$ est une base pour l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

Démonstration. Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

1. On a $\emptyset = \cup\mathcal{B}_0$ avec $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ et $X = \cup\mathcal{B}_0$ avec $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$. Donc $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Montrons que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. On a

   $$U_1 = \bigcup_{x \in S} V_s \text{ et } U_2 = \bigcup_{t \in T} W_t$$

   avec $V_s, W_t \in \mathcal{B}$. Alors

   $$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(s,t) \in S \times T} (V_s \cap W_t).$$

   Il suffit de montrer que $V_s \cap W_t$ s'écrit sous la forme d'une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. D'après (B_1) on a

   $$\forall x \in V_s \cap W_t\ , \exists\, \Omega(x) \in \mathcal{B} : x \in \Omega(x) \subset V_s \cap W_t.$$

   Donc

   $$V_s \cap W_t = \bigcup_{x \in V_s \cap W_t} \Omega(x).$$

   Il suffit de prendre

   $$\mathcal{B}_0 = \{\Omega(x) : x \in V_s \cap W_t\}.$$

3. La troisième condition est satisfaite par définition de la famille $\mathcal{T}$. Il est clair que $\mathcal{B}$ est une base pour $\mathcal{T}$.

□

Définition 1.9. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}' \subset \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}'$ est une sous base de $\mathcal{T}$ si la famille, $I(\mathcal{B}')$, de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{T}$.*

Exemple 1.10. *La famille $\mathcal{B}' = \{\ ]-\infty, a[,\ ]b, +\infty[\ : a, b \in \mathbb{R}\ \}$ est une sous base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Il suffit de voir que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset I(\mathcal{B}')$.*

Définition 1.11. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue si pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage U de x_0 dans X telle que $f(U) \subseteq V$.*

Proposition 1.12. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f continue.*
2. *Si $\mathcal{B}$ est une base de Y, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout $U \in \mathcal{B}$.*
3. *Si S est une sous base de Y, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout $V \in S$.*
4. *Si pour tout ouvert (resp. fermé) V de Y, $f^{-1}(V)$ est un ouvert (resp. fermé) de X.*

Définition 1.13. *Soient X, Y deux espaces topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective continue et l'application f^{-1} est continue.*
On dit que X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre X et Y, et on note $X \simeq Y$.

Définition 1.14. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est un plongement si f est un homéomorphisme de X dans $f(X)$.*

Définition 1.15. *Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est ouverte si pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert dans Y.*

Proposition 1.16. *Soient X et Y deux espaces topologiques et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si elle est bijective, continue et ouverte.*

Topologie produit

Soient $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides et $X = \prod_{i\in I} X_i$.

Définition 1.17. *On appelle ouvert élémentaire de X toute partie $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$ où $\Omega_i \in \mathcal{T}_i$ et chaque Ω_i égale à X_i sauf pour un nombre fini d'indices.*
On appelle topologie produit sur X la topologie qui a comme base la famille des ouverts élémentaires de X.

Définition 1.18. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$. On appelle application projection de X sur X_j, $j \in I$, l'application qui au point $x = (x_i)_{i\in I}$ associe le point $x_j \in X_j$. i.e.,*

$$\begin{aligned} p_{r_j} : X &\longrightarrow X_j \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

Proposition 1.19. *La famille $\mathcal{B}_0 = \{p_{r_j}^{-1}(U_j) : U_j \in \mathcal{T}_j, j \in I\}$ est une sous base pour la topologie produit sur X.*

Démonstration. On a pour tout $j \in J$

$$\begin{aligned} p_{r_j}^{-1}(U_j) &= \{x = (x_i)_{i\in I} \in X : p_{r_j}(x) \in U_j\} \\ &= \{x = (x_i)_{i\in I} \in X : x_j \in U_j\} \\ &= \prod_{i\in I} \Omega_i. \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_i = \begin{cases} X_i & \text{si } i \neq j, \\ U_j & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Donc $I(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est la base de la topologie produit. En effet, En effet,

$$\bigcap_{j=1}^{n} p_{r_j}^{-1}(U_j) = \prod_{i\in I} \Omega_i$$

avec

$$\Omega_i = \begin{cases} U_j & \text{si } i = j, \\ X_i & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$\square$

Proposition 1.20. *Soient X un espace topologique, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application pour tout $i \in I$. On définit une application f, appelée application diagonale, comme suit :*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i \\ x &\longmapsto f(x) = (f_i(x))_{i\in I} \end{aligned}$$

Alors f est continue si et seulement si f_i est continue pour tout $i \in I$.

Démonstration. Supposons que pour tout $i \in I$, f_i est continue. Soit $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert élémentaire dans $\prod_{i\in I} Y_i$. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \left\{x \in X : (f_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i\right\} \\ &= \left\{x \in X : f_i(x) \in U_i, i \in I\right\} \\ &= \left\{x \in X : x \in f_i^{-1}(U_i), i \in I\right\} \\ &= \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

Comme f_i est continue et U_i est un ouvert pour tout $i \in I$, alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert. Inversement, il suffit de remarquer que $f_i = p_{r_i} \circ f$ avec $p_{r_i} : (y_i)_{i\in I} \longmapsto y_i$ est la projection canonique de $\prod_{i\in I} Y_i$ dans Y_i qui est continue. □

1.2 Axiomes de séparation

Définition 1.21. *Soit X un espace topologique.*

1. *On dit que X est un espace T_0 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe ou bien un voisinage de x ne contenant pas y ou bien un voisinage de y ne contenant pas x.*
2. *On dit que X est un espace T_1 si pour tous x, y deux points distincts de X, il existe un voisinage de x ne contenant pas y et un voisinage de y ne contenant pas x.*
3. *On dit que X est un espace T_2 (ou de Hausdorff ou séparé) si pour tous $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, ils existent $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ avec $U \cap V = \emptyset$.*

   Exemple 1.22.

1. *Soit $X = \{0, 1\}$. Alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ est une topologie sur X. L'espace X est T_0 mais n'est pas T_1.*

2. *Sur $\mathbb{R}$ on définit la topologie suivante :*

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\backslash A : \ A \text{ une partie finie de } \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un espace topologique T_1 mais n'est pas séparé. En effet, Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$, alors $U = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ est un voisinage ouvert de y avec $x \notin U$ et $V = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ est un voisinage ouvert de x avec $y \notin V$, alors $\mathbb{R}$ est T_1. Montrons par l'absurde que $\mathbb{R}$ n'est pas séparé. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$. Alors il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ tel que $U \cap V = \emptyset$. Comme $U, V \in \mathcal{T}$ alors $\mathbb{R}\backslash U$ et $\mathbb{R}\backslash V$ sont des parties finies. On a $U \cap V = \emptyset$ alors $V \subseteq (\mathbb{R}\backslash U)$, donc V est fini et donc $V \cup \mathbb{R}\backslash V = \mathbb{R}$ est fini. Ce qui est absurde car $\mathbb{R}$ n'est pas fini. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé. Cette topologie est appelée la topologie co-finie sur $\mathbb{R}$.

3. *Tout espace métrique (X, d) est séparé. En effet, Si $x, y \in X$ tel que $x \neq y$ alors $d(x, y) \neq 0$, on peut prendre la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{3}d(x, y)\right)$ comme voisinage de x et la boule ouverte $B\left(y, \frac{1}{3}d(x, y)\right)$ comme voisinage de y, et on a*

$$B\left(x, \frac{1}{3}\, d(x, y)\right) \bigcap B\left(y, \frac{1}{3}\, d(x, y)\right) = \emptyset.$$

D'où le résultat.

Proposition 1.23. *Un espace topologique X est T_1 si et seulement si le singleton $\{x\}$ est fermé dans X, pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Supposons que X est un espace T_1. Soit $x \in X$ et montrons que $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Soit $y \in \overline{\{x\}}$. Alors

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(y) : V \cap \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(y) : x \in V.$$

Comme X est un espace T_1, donc nécessairement $y = x$. D'où $\overline{\{x\}} \subset \{x\}$.
Inversement, supposons que les singletons de X sont des fermés et soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $X\backslash\{x\}$ est un voisinage ouvert de y ne contenant pas x et $X\backslash\{y\}$ est un voisinage de x ne contenant pas y. D'où X est T_1. $\square$

Définition 1.24. *Un espace topologique X est dit régulier (ou T_3) si :*

1. *X est un espace T_1.*
2. *Pour tout $x \in X$ et tout fermé F tel que $x \notin F$, ils existent deux ouverts U et V de X tels que*

$$x \in U, \ \ F \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

Définition 1.25. *Un espace topologique X est dit complètement régulier (ou bien de Tychonoff) si :*

1. *X est un espace T_1.*
2. *Pour tout $x \in X$ et pour tout fermé F de X tel que $x \notin F$, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ avec $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, pour tout $y \in F$.*

Exemple 1.26. $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace complètement régulier.*

Proposition 1.27. *Tout espace complètement régulier est régulier.*

Démonstration. Soit F un fermé de X et $x \notin F$. Comme X est complètement régulier, alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(F) = \{1\}$.
On a $\left[0, \frac{1}{2}\right[, \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ sont des ouverts dans le sous espace [0, 1] car

$$[0, \frac{1}{2}[=]-1, \frac{1}{2}[\cap [0,\ 1] \quad \text{et} \quad]\frac{1}{2}, 1] =]\frac{1}{2}, 2[\cap [0, 1] \,.$$

Posons $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ et $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$. Comme f est continue alors U et V sont des ouverts de X. On a $x \in U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. Donc X est un espace régulier. □

Théorème 1.28. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors $\prod_{i\in I} X_i$ est un espace T_1 (T_2, régulier et complètement régulier) si et seulement si X_i est un espace T_1 (T_2, régulier et complètement régulier) pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Supposons que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est T_1. Alors, d'après la Proposition 1.23, $\{x\} = \prod_{i\in I}\{x_i\}$ est fermé dans $\prod_{i\in I} X_i$. Donc $\{x_i\}$ est fermé dans X_i pour tout $i \in I$. Ce qui implique que X_i est T_1 pour tout $i \in I$. L'implication inverse est évidente.
Supposons maintenant que $\prod_{i\in I} X_i$ est T_2. Alors pour tous $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ dans $\prod_{i\in I} X_i$ tels que $x \neq y$, ils existent $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.
Montrons que X_i est séparé pour tout $i \in I$. Soient $i_0 \in I$, x_{i_0} et y_{i_0} dans X_{i_0} tels que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Choisissons $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tel que $x_i \in X_i$ est arbitraire pour tout $i \in I$ et $y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tel que $y_i = x_i$ pour tout $i \neq i_0$.
Comme $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ alors $x \neq y$. Donc, ils existent $U \in \mathcal{V}(x)$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.
On a

$$\begin{cases} U \in \mathcal{V}(x) & \Rightarrow U = \prod_{i\in I} U_i \ \text{ avec } \ U_i \in \mathcal{V}(x_i) \\ V \in \mathcal{V}(y) & \Rightarrow V = \prod_{i\in I} V_i \ \text{ avec } \ V_i \in \mathcal{V}(y_i) \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned}
U \cap V = \emptyset &\Rightarrow (\prod_{i\in I} U_i) \cap (\prod_{i\in I} V_i) = \emptyset \\
&\Rightarrow \prod_{i\in I} (U_i \cap V_i) = \emptyset \\
&\Rightarrow \exists i_1 \in I : U_{i_1} \cap V_{i_1} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Comme $x_i = y_i$ pour tout $i \neq i_0$ alors $i_1 = i_0$. D'où $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$. D'où X_{i_0} est séparé.
Supposons maintenant que X_i est séparé pour tout $i \in I$ et montrons que $\prod_{i\in I} X_i$ est séparé.
Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ dans $\prod_{i\in I} X_i$ tels que $x \neq y$. Donc il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Comme X_{i_0} est séparé alors ils existent U_{i_0} un voisinage de x_{i_0} et V_{i_0} un voisinage de y_{i_0} avec $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$.
Choisissons deux voisinage de x et y dans $\prod_{i\in I} X_i$ comme suit :

$$U \in \mathcal{V}(x) \text{ tel que } U = \prod_{i\in I} U_i \;:\; U_i = X_i,\ \forall i \neq i_0,$$
$$V \in \mathcal{V}(y) \text{ tel que } V = \prod_{i\in I} V_i \;:\; V_i = X_i,\ \forall i \neq i_0.$$

On a

$$U \cap V = \prod_{i\in I} U_i \cap \prod_{i\in I} V_i = \prod_{i\in I} (U_i \cap V_i) = \emptyset$$

D'où $\prod_{i\in I} X_i$ est séparé. □

Compacité

Définition 1.29. *Soient X un espace topologique et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.*

- *On dit que $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.*
- *Un recouvrement est dit ouvert si tout membre de ce recouvrement est un ouvert.*

Définition 1.30. *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Exemple 1.31.

1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ est compact.*
2. *L'espace $\mathbb{R}$ n'est pas compact.*
3. *L'intervalle $]0, 1]$ muni de la topologie usuelle induite de $\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, la famille $\{]\frac{1}{n}, 1] \;:\; n \in \mathbb{N}^*\}$ est un recouvrement ouvert de $]0, 1]$ dont on ne peut extraire aucun sous recouvrement fini.*

4. *Un espace séparé et fini est compact.*

Proposition 1.32. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si $A \subset X$ est un compact et Y séparé, alors $f(A)$ est compact.*

Démonstration. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Alors

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\cup_{i\in I} U_i) \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

Comme f est continue, alors $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A dans X. Mais A est compact, donc on peut extraire un sous recouvrement fini de ce recouvrement. Soit $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I$ tel que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}(U_{i_j}).$$

Alors

$$f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}.$$

Donc $(U_{i_j})_{1\leq j\leq k}$ est un sous recouvrement fini de $f(A)$. D'où $f(A)$ est compact. □

Définition 1.33. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble X. On dit que $\mathcal{F}$ est centrée ou bien vérifie la condition d'intersection finie, si $\bigcap_{i\in J} \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ pour tout $J \subset I$ fini.*

Exemple 1.34.

1. *Toute famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est centrée.*
2. *Dans un espace métrique (X, d), la famille $\{B(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ où $x \in X$ est centrée.*

Proposition 1.35. *Soit X un espace topologique séparé. Alors X est compact si et seulement si toute famille centrée de fermés de X a une intersection non vide.*

Théorème 1.36. ***(Théorème de Tychonoff)***
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace produit $\prod_{i\in I} X_i$ est compact si et seulement si chaque X_i l'est aussi.

Démonstration. Voir Théorème 37.3 dans [11]. □

Définition 1.37. *Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace admet un voisinage compact. D'une manière équivalente, si tout point admet un voisinage U tel que $\overline{U}$ soit compact.*

Exemple 1.38. $(\mathbb{R}, |.|)$ *est localement compact. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ est un voisinage compact de x.*

1.3 Structures uniformes et espaces uniformes

Soit X un ensemble. On note par Δ la diagonale de $X \times X$, i.e.,

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Soient V, W deux sous ensembles de $X \times X$. Soit $A \subseteq X$, posons

$$VW = V \circ W = \{(x, z) : (x, y) \in W, (y, z) \in V \text{ pour un certain } y \in X\}$$

$$V^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in V\}$$

$$V[x] = \{y : (x, y) \in V\}$$

$$V[A] = \bigcup_{x \in A} V[x]$$

Un ensemble V de $X \times X$ est dit symétrique si $V = V^{-1}$. On a les propriétés suivantes :

1. $(V \circ W)[A] = V[W[A]]$.
2. $(V \circ W)^{-1} = W^{-1} \circ V^{-1}$.
3. Si $V \subset X \times X$ est symétrique, alors $V \circ W \circ V = \bigcup\{V[x] \times V[y] : (x, y) \in W\}$.

Définition 1.39. *On appelle structure uniforme sur X toute famille non-vide $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de $X \times X$ qui satisfait les axiomes suivants :*
(U1) Si $V \in \mathcal{U}$ alors $\Delta \subseteq V$.
(U2) Si $V, W \in \mathcal{U}$ alors $V \cap W \in \mathcal{U}$.
(U3) Si $V \in \mathcal{U}$ et $V \subseteq W$ alors $W \in \mathcal{U}$.
(U4) Si $V \in \mathcal{U}$ alors $V^{-1} \in \mathcal{U}$.
(U5) Si $V \in \mathcal{U}$ alors il existe $W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W \subseteq V$.

La paire $(X, \mathcal{U})$ est appelée espace uniforme et les ensembles de $\mathcal{U}$ sont appelées les entourages de la structure uniforme définie sur X.

Exemple 1.40.

1. *Sur l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, on définit la structure uniforme dite usuelle par*

$$\mathcal{U}_{\mathbb{R}} = \{V \subseteq \mathbb{R}^2 : \exists r > 0, V_r \subseteq V\},$$

où

$$V_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :| x - y |< r\}.$$

2. *Soit X un ensemble. Les familles suivantes :*

$$\mathcal{U}_d = \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}$$

$$\mathcal{U}_g = \{X \times X\}$$

forment des structures uniformes sur X.

Proposition 1.41. *Les conditions (U4) et (U5) dans la Définition 1.39 sont équivalentes à la condition suivante :*

(U6) Pour tout $V \in \mathcal{U}$, il existe $W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W^{-1} \subseteq V$.

Démonstration. Il est clair que (U4) et (U5) implique (U6). Montrons l'inverse ; supposons que (U6) est vérifiée et soit $V, W \in \mathcal{U}$ telle que $W \circ W^{-1} \subseteq V$. On a

$$W^{-1} = \Delta \circ W^{-1} \subset W \circ W^{-1} \subset V.$$

Donc $W \subset V^{-1}$. D'après (U3), on aura $V^{-1} \in \mathcal{U}$. Pour montrer (U5), posons

$$W' = W \cap W^{-1}.$$

Alors $W' \in \mathcal{U}$ et on a

$$W' \circ W' \subseteq W \circ W^{-1} \subseteq V.$$

□

Définition 1.42. *Soit $\mathcal{U}$ une structure uniforme sur X. Une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ est dite base ou système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$, si pour tout $V \in \mathcal{U}$ il existe $W \in \mathcal{B}$ telle que $W \subset V$.*

Exemple 1.43. *La famille $\mathcal{B} = \{V_r \subset \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ forme une base pour la structure uniforme usuelle sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.44. *Une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de $X \times X$ est une base pour une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur X si et seulement si :*
(B1) Tout élément de $\mathcal{B}$ contient Δ.
(B2) Si $V \in \mathcal{B}$, alors V^{-1} contient un élément de $\mathcal{B}$.
(B3) Si $V \in \mathcal{B}$, alors il existe $W \in \mathcal{B}$ telle que $W \circ W \subseteq V$.
(B4) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ telle que $V \subset V_1 \cap V_2$.

Proposition 1.45. *Soit X un ensemble et $\mathcal{U}$ une structure uniforme sur X.*

1. *Si V est un entourage de $\mathcal{U}$ alors $V \cap V^{-1}$ et $V^{-1} \cap V$ sont des entourages symétriques de $\mathcal{U}$.*
2. *Les entourages symétriques forment un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$.*

Topologie d'un espace uniforme

Définition 1.46. *Soit* $(X,\mathcal{U})$ *un espace uniforme. La famille*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists V \in \mathcal{U}, V[x] \subseteq A\}$$

est une topologie sur X *appelée la topologie déduite de la structure uniforme* $\mathcal{U}$ *ou la topologie uniforme.*

La topologie déduite de la structure uniforme usuelle définie sur $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle. Idem pour $\mathbb{Q}$. Sur un ensemble quelconque X, la topologie déduite de $\mathcal{U}_d$ est la topologie discrète.

Définition 1.47. *Soit* $(X,\mathcal{T})$ *un espace topologique. Une structure uniforme* $\mathcal{U}$ *sur* X *est dite compatible avec la topologie* $\mathcal{T}$ *si* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.
L'espace topologique $(X,\mathcal{T})$ *est dit uniformisable s'il existe une structure uniforme sur* X *compatible avec sa topologie.*

Le théorème suivant donne un critère pour qu'un espace topologique soit uniformisable, pour la preuve on peut consulter [5].

Théorème 1.48. *Un espace topologique* $(X,\mathcal{T})$ *est uniformisable si et seulement s'il est de Tychonoff.*

1.4 Topologies set-open sur les espaces de fonctions

Dans cette section, X et Y sont deux espaces topologiques.

Soit $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une famille finie d'ensemble, et $x \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Donc $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_i \in X_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Le point x peut être interprété comme suit :

$$\begin{aligned} x : \{1,2,...,n\} &\longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i \\ j &\longmapsto x(j) = x_j \end{aligned}$$

Inversement, si on a une application

$$f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$
$$j \longmapsto f(j) \in X_j$$

alors il existe un unique point $x_f \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, tel que

$$f(1, 2, ..., n) = x_f = (f(1), f(2), ..., f(n)).$$

A l'aide de cette interprétation on définit dans le cas où I est arbitraire

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \; / \; f(i) \in X_i, \forall i \in I\}.$$

Soient X ,Y deux espaces topologiques. On note par Y^X l'ensemble de toutes les applications définies de X dans Y, i.e.,

$$Y^X = \{ \; f : X \longrightarrow Y \; / \; f \text{ une application } \}$$

que l'on munit de la topologie produit. On note par $C(X, Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues définies de X vers Y. Soient A et B deux sous ensembles d'un espace X. On définit l'ensemble $[A, B]$ par

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subseteq B\}.$$

Si $A = \{x\}$ alors on écrit $[x, B]$ au lieu de $[\{x\}, B]$.

Propriétés 1.49. *Soient X et Y deux espaces topologiques, $A, A_1, ..., A_n$ des parties de X et $B, B_1, ..., B_n$ des parties de Y. Alors*

1. $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, B\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A_i, B]$.
2. $\left[A, \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i\right] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [A, B_i]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\ \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i, B\right] &= \{f \in C(X, Y) : f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X, Y) : \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subset B\} \\
&= \{f \in C(X, Y) : f(A_i) \subset B, \forall i \in \{1, ..., n\}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X, Y) : f(A_i) \subset B\}
\end{aligned}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, B].$$

2.
$$\left[A, \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] = \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i\}$$
$$= \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i, \forall i \in \{1, ..., n\}\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{f \in C(X,Y) : f(A) \subset B_i\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} [A, B_i] .$$

□

Définition 1.50. *Soient X et Y deux espaces topologiques. La famille*

$$\mathcal{B}_p = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i] : x_i \in X, U_i \in \mathcal{T}_Y, i = 1, ..., n. \right\}$$

est une base pour une topologie sur $C(X,Y)$ appelée la topologie de la convergence simple sur $C(X,Y)$, qu'on la note par $\mathcal{T}_p$ et l'espace obtenu sera noté $C_p(X,Y)$.

Proposition 1.51. *Soient $x \in X$ et $U \subset Y$. Soit l'application projection*

$$p_{r_x} : Y^X \longrightarrow Y$$
$$f \longmapsto p_{r_x}(f) = f(x)$$

Alors

$$[\, x, U \,] = C(X,Y) \cap p_{r_x}^{-1}(U).$$

Démonstration. Pour $x \in X$ et $U \subset Y$, on a

$$[\, x,\ U\,] = \{\ f \in C(X,Y) :\ f(x) \in U\ \}$$
$$= \{\ f \in C(X,Y) :\ p_{r_x}(f) \in U\ \}$$
$$= \{\ f \in C(X,Y) :\ f \in p_{r_x}^{-1}(U)\ \}$$
$$= C(X,Y) \cap p_{r_x}^{-1}(U).$$

□

Proposition 1.52. *Soient X et Y deux espaces topologiques. La topologie $\mathcal{T}_p$ coïncide avec la topologie induite sur $C(X,Y)$ par la topologie produit de Y^X.*

Démonstration. On note par $\mathcal{T}_1$ la topologie induite sur $C(X,Y)$ par la topologie produit sur Y^X. Soit $W \in \mathcal{T}_1$ alors $W = A \cap C(X,Y)$ où A est un ouvert de Y^X (on peut prendre A un ouvert élémentaire de Y^X). Soit

$$A = p_{r_{x_1}}^{-1}(U_{x_1}) \cap p_{r_{x_2}}^{-1}(U_{x_2}) \cap ... \cap p_{r_{x_n}}^{-1}(U_{x_n}),$$

avec $x_i \in X_i$ et $U_{x_i} \in \mathcal{T}_Y$, pour tout $i \in I$. Alors

$$A \cap C(X,Y) = [x_1, U_{x_1}] \cap ... \cap [x_n, U_{x_n}].$$

Donc

$$A \cap C(X,Y) \in \mathcal{T}_p.$$

D'où

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_p.$$

Soit $W \in \mathcal{T}_p$. Alors $W = \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$ tel que $\Omega_i \in \mathcal{B}_p$ pour tout $i \in I$. Donc pour chaque i, ils existent $x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i \in X$, et $U_1^i, U_2^i, ..., U_n^i \in \mathcal{T}_Y$ tel que

$$\Omega_i = \bigcap_{j=1}^{n} [x_j^i, U_j^i].$$

On a

$$[x_j^i, U_j^i] = C(X,Y) \cap p_{r_{x_j^i}}^{-1}(U_j^i).$$

Alors

$$\Omega_i = C(X,Y) \cap p_{r_{x_1^i}}^{-1}(U_1^i) \cap ... \cap p_{r_{x_n^i}}^{-1}(U_n^i).$$

Donc $\Omega_i = C(X,Y) \cap \prod_{x \in X} A_x$ tel que $A_x = \begin{cases} U_j^i & \text{si } x = x_j^i, \\ Y & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors pour tout $i \in I$ on a

$$\Omega_i \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow W \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1.$$

□

Théorème 1.53. *Si Y est un espace T_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, alors $C_p(X,Y)$ l'est aussi.*

Démonstration. Si Y est un espace T_i, alors l'espace produit $\prod_{x \in X} Y_x$ est aussi un espace T_i, avec $Y_x = Y$, pour tout $x \in X$. Donc $C_p(X,Y)$ comme un sous espace de $\prod_{x \in X} Y_x$ est un espace T_i. □

Proposition 1.54. *Soit X, Y deux espaces topologiques et $\mathcal{B}_Y$ une base de Y. Alors la famille* $\mathcal{B}'_p = \left\{ \bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, U_i] : \ x_i \in X, \ U_i \in \mathcal{B}_Y, i = 1, ..., n. \right\}$ *est une base de $C_p(X,Y)$.*

Démonstration. Soit $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} [x_i, V_i] \in \mathcal{B}_p$ tel que $x_i \in X$ et V_i un ouvert de Y pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Soit $f \in W$. Alors $f(x_i) \in V_i$ pour tout $i = 1, ..., k$. Comme $\mathcal{B}_Y$ est une base de Y alors il existe, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, un ouvert $W_i \in \mathcal{B}_Y$ tel que $f(x_i) \in W_i \subset V_i$. Donc

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} [x_i, W_i] \subset \bigcap_{i=1}^{k} [x_i, V_i].$$

Posons $\bigcap\limits_{i=1}^{k} [x_i, W_i] = W_f$. Alors

$$f \in W_f \subset W.$$

Donc

$$\bigcup_{f \in W} \{f\} \subset \bigcup_{f \in V} W_f \subset \bigcup_{f \in W} W.$$

D'où

$$W = \bigcup_{f \in V} W_f.$$

Alors tout ouvert de base de $C_p(X,Y)$ s'écrit comme réunion d'élément de $\mathcal{B}'_p$. D'où $\mathcal{B}'_p$ est une base de $C_p(X,Y)$. □

Définition 1.55. *Soient X, Y deux espaces topologiques et α une famille non vide de sous ensembles de X. On appelle topologie set-open sur $C(X,Y)$ la topologie notée $\mathcal{T}_\alpha$ qui a comme base la famille*

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} [B_i, U_i] \ / \ B_i \in \alpha, \ U_i \in \mathcal{T}_Y \right\}.$$

On note $C(X,Y)$ muni de $\mathcal{T}_\alpha$ par $C_\alpha(X,Y)$.

Remarque 1.56.

1. *Si α est la famille de toutes les parties finies de X alors $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_p$.*
2. *Si $\alpha = K(X)$, la famille de toutes les parties compactes de X, alors $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_k$ est appelée la topologie compact-open et on a $C_\alpha(X,Y) = C_k(X,Y)$.*

Proposition 1.57. *Soit X un espace topologique séparé. La topologie de la convergence simple est moins fine que la topologie compact-open sur $C(X,Y)$, c'est à dire, $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_k$.*

Démonstration.
On a $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_k$ puisque toute partie finie de X est compacte. D'où $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_k$. □

Proposition 1.58. *Soit X un espace topologique complètement régulier et Y un espace T_1 qui contient un chemin γ tel que $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Alors $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$ si et seulement si toute partie compacte de X est finie.*

Démonstration. Supposons que toute partie compacte de X est finie alors $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_k$, d'où $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_k$ et donc $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$.
Inversement, supposons que $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_k$ et montrons que toute partie finie de X est compacte. Soit K un compact de X et $\gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ un chemin dans Y tel que $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto g(x) = \gamma(1) \end{aligned}$$

Posons $U = Y \setminus \{\gamma(0)\}$. Comme Y est un espace T_1 alors $\{\gamma(0)\}$ est un fermé de Y, donc U est un ouvert de Y. De plus, $g(K) = \{\gamma(1)\} \subset U$. Alors $g \in [K,U] \in \mathcal{T}_k = \mathcal{T}_p$. Donc il existe W un ouvert de base dans $C_p(X,Y)$ de la forme $W = \bigcap_{i=1}^{n}[x_i, U_i]$ où $x_1, ..., x_n \in X$ et $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}_Y$ tel que $g \in W \subset [K,U]$. Posons $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et montrons que $K \subset B$. Supposons que $K \nsubseteq B$, donc il existe $x_0 \in K$ tel que $x_0 \notin B$. Il est clair que B est fermé dans X car X est T_1. Comme X est complètement régulier, il existe $f : X \longrightarrow [0,1]$ une application continue telle que $f(x_0) = 0$ et $f(B) = \{1\}$. Alors $\gamma \circ f \in C(X,Y)$ et

$$(\gamma \circ f)(x_i) = \gamma(1) = g(x_i) \in U_i, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Donc

$$\gamma \circ f \in W \ \dots (*)$$

D'autre part

$$(\gamma \circ f)(x_0) = \gamma(0) \notin U \Rightarrow (\gamma \circ f)(K) \nsubseteq U \Rightarrow (\gamma \circ f) \notin [K,U].$$

Ce qui est contradictoire avec $(*)$. Donc $K \subset B$. Et donc K est fini. □

Définition 1.59. *Soit α une famille de sous ensembles d'un espace topologique X. On dit que α est un réseau de X si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall\, x \in X, \forall\, V \in \mathcal{V}(x), \exists\, A \in \alpha : x \in A \subset V.$$

Si tous les éléments de α sont fermés (compacts) on dit alors que α est un réseau fermé (compact).

Exemple 1.60.

1. *Toute base est un réseau.*
2. *Soit X un espace T_1. Alors la famille $F(X)$ de toutes les parties finies de X est un réseau fermé. En effet, pour tout élément $x \in X$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $\{x\} \in F(X)$ tel que $x \in \{x\} \subset V$. Si de plus, X est séparé, alors $F(X)$ est un réseau compact.*

Proposition 1.61. *Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. Si α est un réseau de X, alors $f(\alpha)$ est un réseau de Y où*

$$f(\alpha) = \{f(A) \,/\, A \in \alpha\}.$$

Démonstration. Supposons que α est un réseau de X et montrons que $f(\alpha)$ est un réseau de Y. i.e.,

$$\forall\, y \in Y, \forall\, U \in \mathcal{V}(y), \exists\, B \in f(\alpha) : y \in B \subset U.$$

Soient $y \in Y$ et $U \in \mathcal{V}(y)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$ car f est continue surjective. Comme α est un réseau alors

$$\begin{aligned} \exists A \in \alpha : x \in A \subset f^{-1}(U) &\Rightarrow f(x) \in f(A) \subset U \\ &\Rightarrow y \in f(A) \subset U. \end{aligned}$$

Donc il existe $B = f(A) \in f(\alpha)$ tel que $y \in B \subset U$. D'où $f(\alpha)$ est un réseau de Y. □

Proposition 1.62. *Soit X un espace topologique et α un réseau de X. Soit V un fermé d'un espace topologique Y. Alors pour tout $B \in \alpha$, $[B, V]$ est un fermé de $C_\alpha(X, Y)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V]$ est un ouvert de $C_\alpha(X, Y)$. Soit $f \in C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V]$. Alors

$$\begin{aligned} f \notin [B, V] &\Rightarrow f(B) \not\subset V \\ &\Rightarrow \exists x_0 \in B : f(x_0) \notin V \\ &\Rightarrow f(x_0) \in Y \setminus V \\ &\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(Y \setminus V). \end{aligned}$$

Comme α est un réseau alors

$$\exists B_0 \in \alpha : x_0 \in B_0 \subset f^{-1}(Y \setminus V) \Rightarrow f \in [B_0, Y \setminus V]\,.$$

Montrons que $[B_0, Y \setminus V] \subset C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V]$. Soit $g \in [B_0, Y \setminus V]$. Alors $g(x_0) \notin V$ et comme $x_0 \in B$, alors

$$\begin{aligned} g(B) \nsubseteq V &\Rightarrow g \notin [B, V] \\ &\Rightarrow g \in C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V] \\ &\Rightarrow [B_0, Y \setminus V] \subset C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V]. \end{aligned}$$

Donc $C_\alpha(X, Y) \setminus [B, V]$ s'écrit comme réunion d'ouverts de $C_\alpha(X, Y)$. Alors $[B, V]$ est fermé . $\square$

Définition 1.63. *Soient X, Y deux espaces topologiques. Un sous ensemble A de X est dit Y-compact si pour toute application continue $f : X \longrightarrow Y$, $f(A)$ est compact dans Y.*

Proposition 1.64. *Soit X un espace , α un réseau de X et Y un espace topologique.*

1. *Si Y est un espace T_i alors $C_\alpha(X, Y)$ est un espace T_i pour $i = 0, 1, 2$.*
2. *Si de plus α est constitué de parties Y-compactes et Y est complètement régulier, alors $C_\alpha(X, Y)$ est complètement régulier.*

Démonstration. Voir [10]. $\square$

Chapitre 2

Structures algébriques sur un espace topologique

Dans ce chapitre on va munir un ensemble d'une structure algébrique et d'une topologie compatible avec ses lois internes et externes, cette structure algébrique peut posséder des propriétés topologiques. Dans la première section, on va présenter la notion de groupe topologique, ensuite les anneaux topologiques et finalement les modules topologiques. Les références utilisées dans ce chapitre sont [3],[15],[17] et [9].

2.1 Groupes topologiques

Définition 2.1. *On appelle groupe topologique un ensemble G muni d'une structure de groupe, noté additivement, et d'une topologie $\mathcal{T}$ satisfaisant aux axiomes suivants :*

A_1) *L'application addition*

$$\begin{aligned} \varphi_+ : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

est continue.

A_2) *L'application symétrie*

$$\begin{aligned} \varphi_- : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

est continue.

On note l'élément neutre pour l'addition par 0_G *et le groupe topologique* $(G,+,\mathcal{T})$ *par* G. *Si les conditions* (A_1) *et* (A_2) *sont vérifiées, on dit que la topologie* $\mathcal{T}$ *est compatible avec la structure de groupe.*

Exemple 2.2.

1. *Les groupes* $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ *muni de la topologie usuelle sont des groupes topologiques.*
2. *Un groupe muni de la topologie discrète est un groupe topologique dit groupe discret. En effet, les applications* φ_+ *et* φ_- *sont continues car toute application d'un espace topologique discret dans un espace topologique discret est toujours continue.*

Théorème 2.3. *Les axiomes* (A_1) *et* (A_2) *sont équivalents à l'axiome suivant :*
A_3) *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi_* : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x-y \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. On remarque que pour tous $x, y \in G$, on a

$$\varphi_*(x,y) = \varphi_+(x, \varphi_-(y)).$$

Et comme φ_+ et φ_- sont des applications continues alors φ_* l'est aussi.
Réciproquement, pour tout $y \in G$ on a

$$\varphi_*(0_G, y) = 0_G - y = -y = \varphi_-(y).$$

Or, φ_* est continue pour tout $y \in G$, alors φ_- l'est aussi. De plus, pour tout $(x,y) \in G \times G$, on a

$$\varphi_*(x, \varphi_-(y)) = x - (-y) = x + y = \varphi_+(x,y).$$

Comme φ_* et φ_- sont continues pour tout $(x,y) \in G \times G$ alors φ_+ est aussi continue. D'où le résultat. □

Théorème 2.4. *Soient* G *un groupe topologique et* $a, b \in G$.

i) La translation à gauche, $l_a : x \longmapsto a + x$ *de* G *dans* G *(resp. la translation à droite,* $r_a : x \longmapsto x + a$*) est un homéomorphisme.*

ii) La symétrie $\varphi_- : x \longmapsto -x$ *de* G *dans* G *est un homéomorphisme.*

Démonstration.

i) D'après (A_1) dans la Définition 2.1, l_a est continue. Montrons qu'elle est bijective. Soient $x, x' \in G$ tel que $l_a(x) = l_a(x')$, donc $a + x = a + x'$ alors

$$(-a) + a + x = (-a) + a + x' \Rightarrow x = x'.$$

D'où l_a est injective.

La surjection est vérifiée car pour tout $y \in G$, il existe $x = y - a \in G$ tel que $y = l_a(x)$. D'où l_a est bijective et on a l'application inverse

$$\begin{aligned}(l_a)^{-1} : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto -a + x\end{aligned}$$

La continuité de $(l_a)^{-1}$ se découle directement de la continuité de l_a.

ii) Évidente.

□

Soient G un groupe topologique, $U \subseteq G$, $V \subseteq G$ et $a \in G$. On définit

$$a + U = \{\, a + u : \ u \in U\}$$

$$V + U = \{\, v + u : \ v \in V, u \in U\}$$

Corollaire 2.5. *Soit G un groupe topologique et soit $a \in G$.*

i) Si U est un ensemble ouvert de G alors $a + U$ (resp. $U + a$) est un ouvert dans G.

ii) Si U est un ouvert dans G alors $-U$ est aussi un ouvert dans G.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'ensemble $a+U$ (resp. $U+a$, $-U$) est l'image directe de l'ouvert U par l'homéomorphisme l_a (resp. r_a, φ_-), d'où le résultat. □

Théorème 2.6. *Soit G un groupe topologique et V un ouvert de G. Alors*

1. *Si $V \in \mathcal{V}(0_G)$ alors il existe $U \in \mathcal{V}(0_G)$ tel que $U + U \subseteq V$.*
2. *Si $V \in \mathcal{V}(0_G)$ alors $-V \in \mathcal{V}(0_G)$.*
3. *Si $V \in \mathcal{V}(0_G)$ alors il existe $U \in \mathcal{V}(0_G)$ tel que $U - U \subseteq V$.*

Démonstration.

1. Soit V un voisinage ouvert de 0_G . Comme l'application addition

$$\begin{aligned} \varphi_+ : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto \varphi_+(x,y) = x+y \end{aligned}$$

est continue, alors $\varphi_+^{-1}(V)$ est un ouvert dans $G \times G$. Donc

$$0_G \in V \Rightarrow \varphi_+^{-1}(0_G) \subseteq \varphi_+^{-1}(V).$$

On a

$$\varphi_+^{-1}(0_G) = \{(x,y) \in G \times G : x+y = 0_G\}.$$

Il est clair que

$$(0_G, 0_G) \in \varphi_+^{-1}(0_G)$$

Donc

$$\varphi_+(0_G, 0_G) \in V.$$

D'après la définition de la continuité, il existe un voisinage ouvert $W = U_1 \times U_2$ de $(0_G, 0_G)$ tel que $\varphi_+(W) \subseteq V$. Prenons $U = U_1 \cap U_2$ qui est un voisinage ouvert de 0_G. Donc

$$\varphi_+(U \times U) \subseteq \varphi_+(W) \subseteq V.$$

Alors

$$U + U \subseteq V.$$

D'où le résultat.

2. Soit $V \in \mathcal{V}(0_G)$. Alors, il existe O un ouvert de G tel que $0_G \in O \subseteq V$.
Donc

$$\varphi_-(0_G) \in \varphi_-(O) \subseteq \varphi_-(V).$$

Alors

$$0_G \in -O \subseteq -V.$$

On a vu déjà que la symétrie $\varphi_- : x \longmapsto -x$ est un homéomorphisme de G dans G. Donc $\varphi_-(O) = -O$ est un ouvert dans G, alors $-V \in \mathcal{V}(0_G)$.

3. De la même manière que dans (1), et en considérant l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_* : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x-y \end{aligned}$$

On trouve que $\varphi_*(0_G, 0_G) \in V$. Donc il existe un voisinage ouvert $W = W_1 \times W_2$ de $(0_G, 0_G)$ dans $G \times G$ tel que $\varphi_*(W) \subseteq V$.
Prenons $U = W_1 \cap W_2$ qui est un voisinage ouvert de 0_G. Donc

$$\varphi_*(U \times U) \subseteq \varphi_*(W) \subseteq V.$$

Alors

$$U - U \subseteq V.$$

D'où le résultat.

□

Théorème 2.7. *Tout groupe topologique est un espace uniforme.*

Démonstration. Voir Théorème 12.1.1 dans [18]. □

Corollaire 2.8. *Tout groupe topologique T_1 est complètement régulier.*

Démonstration. Voir Théorème 12.1.4 dans [18]. □

Lemme 2.9. *Soit G un groupe topologique et soient $x, y \in G$. Alors*

$$x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer une seule implication, l'inverse s'obtient de la même manière. Soient $x, y \in G$ tel que $x \in \overline{\{y\}}$. Donc tout voisinage de x contient le point y. Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_- : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

Soit U un voisinage dans G du point $\varphi_-(x) = -x$. Comme φ_- est continue, alors il existe un voisinage U' de x tel que

$$\varphi_-(U') \subseteq U.$$

Donc

$$U' \subseteq \varphi_-^{-1}(U).$$

Or, $U' \in \mathcal{V}(x)$. Alors

$$y \in U' \subseteq \varphi_-^{-1}(U).$$

Donc

$$\varphi_-(y) \in U \Rightarrow -y \in U.$$

Comme U est arbitraire alors tout voisinage de $-x$ contient le point $-y$. Alors

$$-x \in \overline{\{-y\}} \ldots (*)$$

Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_+ : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

Soit V un voisinage dans G du point $\varphi_+(-x,y) = -x+y$. Comme φ_+ est continue, alors il existe un voisinage W de $(-x,y)$ dans $G \times G$ tel que $\varphi_+(W) \subseteq V$.
Soit $W = W_1 \times W_2$, avec W_1 un voisinage ouvert de $-x$ et W_2 un voisinage ouvert de y. D'après $(*)$, on a

$$\begin{aligned} -x \in W_1 &\Rightarrow -y \in W_1 \\ &\Rightarrow (-y,y) \in W \\ &\Rightarrow \varphi_+(-y,y) \in \varphi_+(W) \subseteq V \\ &\Rightarrow -y+y \in V \\ &\Rightarrow 0_G \in V. \end{aligned}$$

Comme V est arbitraire, donc tout voisinage de $-x+y$ contient 0_G, alors

$$-x+y \in \overline{\{0_G\}} \ldots (**).$$

Soit Ω un voisinage de $\varphi_+(x,-x+y) = y$ dans G. Comme φ_+ est continue, alors il existe un voisinage $\Omega' = \Omega_1 \times \Omega_2$ de $(x,-x+y)$ dans $G \times G$ tel que Ω_1 est un voisinage ouvert de x dans G et Ω_2 est un voisinage ouvert de $-x+y$ dans G et $\varphi_+(\Omega') \subseteq \Omega$. De $(**)$, on a

$$\begin{aligned} -x+y \in \Omega_2 &\Rightarrow 0_G \in \Omega_2 \\ &\Rightarrow (x,0_G) \in \Omega' \subseteq \varphi_+^{-1}(\Omega) \\ &\Rightarrow \varphi_+(x,0_G) \in \Omega \\ &\Rightarrow \varphi_+(x,-x+x) \in \Omega \\ &\Rightarrow x \in \Omega. \end{aligned}$$

Comme Ω est arbitraire alors tout voisinage de y contient x, donc $y \in \overline{\{x\}}$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 2.10. *Soit G un groupe topologique et soit A une partie de G. Alors, on a*

$$\overline{A} = \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}.$$

En particulier, on a

$$\overline{\{0_G\}} = \cap\{V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}.$$

Démonstration. Supposons que $b \in \overline{A}$ et montrons que

$$b \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}.$$

Soit $b \in \overline{A}$. Alors pour tout voisinage U de b, on a $U \cap A \neq \emptyset$. Soit $V \in \mathcal{V}(0_G)$, d'après le Théorème 2.6 et sans perte de généralité, on peut prendre V symétrique. Si $V \in \mathcal{V}(0_G)$ alors $b + V \in \mathcal{V}(b)$. En effet, si $V \in \mathcal{V}(0_G)$, alors, il existe O un ouvert dans G tel que

$$0_G \in O \subseteq V.$$

Considérons la translation à gauche $l_b : G \longrightarrow G$, qui associe à chaque $x \in G$, l'élément $b + x$. Donc

$$l_b(0_G) \in l_b(O) \subseteq l_b(V).$$

D'où

$$b \in b + O \subseteq b + V.$$

D'après le Corollaire 2.5, on a $b + O$ est un ouvert dans G. D'où $b + V \in \mathcal{V}(b)$.
Comme $b + V \in \mathcal{V}(b)$, alors

$$(b + V) \cap A \neq \emptyset.$$

Donc, ils existent $v \in V$ et $a \in A$ tel que $a = b + v$. Alors

$$\begin{aligned} a = b + v &\Rightarrow b = a - v \\ &\Rightarrow b \in A + V \\ &\Rightarrow b \in A + V, \forall V \in \mathcal{V}(0_G). \end{aligned}$$

D'où $b \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}$. Réciproquement, soit $b \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}$ et montrons que $b \in \overline{A}$.
Considérons la translation l_b telle que

$$\begin{aligned} l_b : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto b + x \end{aligned}$$

Soit $W \in \mathcal{V}(b)$, alors on a $b = b + 0_G = l_b(0_G) \in W$. Comme l_b est continue, il existe U un voisinage symétrique de 0_G tel que $l_b(U) \subseteq W$. i.e., $b + U \subseteq W$.
On a $b \in \cap\{A + V : V \in \mathcal{V}(0_G)\}$, alors $b \in A + V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(0_G)$. En particulier, pour $V = U$, on a

$$b \in A + U \Rightarrow \exists\, a \in A,\, \exists\, u \in U :\; b = a + u.$$

Alors

$$b = a + u \Rightarrow a = b + u \Rightarrow a \in b + U.$$

Donc

$$a \in A \cap (b + U) \subseteq A \cap W \Rightarrow b \in \overline{A}.$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.11.
Soit G un groupe topologique. Alors on a les équivalences suivantes :

1. *G est T_0.*
2. *G est de Hausdorff.*
3. *G est de Tychonoff.*
4. *$\{0_G\}$ est fermé.*
5. *$\cap\{V : V \in \mathcal{V}(0_G)\} = \{0_G\}$.*

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (3) Soit G un groupe topologique T_0. Soient $x, y \in G$ tels que $x \neq y$. On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $y \notin U$. Montrons que G est T_1. Supposons que G n'est pas T_1, c'est à dire, pour tous $x, y \in G$ tels que $x \neq y$ tout voisinage de x contient y ou bien tout voisinage de y contient x. Mais le premier cas est impossible car G est T_0. Soit, donc, $V \in \mathcal{V}(y)$ tel que $x \in V$, alors $y \in \overline{\{x\}}$. D'après le Lemme 2.9, on a $x \in \overline{\{y\}}$. Donc, tout voisinage de x contient y, ce qui est contradictoire avec G est T_0. D'où G est T_1. D'après le Corollaire 2.8, G est de Tychonoff.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si G est de Tychonoff alors G est T_1, donc, $\{0_G\}$ est fermé.

(4) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\{0_G\}$ est fermé et montrons que G est séparé.
Pour montrer que G est séparé, il suffit de montrer que la diagonale de G

$$\Delta = \{(x, y) \in G \times G : y = x\}$$

est fermé dans $G \times G$. On remarque que Δ est l'image réciproque de $\{0_G\}$ par l'application

$$\begin{aligned} \varphi_* : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto x-y \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_*^{-1}(\{0_G\}) &= \{(x,y) \in G \times G : \varphi_*(x,y) = 0_G\} \\ &= \{(x,y) \in G \times G : x-y = 0_G\} \\ &= \{(x,y) \in G \times G : x = y\} \\ &= \Delta. \end{aligned}$$

Comme φ_* est continue et $\{0_G\}$ est fermé dans G, alors $\varphi_*^{-1}(\{0_G\}) = \Delta$ est un fermé dans $G \times G$, d'où le résultat.

(2) $\Rightarrow$ (5) Si G est séparé, alors G est T_1 et donc $\{0_G\}$ est fermé. On montre maintenant que

$$\cap\{V : V \in \mathcal{V}(0_G)\} = \{0_G\}.$$

D'après la Proposition 2.10, on a

$$\cap\{V : V \in \mathcal{V}(0_G)\} = \overline{\{0_G\}}$$

Comme $\{0_G\}$ est fermé dans G, alors $\overline{\{0_G\}} = \{0_G\}$. D'où le résultat.

(5) $\Rightarrow$ (1) Supposons que $\cap\{V : V \in \mathcal{V}(0_G)\} = \{0_G\}$. D'après la Proposition 2.10, $\{0_G\}$ est fermé. Comme pour tout $a \in G$, la translation $l_a : G \longrightarrow G$ avec $l_a(x) = x + a$ est un homéomorphisme. Alors l'image directe de $\{0_G\}$ par l_a est un fermé. Donc, on obtient $l_a(\{0_G\}) = \{a\}$ est fermé dans G, pour tout $a \in G$. Donc G est T_1, ce qui implique que G est T_0.

$\square$

Proposition 2.12. *Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de groupes topologiques. Alors $G = \prod_{i\in I} G_i$ muni de la loi*

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\longmapsto (x_i + y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

est un groupe topologique dit produit des groupes topologiques G_i, muni de la topologie produit des G_i.

Démonstration. Montrons d'abord que $\prod\limits_{i\in} G_i$ a la structure d'un groupe. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_+ : \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

Soient $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$. Alors

$$\varphi_+(x,y) = x+y = (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i+y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i.$$

Donc, l'addition est une loi interne. On peut facilement vérifier que cette loi est associative et admet comme élément neutre $0_G = (0_{G_i})_{i\in I}$, tel que 0_{G_i} est l'élément neutre de G_i , pour tout $i \in I$. De plus, tout élément $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} G_i$ admet un symétrique $-x = (-x_i)_{i\in I}$ tel que pour tout $i \in I$, $-x_i$ est le symétrique de x_i dans G_i . D'où $\prod_{i\in I} G_i$ est un groupe. Maintenant, il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_* : \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ ((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) &\longmapsto (x_i-y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

est continue. Soit $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$ un ouvert dans $\prod_{i\in I} G_i$. Alors

$$\begin{aligned} {\varphi_*}^{-1}(U) &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x-y \in \prod_{i\in I} U_i\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : (x_i)_{i\in I} - (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : (x_i-y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x_i-y_i \in U_i,\ \forall i \in I\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x_i \in U_i + y_i \ \text{ et } \ y_i \in (-U_i)+x_i,\ \forall i \in I\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \prod_{i\in I} G_i \times \prod_{i\in I} G_i : x \in \left(\prod_{i\in I} U_i\right) + y \ \text{ et } \ y \in \left(\prod_{i\in I} (-U_i)\right) + x\right\} \\ &= \left(\prod_{i\in I} U_i + y\right) \times \left(\prod_{i\in I} (-U_i) + x\right). \end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in I$,U_i est un ouvert de G_i. Alors d'après le Corollaire 2.5, U_i+y_i et $-U_i+x_i$ sont aussi des ouverts de G_i pour tout $i \in I$. Donc $(\prod_{i\in I} U_i)+y$ et $\prod_{i\in I}(-U_i)+x$ sont aussi des ouvert dans $\prod_{i\in I} G_i$.

D'où ${\varphi_*}^{-1}(U)$ est un ouvert de $(\prod_{i\in I} G_i) \times (\prod_{i\in I} G_i)$. Donc φ_* est continue, d'où $\prod_{i\in I} G_i$ est un groupe topologique. □

Exemple 2.13. *Soit X un espace topologique.*

1. *L'ensemble $\mathbb{R}^X$ des applications de X vers $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit est un groupe topologique. En effet, on sait que $\mathbb{R}$ est un groupe donc l'espace produit $\mathbb{R}^X$ est aussi un groupe. De plus l'application $\varphi_* : \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X \longrightarrow \mathbb{R}^X$ définie par $\varphi_*(f,g) = f - g$ pour tout (f,g) dans $\mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X$ est continue. D'où le résultat.*
2. *L'espace des applications continues $C_p(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$ muni de la topologie de la convergence simple est un groupe topologique. En effet, $C_p(X)$ est un sous groupe de $\mathbb{R}^X$. La restriction de l'application φ_* sur l'espace $C_p(X)\times C_p(X)$ reste continue.*

Définition 2.14. *Soient G, G' deux groupes topologiques. On dit qu'une application $f : G \longrightarrow G'$ est un homomorphisme de groupes topologique, si*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G.$
2. *f est continue.*

Si, de plus, f est un homéomorphisme, on dit que f est un isomorphisme de groupes topologiques.

On dit que G et G' sont topologiquement isomorphes, s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques G dans G'.

2.2 Anneaux topologiques

Définition 2.15. *On appelle anneau topologique, un ensemble R muni d'une structure d'anneau et d'une topologie $\mathcal{T}$ satisfaisant aux axiomes suivants :*

a_1) *L'application addition $\varphi_+ : (x,y) \longmapsto x+y$ de $R\times R$ dans R est continue.*

a_2) *L'application symétrie $\varphi_- : x \longmapsto -x$ de R dans R est continue.*

a_3) *L'application multiplication $\varphi_\times : (x,y) \longmapsto x.y$ de $R\times R$ dans R est continue.*

On note l'anneau topologique $(R, +, ., \mathcal{T}_R)$ par R. L'élément neutre pour la loi d'addition $(+)$ est noté par 0_R.

Si la multiplication $(.)$ admet un élément neutre, noté 1_R, on dit que R est unitaire.

Exemple 2.16.

1. *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ muni des lois d'addition, de multiplication et de la topologie usuelle, sont des anneaux topologiques.*

2. *Un anneau muni de la topologie discrète est un anneau topologique dit anneau discret.*

Théorème 2.17. *Soit R un anneau topologique. Alors on a*

1. *Pour tout $b \in R$, l'application $\psi_b : x \longmapsto x.b$ (resp, l'application $\psi'_b : x \longmapsto b.x$) est continue. Si b est inversible, alors ψ_b et ψ'_b sont des homéomorphismes.*
2. *L'application $(x, y) \longmapsto y.x$ est continue.*
3. *Si T est un espace topologique quelconque et si $f, g : T \longrightarrow R$ sont des applications continues en un point quelconque t. Alors $f + g, -f$ et $f.g$ sont continues en t.*

Démonstration.

1. D'après (a_3) dans la Définition 2.15, il est clair que ψ_b et ψ'_b sont continues. Supposons que b est inversible. Montrons que ψ_b est injective. Soient $x, x' \in R$ tels que $\psi_b(x) = \psi_b(x')$. Donc
$$\psi_b(x) = \psi_b(x') \Rightarrow x.b = x'.b \Rightarrow x = x'.$$
D'où l'injection.
On a ψ_b est surjective, car pour tout $y \in R$, il existe $x = y.b^{-1} \in R$ tel que $y = \psi(x)$.
Donc, ψ_b est bijective. De plus, d'après (a_3) dans la Définition 2.15 l'application
$$\begin{aligned} \psi_b^{-1} : R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto x.b^{-1} \end{aligned}$$
est continue. D'où ψ est un homéomorphisme. (De la même manière, on montre pour ψ'_b).
2. L'application $(x, y) \longmapsto y.x$ de $R \times R$ dans R est continue. Il suffit de remarquer qu'elle est la composition des deux applications continues
$$\begin{aligned} \varphi_\times : R \times R &\longrightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto x.y \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \varphi : R \times R &\longrightarrow R \times R \\ (x, y) &\longmapsto (y, x) \end{aligned}$$
3. La composition des applications continues est une application continue. D'où le résultat.

□

Proposition 2.18.

Soit $(R_i)_{i\in I}$ une famille d'anneaux topologiques. Alors l'ensemble $R = \prod_{i\in I} R_i$ muni de la loi

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} R_i \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\longmapsto \varphi_\times((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = (x_i.y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

et de la topologie produit des topologies des R_i, est un anneau topologique dit l'anneau produit des R_i.

Démonstration. D'après la Proposition 2.12, on a $\prod_{i\in I} R_i$ est un groupe topologique. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_\times : \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} R_i \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\longmapsto \varphi_\times((x_i)_{i\in I}, (x_i)_{i\in I}) = (x_i.y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que (.) est une loi interne, associative, distributive par rapport à la loi d'addition et admet comme élément neutre $1_R = (1_{R_i})_{i\in I}$, tel que 1_{R_i} est l'élément neutre de R_i pour la multiplication. Il reste à montrer que $\varphi_\times$ est continue. Remarquons que l'application $\varphi_\times$ est la composition de l'application

$$\begin{aligned} \phi_1 : \prod_{i\in I} (R_i \times R_i) &\longrightarrow \prod_{i\in I} R_i \\ (x_i, y_i)_{i\in I} &\longmapsto (x_i.y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \phi_2 : \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i &\longrightarrow \prod_{i\in I} (R_i \times R_i) \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\longmapsto (x_i, y_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

i.e. $\varphi_\times = \phi_1 \circ \phi_2$.

Montrons d'abord que ϕ_1 est continue. Considérons l'application projection

$$\begin{aligned} p_{r_i} : \prod_{i\in I} (R_i \times R_i) &\longrightarrow R_i \times R_i \\ (x_i, y_i)_{i\in I} &\longmapsto (x_i, y_i) \end{aligned}$$

et l'application

$$\varphi_\times^i : R_i \times R_i \longrightarrow R_i$$

$$(x_i, y_i)_{i\in I} \longmapsto x_i.y_i$$

On sait que l'application projection p_{r_i} est continue et comme R_i est un anneau topologique pour tout $i \in I$, alors $\varphi^i_\times$ est aussi continue. Donc, la composition $\varphi^i_\times \circ p_{r_i}$ est une application continue. Remarquons que $\phi_1 = (\varphi^i_\times \circ p_{r_i})_{i\in I}$, donc, d'après la Proposition 1.20, l'application ϕ_1 est aussi continue.
Montrons que ϕ_2 est continue. Soit $W = \prod\limits_{i\in I}(W_i \times W_i')$ un ouvert dans l'anneau $\prod\limits_{i\in I}(R_i \times R_i)$ avec W_i et W_i' sont des ouverts dans R_i, pour tout $i \in I$.

$$\begin{aligned}
{\phi_2}^{-1}(W) &= \Big\{((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i : \ (x_i, y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}(W_i \times W_i') \Big\} \\
&= \Big\{((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i : \ (x_i, y_i) \in W_i \times W_i', \ i \in I \Big\} \\
&= \Big\{((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i : \ x_i \in W_i, y_i \in W_i', \ i \in I \Big\} \\
&= \Big\{((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i : \ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i, \ (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i' \Big\} \\
&= \prod_{i\in I} W_i \times \prod_{i\in I} W_i'.
\end{aligned}$$

Comme W_i, W_i' sont des ouverts dans R_i pour tout $i \in I$, donc $\prod_{i\in I} W_i$ et $\prod_{i\in I} W_i'$ sont des ouverts dans $\prod_{i\in I} R_i$. Alors ${\phi_2}^{-1}(W)$ est un ouvert de $\prod_{i\in I} R_i \times \prod_{i\in I} R_i$. Donc ϕ_2 est continue. D'où le résultat. $\square$

Définition 2.19. *Soit R un anneau commutatif et unitaire et soit I une partie non vide de R. On dit que I est un idéal de R si :*

a) *$(I, +)$ est un sous groupe abélien de $(R, +)$.*

b) *$\forall a \in R$, $\forall x \in I : a.x \in I$.*

Exemple 2.20. *Dans tout anneau R, les sous-groupes triviaux R et $\{0_R\}$ sont des idéaux. Tout idéal de R autre que R et $\{0_R\}$ s'appelle un idéal propre de R.*

Définition 2.21. *Soit R un anneau commutatif et I un idéal de R. On dit que I est un idéal maximal de R si $I \neq R$, et si pour tout idéal J différent de I, $I \subset J$ implique $J = R$.*

Remarque 2.22. *Soit R un anneau commutatif.*

a) *Si I est un idéal de R et si $1_R \in I$ alors $I = R$. En effet, quelque soit $a \in R$, on a $a.1_R = a \in I$. Donc $R \subset I$. Comme on a toujours $I \subset R$, alors $I = R$.*

b) Si I est un idéal propre de R, alors aucun élément de I n'est inversible. En effet, s'il existe $x \in I$ tel que x^{-1} existe, alors $x.x^{-1} = 1_R \in I$ car I idéal donc d'après (a), $I = R$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc x n'est pas inversible.

Définition 2.23. *Soit R et R' deux anneaux topologiques. On dit qu'une application f de R dans R' est un morphisme topologique d'anneaux si*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in R.$
2. $f(x.y) = f(x).f(y),\ \forall x, y \in R.$
3. *f est continue.*

Si, de plus, f est un homéomorphisme, on dit que f est un isomorphisme d'anneaux topologique. On dit que R et R' sont topologiquement isomorphes, s'il existe un isomorphisme d'anneaux topologiques de R dans R'.

2.3 Modules topologiques

Définition 2.24. *Soit R un anneau topologique commutatif. On appelle R-module topologique un ensemble E muni*

- *d'une structure de R-module.*
- *d'une topologie compatible avec la structure de groupe additif E tel que l'application $\varphi_\sim : (r, a) \longmapsto r.a$ de $R \times E$ dans E soit continue.*

Exemple 2.25.

1. *L'espace topologique $\mathbb{R}$ est un module sur $\mathbb{R}$.*
2. *Tout anneau topologique est un module sur lui même.*
3. *Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module.*

Proposition 2.26. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de modules topologiques non vides sur R. Alors $E = \prod_{i\in I} E_i$ le R-module produit des E_i est un R-module topologique.*

Démonstration. Il suffit de montrer la continuité des deux applications

$$\begin{aligned}\varphi_+ : E \times E &\longrightarrow E \\ ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &\longmapsto (x_i + y_i)_{i\in I}\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\varphi_\sim : R \times E &\longrightarrow E \\ (r, (x_i)_{i\in I}) &\longmapsto (r.x_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

Comme E_i est un groupe topologique pour tout $i \in I$, alors, d'après la Proposition 2.12, $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est aussi un groupe topologique. Donc φ_+ est continue.
Montrons maintenant que $\varphi_\sim$ est continue. Remarquons que $\varphi_\sim$ est la composition des deux applications

$$\begin{aligned} f : R \times E &\longrightarrow R \times E_j \\ (r, (x_i)_{i\in I}) &\longmapsto (r, x_j) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \varphi^i_\sim : R \times E_i &\longrightarrow E_i \\ (r, x_i) &\longmapsto r.x_i \end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in I$, E_i est un R-module topologique alors $\varphi^i_\sim$ est continue. On a aussi f est continue. En effet, soit $W = U \times W_j$ un ouvert de $R \times E_j$, avec U un ouvert de R et W_j ouvert dans E_j. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= \Big\{(r, (x_i)_{i\in I}) \in R \times \prod_{i\in I} E_i : \quad f(r, (x_i)_{i\in I}) \in W\Big\} \\ &= \Big\{(r, (x_i)_{i\in I}) \in R \times \prod_{i\in I} E_i : \quad (r, x_j) \in U \times W_j\Big\} \\ &= U \times \prod_{i\in I} \Omega_i. \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_i = \begin{cases} E_i & \text{si} \quad i \neq j, \\ W_j & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Comme W_j est un ouvert de E_j, alors $\prod\limits_{i\in I} \Omega_i$ est un ouvert élémentaire de $\prod\limits_{i\in I} E_i$. Donc $U \times \prod\limits_{i\in I} \Omega_i$ est un ouvert de $R \times \prod\limits_{i\in I} E_i$. D'où f est continue.
La composition de deux applications continues est continue, donc d'après la Proposition 1.20, $\varphi_\sim = (\varphi^i_\sim \circ f)_{i\in I}$ est continue. D'où E est un R-module topologique. $\square$

Définition 2.27. *Soit R un anneau topologique commutatif et soient E et E' deux R-modules topologiques. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme topologique de R-modules si*

1. *$f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in E$.*
2. *$f(r.x) = r.f(x)$, $\forall r \in R, \forall x \in E$.*
3. *f est continue.*

Si, de plus, f est un homéomorphisme, on dit que f est un homéomorphisme linéaire.
On dit que E et E' sont linéairement homéomorphes s'il existe un homéomorphisme linéaire de E dans E'.

Exemple 2.28. *Soit R un anneau commutatif et soit E, E' deux R-modules.*

1. *Si M est un sous-module de E, alors l'injection $i : M \longrightarrow E$ définie par $i(x) = x$ pour tout $x \in M$, est un morphisme de R-modules.*
2. *L'application*

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E' \\ x &\longmapsto 0_{E'} \end{aligned}$$

est un morphisme de R-modules, appelé morphisme nul.

Chapitre 3

Quelques propriétés de $C_p(X, E)$

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des propriétés algébriques et topologiques des espaces de fonctions continues définies d'un espace topologique X dans un R module topologique E, muni de la topologie de la convergence simple. Dans la première section on va étudier sous quelles conditions $C_p(X, E)$ possède la structure de groupe (anneau, module) topologique. Ensuite, on va introduire l'application évaluation canonique et donner quelques résultats. La dernière section est consacrée aux notions de R-Tychonoff et R-complètement régulier. Les références principales utilisées dans ce chapitre sont [2] et [4].

Soient R un anneau topologique commutatif unitaire. Notons par 0_R, 1_R les éléments neutres pour les lois d'addition et de multiplication de l'anneau R.

3.1 Structures algébriques sur $C_p(X, E)$

Proposition 3.1. *Soit X un espace topologique et E un groupe topologique. Alors $C_p(X, E)$ muni de la loi de composition $(f, g) \longmapsto f + g$ est un groupe topologique.*

Démonstration. Montrons que $C_p(X, E)$ est un groupe. Vérifions d'abord que la loi de composition $(f, g) \longmapsto f + g$ est une loi interne. On a

$$\begin{aligned} f + g : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

est une loi interne. Soient $f, g \in C_p(X, E)$. Montrons que l'application $f + g$ est bien définie et continue. Pour tous x et $y \in X$ tel que $x = y$, on a

$$\begin{cases} f(x) = f(y), \\ g(x) = g(y). \end{cases}$$

Or, E est un groupe alors

$$f(x) + g(x) = f(y) + g(y).$$

Donc

$$(f+g)(x) = (f+g)(y).$$

Donc $f+g$ est bien définie. D'autre part, pour tout ouvert U dans E, on a

$$\begin{aligned} (f+g)^{-1}(U) &= \Big\{x \in X : (f+g)(x) \in U\Big\} \\ &= \Big\{x \in X : f(x) + g(x) \in U\Big\} \\ &= \Big\{x \in X : f(x) \in U - g(x) \text{ et } g(x) \in U - f(x)\Big\} \\ &= \Big\{x \in X : x \in f^{-1}(U - g(x)) \text{ et } x \in g^{-1}(U - f(x))\Big\} \\ &= f^{-1}(U - g(x)) \cap g^{-1}(U - f(x)). \end{aligned}$$

Comme E est un groupe topologique et d'après le Corollaire 2.5, on a $U - g(x)$ et $U - f(x)$ sont des ouverts dans E. Or, f et g sont des applications continues alors $f^{-1}(U - g(x))$ et $g^{-1}(U - f(x))$ sont des ouverts dans X . Donc $(f+g)^{-1}(U)$ est un ouvert dans X. D'où $f + g \in C_p(X,E)$. Donc "+" est une loi interne.
Il est clair que "+" est commutative, associative et admet l'application nulle f_0 ($f_0 \equiv 0_{C(X,E)}$) comme élément neutre. De plus, si $f \in C(X,E)$ alors l'application

$$\begin{aligned} -f : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto (-f)(x) = -f(x) \end{aligned}$$

est bien définie et continue. En effet, soient $x, y \in X$ tel que $x = y$ alors

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow -f(x) + f(x) = -f(x) + f(y) \\ &\Rightarrow -f(y) = -f(x) + f(y) - f(y) \\ &\Rightarrow -f(y) = -f(x). \end{aligned}$$

D'où $-f$ est bien définie. Soit U un ouvert de E alors

$$
\begin{aligned}
(-f)^{-1}(U) &= \{x \in X : -f(x) \in U\} \\
&= \{x \in X : f(x) \in (-U)\} \\
&= \{x \in X : x \in f^{-1}(-U)\} \\
&= f^{-1}(-U).
\end{aligned}
$$

Comme f est continue et $-U$ est ouvert d'après le Corollaire 2.5, alors $(-f)^{-1}(U)$ est un ouvert de X. D'où $-f$ est continue. Il est clair que $f - f = f_0$ alors $-f$ est le symétrique de f. Donc $C_p(X,E)$ est un groupe abélien.

Montrons que la topologie de la convergence simple sur $C(X,E)$ est compatible avec la structure de groupe. D'après le Théorème 2.3, il suffit de montrer que l'application

$$
\begin{aligned}
\varphi_* : C_p(X,E) \times C_p(X,E) &\longrightarrow C_p(X,E) \\
(f,g) &\longmapsto f - g
\end{aligned}
$$

est continue.

D'après la Proposition 1.12, il suffit de prendre un ouvert de la base de $C_p(X,E)$ et montrer que son image réciproque par φ_* est un ouvert dans $C_p(X,E) \times C_p(X,E)$.

Soit $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, W_i]$ un ouvert de la base de $C_p(X,E)$, avec $x_i \in X$, et W_i un ouvert de E. Donc

$$
\begin{aligned}
{\varphi_*}^{-1}(W) &= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ \varphi_*(f,g) \in W\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ f - g \in W\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ f - g \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, W_i]\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ f - g \in [x_i, W_i], i = 1, ..., n.\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ (f-g)(x_i) \in W_i, i = 1, ..., n.\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ f(x_i) \in W_i + g(x_i) \ \text{ et } g(x_i) \in f(x_i) - W_i, i = 1, ..., n.\Big\} \\
&= \Big\{(f,g) \in (C_p(X,E))^2 : \ f \in [x_i, W_i + g(x_i)] \text{ et } g \in [x_i, f(x_i) - W_i], i = 1, ..., n.\Big\} \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, W_i + g(x_i)]\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, f(x_i) - W_i]\right).
\end{aligned}
$$

On a pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, W_i est ouvert dans E et comme E est un groupe topologique, alors $W_i + g(x_i)$ et $f(x_i) - W_i$ sont des ouverts dans E. Donc $[x_i, W_i + g(x_i)]$ et $[x_i, f(x_i) - W_i]$ sont des ouverts dans $C_p(X,E)$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et donc ${\varphi_*}^{-1}(W)$ est un ouvert. D'où le résultat. □

Proposition 3.2. *Soit X un espace topologique. Si E est un anneau topologique alors $(C_p(X,E),+,.)$ muni de la loi d'addition $(f,g)\longmapsto f+g$ et de multiplication $(f,g)\longmapsto f.g$ est un anneau topologique.*

Démonstration. On peut facilement vérifier que $C_p(X,E)$ est un sous anneau de E^X. On a vu déjà que $C_p(X,E)$ est un groupe topologique, donc il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned}\varphi_\times^p : C_p(X,E)\times C_p(X,E) &\longrightarrow C_p(X,E)\\ (f,g)&\longmapsto f.g\end{aligned}$$

est continue. On a E est un anneau topologique, alors

$$\begin{aligned}\varphi_\times : E\times E &\longrightarrow E\\ (x,y)&\longmapsto \varphi(x,y)=x.y\end{aligned}$$

est continue. Soit $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i,U_i]$ un ouvert de base dans l'espace $C_p(X,E)$, avec $x_i\in X$, U_i est un ouvert dans E, pour tout $i\in\{1,...,n\}$. On a

$$\begin{aligned}(\varphi_\times^p)^{-1}(U)&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:(\varphi_\times^p)(f,g)\in U\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2: f.g\in\bigcap_{i=1}^{n}[x_i,U_i]\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:(f.g)(x_i)\in U_i, i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:f(x_i).g(x_i)\in U_i, i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:\varphi_\times(f(x_i),g(x_i))\in U_i, i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:(f(x_i),g(x_i))\in\varphi_\times^{-1}(U_i), i=1,...,n.\Big\}.\end{aligned}$$

Si $i\in\{1,...,n\}$ alors U_i est ouvert dans E et $\varphi_\times : E\times E\longrightarrow E$ est continue alors $\varphi_\times^{-1}(U_i)$ est un ouvert dans $E\times E$. Donc on peut écrire $\varphi_\times^{-1}(U_i)=\Omega_i\times\Omega_i'$ avec $\Omega_i,\ \Omega_i'$ sont des ouverts de E. Donc on a

$$\begin{aligned}(\varphi_\times^p)^{-1}(U)&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:(f(x_i),g(x_i))\in\Omega_i\times\Omega_i', i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:f(x_i)\in\Omega_i,\ g(x_i)\in\Omega_i', i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:f\in[x_i,\Omega_i],\ g\in[x_i,\Omega_i'], i=1,...,n.\Big\}\\
&=\Big\{(f,g)\in(C_p(X,E))^2:f\in\bigcap_{i=1}^{n}[x_i,\Omega_i],\ g\in\bigcap_{i=1}^{n}[x_i,\Omega_i']\Big\}\end{aligned}$$

$$= \left(\bigcap_{i=1}^{n}[x_i,\Omega_i]\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{n}[x_i,\Omega'_i]\right).$$

Pour tout $i \in \{1,...,n\}$, on a Ω_i, Ω'_i sont des ouverts dans E, donc $[x_i,\Omega_i]$, $[x_i,\Omega'_i]$ sont des ouverts dans $C_p(X,E)$, d'où les intersections finies $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i,\Omega_i]$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i,\ \Omega'_i]$ sont aussi des ouverts dans $C_p(X,E)$. Alors, $(\varphi^p_\times)^{-1}(U)$ est ouvert dans $C_p(X,E)\times C_p(X,E)$.
Donc $\varphi^p_\times$ est continue. D'où le résultat. $\square$

Proposition 3.3. *Soit X un espace topologique. Si E est un R-module topologique alors $C_p(X,E)$ est aussi un R-module topologique. Si de plus E est T_1 alors il existe un plongement h de E dans $C_p(X,E)$ tel que $h(E)$ est fermé dans $C_p(X,E)$.*

Démonstration. De la même manière que dans les Propositions 3.1 et 3.2, il est facile de vérifier que $C_p(X,E)$ est un sous module topologique de E^X sur R.
Pour tout $x\in X$ et pour tout $a\in E$, on définit l'application constante suivante

$$\begin{aligned} a_X : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto a_X(x) = a \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow C_p(X,E) \\ a &\longmapsto h(a) = a_X \end{aligned}$$

Montrons que $h : E \longrightarrow h(E)$ est un homéomorphisme. Montrons d'abord que $h : E \longrightarrow h(E)$ est injective. Soient $a, a' \in E$ tel que $h(a) = h(a')$, alors

$$a_X(x) = a'_X(x) \Rightarrow a = a'.$$

D'où $h : E \longrightarrow h(E)$ est injective.
Montrons que $h : E \longrightarrow h(E)$ est continue. Soit $W = U\cap h(E)$ un ouvert dans $h(E)$ avec U ouvert dans $C_p(X,E)$. Supposons que $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i,U_i]$ avec $x_i\in X$ et U_i un ouvert dans E, pour tout $i\in I$. Donc

$$\begin{aligned} h^{-1}(W) &= \Big\{a\in E : h(a)\in W\Big\} \\ &= \Big\{a\in E : h(a)\in U\cap h(E)\Big\} \\ &= \Big\{a\in E : a_X \in \bigcap_{i=1}^{n}[x_i,U_i]\Big\} \\ &= \Big\{a\in E : a_X(x_i)\in U_i, i=1,...,n.\Big\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ a \in E : a \in U_i, i = 1, ..., n. \right\}$$
$$= \left\{ a \in E : a \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \right\}$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Comme U_i est un ouvert de E, alors l'intersection finie $\cap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert de E, donc $h^{-1}(W)$ est un ouvert de E, d'où h est continue.

Montrons maintenant que h est ouverte. Soit V un ouvert de E et soient $x_1, x_2, ..., x_n$, des points arbitraires de X. Donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, V]$ est un ouvert de $C_p(X, E)$ et on a

$$h(V) = h(E) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V]).$$

En effet, si $g \in h(V)$ alors $g \in h(E)$. De plus, il existe $a \in V$ tel que $g = h(a) = a_X$. Donc

$$g(x_i) = a_X(x_i) = a, \forall i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow g \in [x_i, V], \forall i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow g \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V].$$

Donc

$$g \in h(E) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V]).$$

D'où

$$h(V) \subseteq h(E) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V]).$$

Supposons maintenant que $g \in h(E) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, V])$, alors

$$g \in h(E) \ \text{ et } \ g \in \bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V] \Rightarrow \exists\, a \in E : g = h(a) \ \text{ et } \ g(x_i) \in V, i = 1, ..., n.$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in E : g = a_X \ \text{ et } \ g(x_i) = a \in V, i = 1, ..., n.$$
$$\Rightarrow \exists\, a \in V : g = a_X$$
$$\Rightarrow g \in h(V).$$

Donc

$$h(E) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V] \right) \subseteq h(V).$$

D'où

$$h(V) = h(E) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, V] \right).$$

Alors $h(V)$ est ouvert dans $h(E)$, donc h est ouverte sur son image.

Montrons maintenant que $h(E)$ est un fermé dans $C_p(X, E)$. Il suffit de montrer que

$C_p(X,E) \setminus h(E)$ est un ouvert. Soit $g \in C_p(X,E)$ tel que $g \notin h(E)$. Alors, ils existent $x_1, x_2 \in X$ tel que $g(x_1) \neq g(x_2)$. Comme E est T_1 alors, d'après le Théorème 2.11, il est aussi séparé. Donc, on peut fixer U_1, U_2 deux ouverts de E tel que $g(x_1) \in U_1$ et $g(x_2) \in U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Donc

$$g \in [x_1, U_1] \cap [x_2, U_2].$$

Montrons que $([x_1, U_1] \cap [x_2, U_2]) \cap h(E) = \emptyset$. Supposons qu'il existe une application f dans $([x_1, U_1] \cap [x_2, U_2]) \cap h(E)$. Alors

$$\begin{aligned} f \in h(E) \text{ et } f \in ([x_1, U_1] \cap [x_2, U_2]) &\Rightarrow \exists a \in E : f = h(a) \text{ et } f(x_1) \in U_1 \text{ et } f(x_2) \in U_2 \\ &\Rightarrow f = a_X \text{ et } f(x_1) \in U_1 \text{ et } f(x_2) \in U_2 \\ &\Rightarrow a_X(x_1) \in U_1 \text{ et } a_X(x_2) \in U_2 \\ &\Rightarrow a \in U_1 \cap U_2 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. D'où

$$([x_1, U_1] \cap [x_2, U_2]) \cap h(E) = \emptyset.$$

Donc

$$([x_1, U_1] \cap [x_2, U_2]) \subseteq C_p(X,E) \setminus h(E).$$

Alors $C_p(X,E) \setminus h(E)$ est un ouvert. D'où $h(E)$ est fermé dans $C_p(X,E)$. □

Définition 3.4. *Soit X un espace topologique. On dit que X est zéro-dimensionnel s'il admet une base constituée d'ouverts et des fermés en même temps.*

Proposition 3.5. *Si E est un R-module topologique zéro dimensionnel, alors $C_p(X,E)$ est un R-module topologique zéro-dimensionnel.*

Démonstration. Supposons que E est un R-module topologique zéro-dimensionnel.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée d'ouverts et de fermés en même temps. D'après la Proposition 1.54, la famille

$$\mathcal{B}'_p = \{\bigcap_{i=1}^{n} [x_i, U_i], x_i \in X, U_i \in \mathcal{B}\}$$

est une base de $C_p(X,E)$.
Soit $x \in X$ et $V \in \mathcal{B}$. Montrons que chaque élément de $\mathcal{B}'_p$ est un fermé dans $C_p(X,E)$. Il suffit de montrer que $[x, V]$ est un fermé pour tous $x \in X$ et V un fermé de E. Comme V est fermé. Donc d'après la Proposition 1.62, $[x, V]$ est fermé dans $C_p(X,E)$. D'où le résultat. □

3.2 Application évaluation canonique

Définition 3.6. *Soient X un espace topologique, R un anneau topologique, et E un R-module topologique. Soit $x \in X$. L'application*

$$\begin{aligned} \xi_x : C_p(X, E) &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \xi_x(f) = f(x) \end{aligned}$$

est appelée application évaluation au point x.

Proposition 3.7. *Soient X un espace topologique, R un anneau topologique et E un R-module topologique. L'application évaluation $\xi_x : C_p(X, E) \longrightarrow E$ est continue et linéaire (morphisme de module) pour tout point $x \in X$.*

Démonstration. Montrons que ξ_x est continue. Soit $x \in X$ et soit U un ouvert dans E. Alors

$$\begin{aligned} \xi_x^{-1}(U) &= \Big\{f \in C_p(X, E) : \xi_x(f) \in U\Big\} \\ &= \Big\{f \in C_p(X, E) : f(x) \in U\Big\} \\ &= [x, U]. \end{aligned}$$

Comme U est un ouvert de E, alors $[x, U]$ est aussi un ouvert dans $C_p(X, E)$, d'où ξ_x est continue, pour tout point $x \in X$.
Montrons maintenant que ξ_x est linéaire. Soient $\alpha, \beta \in R$ et $f, g \in C_p(X, E)$. Alors

$$\xi_x(\alpha.f + \beta.g) = (\alpha.f + \beta.g)(x) = \alpha.f(x) + \beta.g(x) = \alpha\xi_x(f) + \beta.\xi_x(g).$$

D'où ξ_x est linéaire. □

Soient X un espace topologique, R un anneau topologique et E un R-module topologique. On note par $C_p(C_p(X, E), E)$, l'espace des fonctions continues de $C_p(X, E)$ dans E muni de la topologie de la convergence simple.

Définition 3.8. *On appelle application évaluation canonique, l'application*

$$\begin{aligned} e_X : X &\longrightarrow C_p(C_p(X, E), E) \\ x &\longmapsto e_X(x) = \xi_x \end{aligned}$$

Proposition 3.9. *Soient X un espace topologique, R un anneau topologique et E un R-module topologique T_1. Alors, l'application évaluation canonique $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X, E), E)$ est continue. De plus, l'ensemble $e_X(X)$ est fermé dans l'espace $C_p(C_p(X, E), E)$.*

Démonstration. Montrons que e_X est continue. Soit W un ouvert de base dans $C_p(C_p(X,E),E)$. Supposons que $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [f_i, W_i]$ avec $f_i \in C_p(X,E)$ et W_i est ouvert dans E, pour tout $i \in \{1,...,n\}$.

$$\begin{aligned}
e_X^{-1}(W) &= \Big\{x \in X : e_X(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} [f_i, W_i]\Big\} \\
&= \Big\{x \in X : \xi_x \in \bigcap_{i=1}^{n} [f_i, W_i]\Big\} \\
&= \Big\{x \in X : \xi_x \in [f_i, W_i], \forall i \in \{1,2,...,n\}\Big\} \\
&= \Big\{x \in X : \xi_x(f_i) \in W_i, \forall i \in \{1,2,...,n\}\Big\} \\
&= \Big\{x \in X : f_i(x) \in W_i, \forall i \in \{1,2,...,n\}\Big\} \\
&= \Big\{x \in X : x \in f_i^{-1}(W_i), \forall i \in \{1,2,...,n\}\Big\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(W_i).
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, on a $f_i \in C_p(X,E)$ et W_i est ouvert dans E, alors $f_i^{-1}(W_i)$ est ouvert dans X. Donc, l'intersection finie, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} f_i^{-1}(W_i)$ est ouverte. D'où e_X est continue.
Montrons que $e_X(X)$ est un fermé dans $C_p(C_p(X,E),E)$. Il suffit de montrer que $C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(X)$ est un voisinage de tous ses points.
Soit $\varphi \in C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(X)$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi \notin e_X(X) &\Rightarrow \forall\, x \in X : \varphi \neq e_X(x) \\
&\Rightarrow\ \forall\, x \in X : \varphi \neq \xi_x \\
&\Rightarrow\ \forall\, x \in X,\ \exists f \in C_p(X,E) : \varphi(f) \neq \xi_x(f) = f(x).
\end{aligned}$$

Comme E est T_1, d'après le Théorème 2.11, il est aussi séparé, donc pour tout $x \in X$, ils existent deux ouverts V et W dans E tel que

$$\varphi(f) \in V \text{ et } f(x) \in W \text{ et } V \cap W = \emptyset \ldots (*)$$

Soit $U = \{\psi \in C_p(C_p(X,E),E) : \psi(f) \in V\} = [f,V]$. Donc, U est un voisinage ouvert de φ dans $C_p(C_p(X,E),E)$. Montrons que $U \cap e_X(X) = \emptyset$. Supposons qu'il existe $g \in U \cap e_X(X)$, alors

$$\begin{aligned}
g \in U \cap e_X(X) &\Rightarrow g \in U \text{ et } g \in e_X(X) \\
&\Rightarrow g \in U \text{ et } \exists b \in X : g = \xi_b \\
&\Rightarrow \xi_b(f) = f(b) \in V.
\end{aligned}$$

Ce qui est contradictoire avec $(*)$. Donc $U \cap e_X(X) = \emptyset$. Et donc

$$U \subseteq C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(X).$$

Alors $C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(X)$ est un ouvert. D'où $e_X(X)$ est fermé dans $C_p(C_p(X,E),E)$.

□

Définition 3.10. *Soient X et Y deux espaces topologiques complètement régulier. Soit $\mathcal{F}$ un sous ensemble non vide de Y^X.*

• *On dit que $\mathcal{F}$ est une famille séparante si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

• *On dit que $\mathcal{F}$ est régulière si pour tout fermé $F \subset X$ et pour tout point $x \notin F$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) \notin \overline{f(F)}$.*

Proposition 3.11. *Si $C_p(X,E)$ est une famille séparante et régulière alors l'application évaluation canonique $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X,E),E)$ est un homéomorphisme sur son image $e_X(X)$.*

Démonstration. De la Proposition 3.9, e_X est continue et il est clair que l'application $e_X : X \longrightarrow e_X(X)$ est surjective. Il reste à montrer que e_X est injective et fermée.
Soient $x, y \in X$ tel que $x \neq y$. Comme $C_p(X,E)$ est une famille séparante, il existe $f \in C_p(X,E)$ tel que $f(x) \neq f(y)$ alors $\xi_x \neq \xi_y$, d'où $e_X(x) \neq e_X(y)$.
Montrons que e_X est fermée. Soit F un fermé dans X. Il suffit de montrer que l'ensemble $C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(F)$ est un ouvert de E.
Soit $x \in X \setminus F$. Comme $C_p(X,E)$ est une famille régulière, il existe $f \in C_p(X,E)$ tel que $f(x) \notin \overline{f(F)}$. Donc il existe $U_{f(x)} \in \mathcal{V}(f(x))$ tel que

$$U_{f(x)} \cap f(F) = \emptyset \ \ldots (*).$$

Considérons l'ouvert $[f, U_{f(x)}]$ dans $C_p(C_p(X,E),E)$. Il est clair que $\xi_x \in [f, U_{f(x)}]$. Montrons que $[f, U_{f(x)}] \subset C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(F)$.
Soit $g \in [f, U_{f(x)}]$, alors $g \notin e_X(F)$. En effet, supposons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $g = e_X(y_0)$, donc $g = \xi_{y_0}$, on a alors $g(f) = \xi_{y_0}(f) = f(y_0) \in U_{f(x)}$ ce qui est contradictoire avec $(*)$. D'où on a $g \notin e_X(F)$, ce qui implique que $g \in C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(F)$.
Donc $C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(F)$ est un voisinage de ξ_x, et comme ξ_x est arbitraire, alors $C_p(C_p(X,E),E) \setminus e_X(F)$ est un ouvert, donc $e_X(F)$ est fermé. D'où e_X est une application fermée.

□

3.3 Espaces R-Tychonoff

Définition 3.12. *Soit X un espace topologique et R un anneau topologique. On dit que X est :*

1. *R-**complètement régulier**, si pour tout fermé F dans X et pour tout point $a \in X \setminus F$, il existe $f \in C(X,R)$ tel que $f(a) \notin \overline{f(F)}$.*
2. *R-**Tychonoff**, si pour tout fermé F dans X,et pour tout point $a \in X \setminus F$, il existe $g \in C(X,R)$ tel que $g(a) = 0_R$ et $F \subset g^{-1}(1_R)$.*

Proposition 3.13. *Soit R un anneau topologique T_1 et soit X un espace topologique complètement régulier et R-Tychonoff. Alors, on a*

(i) Si E est un R-module topologique, alors pour tout fermé F de X , pour tout point $a \in X \setminus F$ et pour tout point $b \in E$, il existe $f \in C(X,E)$ tel que $f(a) = 0_E$ et $f(F) = \{b\}$.

(ii) X est R-complètement régulier.

Démonstration.

(i) Soient F un fermé de X et $a \in X \setminus F$, alors, il existe $f : X \longrightarrow R$ continue avec $f(a) = 0_R$ et $f(F) = \{1_R\}$. On a E est un R-module topologique, donc l'application

$$\begin{aligned} \varphi \ : R \times E &\longrightarrow E \\ (r,x) &\longmapsto r.x \end{aligned}$$

est continue. Soit $b \in E$ et soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi_b : R &\longrightarrow E \\ r &\longmapsto r.b \end{aligned}$$

Il est clair que φ_b est continue, pour tout $b \in E$.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto h(x) = (\varphi_b \circ f)(x) \end{aligned}$$

Alors, h est continue. De plus, on a

$$h(a) = \varphi_b(f(a)) = \varphi_b(0_R) = 0_R.b = 0_E$$

et pour tout $y \in F$ on a

$$h(y) = \varphi_b(f(y)) = \varphi_b(1_R) = 1_R.b = b.$$

D'où le résultat.

(ii) Soit F un fermé de X et soit $a \in X \setminus F$ alors il existe $f \in C(X, R)$ avec $f(a) = 0_R$ et $f(F) = \{1_R\}$. Comme R est T_1 alors $\{1_R\}$ est un fermé dans R et on a $\overline{f(F)} = \overline{\{1_R\}} = \{1_R\}$.
Donc $f(a) \notin \overline{f(F)}$, d'où X est R-complètement régulier.

□

Propriétés 3.14.

1. *L'anneau R est un espace R-complètement régulier.*

2. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques complètement réguliers. Alors si pour tout $i \in I, X_i$ est R-complètement régulier (resp. R-Tychonoff) alors l'espace produit $\prod_{i\in I} X_i$ est un espace R-complètement régulier (resp. R-Tychonoff).*

3. *Un sous espace d'un espace R-complètement régulier (resp. R-Tychonoff) est un espace R-complètement régulier (resp. R-Tychonoff).*

Démonstration.

1. Pour tout fermé $F \subset R$ et pour tout point $x \in R \setminus F$, considérons l'application

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

On a $\overline{f(F)} = \overline{F} = F$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in R \setminus F$. Donc $f(x) \notin \overline{f(F)}$. D'où R est R-complètement régulier.

2. (a) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille des espaces R-complètement réguliers et montrons que $X = \prod_{i\in I} X_i$ est un espace R-complètement régulier.
Soit F un fermé de X, donc, $F = \prod\limits_{i\in I} F_i$, avec F_i est fermé dans X_i pour tout $i \in I$.
Soit $a = (a_i)_{i\in I} \in X \setminus F$. Donc

$$a \notin \prod_{i\in I} F_i \Rightarrow \exists i_0 \in I : a_{i_0} \in X_{i_0} \setminus F_{i_0}.$$

Comme X_{i_0} est R-complètement régulier, alors il existe $f_{i_0} \in C(X_{i_0}, R)$ tel que $f_{i_0}(a) \notin \overline{f_{i_0}(F_{i_0})}$, donc il existe $U_{i_0} \in \mathcal{V}(f_{i_0}(a_{i_0}))$ tel que $U_{i_0} \cap f_{i_0}(F_{i_0}) = \emptyset$.
Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto f(x) = (f_{i_0} \circ p_{r_{i_0}})(x) \end{aligned}$$

avec $p_{r_{i_0}}$ est l'application projection

$$\begin{aligned} p_{r_{i_0}} : X &\longrightarrow X_{i_0} \\ x &\longmapsto p_{r_{i_0}}(x) = x_{i_0} \end{aligned}$$

L'application projection est continue et comme $f_{i_0} \in C(X_{i_0}, R)$, alors l'application $f = f_{i_0} \circ p_{r_{i_0}}$ est continue et on a

$$f(a) = f_{i_0}(a_{i_0}) \text{ et } f(F) = f_{i_0}(F_{i_0}).$$

Donc, il existe $U = U_{i_0} \in \mathcal{V}(f(a))$ tel que $U \cap f(F) = \emptyset$. D'où $f(a) \notin \overline{f(F)}$. D'où X est R-complètement régulier.

(b) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces $R-$Tychonoff, montrons que l'espace produit $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ est aussi R-Tychonoff.
Soit $F = \prod\limits_{i\in I} F_i$ un fermé de X, avec F_i est fermé pour tout $i \in I$ et soit $a \in X \setminus F$. Alors

$$a \notin F \Rightarrow \exists i_0 \in I : a_{i_0} \notin F_{i_0}.$$

Comme X_{i_0} est R-Tychonoff, alors il existe $g_{i_0} \in C(X_{i_0}, R)$ avec $g_{i_0}(a_{i_0}) = 0_R$ et $g_{i_0}(F_{i_0}) = \{1_R\}$. Considérons l'application $g = g_{i_0} \circ p_{r_{i_0}}$ tel que

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto g(x) = (g_{i_0} \circ p_{r_{i_0}})(x) = g_{i_0}(x_{i_0}) \end{aligned}$$

Comme $g_{i_0} \in C(X_{i_0}, R)$ et l'application projection $p_{r_{i_0}}$ est continue alors g est continue. Et on a

$$g(a) = g_{i_0}(p_{r_{i_0}}(a)) = g_{i_0}(a_{i_0}) = 0_R.$$

De plus, pour tout $y = (y_i)_{i\in I} \in F$ on a

$$g(y) = g_{i_0}(p_{r_{i_0}}(y)) = g_{i_0}(y_{i_0}) = 1_R.$$

D'où X est R-Tychonoff.

3. Soit X un espace R-Tychonoff et soit X' un sous espace de X. Montrons que X' est aussi R-Tychonoff. Soit $F' = F \cap X'$ un fermé dans X', avec F un fermé dans X. Soit $a \in X' \setminus F'$, donc

$$a \in X' \setminus F' \Rightarrow a \in X' \text{ et } a \notin F' \Rightarrow a \notin F \cap X' \Rightarrow a \notin F.$$

Comme X est R-Tychonoff, alors, il existe $g \in C(X, R)$ tel que $g(a) = 0_R$ et $g(F) = \{1_R\}$.
Soit $g_{|X'}$ la restriction de g sur X'. On a

$$g_{|X'}(a) = g(a) = 0_R.$$

De plus, comme $F' = F \cap X'$, alors $F' \subset F$ et donc,

$$g_{|X'}(F') = g(F') = \{1_R\}.$$

D'où X' est R-Tychonoff.

□

Proposition 3.15. *Soient E un R-module topologique et soit X un espace complètement régulier et R-complètement régulier. Alors*

(i) Pour tout fermé F dans X et pour tout point $a \in X \setminus F$, il existe $f \in C(X, E)$ tel que $f(a) \notin \overline{f(F)}$.

(ii) $C(X, E)$ est une famille séparante et régulière.

Démonstration.

(i) Soit F un fermé de X et soit $a \in X \setminus F$. Comme X est R-complètement régulier, alors il existe $f \in C(X, R)$ avec $f(a) \notin \overline{f(F)}$. Donc

$$f(a) \notin \overline{f(F)} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}(f(a)) : U \cap f(F) = \emptyset.$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto g = (\varphi_b \circ f)(x) = f(x).b \end{aligned}$$

avec φ_b est l'application continue

$$\begin{aligned} \varphi_b : R &\longrightarrow E \\ r &\longmapsto \varphi_b(r) = r.b \end{aligned}$$

Comme f et φ_b sont continues alors g est continue. De plus, on a,

$$g(a) = (\varphi_b \circ f)(a) = \varphi_b(f(a)) = f(a).b.$$

Et pour tout $y \in F$, on a

$$g(y) = \varphi_b(f(y)) = f(y).b.$$

Donc

$$g(F) = f(F).b.$$

Considérons l'ensemble $V = U.b = \{u.b : u \in U\}$. Comme $f(a) \in U$, alors $f(a).b \in V$, donc $g(a) \in V$.

Montrons que $V \cap \overline{g(F)} = \emptyset$. Supposons qu'il existe un élément $z \in V \cap \overline{g(F)}$. Donc

$$z \in V \cap \overline{g(F)} \Rightarrow z \in V \quad \text{et} \quad z \in \overline{g(F)}.$$

On a

$$z \in \overline{g(F)} \Rightarrow \forall\, W \in \mathcal{V}(z) : W \cap g(F) \neq \emptyset.$$

Donc, en particulier pour $W = V$, on a

$$\begin{aligned}
V \cap g(F) \neq \emptyset \Rightarrow\ & \exists v \in V \text{ et } v \in g(F) \\
\Rightarrow\ & \exists v \in U.b \text{ et } v \in f(F).b \\
\Rightarrow\ & \exists u \in U : v = u.b \text{ et } \exists x \in F : v = f(x).b \\
\Rightarrow\ & \exists u \in U, x \in F : u.b = f(x).b \\
\Rightarrow\ & \exists u \in U, x \in F : (u - f(x)).b = 0_E \\
\Rightarrow\ & \exists u \in U, x \in F : u - f(x) = 0_R \\
\Rightarrow\ & \exists u \in U, x \in F : u = f(x) \\
\Rightarrow\ & U \cap f(F) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc, $g(a) \notin \overline{g(F)}$. D'où le résultat.

(ii) Il suffit de montrer que $C(X, E)$ est séparante, car d'après la (i), $C(X, E)$ est régulière. Soient $x, y \in X$ tel que $x \neq y$. Comme X est complètement régulier, alors X est T_1 et donc $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des fermés dans X. D'après (i), il existe $f \in C(X, E)$ tel que $f(x) \notin \overline{f(\{y\})} = \overline{\{f(y)\}}$. Or, E est T_1, alors, $\overline{\{f(y)\}} = \{f(y)\}$. Donc, $f(x) \neq f(y)$. D'où le résultat.

□

Remarque 3.16. *Soit X un espace topologique complètement régulier et soit E un R-module topologique T_1. D'après la Définition 3.10 et la Proposition 3.15, on a X est R-complètement régulier si et seulement si la famille $C(X, E)$ est séparante et régulière.*

Proposition 3.17. *Soit X un espace topologique. Si X est zéro dimensionnel, alors X est un espace R-Tychonoff.*

Démonstration. Considérons la fonction caractéristique $\chi_C : X \longrightarrow R$ tel que

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1_R & \text{si } x \in C, \\ 0_R & \text{si } x \in X \setminus C. \end{cases}$$

Si C est un ensemble qui est ouvert et fermé en même temps, alors l'application χ_C est continue. Fixons un point $x \in X$ et un fermé F de X tel que $x \in X \setminus F$. Comme X est zéro dimensionnel, on peut trouver un ensemble ouvert-fermé C tel que $C \subseteq X \setminus F$. Alors $X \setminus C$ est un ensemble ouvert-fermé et on a $F \subseteq \overline{F} \subseteq X \setminus C$.
La fonction caractéristique $g = \chi_{X \setminus C}$ est continue, et on a $g(x) = 0_R$ et $F \subseteq g^{-1}(1_R)$. D'où X est un espace R-Tychonoff. □

Définition 3.18. *Soit R un anneau topologique. Un R-module topologique E est dit :*

(*i*) ***Simple*** *s'il ne contient aucun sous module non-trivial sur R.*

(*ii*) ***Localement simple*** *si E est non trivial et il existe U un voisinage ouvert de 0_E dans E et U ne contient aucun sous-module non-trivial de E sur R.*

(*iii*) *R-**fermé** s'il existe une fonction continue surjective $\varphi_E : E \longrightarrow R$ tel que pour tout $t \in R$ et pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\begin{cases} \varphi_E(x, y) = \varphi_E(x) + \varphi_E(y), \\ \varphi_E(tx) = t\varphi_E(x). \end{cases}$$

Lemme 3.19. *Soit R un anneau et E un R-module. Alors Ra est un R-module pour tout $a \in E$.*

Démonstration. Fixons un point $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$. Par définition, on a

$$Ra = \{x.a : x \in R\}.$$

Montrons d'abord que Ra est un groupe abélien. Soient $x, y \in Ra$ alors, ils existent $x_1, y_1 \in R$ tel que $x = x_1 a$ et $y = y_1 a$. Donc,

$$x + y = x_1 a + y_1 a = (x_1 + y_1)a \in Ra.$$

De plus, on a

$$0_E + x_1 a = x_1 a + 0_E = x_1 a \qquad \text{et} \qquad x_1 a + (-x_1)a = (-x_1 a) + x_1 a = 0_E.$$

Donc, Ra est un groupe abélien pour la loi d'addition, d'élément neutre 0_E.
Montrons que Ra est un R-module. Soient α, $\beta \in R$ et $x, y \in Ra$. Donc $x = x_1.a$ et $y = y_1.a$, avec $x_1, y_1 \in R$. Alors

$$\alpha(x + y) = \alpha(x_1 a + y_1 a) = \alpha x_1 a + \alpha y_1 a \in Ra.$$

$$(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)x_1 a = \alpha x_1 a + \beta x_1 a \in Ra.$$

$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1 a) = (\alpha\beta)x_1 a = (\alpha\beta)x.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.20.

1. *On note par E_a l'ensemble $R.a$ tel que $a \in E$, i.e.,*

$$E_a = Ra = \{ta / \ t \in R\}.$$

2. *D'après le Lemme 3.19, pour tout anneau simple R et tout $a \in R, a \neq 0_R$, on a : $Ra = R$ .i.e. R est un corps. De plus, pour tout R-module simple E et tout $a \in E, a \neq 0_E$, on a : $Ra = E$.*

Proposition 3.21. *Soient E un R-module topologique, R-fermé et simple, $a \in E$ tel que $\varphi_E(a) = 1_R$. Alors $E_a = \{ta : t \in R\}$ est un sous-module de E sur R satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *$\upsilon_a = \varphi_{E|E_a} : E_a \longrightarrow R$ est un isomorphisme topologique de R-module E_a dans le R-module R.*
2. *L'application $\psi_a : E \longrightarrow E_a$, où $\psi_a(x) = \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(x))$ pour tout $x \in E$, est un homomorphisme ouvert continu de R-module E vers le R-module E_a.*
3. *L'espace E est homéomorphe avec l'espace $\varphi_E^{-1}(0) \times E_a$.*
4. *L'ensemble E_a est un fermé dans E.*

Démonstration.

1. Montrons que $\upsilon_a = \varphi_{E|E_a}$, est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \upsilon_a : & E_a \longrightarrow R \\ & x \longmapsto \upsilon_a(x) = \varphi_E(x) \end{aligned}$$

On a υ_a est un morphisme de R-module. En effet,
Soient $x,\ y \in E_a$ et $r \in R$, alors ils existent $t, t' \in R$ tel que $x = ta$ et $y = t'a$.
On a

$$\upsilon_a(x + y) = \varphi_E(x + y) = \varphi_E(ta + t'a) = \varphi_E((t + t')a).$$

D'après la définition de l'application φ_E, on trouve

$$\upsilon_a(x+y) = (t+t')\varphi_E(a) = t\varphi_E(a) + t'\varphi_E(a) = \varphi_E(ta) + \varphi_E(t'a) = \varphi_E(x) + \varphi_E(y).$$

D'où
$$v_a(x+y) = v_a(x) + v_a(y).$$
De plus, on a
$$v_a(rx) = \varphi_E(rx) = r\varphi_E(x) = rv_a(x).$$
Montrons que v_a est bijective. Soient $x, y \in E_a$ tel que $v_a(x) = v_a(y)$, alors
$$\begin{aligned} v_a(x) = v_a(y) &\Rightarrow \varphi_E(x) = \varphi_E(y) \\ &\Rightarrow \varphi_E(ta) = \varphi_E(t'a) \\ &\Rightarrow t\varphi_E(a) = t'\varphi_E(a) \\ &\Rightarrow t.1_R = t'.1_R \\ &\Rightarrow ta = t'a \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$
D'où v_a est injective.
Montrons que v_a est surjective. On a $Im\, v_a \subseteq R$, donc il suffit de montrer que $R \subseteq Im\, v_a$. Soit $t \in R$. On a
$$v_a(ta) = \varphi_E(ta) = t\varphi_E(a) = t.1_R = t.$$
Donc il existe $x = t.a \in E_a$ tel que $v_a(x) = t$, d'où $t \in v_a(E_a)$. Alors $R \subseteq Im\, v_a$. Donc v_a est surjective. D'où v_a est bijective.
Comme E est un R-module alors l'application
$$\begin{aligned} \varphi_\sim : R \times E &\longrightarrow E \\ (t, x) &\longmapsto \mu(t, x) = t.x \end{aligned}$$
est continue. Cela implique que l'application
$$\begin{aligned} v_a^{-1} : R &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto t.a \end{aligned}$$
est continue. D'où v_a est un homéomorphisme. Alors v_a est un isomorphisme de R-modules topologique.

2. On a $\psi_a = v_a^{-1} \circ \varphi_E : E \longrightarrow E_a$ est une application continue surjective, car c'est la composition de deux applications continues et surjectives. Montrons que ψ_a est un morphisme de R-modules. Soient $x, y \in E$, $r \in R$. On a
$$\psi_a(x+y) = v_a^{-1}(\varphi_E(x+y)) = v_a^{-1}(\varphi_E(x) + \varphi_E(y)).$$

On a $\upsilon_a : E_a \longrightarrow R$ est un isomorphisme. Donc, ils existent $x', y' \in E_a$ tel que $\upsilon_a(x') = \varphi_E(x)$ et $\upsilon_a(y') = \varphi_E(y)$. Donc

$$\begin{aligned}
\upsilon_a^{-1}(\varphi_E(x) + \varphi_E(y)) &= \upsilon_a^{-1}(\upsilon_a(x') + \upsilon_a(y')) \\
&= \upsilon_a^{-1}(\upsilon_a(x' + y')) \\
&= x' + y' \\
&= \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(x)) + \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(y)) \\
&= \psi_a(x) + \psi_a(y).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\psi_a(rx) = \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(rx)) = \upsilon_a^{-1}(r\varphi_E(x)).$$

De la même manière, il existe $x' \in E_a$ tel que $\upsilon_a(x') = \varphi_E(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\upsilon_a^{-1}(r\varphi_E(x)) &= \upsilon_a^{-1}(r\upsilon_a(x')) \\
&= \upsilon_a(r\varphi_E(x')) \\
&= \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(rx')) \\
&= \upsilon_a^{-1}(\upsilon_a(rx')) \\
&= rx' = r\upsilon_a^{-1}(\varphi_E(x)).
\end{aligned}$$

D'où ψ_a est un morphisme de R-modules. Montrons que ψ_a est une application ouverte. Soit U un ouvert de E. Montrons que $\psi_a(U)$ est un ouvert de E_a.

$$\begin{aligned}
\psi_a(U) &= \upsilon_a^{-1}(\varphi_E(U)) \\
&= \{x \in E_a \ : \upsilon_a(x) \in \varphi_E(U)\} \\
&= \{x \in E_a \ : \varphi_E(x) \in \varphi_E(U)\} \\
&= \{x \in E_a \ : x \in \varphi_E^{-1}(\varphi_E(U))\} \\
&= E_a \cap \varphi_E^{-1}(\varphi_E(U)) \\
&= E_a \cap U.
\end{aligned}$$

Or, U est un ouvert de E, alors $\psi_a(U)$ est un ouvert de E_a, d'où ψ_a est ouverte.

3. Considérons l'application

$$\begin{aligned}
\psi : \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a &\longrightarrow E \\
(x, y) &\longmapsto \psi(x, y) = x + y
\end{aligned}$$

Montrons que cette application est un homéomorphisme. Montrons d'abord que ψ est un morphisme de R-modules bijective. Vérifions que $\varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$ est un sous module de $E \times E$. Il suffit de montrer que $\varphi_E^{-1}(0_R)$ est un sous module de E. On a

$$\varphi_E(0_E) = \varphi(0_R.a) = 0_R\varphi_E(a) = 0_R.$$

Donc l'élément neutre $0_E \in \varphi_E^{-1}(0_R)$. Soient $x, y \in \varphi_E^{-1}(0)$, donc

$$\varphi_E(x) = 0_R \qquad \text{et} \qquad \varphi_E(y) = 0_R.$$

Alors

$$\varphi_E(x) + \varphi_E(y) = 0_R \Rightarrow \varphi_E(x+y) = 0_R.$$

D'où $x + y \in \varphi_E^{-1}(0_R)$. De plus, pour tout $x \in (\varphi_E)^{-1}(0_R)$ on a $-x \in \varphi_E^{-1}(0_R)$. En effet,

$$\varphi_E(0_E) = 0_R \Rightarrow \varphi_E(x-x) = 0_R \Rightarrow \varphi_E(x) + \varphi_E(-x) = 0_R \Rightarrow \varphi_E(-x) = 0_R.$$

D'où $\varphi_E^{-1}(0_R)$ est un sous groupe de $(E, +)$. Soit $r \in R, x \in \varphi_E^{-1}(0_R)$ alors

$$\varphi_E(r.x) = r.\varphi_E(x) = r.0_R = 0_E.$$

Donc $\varphi_E^{-1}(0_R)$ est un sous module de E. Montrons maintenant que ψ est un morphisme de R-modules. Soient $(x, y), (x', y') \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$. Alors

$$\begin{aligned}
\psi((x, y) + (x', y')) &= \psi((x + x', y + y') \\
&= (x + x') + (y + y') \\
&= (x + y) + (x' + y') \\
&= \psi(x, y) + \psi(x', y').
\end{aligned}$$

Soit $r \in R$ et $(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$, donc

$$\psi(r.(x, y)) = \psi(rx, ry) = rx + ry = r(x + y) = r\psi(x, y).$$

D'où ψ est bien un morphisme de R-modules. Montrons que ψ est bijective. Pour montrer que ψ est injective, il suffit de vérifier que $ker\psi = \{(0_E, 0_E)\}$. On a

$$\begin{aligned}
Ker\psi &= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : \psi(x, y) = 0_E\} \\
&= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : x + y = 0_E\} \\
&= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : x = -y\} \\
&= \{(-y, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a\}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$y \in E_a \Leftrightarrow \exists t \in R : y = t.a \qquad \text{et} \qquad -y \in \varphi_E^{-1}(0_R) \Leftrightarrow \varphi_E(-y) = 0_R$$

Il résulte que $\varphi_E(y) = 0_R$, donc

$$\varphi_E(t.a) = 0_R \Rightarrow t\varphi_E(a) = 0_R \Rightarrow t = 0_R.$$

D'où $y = 0_R.a = 0_E$, alors $Ker\psi = \{(0_E, 0_E)\}$, d'où ψ est injective.
Montrons que ψ est surjective. Il suffit de montrer que $E \subseteq Im\psi = \varphi_E^{-1}(0_R) + E_a$.
Supposons qu'il existe $z \in E \setminus \varphi_E^{-1}(0_R) + E_a$. Donc

$$z \notin \varphi_E^{-1}(0_R) + E_a \Rightarrow z \neq x + y, \forall x \in \varphi_E^{-1}(0_R), \forall y \in E_a.$$

Alors

$$z \neq x + t.a, \forall x \in \varphi_E^{-1}(0_R), \forall t \in R.$$

Donc, on a

$$\varphi_E(z) \neq \varphi_E(x + t.a) = \varphi_E(x) + t.\varphi_E(a) = 0_R + t.1_R = t, \forall t \in R.$$

absurde. D'où ψ est surjective.

Montrons que ψ est continue. Soit U un ouvert de E, montrons que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$.

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(U) &= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : \psi(x, y) \in U\} \\
&= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : x + y \in U\} \\
&= \{(x, y) \in \varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a : x \in U - y \text{ et } y \in U - x\} \\
&= (\varphi_E^{-1}(0_R) \cap (U - y)) \times (E_a \cap (U - x)).
\end{aligned}$$

Comme U est un ouvert de E, donc, $U - x$ et $U - y$ sont des ouverts de E.
Alors $(\varphi_E^{-1}(0_R) \cap (U - y))$ est un ouvert dans $\varphi_E^{-1}(0_R)$ et $(E_a \cap (U - x))$ est un ouvert dans E_a.
Donc $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert dans $\varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$. D'où ψ est continue.
Montrons que ψ est une application ouverte. Soit $\Omega \times \Omega'$ un ouvert dans $\varphi_E^{-1}(0_R) \times E_a$. Donc, on a

$$\psi(\Omega \times \Omega') = \{\psi(x, y)/ \ (x, y) \in \Omega \times \Omega'\} = \{x + y/ \ x \in \Omega \text{ et } \Omega'\} = \Omega + \Omega'.$$

Or, $\Omega + \Omega'$ est un ouvert dans E, alors $\psi(\Omega \times \Omega')$ est ouvert dans E, et donc ψ est ouverte. D'où ψ est une application continue, bijective et ouverte et donc est un homéomorphisme.

4. Montrons, par l'absurde, que E_a est fermé dans E. Supposons qu'il existe z dans $\overline{E_a} \setminus E_a$. Donc

$$\begin{aligned} z \in \overline{E_a} &\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(z) : U \cap E_a \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(z) : \exists x \in U \text{ et } x = t.a, \text{avec } t \in R \ldots (*) \end{aligned}$$

On a

$$z \notin E_a \Rightarrow \forall t \in R : z \neq t.a$$

Comme E est T_1, alors il est aussi séparé. Donc, pour tout $t \in R$ ils existent $U_0 \in \mathcal{V}(z)$ et $V \in \mathcal{V}(t.a)$ tel que $U_0 \cap V = \emptyset$. Ce qui est contradictoire avec $(*)$. Donc, $\overline{E_a} = E_a$. D'où E_a est fermé dans E.

$\square$

Chapitre 4

Homéomorphismes induits par isomorphismes d'anneaux des fonctions

L'objectif de ce chapitre est de présenter deux résultats connues sous les noms de Théorème de Nagata et Théorème de Gelfand-Kolomogorov. On va montrer qu'un isomorphisme d'anneaux (topologiques) des fonctions induit un homéomorphisme entre les espaces topologiques X et Y. Dans la première section, on va introduire les notions de $t_p(E)$-équivalence et $l_p(E)$-équivalence et on va montrer que deux espaces topologiques homéomorphes sont $l_p(E)$-équivalents ($t_p(E)$-équivalents). Dans la deuxième section, on montre que si les anneaux topologiques $C_p(X,E)$ et $C_p(Y,E)$ sont topologiquement isomorphes alors les espaces X et Y sont homéomorphes. Dans la dernière section, on montre que si X et Y des espaces compacts et si les anneaux $C_p(X)$ et $C_p(Y)$ sont isomorphes alors X et Y sont homéomorphes. Les résultats de ce chapitre sont pris de [1],[2] et [4].

4.1 $l_p(E)$-Équivalence et $t_p(E)$-Équivalence

Définition 4.1. *Soient R un anneau topologique et E un R-module topologique. Soient X, Y deux espaces topologiques.*

1. *On dit que X et Y sont $t_p(E)$-équivalents si les deux espaces topologiques $C_p(X,E)$ et $C_p(Y,E)$ sont homéomorphes et on note dans ce cas $X \overset{t_p(E)}{\sim} Y$.*
2. *On dit que X et Y sont $l_p(E)$-équivalents si les deux R-modules topologiques $C_p(X,E)$*

et $C_p(Y,E)$ sont linéairement homéomorphes et on note dans ce cas $X \overset{l_p(E)}{\sim} Y$.

Remarque 4.2. *Si $E = \mathbb{R}$, alors deux espaces $l_p(E)$-équivalents (resp. $t_p(E)$-équivalents) sont appelés l-équivalents (resp. t-équivalents).*

Proposition 4.3. *Soient R un anneau topologique et E un R-module topologique. Soient X et Y deux espaces topologiques de Tychonoff. Si X et Y sont homéomorphes on note $X \overset{h}{\sim} Y$ et on a*

$$X \overset{h}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{l(E)}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{t(E)}{\sim} Y.$$

Démonstration. Soit $h : Y \longrightarrow X$ un homéomorphisme. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : C_p(X,E) &\longrightarrow C_p(Y,E) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f \circ h \end{aligned}$$

Montrons que φ est un homéomorphisme linéaire. Montrons d'abord que φ est linéaire (morphisme de modules).
Soient $f_1, f_2 \in C(X,E)$ et $r \in R$, on a

$$\varphi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) \circ h.$$

Soit $g \in C_p(Y,E)$, alors

$$(f_1 + f_2)(h(g)) = f_1(h(g)) + f_2(h(g)).$$

Donc

$$(f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h.$$

D'où

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2).$$

Soit $f \in C_p(X,E)$ et $r \in R$, alors

$$\varphi(r.f) = (r.f) \circ h.$$

Soit $g \in C_p(Y,E)$, donc

$$((r.f) \circ h)(g) = (r.f)(h(g)) = r.f(h(g)).$$

D'où

$$\varphi(r.f) = r.\varphi(f).$$

Alors φ est linéaire.

Montrons que φ est injective. Soient $f, g \in C(X,E)$ tel que $\varphi(f) = \varphi(g)$ alors

$$f \circ h = g \circ h.$$

Donc

$$f \circ h \circ h^{-1} = g \circ h \circ h^{-1}.$$

Alors

$$f = g.$$

D'où φ est injective.

Soit $g \in C(Y,E)$ alors il existe $f = g \circ h^{-1}$ tel que $g = \varphi(f)$. D'où la surjectivité.

Montrons que φ est continue. Soit $W = [y, V]$ un ouvert dans $C(Y,E)$ avec $y \in Y$ et V ouvert de E. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(W) &= \{f \in C_p(X,E) : \varphi(f) \in W\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : f \circ h \in [y,V]\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : (f \circ h)(y) \in V\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : f(h(y)) \in V\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : f \in [h(y),V]\} \\
&= [h(y),V].
\end{aligned}$$

Donc $[h(y),V]$ est un ouvert de $C_p(X,E)$ donc φ est continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned}
\psi : C_p(Y,E) &\longrightarrow C_p(X,E) \\
g &\longmapsto \psi(g) = g \circ h^{-1}
\end{aligned}$$

Montrons que ψ est continue. Soit $[x,U]$ un ouvert de $C_p(X,E)$ avec $x \in X$ et U un ouvert de E. Donc

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}([x,V]) &= \{g \in C_p(Y,E) : \psi(g) \in [x,U]\} \\
&= \{g \in C_p(Y,E) : g \circ h^{-1} \in [x,U]\} \\
&= \{g \in C_p(Y,E) : g(h^{-1}(x)) \in U\} \\
&= \{g \in C_p(Y,E) : g \in [h^{-1}(x),U]\} \\
&= [h^{-1}(x),U].
\end{aligned}$$

Donc $[h^{-1}(x),U]$ est un ouvert dans $C_p(Y,E)$. D'où ψ est continue. De plus, on a

$$\varphi \circ \psi = id_{C_p(Y,E)} \text{ et } \psi \circ \varphi = id_{C_p(X,E)}.$$

Donc φ est un homéomorphisme linéaire entre $C_p(X, E)$ et $C_p(Y, E)$. D'où le résultat.

□

4.2 Théorème de Nagata

Soient X un espace topologique, R un anneau topologique et E un R-module topologique. On définit le sous ensemble de $C_p(C_p(X, E), E)$ suivant :

$$L_p(X, E) = \{\alpha_1 \xi_{x_1} + \alpha_2 \xi_{x_2} + ... + \alpha_n \xi_{x_n} : \alpha_i \in R, \xi_{x_i} \in e_X(X), x_i \in X, n \in \mathbb{N}\},$$

où ξ_{x_i} est l'application évaluation au point $x_i \in X$.

Si F un R-module topologique. On note par $\mathfrak{L}_p(F, E)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires et continues définies de F dans E. L'ensemble $\mathfrak{L}_p(F, E)$ est un sous espace de $C_p(F, E)$.

Proposition 4.4. *Soient R un anneau localement simple et X un espace R-Tychonoff. Alors*

$$\mathfrak{L}_p(C_p(X, R), R) = L_p(X, R).$$

Démonstration. Il est clair que $L_p(X, R) \subseteq \mathfrak{L}_p(C_p(X, R), R)$. Montrons que

$$\mathfrak{L}_p(C_p(X, R), R) \subseteq L_p(X, R).$$

Soit $\mu \in \mathfrak{L}_p(C_p(X, R), R)$. Montrons que μ s'écrit de la forme

$$\mu = \alpha_1 \xi_{x_1} + \cdots + \alpha_n \xi_{x_n},$$

avec $n \in \mathbb{N}, \xi_{x_i} \in e_X(X), \alpha_i \in R$.
Supposons que $\mu \neq 0_{C_p(C_p(X,R),R)}$ et soit $f_0 \in C_p(X, R)$ l'application nulle, i.e. $f_0 \equiv 0_{C_p(X,R)}$, alors $\mu(f_0) = 0_R$ car μ est linéaire.
Soit U un voisinage de 0_R dans R tel que U ne contenant aucun sous-modules de R.
On a $\mu(f_0) = 0_R \in U$. Comme μ est continue, alors il existe W un voisinage ouvert de f_0 dans $C_p(X, R)$ tel que $\mu(W) \subseteq U$. Donc, ils existent $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ et $\{V_1, ..., V_n\} \subset \mathcal{T}_R$ tel que $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, V_i]$.
On a $U \in \mathcal{V}(0_R)$, alors il existe un ouvert V dans R tel que $0_R \in V \subseteq U$. On peut prendre $V_1 = V_2 = ... = V_n = V$. D'où $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [x_i, V]$. Soit $g \in C_p(X, R)$ tel que $g(x_i) = 0_R$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Pour tout $\alpha \in R$, on a

$$(\alpha.g)(x_i) = \alpha.g(x_i) = 0_R \Rightarrow \alpha.g \in W$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mu(\alpha g) \in \mu(W) \subseteq U \\ &\Rightarrow \alpha\mu(g) \in U, \forall \alpha \in R. \end{aligned}$$

Donc $R.\mu(g) \subseteq U$. D'après le Lemme 3.19, $R.\mu(g)$ est un sous-module de R sur R contenu dans U. Donc nécessairement $R\mu(g) = \{0_R\}$ et $\mu(g) = 0_R$.
Comme X est R-Tychonoff, on peut fixer $g_i \in C(X, R)$ tel que

$$g_i(x_i) = 1_R \text{ et } g_i(x_j) = 0_R \text{ pour tout } i \neq j.$$

Posons $\alpha_i = \mu(g_i)$ et considérons $\mu' = \alpha_1\xi_{x_1} + ... + \alpha_n\xi_{x_n}$. Alors, pour tout $g \in C(X, R)$ on a

$$\mu'(g) = \alpha_1\xi_{x_1}(g) + ... + \alpha_n\xi_{x_n}(g) = \alpha_1 g(x_1) + ... + \alpha_n g(x_n).$$

Soit $g \in C_p(X, R)$ et posons $g' = g - g(x_1)g_1 - g(x_2)g_2 - ... - g(x_n)g_n$. Il est clair que

$$g' \in C_p(X, R) \text{ et } g'(x_i) = 0_R, \text{ pour tout } i \in \{1, ..., n\}.$$

Donc $\mu(g') = 0_R$. Comme μ est linéaire, alors on a

$$\begin{aligned} \mu(g') = 0_R &\Rightarrow \mu(g - g(x_1)g_1 - g(x_2)g_2 - ... - g(x_n)g_n) = 0_R \\ &\Rightarrow \mu(g) - g(x_1)\mu(g_1) - ... - g(x_n)\mu(g_n) = 0_R \\ &\Rightarrow \mu(g) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\mu(g_i) \\ &\Rightarrow \mu(g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i) = \mu'(g). \end{aligned}$$

Donc $\mu' = \mu$. D'où le résultat. □

Proposition 4.5. *Soit R un anneau topologique et soient F, F' et E des R-modules topologiques. Si F et F' sont linéairement homéomorphes alors $\mathfrak{L}_p(F, E)$ et $\mathfrak{L}_p(F', E)$ sont linéairement homéomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un homéomorphisme linéaire de F dans F'. Alors d'après la Proposition 4.3 les espaces $C_p(F, E)$ et $C_p(F', E)$ sont linéairement homéomorphes. Ce qui implique que $\mathfrak{L}_p(F, E)$ et $\mathfrak{L}_p(F', E)$ sont linéairement homéomorphes. D'où le résultat. □

Proposition 4.6. *Soient R un anneau, E un R-module topologique et X un espace topologique. Alors pour tout $f \in C_p(X, E)$, il existe une application continue unique $\bar{f}$ dans $\mathfrak{L}_p(L_p(X, E), E)$ tel que $f = \overline{f} \circ e_X$ avec $e_X : X \longrightarrow L_p(X, E)$ est l'application évaluation canonique.*

Démonstration. Posons $E_f = E$ pour tout $f \in C_p(X,E)$. Par définition, on a

$$e_X(X) \subseteq L_p(X,E) \subseteq E^{C_p(X,E)} = \prod_{f \in C_p(X,E)} E_f.$$

Considérons l'application projection

$$\begin{aligned} p_{r_f} : E^{C_p(X,E)} &\longrightarrow E_f = E \\ g &\longmapsto p_{r_f}(g) = g(f) \end{aligned}$$

L'application p_{r_f} est continue et linéaire. En effet, soit U un ouvert de E. Alors

$$\begin{aligned} {p_{r_f}}^{-1}(U) &= \{g \in E^{C_p(X,E)} : p_{r_f}(g) \in U\} \\ &= \{g \in E^{C_p(X,E)} : g(f) \in U\} \\ &= \{g \in E^{C_p(X,E)} : g \in [f,U]\} \\ &= [f,U]. \end{aligned}$$

Comme U est ouvert dans E, alors $[f,U]$ est ouvert dans $E^{C_p(X,E)}$, d'où la continuité de p_{r_f}.

Soient $g, g' \in E^{C_p(X,E)}$, on a

$$p_{r_f}(g+g') = (g+g')(f) = g(f) + g(f') = p_{r_f}(g) + p_{r_f}(g').$$

De plus, pour $r \in R$ et $g \in E^{C(X,E)}$, on a

$$p_{r_f}(rg) = (rg)(f) = r.g(f) = r.p_{r_f}(g).$$

Donc p_{r_f} est linéaire.

Soit $\bar{f} = p_{r_f|L_p(X,E)} : L_p(X,E) \longrightarrow E$, alors $\bar{f}$ est continue et linéaire. Soit $x \in X$, alors

$$(\bar{f} \circ e_X)(x) = (p_{r_f|L_p(X,E)} \circ e_X)(x) = p_{r_f}(e_X(x)) = p_{r_f}(\xi_x) = \xi_x(f) = f(x).$$

Donc $\bar{f} \circ e_X = f$. Alors

$$\forall f \in C_p(X,E), \exists \bar{f} = p_{r_f|L_p(X,E)} \in \mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E) : f = \bar{f} \circ e_X.$$

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe $h \in \mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E)$ tel que $f = h \circ e_X$. Pour tout $x \in X$, on a

$$(\bar{f} \circ e_X)(x) = (h \circ e_X)(x) \Rightarrow \bar{f}(e_X(x)) = h(e_X(x)) \Rightarrow \bar{f}(\xi_x) = h(\xi_x).$$

D'autre part, on a par définition, $L_p(X,E) =< e_X(X) >$. Soit $g \in L_p(X,E)$, alors ils existent $n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in R, x_i \in X$ tel que $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}$. Alors

$$\bar{f}(g) = \bar{f}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{f}(\xi_{x_i}) = \sum_{i=1} \alpha_i h(\xi_{x_i}) = h(\sum_{i=1} \alpha_i \xi_{x_i}) = h(g).$$

Donc $\bar{f} = h$. D'où l'unicité. $\square$

Théorème 4.7. *Soient R un anneau, E un R-module topologique et X un espace topologique. Considérons l'espace $e_X(X)$ tel que $e_X : X \longrightarrow L_p(X,E)$ est l'application évaluation. Alors les R-modules $C_p(X,E)$, $C_p(e_X(X),E)$ et $\mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E)$ sont linéairement homéomorphes.*

Démonstration. Soit $E_f = E$ pour tout $f \in C_p(X,E)$. On a

$$e_X(X) \subseteq L_p(X,E) \subseteq E^{C_p(X,E)} = \prod_{f \in C_p(X,E)} E_f.$$

Considérons l'application projection

$$\begin{aligned} p_{r_f} : E^{C_p(X,E)} &\longrightarrow E \\ g &\longmapsto p_{r_f}(g) = g(f) \end{aligned}$$

et soit $\bar{f} = p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} : L_p(X,E) \longrightarrow E$. Les applications p_{r_f} et $\bar{f}$ sont linéaires et continues. Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} \varphi : C_p(X,E) &\longrightarrow C_p(e_X(X),E) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = \bar{f}_{|e_X(X)} = p_{r_f}{}_{|e_X(X)} \end{aligned}$$

Montrons que φ est un homéomorphisme linéaire. Vérifions d'abord que φ est bijective. Soient $f, g \in C_p(X,E)$ tel que $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow \bar{f}_{|e_X(X)} = \bar{g}_{|e_X(X)} \Rightarrow p_{r_f}{}_{|e_X(X)} = p_{r_g}{}_{|e_X(X)}.$$

Soit $h \in e_X(X)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $h = \xi_x$. Donc

$$p_{r_f}(h) = p_{r_g}(h) \Rightarrow p_{r_f}(\xi_x) = p_{r_g}(\xi_x) \Rightarrow \xi_x(f) = \xi_x(g) \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow f = g.$$

D'où φ est injective.
Montrons maintenant que φ est surjective. Soit $g \in C_p(e(X),E)$ tel que $g = \varphi(f)$. Donc $g = p_{r_f}{}_{|e_X(X)}$. Soient $x \in X$ et $\xi_x \in e_X(X)$. Alors on a

$$g(\xi_x) = p_{r_f}(\xi_x) \Rightarrow g(e_X(x)) = \xi_x(f) \Rightarrow (g \circ e_X)(x) = f(x).$$

Donc $f = g \circ e_X$. Alors

$$\forall g \in C_p(e_X(X),E),\ \exists f = g \circ e_X \in C_p(X,E) : g = \varphi(f).$$

D'où φ est bijective.
Montrons maintenant que φ est continue et ouverte. Soit $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [\xi_{x_i}, V_i]$ un ouvert de base dans $C_p(e_X(X),E)$ avec $x_i \in X$ et V_i ouvert dans E, pour tout $i \in \{1,...,n\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(W) &= \{f \in C_p(X,E) : \varphi(f) \in W\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : \bar{f}_{|e_X(X)} \in \bigcap_{i=1}^{n}[\xi_{x_i}, V_i]\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : p_{r_f}{}_{|e_X(X)} \in [\xi_{x_i}, V_i], i = 1, ..., n.\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : p_{r_f}(\xi_{x_i}) \in V_i, i = 1, ..., n.\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : \xi_{x_i}(f) \in V_i, i = 1, ..., n.\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : f(x_i) \in V_i, i = 1, ..., n.\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}[x_i, V_i].
\end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, V_i est un ouvert dans E, alors $[x_i, V_i]$ est ouvert dans $C_p(X,E)$. Donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i, V_i]$ est ouvert dans $C_p(X,E)$. D'où φ est continue.

Soit maintenant $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n}[x_i, U_i]$ un ouvert de base dans $C_p(X,E)$ et montrons que φ est ouverte. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(U) &= \{\varphi(f) : f \in \bigcap_{i=1}^{n}[x_i, Ui]\} \\
&= \{\varphi(f) : f \in [x_i, U_i],\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \{\varphi(f) : f(x_i) \in U_i,\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \{\varphi(f) : \xi_{x_i}(f) \in U_i,\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \{\varphi(f) : p_{r_f}(\xi_{x_i}) \in U_i,\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \{\varphi(f) : p_{r_f}{}_{|e_X(X)} \in [\xi_{x_i}, U_i],\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \{\varphi(f) : \varphi(f) \in [\xi_{x_i}, U_i],\ i = 1, ..., n.\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n}[\xi_{x_i}, U_i].
\end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in \{1, ..., n\}, U_i$ est un ouvert dans E, alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[\xi_{x_i}, U_i]$ est ouvert dans $C_p(e_X(X), E)$, d'où φ est ouverte. Donc φ est un homéomorphisme.

L'application φ est linéaire. En effet, pour tout $f, g \in C_p(X,E)$, on a

$$\varphi(f+g) = p_{r_{(f+g)}}{}_{|e_X(X)}.$$

Soit $x \in X$ et soit $\xi_x \in e_X(X)$. Alors

$$p_{r_{(f+g)}}(\xi_x) = \xi_x(f+g) = \xi_x(f) + \xi_x(g) = p_{r_f}(\xi_x) + p_{r_g}(\xi_x).$$

Pour tout $t \in R$ et $f \in C_p(X,E)$, on a $\varphi(t.f) = p_{r_{(t.f)}}{}_{|e_X(X)}$. Soit $x \in X$ et $\xi_x \in e_X(X)$. Alors

$$p_{r_{t.f}}(\xi_x) = \xi_x(t.f) = t.\xi_x(f) = t.p_{r_f}(\xi_x).$$

Donc

$$p_{r_{(t.f)}}{}_{|e_X(X)} = t.p_{r_f}{}_{|e_X(X)}.$$

D'où φ est linéaire.

Donc φ est un homéomorphisme linéaire. D'où $C_p(X,E)$ et $C_p(e_X(X),E)$ sont homéomorphes.

Montrons maintenant que $C_p(X,E)$ et $\mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E)$ sont linéairement homéomorphes. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : C_p(X,E) &\longrightarrow \mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E) \\ f &\longmapsto \psi(f) = \bar{f} = p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} \end{aligned}$$

Montrons que ψ est un homéomorphisme linéaire. On montre d'abord que ψ est linéaire. Soient $f,g \in C_p(X,E)$, alors $\psi(f+g) = p_{r_{(f+g)}}{}_{|L_p(X,E)}$. Soit $h \in L_p(X,E)$, alors ils existent $x_i \in X, \alpha_i \in R$ tel que $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}$. Donc on a

$$h(f+g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(f+g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\xi_{x_i}(f)+\xi_{x_i}(g)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(f)+\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(g) = h(f)+h(g).$$

Donc

$$p_{r_{f+g}}(h) = p_{r_f}(h) + p_{r_g}(h),$$

d'où

$$p_{r_{f+g}} = p_{r_f} + p_{r_g},$$

alors

$$\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g).$$

De plus, pour tout $t \in R$ et $f \in C_p(X,E)$, on a

$$\psi(rf) = p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)}.$$

Soit $g \in L_p(X,E)$. Alors $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}$, avec $x_i \in X, \alpha_i \in R$. On a

$$p_{r_{tf}}(g) = g(t.f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(t.f) = \sum_{i=1}^{n} t\alpha_i \xi_{x_i}(f) = tg(f) = tp_{r_f}(g).$$

Donc $p_{r_{t.f}} = t.p_{r_f}$. Alors $\psi(rf) = r\psi(f)$. D'où ψ est linéaire.

Montrons que ψ est injective. Soient $f,g \in C_p(X,E)$ tel que $\psi(f) = \psi(g)$. Alors

$$p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} = p_{r_g}{}_{|L_p(X,E)}.$$

Soit $h \in L_p(X,E)$, donc $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}$, avec $x_i \in X$ et $\alpha_i \in R$. On a

$$\begin{aligned}
p_{r_f}(h) = p_{r_g}(h) &\Rightarrow h(f) = h(g) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(g) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f(x_i) - g(x_i)) = 0_E \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_{x_i}(f-g) = 0_E \\
&\Rightarrow h(f-g) = 0_E.
\end{aligned}$$

Comme h est linéaire donc $f - g = 0_{C_p(X,E)}$. D'où $f = g$. Alors ψ est injective.
De plus, ψ est surjective, car pour tout $g \in \mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E))$, il existe une application unique $f = g \circ e_X$ tel que $g = \psi(f)$.
Montrons que ψ est continue. Soit $W = [g, V]$ un ouvert de base de $\mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E)$ avec $g \in L_p(X,E)$ et V ouvert de E. Donc

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(W) &= \{f \in C_p(X,E) : \psi(f) \in W\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} \in [g,V]\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : p_{r_f}(g) \in V\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : g(f) \in V\} \\
&= \{f \in C_p(X,E) : f \in g^{-1}(V)\} \\
&= g^{-1}(V).
\end{aligned}$$

Comme $g \in L_p(X,E)$, alors y est continue et donc, $g^{-1}(V)$ est un ouvert dans $C_p(X,E)$.
D'où ψ est continue.

Montrons que ψ est ouverte. Soit $U = [x, V]$ un ouvert de $C_p(X,E)$, avec $x \in X$ et V un ouvert de E. Alors

$$\begin{aligned}
\psi(U) &= \{\psi(f) : f \in [x,V]\ \} \\
&= \{p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} : f(x) \in V\} \\
&= \{p_{r_f}{}_{|L_p(X,E)} : \xi_x(f) \in V\}
\end{aligned}$$

$$= \{p_{r_f|L_p(X,E)} : p_{r_f}(\xi_x) \in V\}$$
$$= \{p_{r_f|L_p(X,E)} : p_{r_f|L_p(X,E)} \in [\xi_x, V]\}$$
$$= [\xi_x, V] \cap \mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E).$$

Comme $\xi_y \in L_p(X,E)$ et V ouvert dans E, donc $\psi(U)$ est un ouvert dans $\mathfrak{L}_p(L_p(X,E),E)$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 4.8. *Si X est un espace R-complètement régulier alors l'application évaluation $e_X : X \longrightarrow C_p(C_p(X,E),E)$ est un homéomorphisme sur son image. En effet, comme X est R-complètement régulier alors, d'après la Proposition 3.15, $C_p(X,E)$ est une famille séparante et régulière. Le résultat se découle directement de la Proposition 3.11. Dans ce cas, on peut identifier X avec $e_X(X)$.*

Théorème 4.9. *Soient X, Y deux espaces topologiques R-Tychonoff et R un anneau topologique localement simple. Les espaces $C_p(X,R)$ et $C_p(Y,R)$ sont linéairement homéomorphes si et seulement si les espaces $L_p(X,R)$ et $L_p(Y,R)$ sont linéairement homéomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\mu : L_p(Y,R) \longrightarrow L_p(X,R)$ un homéomorphisme linéaire. Donc d'après la Proposition 4.5 on a $\mathfrak{L}_p(L_p(X,R),R)$ et $\mathfrak{L}_p(L_p(Y,R),R)$ sont linéairement homéomorphes. D'après le Théorème 4.7, on a

$$C_p(X,R) \simeq \mathfrak{L}_p(L_p(X,R),R) \text{ et } C_p(Y,R) \simeq \mathfrak{L}_p(L_p(Y,R),R).$$

Ce qui implique que

$$C_p(X,R) \simeq C_p(Y,R).$$

Inversement, supposons que $C_p(X,R) \simeq C_p(Y,R)$. Comme R est localement simple et X, Y sont R-Tychonoff, d'après la Proposition 4.4, on a

$$\mathfrak{L}_p(C_p(X,R),R) = L_p(X,R) \text{ et } \mathfrak{L}_p(C_p(Y,R),R) = L_p(Y,R).$$

Comme $C_p(X,R) \simeq C_p(Y,R)$ alors

$$\mathfrak{L}_p(C_p(X,R),R) \simeq \mathfrak{L}_p(C_p(Y,R),R).$$

D'où

$$L_p(X,R) \simeq L_p(Y,R).$$

$\square$

Soit X un espace topologique et E un R-module topologique. Pour $n \geq 1$, on définit l'ensemble suivant :

$$L_{p,n}(X,E) = \{\alpha_1\xi_{x_1} + \alpha_2\xi_{x_2} + ... + \alpha_n\xi_{x_n} : \ \xi_{x_i} \in e_X(X), \alpha_i \in R, i \leq n\}.$$

Il est clair que $L_{p,n}(X,E) \subseteq L_{p,n+1}(X,E)$ pour tout n.

$$L_p(X,E) = \bigcup\{L_{p,n}(X,E)/\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 4.10. *L'application $p_n : R^n \times X^n \longrightarrow L_{p,n}(X,E)$, avec*

$$p_n(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_1 e_X(x_1) + \alpha_2 e_X(x_2) + ... + \alpha_n e_X(x_n)$$

est une application continue de $R^n \times X^n$ sur $L_{p,n}(X,E)$.

Soit R un anneau topologique simple et soit X un espace R-Tychonoff. Fixons un certain $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.11. *Soit μ l'application suivante*

$$\begin{aligned} \mu : C(X,R) &\longrightarrow R^n \\ f &\longmapsto \mu(f) = (\mu_1(f), ..., \mu_n(f)) \end{aligned}$$

avec $\mu_i : C(X,R) \longrightarrow R$, pour $i = \{1, ..., n\}$.
L'application μ est dite multiplicative si elle est linéaire et vérifie $\mu(fg) = \mu(f)\mu(g)$ pour toutes $f, g \in C_p(X,R)$.

Remarque 4.12. *Si l'application*

$$\begin{aligned} \mu : C(X,R) &\longrightarrow R^n \\ f &\longmapsto \mu(f) = (\mu_1(f), ..., \mu_n(f)) \end{aligned}$$

est multiplicative alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mu_i : C(X,R) \longrightarrow R$ est multiplicative. i.e. μ_i est linéaire et vérifie $\mu_i(fg) = \mu_i(f)\mu_i(g)$ pour toutes $f, g \in C(X,R)$.

Notons par $I_{(p,n)}(X,R) = \{\mu \in L_p(C(X,R), R^n) : \ \mu \neq 0$ et μ est multiplicative$\}$.

Théorème 4.13. *Soient X un espace R-Tychonoff et R un anneau simple. Alors les espaces X^n et $I_{(p,n)}(X,R)$ sont homéomorphes.*

Démonstration. Montrons d'abord que $I_{(p,n)}(X,R) = (I_{(p,1)}(X,R))^n$.
Soit $1_{R^n} = (1_R, 1_R, ..., 1_R)$ l'élément neutre de R^n. Pour tout $i \leq n$, on pose

$$R_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_j = 0_R, \forall j \neq i\}.$$

R_i est un sous anneau de R^n d'élément neutre $1_i = (0_R, ..., 1_R, 0_R, ..., 0_R)$. Il est clair que R et R_i sont topologiquement isomorphes. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} p_i : R^n &\longrightarrow R_i \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\longmapsto 1_i.(x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Montrons que p_i est continue. Soit $U = \prod_{j=1}^n U_j \cap R_i$ un ouvert de R_i, avec $\prod_{j=1}^n U_j$ est un ouvert de R. Alors

$$\begin{aligned} {p_i}^{-1}(U) &= \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : p_i(x_1, ..., x_n) \in U\} \\ &= \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : 1_i.(x_1, ..., x_n) \in (\prod_{j=1}^n U_j) \cap R_i\} \\ &= \{(x_1, ..., x_n) \in R^n : (0_R, ..., x_i, ..., 0_R) \in (\prod_{j=1}^n U_j) \cap R_i\} \\ &= \prod_{j=1}^n \Omega_j. \end{aligned}$$

Avec

$$\Omega_j = \begin{cases} \Omega_j = U_i \ \text{ si } j = i, \\ \Omega_i = R \ \text{ si } j \neq i. \end{cases}$$

Donc $\prod_{i=1}^n \Omega_i$ est un ouvert élémentaire de R^n. D'où p_i est continue.
Montrons que p_i est ouverte. Soit $W = \prod\limits_{j=1}^n W_j$ un ouvert de R^n tel que W_j est un ouvert dans R, pour tout j. On a

$$\begin{aligned} p_i(W) &= \{p_i(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \in W\} \\ &= \{1_i.(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \in \prod_{j=1}^n W_j\} \\ &= \{(0_R, ..., x_i, 0_R, ..., 0_R) : (x_1, ..., x_n) \in \prod_{j=1}^n W_j\} \\ &= \prod_{j=1}^n W_j \cap R_i. \end{aligned}$$

Donc $\prod\limits_{j=1}^n W_j \cap R_i$ est ouvert dans R_i, d'où p_i est une application ouverte.
Montrons que p_i est multiplicative. Soient $x = (x_1, ..., x_n), x' = (x'_1, ..., x'_n) \in R^n$. Alors

$$\begin{aligned} p_i(x.x') &= 1_i.(x_1.x'_1, ..., x_n.x'_n) \\ &= (0_R, ..., x_i.x'_i, 0_R, ..., 0_R) \\ &= (0_R, ..., x_i, 0_R, ..., 0_R).(0_R, ..., x'_i, 0_R, ..., 0_R) \\ &= p_i(x).p_i(x'). \end{aligned}$$

D'où p_i est multiplicative.

Montrons que p_i est linéaire. Soient $x = (x_1, ..., x_n)$ et $x' = (x'_1, ..., x'_n) \in R^n$.

On a

$$\begin{aligned} p_i(x + x') &= p_i((x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n)) \\ &= 1_i.(x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n) \\ &= 1_i.(x_1, ..., x_n) + 1_i(x'_1, ..., x'_n) \\ &= p_i(x) + p_i(x'). \end{aligned}$$

Soit $r \in R$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. Alors

$$\begin{aligned} p_i(r.x) &= p_i(r.x_1, ..., r.x_n) \\ &= 1_i.(r.x_1, ..., r.x_{n)} \\ &= (0_R, ..., r.x_i, 0_R, ..., 0_R) \\ &= r.(0_R, ..., x_i, ..., 0_R) \\ &= r.p_i(x). \end{aligned}$$

Donc p_i est linéaire.

Soit $\mu \in I_{(p,n)}(X, R)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \pi_i : I_{(p,n)}(X, R) &\longrightarrow I_{(p,1)}(X, R) \\ \mu &\longmapsto \pi_i(\mu) = p_i \circ \mu = \mu_i \end{aligned}$$

Il est clair que $\pi_i(\mu) = \mu_i \in I_{(p,1)}(X, R)$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Donc $\mu \in (I_{(p,1)}(X, R))^n$. De plus, si $\mu \in (I_{(p,1)}(X, R))^n$, avec $\mu = (\mu_i)_{i=1,...,n}$, alors $\mu_i \in I_{(p,1)}(X, R)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Donc

$$I_{(p,n)}(X, R) = (I_{(p,1)}(X, R))^n$$

On pose $I_p(X, R) = I_{(p,1)}(X, R)$. Montrons d'abord que $I_p(X, R) = e_X(X)$. Soit $x \in X$ alors $\xi_x \in L_p(X, R)$. De plus, pour toutes $f, g \in C_p(X, R)$ on a

$$\xi_x(f.g) = (f.g)(x) = f(x).g(x) = \xi_x(f).\xi_x(g).$$

Donc ξ_x est multiplicative. D'où $\xi_x \in I_p(X, R)$.

Soit $\mu \in I_p(X, R)$ alors ils existent $n \geq 1$, $\alpha_i \in R\backslash\{0_R\}$, $x_i \in X$ tel que

$$\mu = \alpha_1.\xi_{x_1} + \cdots + \alpha_n \xi_{x_n}.$$

Comme R est un anneau commutatif simple, alors il existe $\beta_i \in R\backslash\{0_R\}$ tel que

$$\alpha_i.\beta_i = 1_R.$$

Or, X est R-Tychonoff, on peut fixer pour tout $i \leq n$, $f_i \in C_p(X, R)$ tel que $f_i(x_i) = \beta_i$ et $f_i(x_j) = 0_R$ pour tout $j \neq i$. On a

$$\mu(f_i) = \alpha_1 \xi_{x_1}(f_i) + \cdots + \alpha_n \xi_{x_n}(f_i) = \alpha_1 f_i(x_1) + \cdots + \alpha_n f_i(x_n) = \alpha_i \beta_i = 1_R.$$

Supposons que $n \geq 2$. Il est clair que $f_1.f_2 = f_0$, tel que f_0 est l'application nulle dans $C_p(X, R)$. Comme μ est linéaire, alors

$$\mu(f_1.f_2) = \mu(f_0) = 0_R \ldots (*)$$

D'autre part, on a

$$\mu(f_1.f_2) = \mu(f_1).\mu(f_2) = 1_R.1_R = 1_R.$$

Ce qui est contradictoire avec $(*)$. Donc $n = 1$ et on a $\mu = \alpha_1.\xi_{x_1}$.
Supposons que $\alpha_1 \neq 1_R$, donc $\beta_1 \neq 1_R$. Mais on a

$$\beta_1 = 1_R.\beta_1 = \alpha_1.\beta_1\beta_1 = \alpha_1(f_1.f_1)(x_1) = \mu(f_1.f_1) = \mu(f_1).\mu(f_1) = 1_R.1_R = 1_R$$

contradiction avec $\beta_1 \neq 1_R$. Donc $\alpha_1 = \beta_1 = 1_R$ et $\mu = \xi_{x_1} \in e_X(X)$. Alors

$$e_X(X) = I_p(X, R).$$

Or, X et $e_X(X)$ sont homéomorphes alors X est homéomorphe à $I_p(X, R)$. □

Théorème 4.14. *Si les anneaux $C_p(X, R)$ et $C_p(Y, R)$ sont topologiquement isomorphes alors les espaces X et Y sont homéomorphes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomorphisme d'anneaux topologiques φ de $C_p(Y, R)$ dans $C_p(X, R)$. Il suffit de montrer que φ induit un homéomorphisme entre $I_p(X, R)$ et $I_p(Y, R)$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : I_p(X, R) &\longrightarrow I_p(Y, R) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

L'application ϕ est bien définie. En effet, soient $f, g \in I_p(X, R)$ tel que $f = g$. Donc

$$f = g \Rightarrow f \circ \varphi = g \circ \varphi \Rightarrow \phi(f) = \phi(g).$$

De plus, $\phi(f) \in I_p(Y, R)$, car $\phi(f) \neq 0$. Et pour toutes $h, g \in C_p(Y, R)$, on a

$$\phi(f)(h.g) = f \circ \varphi(h.g) = f(\varphi(h.g)) = f(\varphi(h).\varphi(g)) = f(\varphi(h))f(\varphi(g)) = \phi(f)(h).\phi(f)(g).$$

D'où $\phi(f)$ est multiplicative et donc $\phi(f) \in I_p(Y, R)$. Montrons que ϕ est un homéomorphisme. On montre d'abord que ϕ est bijective. Soient $f_1,\ f_2 \in I_p(X, R)$ tels que $\phi(f_1) = \phi(f_2)$, donc

$$\phi(f_1) = \phi(f_2) \Rightarrow f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi \Rightarrow f_1 = f_2.$$

D'où ϕ est injective. Et pour tout $g \in I_p(Y, R)$, il existe $f = g \circ \varphi^{-1} \in I_p(X, R)$ tel que $g = \phi(f)$. D'où ϕ est bijective.
Montrons que ϕ est continue. Soit $\Omega = [h, V] \cap I_p(Y, R)$ un ouvert dans $I_p(Y, R)$ avec $h \in C_p(Y, R)$ et V ouvert de R. Donc

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\Omega) &= \{f \in I_p(X, R) : \phi(f) \in \Omega\} \\
&= \{f \in I_p(X, R) : f \circ \varphi \in [h, V] \cap I_p(Y, R)\} \\
&= \{f \in I_p(X, R) : f \in [\varphi(h), V]\} \\
&= [\varphi(h), V] \cap I_p(X, R).
\end{aligned}$$

Comme φ est un isomorphisme, alors $\varphi(h) \in C_p(X, R)$. Donc $[\varphi(h), V]$ est un ouvert dans $I_p(X, R)$. D'où ϕ est continue.
Montrons que ϕ est ouverte. Soit $\Omega' = [g, U] \cap I_p(X, R)$ un ouvert de $I_p(X, R)$, avec $g \in C_p(X, R)$ et U un ouvert de R. Donc, il existe $h \in C_p(Y, R)$ tel que $g = \varphi(h)$.
On a

$$\begin{aligned}
\phi(\Omega') &= \{\phi(f) : f \in \Omega'\} \\
&= \{\phi(f) : f \in [\varphi(h), U] \cap I_p(X, R)\} \\
&= \{\phi(f) : f(\varphi(h)) \in U\} \\
&= \{\phi(f) : f \circ \varphi \in [h, U]\} \\
&= [h, U] \cap I_p(Y, R).
\end{aligned}$$

Donc $\phi(\Omega')$ et un ouvert dans $I_p(Y, R)$. D'où ϕ est ouverte. Donc $I_p(X, R)$ et $I_p(Y, R)$ sont homéomorphes et d'après le Théorème 4.13, X et Y sont homéomorphes. □

Remarque 4.15. *Si $R = \mathbb{R}$ dans le Théorème 4.14, on obtient le* ***Théorème de Nagata****.*

4.3 Théorème de Gelfand-Kolmogorov

Proposition 4.16. *Soit X un espace complètement régulier. Alors, pour tout homomorphisme non trivial $h : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour toute application constante $f_c : X \longrightarrow \mathbb{R}$*

définie par $f_c(x) = c$ pour tout $x \in X$, on a

$$h(f_c) = c, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soit X un espace complètement régulier. Et considérons l'ensemble $C(X)$ comme anneau unitaire muni des lois d'addition et multiplication usuelles. On note par $\bar{1}$ l'élément neutre de l'anneau $C(X)$ par rapport à la multiplication.
Montrons que $h(f_c) = c$ sur trois étapes. Premièrement, pour tout $c \in \mathbb{Z}$, ensuite pour tout $q \in \mathbb{Q}$, finalement, pour $c \in \mathbb{R}$.
Soit $h : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ un homomorphisme d'anneaux non trivial alors

$$h(\bar{1}) = 1.$$

Soit $x \in X$ alors

$$f_n(x) = n = 1 + ... + 1 = \underbrace{\bar{1}(x) + ... + \bar{1}(x)}_{nfois}.$$

Donc

$$f_n = \underbrace{\bar{1} + ... + \bar{1}}_{nfois}.$$

Alors

$$h(f_n) = h(\bar{1} + ... + \bar{1}) = h(\bar{1}) + ... + h(\bar{1}) = \underbrace{1 + ... + 1}_{nfois} = n.$$

Donc

$$h(f_n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $h(f_r) = r$ pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$. Soit $r \in \mathbb{Q}$ alors ils existent (p, q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \dfrac{p}{q}$. Alors, pour $x \in X$ on a

$$f_{p/q}(x) = \frac{p}{q} = f_p(x).f_{1/q}(x).$$

Donc

$$h(f_r) = h(f_{p/q}) = h(f_p.f_{1/q}) = h(f_p).h(f_{1/q}).$$

Montrons d'abord que $h(f_{1/q}) = \dfrac{1}{q}, \forall q \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$\begin{aligned} h(\bar{1}) = 1 &\Rightarrow h(f_q.(f_q)^{-1}) = 1 \\ &\Rightarrow h(f_q).h((f_q)^{-1}) = 1 \\ &\Rightarrow q.h((f_q)^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h((f_q)^{-1}) = \frac{1}{q}.$$

De plus, pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, on a $(f_q)^{-1} = f_{1/q}$. En effet, pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} \bar{1}(x) = 1 &\Rightarrow ((f_q)^{-1}.f_q)(x) = 1 \\ &\Rightarrow (f_q)^{-1}(x).f_q(x) = 1 \\ &\Rightarrow (f_q)^{-1}(x).q = 1 \\ &\Rightarrow (f_q)^{-1}(x) = \frac{1}{q} = f_{1/q}(x). \end{aligned}$$

Alors

$$h((f_q)^{-1}) = h(f_{1/q}) = \frac{1}{q}, \forall q \in \mathbb{Z}^*.$$

Donc $h(r) = h(f_p).h(f_{1/q}) = p.(\frac{1}{q}) = r$. D'où le résultat.

Montrons maintenant que $h(f_c) = c$ pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Premièrement, on montre qu'il existe un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{K}$ l'ensemble de toutes les applications constantes définies de X dans $\mathbb{R}$ et l'anneau $\mathbb{R}$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{K} \\ c &\longmapsto f_c \end{aligned}$$

Il est clair que f est un homomorphisme d'anneaux. Soient $c, c' \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = f(c')$ alors $f_c = f_{c'}$. Donc pour tout $x \in X$ on a

$$f_c(x) = f_{c'}(x) \Rightarrow c = c'.$$

D'où f est injective. Soit $g \in \mathcal{K}$ tel que $g(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, alors il existe $c = y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g = f(c)$. D'où la surjectivité. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c &\longmapsto \psi(c) = (h \circ f)(c) = h(f_c) \end{aligned}$$

Comme h et f sont des morphisme d'anneaux donc ψ est un morphisme d'anneau. Soient $c, d \in \mathbb{R}$ tel que $c \leq d$ alors $d - c \geq 0$ donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $d - c = a^2$. Donc

$$\psi(d) - \psi(c) = \psi(a^2)$$

alors

$$\psi(d - c) = (\psi(a))^2 \geq 0$$

d'où

$$\psi(c) \leq \psi(d) \ \ldots (*)$$

Il résulte que $\psi(c) = c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. En effet, supposons qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(b) \neq b$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $b \leq q \leq \psi(b)$. D'après $(*)$ on a

$$\psi(b) \leq \psi(q) = (h \circ f)(q) = h(f(q)) = h(f_q) = q$$

alors $\psi(b) \leq q$. Mais on a $q \leq \psi(b)$, donc $\psi(b) = q = \psi(q)$ alors $b = q$ ce qui est absurde. D'où $\psi(c) = c, \forall c \in \mathbb{R}$ donc

$$(h \circ f)(c) = h(f(c)) = h(f_c) = c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.17. *Soit X un espace complètement régulier. Fixons arbitrairement x_0 un point dans X. Alors l'ensemble $I_{x_0} = \{f \in C_p(X) : f(x_0) = 0\}$ forme un idéal propre de l'anneau $C(X)$. Si de plus X est un espace compact alors tout idéal propre J de $C_p(X)$ est contenu dans un idéal constitué de fonctions de $C_p(X)$ qui s'annulent à un point arbitraire $x \in X$.*

Démonstration. Montrons d'abord que I_{x_0} est un idéal propre de $C_p(X)$. Il est clair que I_{x_0} est un sous groupe de $C_p(X)$. Soient $f \in I_{x_0}$ et $g \in C_p(X)$. Alors

$$(f.g)(x_0) = f(x_0).g(x_0) = 0.$$

Donc $f.g \in I_{x_0}$. D'où I_{x_0} est un idéal de $C_p(X)$.
Comme X est complètement régulier alors il existe $f \in C_p(X)$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Donc $f \notin I_{x_0}$. D'où I_{x_0} est un idéal propre de $C_p(X)$.

Montrons maintenant la deuxième partie, supposons que J est un idéal propre de $C_p(X)$ et soit $f \in J$.
L'ensemble $f^{-1}(0)$ est non vide, car si $f^{-1}(0) = \emptyset$ on aura $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in X$. Donc $\frac{1}{f} \in C_p(X)$. Comme J est un idéal alors $f.(\frac{1}{f}) \in J$ donc $\bar{1} \in J$ d'où $J = C_p(X)$ ce qui est absurde car J est propre.
Soit l'ensemble $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$. L'ensemble $Z(f)$ est fermé car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et f est continue. Soient $f_1, ..., f_n \in J$ alors $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2 \in J$, car J est idéal. D'après ce qui précède $Z(f) = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ et on a

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \in X : \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x) = 0\} \\
&= \{x \in X : {f_1}^2(x) + {f_2}^2(x) + ... + {f_n}^2(x) = 0\} \\
&= \{x \in X : f_i(x) = 0, i = 1, ..., n.\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{{f_i}^{-1}(0)\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} Z(f_i).
\end{aligned}
$$

Donc la famille $\{Z(f), f \in J\}$ est une famille centrée de fermés et comme X est compact alors

$$\bigcap\{Z(f) : f \in J\} \neq \emptyset.$$

Soit $x_0 \in \bigcap\{Z(f) : f \in J\}$. Alors on a $f(x_0) = 0$ pour tout $f \in J$ donc $J \subseteq I_{x_0}$. □

Proposition 4.18. *Soit X un espace compact et soit J un idéal maximal propre de $C_p(X)$. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que $J = I_{x_0}$. Par conséquent tout idéal maximal de $C_p(X)$ est fermé.*

Démonstration. Comme J est un idéal propre alors d'après la Proposition 4.17, il existe $x_0 \in X$ tel que $J \subseteq I_{x_0}$. Or, J est maximal alors nécessairement $J = I_{x_0}$. Remarquons que $I_{x_0} = \xi_{x_0}^{-1}(0)$ avec ξ_x est l'application évaluation. Comme ξ_{x_0} est continue et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ alors $\xi_{x_0}^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $C_p(X)$. □

Proposition 4.19. *Soit X un espace compact. Soit $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble de tous les homomorphismes non nuls définies de $C_p(X)$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{H}(X) = e_X(X)$.*

Démonstration. Considérons l'application évaluation canonique

$$
\begin{aligned}
e_X : X &\longrightarrow C_p(C_p(X)) \\
x &\longmapsto \xi_x
\end{aligned}
$$

On peut facilement montrer que pour $x \in X$, $\xi_x : C_p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ est un homomorphisme d'anneaux. Donc $e_X(X) \subseteq \mathcal{H}(X)$. Montrons maintenant que $\mathcal{H}(X) \subseteq e_X(X)$.
Soit $h \in \mathcal{H}(X)$. Comme $\mathbb{R}$ est un corps alors le noyau $h^{-1}(0)$ est un idéal maximal de $C_p(X)$. Donc il existe $x_0 \in X$ tel que $h^{-1}(0) = I_{x_0}$. Soit $f \in C_p(X)$ et posons $f(x_0) = c_0$. Considérons l'application constante $f_{c_0} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f_{c_0}(x) = c_0$. Alors

$$(f - f_{c_0})(x_0) = f(x_0) - f_{c_0}(x_0) = c_0 - c_0 = 0.$$

Donc $f - f_{c_0} \in I_{x_0} = h^{-1}(0)$. D'où $h(f - f_{c_0}) = 0$. Comme h est un morphisme d'anneaux alors $h(f) - h(f_{c_0}) = 0$, ce qui implique que

$$h(f) = h(f_{c_0}) = c_0 = f(x_0).$$

On a montré que $h(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in C_p(X)$, alors $h(f) = \xi_{x_0}(f)$ pour tout $f \in C_p(X)$. Donc pour tout homomorphisme $h \in \mathcal{H}(X)$, il existe $x_0 \in X$ tel que $h = \xi_{x_0}$. D'où $\mathcal{H}(X) = e_X(X)$. D'après la Proposition 3.11 $\mathcal{H}(X)$ est homéomorphe à X. $\square$

Théorème 4.20. ***(Théorème de Gelfand-Kolmogorov)***
Soient X, Y deux espaces compacts et soit $h : C(X) \longrightarrow C(Y)$ un isomorphisme d'anneaux alors, X et Y sont homéomorphes.

Démonstration. D'après la Proposition 4.19, on a $\mathcal{H}(X) \simeq X$ ($\mathcal{H}(Y) \simeq Y$), donc il suffit de montrer que l'isomorphisme entre $C(X)$ et $C(Y)$ induit un homéomorphisme entre les deux anneaux $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}(Y)$. Sachant que $\mathcal{H}(X)$ ($\mathcal{H}(Y)$) est muni de la topologie induite de la topologie produit de $C(X)$.
Soit $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ un isomorphisme d'anneaux algébrique. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(Y) \\ h &\longmapsto \psi(h) = h \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

Montrons que ψ est un homéomorphisme. Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(X)$ tel que $\psi(h_1) = \psi(h_2)$. Alors $h_1 \circ \varphi^{-1} = h_2 \circ \varphi^{-1}$, donc $h_1 = h_2$. D'où ψ est injective. Soit $g \in \mathcal{H}(Y)$ tel que $g = \psi(h)$ alors, il existe $h = g \circ \varphi$ tel que $g = \psi(h)$. D'où ψ est surjective.
Montrons que ψ est continue. Soit W un ouvert de base de $\mathcal{H}(Y)$. Alors

$$W = [f, V] \cap \mathcal{H}(Y)$$

avec $f \in C(X)$ et V ouvert dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(W) &= \{h \in \mathcal{H}(X) : \psi(h) \in W\} \\ &= \{h \in \mathcal{H}(X) : h \circ \varphi^{-1} \in [f, V]\} \\ &= \{h \in \mathcal{H}(X) : (h \circ \varphi^{-1})(f) \in V\} \\ &= \{h \in \mathcal{H}(X) : h(\varphi^{-1}(f)) \in V\} \\ &= \{h \in \mathcal{H}(X) : h \in [\varphi^{-1}(f), V]\} \end{aligned}$$

$$= \mathcal{H}(X) \cap [\varphi^{-1}(f), V].$$

D'où $\psi^{-1}(W)$ est un ouvert de $\mathcal{H}(X)$. Montrons que ψ est une application bijective et que l'application inverse est continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathcal{H}(Y) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ g &\longmapsto \psi^{-1}(g) = g \circ \varphi \end{aligned}$$

De la même manière que ψ, on montre que ψ^{-1} est continue. De plus, on a

$$(\psi \circ \psi^{-1})(h) = \psi(\psi^{-1}(h)) = \psi(h \circ \varphi) = h \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = h, \forall h \in \mathcal{H}(Y).$$

Donc $\psi \circ \psi^{-1} = id_{\mathcal{H}(Y)}$. De la même manière, on trouve $\psi^{-1} \circ \psi = id_{\mathcal{H}(X)}$. D'où ψ est bijective et donc est un homéomorphisme entre $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}(Y)$. Donc X et Y sont homéomorphes. D'où le résultat. $\square$

Bibliographie

[1] **A.V. Arhangel'skii**, *General topology III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol 51 (1989).

[2] **A.V. Arkhangel'Skii** *Topological function spaces.* Mathématics and it's Applications(Soviet Series), Vol 78, Kluer Academic Publishers Group, Dordrecht, Boston, London, (1992).

[3] **N. Bourbaki**, *Éléments de mathématiques, Topologie Générale*, Chapitre 1 à 4, Paris, (1971).

[4] **M. M. Choban, R. N. Dumbrăveanu**, $l_p(R)$*-equivalence of topological spaces and topological modules*, Bul. Acad.Ştiinţe Repub. Mold. Mat., (2015), no. 1, pp 20-47.

[5] **R. Engelking**, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol 6, (1989).

[6] **L. Gillman, M. Jerison**, *Rings of continuous functions*, D.Van Nostrand Company, INC, (1960).

[7] **G.L.M. Groenewegen, A.C.M. Van Rooij**, *Spaces of continuous functions*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol 4, (2016).

[8] **T. Husain**, *Topology and maps*, Mathematical concepts and methods in science and engineering, Vol 5, (1977).

[9] **Y. Matsushima**, *Groupe de Lie*, Cours de l'institut Fourier, tome 1 (1966).

[10] **R.A. McCoy, I. Ntantu**,*Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Note in Math, N0 1315, Springer-Verlag Germany, (1988).

[11] **J. Munkres**, *Topology* , 2nd ed. Pearson Education Limited, (2013).

[12] **J. Nagata**, *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces*, Osaka Math. J. 1 (1949), no. 2, pp 166-181.

[13] **V. V. Tkachuk**, *A* C_p*- Theory problem book, Functional equivalencies*, Springer, (2016).

[14] **V. V. Tkachuk**, *A C_p- Theory problem book, Topological and function spaces*, Springer, (2011).

[15] **S. Touré**, *Algèbre*, Premier cycle, EDICEF, (1991).

[16] **J. Van Mill**, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, Vol 64, (2001).

[17] **S. Warner**, *Topological rings*. North holand mathematics studies. Elsevier, vol 178, (1993).

[18] **A. Wilansky**, *Topology for analysis*, George Springer, Indiana University, (1970).

ملخـــص

نهتم في عملنا هذا بدراسة فضاء التطبيقات المستمرة المعرفة على فضاء طوبولوجي X نحو فضاء (مقياس) طوبولوجي E، مزود بطوبولوجيا التقارب البسيط، يرمز له بـ $C_p(X,E)$. نبين أنه إذا كان E مقياس طوبولوجي على الحلقة R فإن الفضاء $C_p(X,E)$ أيضا يكتسب بنية مقياس طوبولوجي على الحلقة R ونعطي بعض الخواص. ثم نقدم شروط لازمة و كافية حتى يكون فضاءان X و Y متشاكلين طوبولوجيا. من أجل هذا نعرض نظريتين مهمتين، نظرية ناغاتا ونظرية جالفند - كولموغروف.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de l'espace des applications continues définies d'un espace topologique X dans un espace (R-module) topologique E muni de la topologie de la convergence simple, noté $C_p(X,E)$. On montre que si E est un module topologique sur un anneau R alors l'espace $C_p(X,E)$ est aussi un R-module topologique. Par la suite, on définit l'application évaluation canonique et on donne quelques propriétés. Ceci va nous permettre de donner des critères pour que deux espaces topologiques soient homéomorphes. Pour cela on expose deux théorèmes connues. Le Théorème de Nagata et le Théorème de Gelfand-Kolmogorov.

Abstract

In this thesis we focus on the study of the space of continuous mappings defined from a topological space X to a topological space (R-module) E endowed with the topology of pointwise convergence, denoted by $C_p(X,E)$. We show that if E is a topological R-module then the space $C_p(X,E)$ is also a topological R-module. Then, we define the canonical evaluation mapping and give some properties. This will allow us to give criteria for two topological spaces to be homeomorphic. Two well-known theorems are exhibited; Theorem of Nagata and Theroem of Gelfand-Kolmogorv.