



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Sur quelques problèmes d'inéquations variationnelles d'évolution

Présenté par :

- Bouach Abderrahim.
- Khenifar Messaoud.

Devant le jury :

- | | | |
|-----------|-----------------------|---------------------------------|
| Président | : Arroud Chems eddine | M.C.B Université de Jijel. |
| Encadreur | : Haddad Tahar | Professeur Université de Jijel. |
| Examineur | : Yakhlef Othman | M.C.B Université de Jijel. |

Dédicace

A

Mes parents,

mes frères,

*à tous ceux qui ont toujours cru à ma
réussite...*

Nous dédions ce modeste travail.

» B.Abderrahim »

» H.Messaoud »

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr Haddad Tahar, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. Ch. Arroud, qui me fait l'honneur de présider ce jury. O. Yakhlef, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

A, TOUS, UN GRAND MERCI.

Table des matières

Introduction	7
1 Concepts de base et résultats préliminaires	8
1.1 Ensembles convexes	8
1.2 Fonctions convexes	9
1.3 Topologie faible	10
1.4 Semi-continuité	11
1.5 Sous-différentiel et cône normal	13
1.6 Fonctions conjuguées	15
1.7 Fonction indicatrice	16
1.8 Fonction support	17
1.9 Distance de Hausdorff	20
1.10 Multi-applications et continuité	21
1.11 Opérateurs maximaux monotones	21
1.12 Fonctions absolument continues	24
1.13 Inégalités de Grönwall	25
2 Inégalité quasi-variationnelle d'évolution et processus de rafle	27

Table des matières	2
2.1 Résultats auxiliaires	29
2.2 Résultats d'existence et d'unicité	35
2.3 Résolution de l'inégalité quasi-variationnelle d'évolution	45
3 Application au problème de contact avec frottement Quasi-statique	47
Conclusion	53
Bibliographie	54

Notations et abréviations

Ω	est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3).
Γ	la frontière de Ω supposée régulière .
$mes(\Gamma)$	la mesure de Lebesgue de Γ .
ν	La normale unitaire sortante à Γ .
\mathbb{S}^d	L'espace des matrices symétrique d'ordre d .
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$C([0, T], H)$	espace des fonctions continues de $[0, T]$ à valeurs dans H .
$\ \cdot\ _{C([0, T], H)}$	La norme de $C([0, T], H)$.
H	un espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit scalaire de H .
$\ \cdot\ $	la norme de H .
$L^2([0, T], H)$	espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H .
(\cdot, \cdot)	les crochets de dualités.
$p.p$	presque par tout.
$int(C)$	intérieur d'un ensemble C .
$adh(C)$	adhérence d'un ensemble C .
C^-	le cône polaire négatif d'un ensemble C .
C^\perp	le sous-espace orthogonal d'un ensemble C .
$\iota_C(\cdot)$	la fonction caractéristique d'un ensemble C .
$\nabla f(x_0)$	le gradient de f au point x_0 .
$Div(f)$	la divergence de la fonction f .
\mathbb{B}	boule unité fermée .
\rightharpoonup	convergence faible.
$s.c.i$	semi-continue inférieurement.
$s.c.s$	semi-continue supérieurement.

Introduction

Ce mémoire est dévolu à l'étude d'inclusions différentielles associées à des cônes normaux. ce type de problème a été introduit a **1971** dans un célèbre exposé de J.J.Moreau. En effet, dans [20], ce dernier a introduit et a étudié minutieusement le problème suivant qui est connu sous le nom de processus de rafle :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(u(t))$ et le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $u(t)$.

Pour interpréter le mécanisme décrit par ce problème , on suppose que $u(t)$ se trouve à l'ensemble $C(t)$ a ce point est réduit à zéro et donc, la vitesse du point est nulle , c-à-d le point ne bouge pas. par contre, tout contact du point $u(t)$ avec la frontière de l'ensemble $C(t)$ produit un choc qui repousse ce première avec une vitesse opposée à la normale à l'ensemble. En résumé, le problème décrit le mouvement d'un ensemble qui traîne un point.

Il intervient dans beaucoup de domaine comme dans l'élastoplasticité, en contrôle optimale, en médecine avec la modélisation de canaux de médicaments, en modélisation de mouvement de foule, de circuit électrique, etc...

Récemment, dans [3], les auteurs ont proposé une nouvelle variante du processus de rafle avec des contraintes sur la vitesse :

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

$A_0, A_1 : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires bornés. Ils ont montré le caractère bien posé pour cette variante sous la bornitude de C . Des applications sur les circuits

électriques non-réguliers ont été fourni. Le cas des contraintes non bornées C a été relaxé dans [5]. Poursuivre l'idée, une autre variante du processus de rafle implicite a été introduit et étudié dans [3] :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(Au'(t) + Bu(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec condition de compatibilité :

$$Bu_0 \in C(0).$$

où $A, B : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires, bornés.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une généralisation de la variante étudiée dans [2] dans le cas d'un ensemble mobile dépendant de l'État

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t, u(t))}(Au'(t) + Bu(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

sans recourir à aucune hypothèse de compacité, ce qui est connu pour être un problème ouvert. La condition de viabilité initiale supplémentaire $Bu_0 \in C(0)$ n'est plus requise ici, ce qui permet une vitesse initiale différente de zéro. L'ensemble des contraintes est censé se déplacer d'une manière absolument continue en ce qui concerne le temps et Lipschitz continue par rapport à l'État. Le cône normal à l'ensemble mobile est supposé être **hypomonotone-like** (Voir l'**hypothèse 2** pour la définition). Mentionnons que la classe des cartes à valeur définie satisfaisant cette dernière propriété est très grande pour les applications (voir lemmes 2.1.1, 2.1.2 pour plus de détails).

Pour conclure cette introduction, nous mentionnons que le présent travail peut être considéré comme une amélioration et une extension de la recherche initiée par les auteurs dans [2]. En fait, la technique utilisée dans le présent document diffère de celle employée dans [2]. La preuve ici est basée sur une discrétisation temporelle implicite combinée avec la construction d'une suite de Cauchy par interpolation linéaire qui converge fortement vers une solution unique de (2.5). De toute évidence, l'unicité d'une solution, ainsi que la convergence forte des solutions approximatives à la solution unique, obtenue dans cet mémoire, sont des propriétés importantes, comparées à la convergence faible d'une sous-suite obtenue en [2, 3, 5]. Notez que la condition de compatibilité (2.4) n'est plus nécessaire ici, qui est en concordance avec le résultat obtenu en [25] pour le problème de contact avec frottement quasi-statique (voir théorème 10,3 page 193 et Remarque 4,6 dans [2]). Tous les résultats de ce mémoire sont dûs aux auteurs de [1] Le document est organisé comme suit. Nous rappelons dans le **chapitre 1** quelques notations de base, des définitions et des résultats qui sont utilisés dans

tout le mémoire. Dans le **chapitre 2**, le caractère bien-posé de (2.5) est soigneusement étudié en utilisant une discrétisation temporelle implicite. Une application au problème de contact avec frottement quasi-statique est donnée dans le **chapitre 3** .

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. On commence par quelques notations, puis nous présentons quelques concepts d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle.

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 (Ensembles convexes). *Un sous-ensemble C de H est dit convexe si*

$$\forall x, y \in C \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

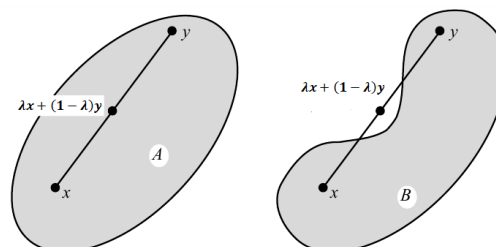


FIGURE 1.1 – A convexe, B non convexe.

Exemple 1.1.1.

1. H et \emptyset sont convexes.
2. Les convexes de \mathbb{R} sont les intervalles de \mathbb{R} .
3. Une boule ouverte ou fermée est convexe.

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1 (Domaine effectif). Soient H un espace de Hilbert et une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de J l'ensemble défini par :

$$\text{dom}J := \{x \in H : J(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.2 (Fonction propre). La fonction J est dit propre si $\text{dom}f \neq \emptyset$ et $J(x) \neq -\infty, \forall x \in H$.

Définition 1.2.3 (Fonction convexe). On dit qu'une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x, y \in \text{dom}J$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$J(tx + (1 - t)y) \leq tJ(x) + (1 - t)J(y).$$

Exemple 1.2.1. Soient $B : H \rightarrow H$ une application linéaire symétrique et une fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ alors :
 B est semi-défini positif si et seulement si f est convexe.

Définition 1.2.4 (Épigraphe). On appelle épigraphe d'une fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble défini par :

$$\text{epi}J := \{(x, t) \in H \times \mathbb{R} : J(x) \leq t\}.$$

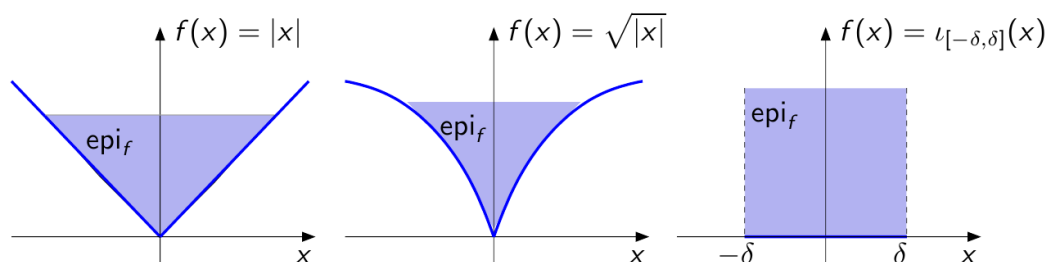


FIGURE 1.2 – Exemples Épigraphe des fonctions usuelles.

propriété 1.2.1.

1. J est convexe si et seulement si son épigraphe est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.
2. Si J_1 et J_2 sont des fonctions convexes, alors $J_1 + J_2$ est convexe.
3. $(J_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions convexe alors **l'enveloppe supérieure** des (J_i) est convexe c'est-à-dire la fonction J définie par :

$$J(x) = \sup_{i \in I} J_i(x)$$

est convexe.

1.3 Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique i.e., $E' = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ linéaire continue}\}$ tel que pour tout $f \in E'$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x \rangle|.$$

On désigne par $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 1.3.1. La **topologie faible** $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E (avec le minimum d'ouverts) rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.

Définition 1.3.2. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ est converge vers x pour la topologie faible $(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x)$ si et seulement si $(f, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f, x)$, $\forall f \in E'$.

Remarque 1.3.1. Si E est un espace de Hilbert donc on peut identifier E' par E , alors

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Leftrightarrow \langle y, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle y, x \rangle, \forall y \in E.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de E .

Proposition 1.3.1. [14] Tout ensemble borné B dans un espace de Hilbert H est **faiblement relativement compact** i.e. de toute suite $(w_n)_n$ de B , il existe $w \in H$ et une sous-suite extraire $(w_{n_k})_k$ tels que $(w_{n_k})_k$ converge faiblement vers w dans H i.e.

$$\forall \varphi \in H : \langle w_{n_k}, \varphi \rangle \rightarrow \langle w, \varphi \rangle, \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Proposition 1.3.2. [14] Soit C un convexe fermé de E , alors C est faiblement fermé.

1.4 Semi-continuité

Pour une fonction $J : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nous pouvons définir la semi-continuité.

Définition 1.4.1 (Semi-continuité inférieure). Une fonction $J : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement sur H (**en abrégé s.c.i**) si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x , on a :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) \geq J(x)$$

Exemple 1.4.1. Soit $A : H \longrightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi-définie positive, alors

la fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ est s.c.i sur H .

En effet,

Soit x_n une suite converge vers x dans H alors par la linéarité de A , on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle A(x - x_n), x - x_n \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle - \langle Ax, x_n \rangle - \langle Ax_n, x \rangle + \langle Ax_n, x_n \rangle \end{aligned}$$

Par la symétrie de A et du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} f(x - x_n) &= \langle Ax, x \rangle - 2\langle Ax, x_n \rangle + \langle Ax_n, x_n \rangle \\ &= f(x) - 2\langle Ax, x_n \rangle + f(x_n) \end{aligned}$$

Et comme A est semi-définie positive, on déduit que

$$f(x) - 2\langle Ax, x_n \rangle + f(x_n) \geq 0$$

Or

$$2\langle Ax, x_n \rangle - f(x) \leq f(x_n)$$

Il est clair que $\langle Ax, x_n \rangle \longrightarrow \langle Ax, x \rangle = f(x)$ quand $n \longrightarrow \infty$ (par la continuité du produit scalaire), donc en passant à la limite inférieure, on obtient

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

D'où le résultat.

Remarque 1.4.1.

1. J est s.c.s si $(-J)$ est s.c.i.

2. J est continue si et seulement si J est s.c.s et s.c.i. à la fois.

propriété 1.4.1.

1. J est s.c.i si et seulement si son épigraphe est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

2. Si J_1 et J_2 sont s.c.i alors $J_1 + J_2$ est s.c.i.

3. $(J_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions s.c.i alors **l'enveloppe supérieure** des (J_i) est s.c.i.

Définition 1.4.2. Une fonction $f : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est faiblement semi-continue inférieurement sur H si pour tout $x_n \rightarrow x$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Remarque 1.4.2. Toute fonction faiblement s.c.i alors elle est s.c.i mais la réciproque est n'est pas vraie en générale, elle est juste sous la convexité de la fonction.

Exemple 1.4.2. Soit $A : H \rightarrow H$ une application linéaire, symétrique et semi-définie positive, alors

la fonction $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ est faiblement s.c.i sur H .

Théorème 1.4.1. [11] Soit E un espace vectoriel topologique compact et soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i, alors f atteint son minimum sur E .

1.5 Sous-différentiel et cône normal

Définition 1.5.1 (Sous-différentiel). Soient H un espace de Hilbert et f une fonction convexe, propre et définie de H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in \text{dom}(f)$.

Le sous-différentiel de f au point x_0 , noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H défini par :

$$\partial f(x_0) := \{ \xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle, \forall x \in H \}.$$

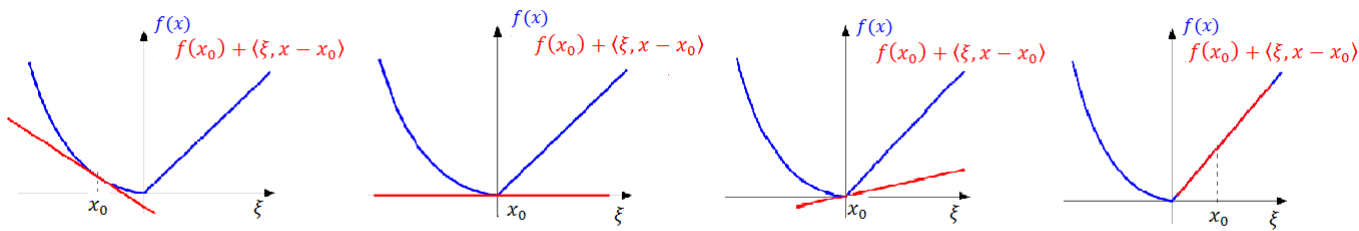


FIGURE 1.3 – Le sous différentiel (animation).

Remarque 1.5.1. Si $x_0 \notin \text{dom}(f)$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.

Exemple 1.5.1.

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x|. \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. En effet,

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{ y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} : xy \leq x, \forall x > 0 \} \cap \{ y \in \mathbb{R} : xy \leq -x, \forall x < 0 \} \cap \mathbb{R} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} : y \leq 1 \} \cap \{ y \in \mathbb{R} : y \geq -1 \} \cap \mathbb{R} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.1. Si $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable en x_0 alors

$$\partial f(x_0) = \{ \nabla f(x_0) \}.$$

Définition 1.5.2 (Cône). Un sous-ensemble $C \subset H$ est un cône si

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in C.$$

Définition 1.5.3 (Cône normal). Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe et $x_0 \in C$. On appelle cône normal de C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :

$$N_C(x_0) = \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C\}.$$

On vérifie aisément que $N_C(x_0)$ est un cône convexe et fermé et que $\{0\} \in N_C(x_0)$.

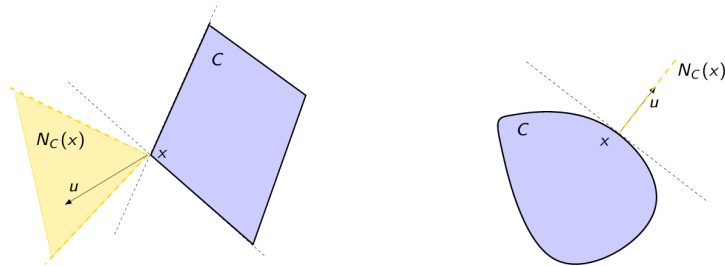


FIGURE 1.4 – Exemple de Cônes normaux.

Théorème 1.5.1. Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe tel que $\text{int}(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in \text{int}(C)$, on a $N_C(x) = \{0\}$.

Preuve. Soit $v \in N_C(x) \implies v = 0$?

$$x \in \text{int}(C) \implies \exists \delta > 0 \quad x + \delta B(0, 1) \subset C,$$

$$\langle v, x + \delta e - x \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1),$$

$$\langle v, \delta e \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1),$$

$$\langle v, e \rangle \leq 0 \quad \forall e \in B(0, 1).$$

Soit $r > 0$ suffisamment petit telle que $rv \in B(0, 1)$

$$\langle v, rv \rangle \leq 0 \implies r \|v\|^2 \leq 0,$$

$$\implies \|v\| = 0 \implies v = 0.$$

■

Proposition 1.5.2. Soit C un sous-ensemble convexe de H et $x, y \in H$ tel que $x + y \in C$, $-x \in C$ alors :

$$1) N_C(x + y) = N_{C-y}(x) .$$

$$2) N_C(-x) = -N_{-C}(x) .$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 1) \text{ soit } z \in N_C(x+y) &\iff \langle z, w-x-y \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\ &\iff \langle z, (w-y) - x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\ &\iff z \in N_{C-y}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ soit } z \in N_C(-x) &\iff \langle z, w+x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\ &\iff \langle -z, -w-x \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C, \\ &\iff -z \in N_{-C}(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.6 Fonctions conjuguées

Définition 1.6.1. *Étant donnée une fonction propre $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on définit la fonction $J^* : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, **conjugué** de J par :*

$$J^*(x^*) := \sup_{x \in H} \{ \langle x^*, x \rangle - J(x) \}.$$

L'application $J \mapsto J^*$ est appelée **transformation de Legendre-Fenchel**.

Notons que J^* est une fonction convexe et s.c.i sur H . En effet, pour chaque $x \in H$ **fixé** l'application $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle - J(x)$ est convexe et continue, donc s.c.i. Par suite, **l'enveloppe supérieure** de ces fonctions (lorsque x parcourt l'ensemble d'indices H) est convexe et s.c.i.

Proposition 1.6.1. [14] *On suppose que J est une fonction convexe s.c.i et propre, alors J^* est une fonction propre.*

On définit maintenant, lorsque J^* est une fonction propre, la fonction $J^{**} : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$J^{**}(x) := \sup_{x^* \in H} \{ \langle x^*, x \rangle - J^*(x^*) \}.$$

Théorème 1.6.1. [14](Fenchel-Moreau). *On suppose que J est une fonction propre, convexe et s.c.i. alors $J^{**} = J$.*

Lemme 1.6.1. *Soit $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe et s.c.i alors :*

$$x^* \in \partial J(x) \iff x \in \partial J^*(x^*).$$

Ce signifié que $(\partial J)^{-1} = \partial J^*$.

Preuve. Soit $x^* \in \partial J(x)$ et donc

$$J(y) - J(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in H.$$

Or

$$\langle x^*, x \rangle - J(x) \geq \langle x^*, y \rangle - J(y), \quad \forall y \in H.$$

Par suite $J^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle - J(x)$, d'où pour tout $z \in H$:

$$J^*(z) - J^*(x^*) \geq \langle z, x \rangle - J(x) - \langle x^*, x \rangle + J(x) = \langle z - x^*, x \rangle.$$

Par conséquent $x \in \partial J^*(x^*)$.

Inversement, soit $x \in \partial J^*(x^*)$ alors en utilisant le résultat précédent on trouve que $x^* \in \partial J^{**}(x)$, comme J une fonction propre, convexe et s.c.i alors d'après le théorème 1.6.1 on a : $J = J^{**}$, et par suite $x^* \in \partial J(x)$. ■

1.7 Fonction indicatrice

Définition 1.7.1. Soit C un sous-ensemble non vide de H , la fonction indicatrice associée à C est définie par :

$$\begin{aligned} \delta_C(\cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C, \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

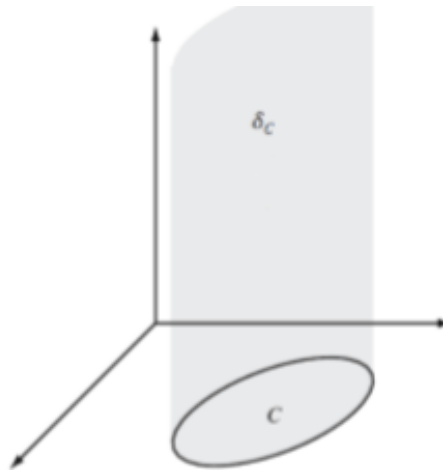


FIGURE 1.5 – Fonction indicatrice.

Remarque 1.7.1.

1. $\text{dom}(\delta_C) = C$ et $\text{epi}(\delta_C) = C \times [0, +\infty]$.
2. La fonction $\delta_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe de H .
3. La fonction $\delta_C(\cdot)$ est s.c.i si et seulement si C est fermé dans H .

Proposition 1.7.1. Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H , et $x_0 \in H$, alors

$$\partial\delta_C(x_0) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_0 \notin C. \\ N_C(x_0) & \text{si } x_0 \in C. \end{cases}$$

Preuve. .

- * Si $x_0 \notin C$, on a évidemment que $\partial\delta_C(x_0) = \emptyset$.
- * Si $x_0 \in C$, on va montrer que $\partial\delta_C(x_0) = N_C(x_0)$.

Soit $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$, alors

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0), \quad \forall x \in H.$$

En particulier pour $x \in C$ on a

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

Or $\xi \in N_C(x_0)$.

Inversement, si $\xi \in N_C(x_0)$ alors

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C$$

Or $\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0)$, $\forall x \in C$.

De plus $\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \delta_C(x) - \delta_C(x_0)$, $\forall x \in H$ (puisque $\delta_C(x) = +\infty$, si $x \notin C$), donc $\xi \in \partial\delta_C(x_0)$.

D'où le résultat. ■

1.8 Fonction support

Définition 1.8.1. On appelle fonction support de $C \subset H$ qu'on note $\sigma(C, \cdot)$ la fonction définie sur H par :

$$\begin{aligned} \sigma(C, \cdot) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \xi &\longmapsto \sigma(C, \xi) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

Le domaine de $\sigma(C, \cdot)$ est appelé le **cône barrière** de C et souvent désigné par $b(C) := \text{dom}(\sigma(C, \cdot))$.

Exemple 1.8.1.

1. Si $C = \{x\}$, alors $\sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle$.
2. Si $C = \mathbb{B}$, alors $\sigma(C, \xi) = \|\xi\|$.
3. Si C est un cône, alors $\sigma(C, \xi) = \delta_C(\xi)$ et $b(C) = C^-$.
4. Si C est un sous-espace vectoriel, alors $\sigma(C, \xi) = \delta_{C^\perp}(\xi)$ et $b(C) = C^\perp$.

Proposition 1.8.1.

1. Pour tout $C \subset H$ non vide la fonction support est sous-additive, positivement homogène (i.e. $\sigma(C, \xi_1 + \xi_2) \leq \sigma(C, \xi_1) + \sigma(C, \xi_2)$ et $\sigma(C, \lambda\xi) = \lambda\sigma(C, \xi) \forall \lambda > 0$).
2. Pour tout $C_1, C_2 \subset H$, et $\xi \in H$, nous avons : $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$ et $\sigma(C_1 \cup C_2, \xi) = \max(\sigma(C_1, \xi), \sigma(C_2, \xi))$.

Remarque 1.8.1. soit C un ensemble **non vide** de H :

$$1. \delta_C^*(y) = \sup_{x \in H} \{\langle y, x \rangle - \delta_C(x)\} = \sup_{x \in C} \langle y, x \rangle = \sigma_C(y), \quad \forall y \in H.$$

Donc la fonction support est la conjuguée de l'indicatrice.

2. D'après la proposition précédente la fonction support $\sigma(C, \cdot)$ est convexe sur H même si l'ensemble C n'est pas convexe de H .
3. La fonction support est propre et s.c.i même si l'ensemble C n'est pas fermé de H .

Proposition 1.8.2. Toute fonction support $\sigma(C, \cdot)$ d'un sous-ensemble $C \subset H$ est une fonction propre, convexe s.c.i et positivement homogène de H dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Inversement, toute fonction $J : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre, convexe s.c.i et positivement homogène est la fonction support de l'ensemble suivant :

$$C_\sigma := \{\xi \in H / \forall x \in H, \langle \xi, x \rangle \leq J(x)\}.$$

De plus, si $J(0) = 0$ on a : $C_\sigma := \partial J(0)$.

Preuve. D'après ce qui précède la première assertion est évidente.

Pour établir la seconde, calculons la fonction conjuguée de J :

Si x^* appartient à C_σ , alors $J^*(x^*) = 0$ car

$$J^*(x^*) = \sup_{x \in H} \{\langle x^*, x \rangle - J(x)\} \leq 0 = \langle x^*, 0 \rangle - J(0) \leq J^*(x^*).$$

Si x^* n'appartient pas à C_σ , il existe alors $x_0 \in H$ tel que $\langle x^*, x_0 \rangle - J(x_0) > 0$ donc

$$J^*(x^*) \geq \sup_{\lambda > 0} \{\langle x^*, \lambda x_0 \rangle - J(\lambda x_0)\}$$

Comme la fonction J est positivement homogène alors :

$$J^*(x^*) \geq \sup_{\lambda > 0} \lambda \{ \langle x^*, x_0 \rangle - J(x_0) \} = +\infty.$$

Nous avons donc vérifié que J^* est la fonction indicatrice de C_σ .

Puisque J est une fonction propre, convexe et s.c.i on déduit que :

$$J(x^*) = J^{**}(x^*) = \delta_{C_\sigma}^*(x^*) = \sigma(C_\sigma, x^*), \forall x^* \in H.$$

■

Proposition 1.8.3. *Soit C un sous-ensemble non vide et convexe de H et x un élément de C , alors*

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle.$$

Preuve. Soit $y \in C$, alors

$$\begin{aligned} \xi \in N_C(x) &\Leftrightarrow \langle \xi, y - x \rangle \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \xi, y \rangle \leq \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

En appliquant le sup sur y on obtient :

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \langle \xi, x \rangle.$$

Comme $x \in C$, on a $\sigma(C, \xi) \geq \langle \xi, x \rangle$, alors

$$\xi \in N_C(x) \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) = \langle \xi, x \rangle.$$

D'où le résultat. ■

Lemme 1.8.1. [22] *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $u_n : [0, T] \rightarrow H$ telle que $u_n \rightarrow u_*$ dans $L^2([0, T]; H)$, i.e.*

$$\int_0^T \langle u_n(t), \varphi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u_*(t), \varphi(t) \rangle dt, \quad n \rightarrow \infty \quad \forall \varphi \in L^2([0, T]; H).$$

Soit $T > 0$ et $D(\cdot)$ un sous ensemble non vide de H , supposons que

1. $D(t)$ est convexe fermé $\forall t \in [0, T]$.
2. $D(\cdot)$ est L -Lipschitzienne sur $[0, T]$.

Alors,

$x \mapsto \int_0^T \sigma(D(t), x(t)) dt$ est semi-continue inférieurement sur $L^2([0, T], H)$.

1.9 Distance de Hausdorff

Définition 1.9.1 (Fonction distance). Soit $C \subset H$ une partie non vide.

La fonction distance associée à C est définie par : $d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|$.

Proposition 1.9.1. Soit $C \subset H$ une partie non vide, alors

1. $d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{adh}(C)$.
2. La fonction distance est continûment Lipschitzienne de rapport égale à 1.

Définition 1.9.2 (Distance de Hausdorff). Soient H un espace de Hilbert, C_1 et C_2 deux sous-ensembles fermés non vide de H . On appelle distance de Hausdorff entre C_1 et C_2 la fonction numérique $d_H(\cdot, \cdot)$ définie par :

$$\begin{aligned} d_H(C_1, C_2) &:= \sup_{y \in H} |d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \\ &:= \max(\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x), \sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x)). \end{aligned}$$

Proposition 1.9.2. Soient $C_1, C_2 \subset H$ deux sous-ensembles non vide et fermés de H alors :

$$d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon \Leftrightarrow C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B} \text{ et } C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}, \varepsilon > 0.$$

Preuve. Supposons que $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$, donc d'après la définition précédente, nous avons

$$|d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \leq d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon, \quad \forall y \in H. \quad (1.1)$$

Soit $y \in C_1$, comme ce dernier est un fermé de H , alors de (1.1) on a :

$$d_{C_2}(y) \leq \varepsilon. \quad (1.2)$$

soit $z \in C_2$ une projection de y sur C_2 (puisque C_2 est un fermé de H de plus cette projection n'est pas unique), alors de (1.2) on a :

$$\|y - z\| := d_{C_2}(y) \leq \varepsilon.$$

Or $y - z \in \varepsilon\mathbb{B}$ i.e. $y \in C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$.

D'où $C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$, et de même façon on trouve que $C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}$.

Inversement, supposons que $C_1 \subset C_2 + \varepsilon\mathbb{B}$ et $C_2 \subset C_1 + \varepsilon\mathbb{B}$, $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in C_1$, alors $x = z + e$, $e \in \varepsilon\mathbb{B}$ et

$$\begin{aligned} d_{C_2}(x) &\leq \|z - x\| = \|e\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or $\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x) \leq \varepsilon$, et de même façon on trouve que $\sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x) \leq \varepsilon$.

Et par suite $d_H(C_1, C_2) \leq \varepsilon$. ■

1.10 Multi-applications et continuité

Définition 1.10.1. Soient X et Y deux ensembles non vides. On appelle Multi-application (ou fonction multivoque) de X dans Y toute application T de X dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensembles des parties de Y) et on note $T : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $T : X \rightrightarrows Y$. Alors $\forall x \in X : T(x) \subset Y$ est un sous-ensemble de Y .

Définition 1.10.2. On appelle domaine (effectif) de T qu'on le note $D(T)$ le sous-ensemble de X défini par :

$$D(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}.$$

Et l'image de T noté $R(T)$ le sous-ensemble de Y défini par :

$$R(T) = \{y \in Y / \exists x \in X : y \in T(x)\} = \bigcup_{x \in D(T)} T(x).$$

Définition 1.10.3. On appelle graphe de T et on le note $\text{gph}(T)$ le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par :

$$\text{gph}(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y \in T(x)\}.$$

Remarque 1.10.1.

1. Si l'ensemble $T(x)$ contient au plus un élément on dira que T est univoque .
2. T^{-1} est la Multi-application dont le graphe est symétrique de celui de T i.e. $y \in T^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in T(y)$, on a évidemment $D(T^{-1}) = R(T)$.
3. L'ensemble des Multi-applications est ordonné par l'inclusion des graphes : $T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow$ pour tout $x \in X$, $T_1(x) \subset T_2(x)$.

1.11 Opérateurs maximaux monotones

Notion d'opérateur monotone

Définition 1.11.1 (Opérateur monotone). L'opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si

$$\forall u, v \in D(T) \quad \forall u_1 \in T(u), \forall v_1 \in T(v), \quad \langle v_1 - u_1, v - u \rangle \geq 0.$$

Proposition 1.11.1. Soit f une fonction convexe propre sur H . Alors le sous-différentiel de f est un opérateur monotone.

Preuve.

∂f est monotone $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(\partial f), \forall y_1 \in \partial f(x_1), \forall y_2 \in \partial f(x_2), \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$.

Soient $x_1, x_2 \in D(\partial f)$ et $y_1 \in \partial f(x_1), y_2 \in \partial f(x_2)$.

$$y_1 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_1) + \langle y_1, x - x_1 \rangle, \forall x \in H, \quad (1.3)$$

$$y_2 \in \partial f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_2) + \langle y_2, x - x_2 \rangle, \forall x \in H, \quad (1.4)$$

on a en particulier pour $x = x_2$ dans (1.3) et pour $x = x_1$ dans (1.4), $f(x_2) \geq f(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle$ et $f(x_1) \geq f(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle$, par addition

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \text{ donc } \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

D'où la monotonie de ∂f . ■

Remarque 1.11.1. Si T_1 et T_2 sont des opérateurs monotones, alors $T_1 + T_2$ est un opérateur monotone .

Notion d'opérateur maximale monotone

L'ensemble des opérateurs monotones de H est inductif pour l'inclusion des graphes se qui justifie la définition suivante :

Définition 1.11.2 (Opérateur maximal monotone). Un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone $G : H \rightrightarrows H$ tel que $\text{gph}(T) \subset \text{gph}(G)$.

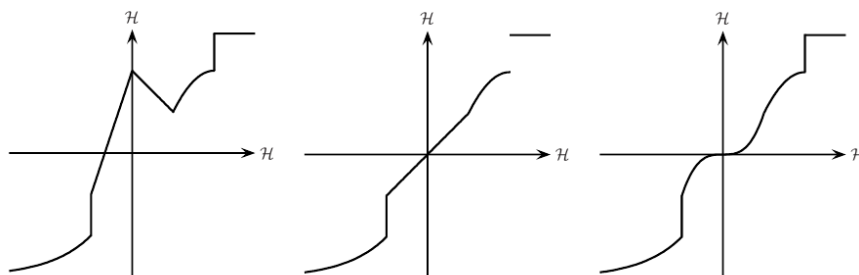


FIGURE 1.6 – Graphe d'un opérateur non monotone (à gauche) et version monotone (en centre) et version maximale monotone (à droite).

Proposition 1.11.2. [15] Soit un opérateur $T : H \rightrightarrows H$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. T est maximal monotone.
2. T est monotone et $R(I + T) = H$.

Exemple 1.11.1. Soit $T : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone de H , les opérateurs T^{-1} et λT pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.

Corollaire 1.11.1. [16] Soit $T : H \rightarrow H$ un opérateur monotone et continu. Alors T est maximal monotone.

Proposition 1.11.3. [15] Soit f une fonction convexe propre sur H . Si f est semi-continue inférieurement alors le sous-différentiel de f est maximal monotone.

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.11.1. [15] Soit f une fonction convexe propre sur H et $\alpha \geq 0$. La fonction convexe $x \mapsto f(x) + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2$ atteint son minimum en x_0 si et seulement si $\alpha(y - x_0) \in \partial f(x_0)$

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 1.11.3.

Preuve. On sait déjà d'après la Proposition 1.11.1 que ∂f est monotone, donc il reste à démontrer que $R(I + \partial f) = H$. Il est clair que $R(I + \partial f) \subset H$. Montrons que $H \subset R(I + \partial f)$.

Soit $y \in H$, donc $y \in R(I + \partial f) \Leftrightarrow$

$$y \in \bigcup_{x \in D(I + \partial f)} (I + \partial f)(x) \Leftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \text{ tel que : } y \in (I + \partial f)(x_0),$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial f) \text{ tel que : } y \in x_0 + \partial f(x_0).$$

La fonction $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2$ est convexe s.c.i et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \mapsto +\infty$, donc d'après le Théorème 1.4.1 elle atteint son minimum en $x_0 \in H$ ce qui implique d'après le Lemme 1.11.1 que $y \in x_0 + \partial f(x_0)$. D'où ∂f est maximal monotone d'après la Proposition 1.11.2. ■

Remarque 1.11.2. D'après la proposition précédente (et la remarque 1.7.1), on peut dire que : si C est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de H alors le cône normale de C est un opérateur maximal monotone.

Surjectivité et somme d'opérateurs maximaux monotones

T étant un opérateur maximal monotone, on peut trouver facilement des conditions suffisantes pour que T soit surjectif.

Définition 1.11.3 (Opérateur coercif). *On dit que un opérateur $T : H \rightrightarrows H$ est coercif si pour tout $(x_n, y_n) \in \text{gph}(T)$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty$, nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle x_n - x_0, y_n \rangle}{\|x_n\|} = +\infty, \forall x_0 \in H. \quad (1.5)$$

Autrement dit, T est coercif s'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\langle Tx, x \rangle \geq \beta \|x\|^2, \forall x \in H.$$

Corollaire 1.11.2. [10] *Soit $T : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone et coercif, alors T est surjectif.*

Étant donnés A et B maximaux monotones, l'opérateur $A + B$ est monotone mais, en générale, il n'est pas maximal monotone (puisque son domaine peut être vide).

Corollaire 1.11.3. [15] *Soient $A, B : H \rightrightarrows H$ deux opérateurs maximaux monotones. si $(D(B) \cap \text{int}(D(A))) \neq \emptyset$, alors $A + B$ est maximal monotone.*

1.12 Fonctions absolument continues

Définition 1.12.1. *On dit qu'une fonction v de $[0, T]$ dans H est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute suite d'intervalle $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$ deux à deux disjointes vérifiant $\sum_n |\alpha_n - \beta_n| \leq \eta$, on ait $\sum_n \|v(\alpha_n) - v(\beta_n)\| \leq \varepsilon$.*

Théorème 1.12.1. *Une fonction $v : [0, T] \rightarrow H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est à dire :*

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v'(s) ds, \forall t \in]0, T[.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Remarque 1.12.1.

1. Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.
2. Toute fonction absolument continue est dérivable p.p.

Définition 1.12.2. Soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, le module de continuité de v est la fonction $w : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$, définie par :

$$w(h) := \sup_{|x-y| \leq h} |v(x) - v(y)|, \quad h > 0. \quad (1.6)$$

Lemme 1.12.1. Soit $u : [0, T] \rightarrow H$ une fonction continue telle que $u'(t) \in H$, et soit B un opérateur linéaire, borné et symétrique sur H , alors

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = 2 \langle u'(t), Bu(t) \rangle, \quad \text{p.p } t \in [0, T].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle Bu(t+h), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle B(u(t+h) - u(t)), u(t+h) \rangle + \langle Bu(t), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle) \end{aligned}$$

Par la linéarité de B :

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \langle B(u(t+h) - u(t)), u(t+h) \rangle + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle Bu(t), u(t+h) \rangle - \langle Bu(t), u(t) \rangle)$$

Par la continuité de B, u et du produit scalaire, on a

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = \langle Bu(t)', u(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t)' \rangle$$

La symétrie de B et du produit scalaire donne :

$$\frac{d}{dt} \langle Bu(t), u(t) \rangle = 2 \langle u(t)', Bu(t) \rangle.$$

■

1.13 Inégalités de Grönwall

Lemme 1.13.1 (version discret). Soit $\alpha > 0$ et $(u_n), (\beta_n)$ sont suites non négatives satisfaites :

$$u_n \leq \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u_k, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots (\text{avec } \beta_{-1} := 0).$$

Alors, pour tout n , nous avons

$$u_n \leq \alpha \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\right).$$

Lemme 1.13.2 (version continue). Soit $T > 0$ et $a(\cdot), b(\cdot) \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ avec $b(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. soit $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction absolument continue satisfaite :

$$(1 - \alpha)w'(t) \leq a(t)w(t) + b(t)w^\alpha(t), \quad p.p. \ t \in [0, T].$$

Où $0 \leq \alpha < 1$. alors pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$w^{1-\alpha}(t) \leq w^{1-\alpha}(0) \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau) d\tau\right) b(s) ds.$$

Inégalité quasi-variationnelle d'évolution et processus de rafle

La formulation mathématique du processus de rafle (sweeping process) introduit par J.J. Moreau est donnée par :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $N_{C(t)}$ désigne le cône normal associé à l'ensemble fermé et convexe $C(t)$ dans un espace de Hilbert H .

Dans [3], les auteurs ont étudié le nouveau modèle suivant :

$$\begin{cases} A_1 u'(t) + A_0 u(t) - f(t) \in -N_{C(t)}(u'(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $C(\cdot)$ est un ensemble mobile borné, $A_0, A_1 : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs bornés, symétriques, linéaires et monotones et $f : [0, T] \rightarrow H$ est une fonction continue.

Dans [2], les auteurs ont proposé la variante suivante :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(Au'(t) + Bu(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

avec condition de compatibilité :

$$Bu_0 \in C(0), \quad (2.4)$$

où $A, B : H \rightarrow H$ sont deux opérateurs linéaires, bornés, symétriques et monotones et A est coercif.

L'ensemble mobile $t \mapsto C(t)$ bouge dans un sens absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$d_H(C(s), C(t)) \leq |v(s) - v(t)| \quad \forall t \in [0, T],$$

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une généralisation du problème étudié dans [2] au cas d'un ensemble mobile dépendant de l'état u sans aucune condition sur la donnée initiale i.e. sans vitesse de déplacement initiale.

Notre objectif est de Trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ vérifiant :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t, u(t))}(Au'(t) + Bu(t)) & p.p \text{ sur } [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : L'ensemble des contraintes $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ a valeurs convexes fermées dans l'espace de Hilbert H et il existe une fonction absolument continue $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $L \geq 0$ tel que pour tous $s, t \in [0, T]$ et $u, w \in H$:

$$d_H(C(s, u), C(t, w)) \leq |v(s) - v(t)| + L \|u - w\|. \quad (2.6)$$

i.e. C bouge dans un sens absolument continue par rapport à t et un sens Lipschitzienne par rapport à u .

Hypothèse 2 : Le cône normale de C est **hypomonotone-like**, i.e. pour $R > 0$, il'existe $\tilde{L} \geq 0$ et une fonction absolument continue $\tilde{v} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que si

$$a_i \in N_{C(t_i, u_i)}(b_i) \text{ pour } a_i \in H, \quad u_i, b_i \in R\mathbb{B}, \quad t_i \in [0, T], i = 1, 2$$

alors

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \geq -\tilde{L} \|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\| - (\|a_1\| + \|a_2\|) |\tilde{v}(t_1) - \tilde{v}(t_2)|. \quad (2.7)$$

Hypothèse 3 : $A, B : H \rightarrow H$ sont des opérateurs linéaires bornés, symétriques tel que A satisfait :

$$\langle Ax, x \rangle \geq \beta \|x\|^2, \quad \beta > 0.$$

Remarque :

1. Si $C(t, u) \equiv C$ est un constant, fermé et convexe, alors le cône normale de C est hypomonotone-like.
2. D'après l'**hypothèse 3** (et le corollaire 1.11.1), on déduit que les opérateurs A, B sont maximaux monotones, linéaires et symétriques.

2.1 Résultats auxiliaires

Nous allons commencer par rappeler quelques résultats qui nous seront utiles dans la preuve du résultat principal.

Lemme 2.1.1. *Posons $C(t, u) = f(t, u) + C_1(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, $u \in H$, où*

$C_1 : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ a valeurs non vide, fermés, convexes et v_1 -absolument continue, $f : [0, T] \times H \rightarrow H$ est v_2 -absolument continue par rapport à t (le temps) et L -continûment Lipschitzien par rapport à u (l'état) i.e. il existe deux fonctions $v_1, v_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ absolument continues et $L \geq 0$, tel que

$$d_H(C_1(t), C_1(s)) \leq |v_1(t) - v_1(s)|, \quad \text{et} \quad (2.8)$$

$$\|f(t, u) - f(s, w)\| \leq |v_2(t) - v_2(s)| + L\|u - w\| \quad (2.9)$$

pour $t, s \in [0, T]$ et $u, w \in H$. Alors les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites.

Preuve. Il est clair que C a valeurs non vide, fermés et convexes.

soient $s, t \in [0, T]$ et $u, w \in H$, soit $y \in H$ donc d'après la définition de la fonction distance :

$$\begin{aligned} |d_{C_1(s)+f(s,u)}(y) - d_{C_1(t)+f(t,w)}(y)| &= \left| \inf_{z \in C_1(s)} \|y - z - f(s, u)\| - d_{C_1(t)}(y - f(t, w)) \right| \\ &= \left| \inf_{z \in C_1(s)} \|y - z - f(t, w) + f(t, w) - f(s, u)\| - d_{C_1(t)}(y - f(t, w)) \right| \\ &\leq |d_{C_1(s)}(y - f(t, w)) - d_{C_1(t)}(y - f(t, w))| + \|f(t, w) - f(s, u)\| \end{aligned}$$

En appliquant le sup sur y on obtient,

$$d_H(C_1(s) + f(s, u), C_1(t) + f(t, w)) \leq d_H(C_1(s), C_1(t)) + \|f(t, w) - f(s, u)\|$$

D'après (2.8) et (2.9), on trouve

$$d_H(C_1(s) + f(s, u), C_1(t) + f(t, w)) \leq |v_1(t) - v_1(s)| + |v_2(t) - v_2(s)| + L\|u - w\|$$

Comme $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ sont absolument continues, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} d_H(C_1(s) + f(s, u), C_1(t) + f(t, w)) &\leq \left| \int_s^t v_1'(\tau) d\tau \right| + \left| \int_s^t v_2'(\tau) d\tau \right| + L\|u - w\| \\ &\leq \int_s^t (|v_1'(\tau)| + |v_2'(\tau)|) d\tau + L\|u - w\| \\ &= \int_0^t (|v_1'(\tau)| + |v_2'(\tau)|) d\tau - \int_0^s (|v_1'(\tau)| + |v_2'(\tau)|) d\tau + L\|u - w\| \\ &= |v(t) - v(s)| + L\|u - w\| \end{aligned}$$

Où $v(t) = \int_0^t (|v_1'(\tau)| + |v_2'(\tau)|) d\tau$ une fonction absolument continue.

On va montrer l'**hypomonotone-like** du cône normale de C , soit $a_i \in N_{C(t_i, u_i)}(b_i)$,

$a_i \in H, u_i, b_i \in R\mathbb{B}, t_i \in [0, T], i = 1, 2$, donc pour $i = 1$, on a :

$$a_1 \in N_{C(t_1, u_1)}(b_1) = N_{C_1(t_1) + f(t_1, u_1)}(b_1) = N_{C_1(t_1)}(b_1 - f(t_1, u_1)).$$

alors

$$\langle a_1, z - b_1 + f(t_1, u_1) \rangle \leq 0, \quad \forall z \in C_1(t_1). \quad (2.10)$$

De plus $b_2 \in C_1(t_2) + f(t_2, u_2)$, d'après (2.8) et la proposition (1.9.2), on a $b_2 \in C_1(t_1) + |v_1(t_1) - v_1(t_2)|\mathbb{B} + f(t_2, u_2)$.

On prend $z = b_2 - |v_1(t_1) - v_1(t_2)|e - f(t_2, u_2) \in C_1(t_1)$, où $e \in \mathbb{B}$, et en remplaçant dans (2.10), on obtient

$$\langle a_1, b_2 - b_1 + f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2) \rangle \leq \langle a_1, |v_1(t_1) - v_1(t_2)|e \rangle, \quad e \in \mathbb{B}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\langle a_1, b_2 - b_1 + f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2) \rangle \leq |v_1(t_1) - v_1(t_2)| \|a_1\|. \quad (2.11)$$

D'une façon similaire, on a

$$\langle a_2, b_1 - b_2 + f(t_2, u_2) - f(t_1, u_1) \rangle \leq |v_1(t_1) - v_1(t_2)| \|a_2\|. \quad (2.12)$$

De (2.11) et (2.12), on déduit que

$$\langle a_2 - a_1, b_1 - b_2 + f(t_2, u_2) - f(t_1, u_1) \rangle \leq |v_1(t_1) - v_1(t_2)| (\|a_1\| + \|a_2\|)$$

alors

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \geq -\langle a_1 - a_2, f(t_2, u_2) - f(t_1, u_1) \rangle - |v_1(t_1) - v_1(t_2)| (\|a_1\| + \|a_2\|)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \geq -\|a_1 - a_2\| \|f(t_2, u_2) - f(t_1, u_1)\| - |v_1(t_1) - v_1(t_2)| (\|a_1\| + \|a_2\|)$$

D'après l'inégalité (2.9), on a

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle &\geq -\|a_1 - a_2\| (|v_2(t_2) - v_2(t_1)| + L\|u_2 - u_1\|) - |v_1(t_1) - v_1(t_2)| (\|a_1\| + \|a_2\|) \\ &= -L\|a_1 - a_2\| \|u_2 - u_1\| - (\|a_1\| + \|a_2\|) (|v_2(t_1) - v_2(t_2)| + |v_1(t_1) - v_1(t_2)|) \\ &\geq -L\|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\| - (\|a_1\| + \|a_2\|) |v(t_1) - v(t_2)|. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 2.1.2. Posons $C(t, u) = f_1(t, u) + f_2(t, u)\mathbb{B}$, où $f_1 : [0, T] \times H \rightarrow H$, $f_2 : [0, T] \times H \rightarrow [\alpha, +\infty[$, $(t, u) \mapsto f_i(t, u)$ sont v_i absolument continues par rapport à t et L_i -continûment Lipschitzien par rapport à u , i.e.

$$\|f_1(t, u) - f_1(s, w)\| \leq |v_1(t) - v_1(s)| + L_1\|u - w\| \quad (2.13)$$

$$\|f_2(t, u) - f_2(s, w)\| \leq |v_2(t) - v_2(s)| + L_2\|u - w\| \quad (2.14)$$

avec $L_i \geq 0, i = 1, 2$ et $\alpha > 0$.

Alors, les **hypothèses 1 et 2** sont satisfaites.

Preuve. Il est clair que C a valeurs non vide, fermés et convexes.

soient $s, t \in [0, T]$ et $u, w \in H$, d'après (2.13)-(2.14) on a :

$$\begin{aligned} \|f_1(t, u) - f_1(s, w) + (f_2(t, u) - f_2(s, w))e\| &\leq |v_1(t) - v_1(s)| + L_1\|u - w\| + |v_2(t) - v_2(s)| + L_2\|u - w\|, \forall e \in \mathbb{B} \\ &\leq |v(t) - v(s)| + L\|u - w\|, \forall e \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Donc $f_1(t, u) - f_1(s, w) + (f_2(t, u) - f_2(s, w))e \in (|v(t) - v(s)| + L\|u - w\|)\mathbb{B}$ (*).

Où $v(t) = \int_0^t (|v_1'(\tau)| + |v_2'(\tau)|)d\tau$ une fonction absolument continue et $L = L_1 + L_2$.

Soit $\alpha \in C(t, u)$ alors

$$\begin{aligned} \alpha &= f_1(t, w) + f_2(t, w)e, \quad e \in \mathbb{B} \\ &= (f_1(s, w) + f_2(s, w)e) + (f_1(t, u) - f_1(s, w)) + (f_2(t, u) - f_2(s, w))e \end{aligned}$$

(*) Implique que $\alpha \in C(s, w) + (|v(t) - v(s)| + L\|u - w\|)\mathbb{B}$.

D'où $C(t, u) \subset C(s, w) + (|v(t) - v(s)| + L\|u - w\|)\mathbb{B}$.

De même façon on trouve que $C(s, w) \subset C(t, u) + (|v(t) - v(s)| + L\|u - w\|)\mathbb{B}$.

D'après la proposition 1.9.2, on déduit que

$$d_H(C(t, u), C(s, w)) \leq |v(t) - v(s)| + L\|u - w\|.$$

On va montrer la **hypomonotone-like** du cône normale de C , soit

$a_i \in N_{C(t_i, u_i)}(b_i) = N_{f_1(t_i, u_i) + f_2(t_i, u_i)\mathbb{B}}(b_i) = N_{f_2(t_i, u_i)\mathbb{B}}(b_i - f_1(t_i, u_i))$, $a_i \in H, u_i, b_i \in R\mathbb{B}, t_i \in [0, T], i = 1, 2$, donc

$$a_1 \in N_{f_2(t_1, u_1)\mathbb{B}}(b_1 - f_1(t_1, u_1)) \quad (2.15)$$

$$a_2 \in N_{f_2(t_2, u_2)\mathbb{B}}(b_2 - f_1(t_2, u_2))$$

Comme $f_2(t_1, u_1) > 0, f_2(t_2, u_2) > 0$ et d'après la définition du cône normal

$$a_2 \in N_{f_2(t_1, u_1)\mathbb{B}}\left(\frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)}\right) \quad (2.16)$$

De (2.15)-(2.16), on a

$$\langle a_1, -z + b_1 - f_1(t_1, u_1) \rangle \geq 0, \quad \forall z \in f_2(t_1, u_1)\mathbb{B}. \quad (2.17)$$

$$\langle -a_2, z - \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)} \rangle \geq 0, \quad \forall z \in f_2(t_1, u_1)\mathbb{B}. \quad (2.18)$$

En additionnant de (2.17) et (2.18), on obtient

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - f_1(t_1, u_1) - \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)} \rangle \geq 0.$$

Alors,

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - f_1(t_1, u_1) \rangle \geq \langle a_1 - a_2, \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)} \rangle$$

Donc,

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 + b_2 - f_1(t_1, u_1) + f_1(t_2, u_2) - f_1(t_2, u_2) \rangle \geq \langle a_1 - a_2, \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle &\geq \langle a_1 - a_2, \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))f_2(t_1, u_1)}{f_2(t_2, u_2)} \rangle - \langle a_1 - a_2, b_2 - f_1(t_2, u_2) \rangle \\ &\quad - \langle a_1 - a_2, f_1(t_2, u_2) - f_1(t_1, u_1) \rangle \\ &\geq \langle a_1 - a_2, \frac{(b_2 - f_1(t_2, u_2))(f_2(t_1, u_1) - f_2(t_2, u_2))}{f_2(t_2, u_2)} \rangle \\ &\quad - \langle a_1 - a_2, f_1(t_2, u_2) - f_1(t_1, u_1) \rangle \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les propriétés de la norme, on obtient

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle &\geq -\|a_1 - a_2\| \left(\frac{\|b_2\| + \|f_1(t_2, u_2)\|}{f_2(t_2, u_2)} \right) \|f_2(t_1, u_1) - f_2(t_2, u_2)\| \\ &\quad - \|a_1 - a_2\| \|f_1(t_2, u_2) - f_1(t_1, u_1)\| \end{aligned}$$

D'après (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle &\geq -\|a_1 - a_2\| \left(\frac{\|b_2\| + \|f_1(t_2, u_2)\|}{f_2(t_2, u_2)} \right) (|v_2(t_2) - v_2(t_1)| + L_2\|u_2 - u_1\|) \\ &\quad - \|a_1 - a_2\| (|v_1(t_2) - v_1(t_1)| + L_1\|u_2 - u_1\|) \end{aligned}$$

Comme $f_2(t, u) \geq \alpha \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times R\mathbb{B}$, $\alpha > 0$ et $b_2 \in R\mathbb{B}$, alors

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle &\geq -\|a_1 - a_2\| \left(\frac{R + \sup_{(t,u) \in [0,T] \times R\mathbb{B}} \|f_1(t, u)\|}{\alpha} \right) (|v_2(t_2) - v_2(t_1)| + L_2\|u_2 - u_1\|) \\ &\quad - \|a_1 - a_2\| (|v_1(t_2) - v_1(t_1)| + L_1\|u_2 - u_1\|) \\ &= -(kL_2 + L_1)\|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\| - \|a_1 - a_2\| (|v_1(t_2) - v_1(t_1)| \\ &\quad + k|v_2(t_2) - v_2(t_1)|) \\ &\geq -\tilde{L}\|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\| - (\|a_1\| + \|a_2\|) |\tilde{v}(t_1) - \tilde{v}(t_2)|. \end{aligned}$$

Où $k = \left(\frac{R+ \sup_{(t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{B}}} \|f_1(t,u)\|}{\alpha} \right)$ et $\tilde{v}(t) = \int_0^t (|v'_1(\tau)| + k|v'_2(\tau)|) d\tau$, $\tilde{L} = L_1 + kL_2$.

D'où le résultat. ■

Lemme 2.1.3. *Soit D un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de H , alors l'hypothèse 3 implique que :*

$$AN_D(Ax) = N_{A^{-1}(D)}(x), \quad \forall x \in A^{-1}(D). \quad (2.19)$$

Pour la preuve on a besoin du corollaire suivant :

Corollaire 2.1.1. [15] *Soit A un opérateur maximal monotone, alors on a l'équivalence suivante : (A symétrique) \Leftrightarrow (A autoadjoint).*

Preuve. Soit $x \in A^{-1}(D)$ nous avons

$$\begin{aligned} \xi \in AN_D(Ax) &\Leftrightarrow \exists \xi' \in N_D(Ax) \text{ tel que } \xi = A\xi' \\ &\Leftrightarrow \xi = A\xi' \text{ et } \langle \xi', y - Ax \rangle \leq 0, \quad \forall y \in D \\ &\Leftrightarrow \xi = A\xi' \text{ et } \langle \xi', Ay' - Ax \rangle \leq 0, \quad \forall y' \in A^{-1}(D) \end{aligned}$$

Par la linéarité de A , on a

$$\xi \in AN_D(Ax) \Leftrightarrow \xi = A\xi' \text{ et } \langle \xi', A(y' - x) \rangle \leq 0, \quad \forall y' \in A^{-1}(D)$$

D'après le corollaire précédent, on déduit que A est autoadjoint alors

$$\begin{aligned} \xi \in AN_D(Ax) &\Leftrightarrow \xi = A\xi' \text{ et } \langle A\xi', y' - x \rangle \leq 0, \quad \forall y' \in A^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow \langle \xi, y' - x \rangle \leq 0, \quad \forall y' \in A^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow \xi \in N_{A^{-1}(D)}(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 2.1.4. *Soit D un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de H , alors d'après l'hypothèse 3 on déduit que la Multi-application $x \mapsto N_D(x) + Ax$ est surjective.*

De plus l'application $(N_D + A)^{-1}$ est univoque et $1/\beta$ continûment Lipschitz, avec β la constante de coercivité de A .

Preuve. On commence pour démontrer que $N_D + A$ est maximal monotone et coercive.

D'après ce qui précède, on a N_D , A sont des opérateurs maximaux monotones et

$$(int(D(A)) \cap D(N_D)) = H \cap D = D \neq \emptyset,$$

Donc d'après le corollaire 1.11.3, on déduit que $A + N_D$ est un opérateur maximal monotone. soit $y_i \in N_D(x_i) + Ax_i, i = 1, 2$, alors

$$\begin{aligned} \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle &= \langle \xi_2 + Ax_2 - \xi_1 - Ax_1, x_2 - x_1 \rangle, \quad \xi_i \in N_D(x_i), i = 1, 2 \\ &= -\langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle - \langle \xi_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle A(x_2 - x_1), x_2 - x_1 \rangle \end{aligned}$$

Par la coercivité de A et la définition du cône normale, on a

$$\langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq \beta \|x_2 - x_1\|^2$$

D'où la coercivité de $N_D + A$.

Et par suit le corollaire 1.11.2 implique que l'opérateur $N_D + A$ est surjectif.

D'autre part, on a $x_i \in (N_D + A)^{-1}(y_i), i = 1, 2$, et

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{\beta} \|y_2 - y_1\|$$

Par conséquent, la fonction $(N_D + A)^{-1}$ est univoque et $1/\beta$ -continument Lipschitzienne. ■

Lemme 2.1.5. *D'après l'hypothèse 1, on peut trouver pour tout $t \in [0, T]$ et $u \in H$, $y \in C(t, u)$ satisfait : $\|y\| \leq c + L\|u - u_0\|$.
telle que c une constante dépende seulement de la condition initiale.*

Preuve. Soit $y_0 \in C(0, u_0)$ fixé, d'après l'hypothèse 1 et la proposition 1.9.2, on a

$$y_0 \in C(0, u_0) \subset C(t, u) + (|v(t) - v(0)| + L\|u - u_0\|)\mathbb{B}.$$

Donc on peut choisir $y \in C(t, u)$ tel que :

$$\|y - y_0\| = \left(|v(t) - v(0)| + L\|u - u_0\| \right) e, \quad e \in \mathbb{B}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|y - y_0\| \leq |v(t) - v(0)| + L\|u - u_0\|$$

Comme la fonction v continue sur un compact, alors on peut écrire

$$\|y\| \leq \|y_0\| + |v(0)| + \max_{t \in [0, T]} |v(t)| + L\|u - u_0\|.$$

Donc $c = \|y_0\| + |v(0)| + \max_{t \in [0, T]} |v(t)|$. ■

2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section nous allons aborder la question d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème non linéaire (2.5).

Tout d'abord, qu'est-ce qu'on entend par solution du problème non linéaire (2.5) ?

Définition 2.2.1. Une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ est une solution de (2.5), si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $u(0) = u_0$.
- 2) $u(\cdot)$ est différentiable presque partout sur $]0, T[$.
- 3) $Au'(t) + Bu(t) \in C(t, u(t))$ p.p sur $[0, T]$.
- 4) $u'(t) \in -N_{C(t, u(t))}(Au'(t) + Bu(t))$ p.p sur $[0, T]$.

Théorème 2.2.1. Si les hypothèses 1,2 et 3 sont vérifiées, alors pour toute condition initiale $u_0 \in H$ le problème (2.5) admet une seule solution continûment lipschitzienne .

Pour démontrer le caractère bien posé du problème (2.5) on va appliqué la méthode de **discrétisation** i.e. on va construire une suite de solution approché $u_n : [0, T] \rightarrow H$ pour (2.5) via la discrétisation de l'intervalle $[0, T]$.

Ensuite on va montrer que u_n converge vers une fonction $u : [0, T] \rightarrow H$ qui est solution du problème (2.5).

Preuve. On commence pour l'existence de la solution.

I- Existence

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition suivante de l'intervalle $I := [0, T]$

$$I_{i+1}^n := [t_i^n, t_{i+1}^n], \quad t_i^n = ih_n, \quad h_n = \frac{T}{n}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

On veut construire une suite $u_n : [0, T] \rightarrow H$ solution de (2.5), pour cela on va la définir sur chaque sous intervalles I_{i+1}^n , $0 \leq i \leq n-1$.

On pose

$$\begin{cases} u_n(t_i^n) := u_i^n \\ u_n(t_{i+1}^n) := u_{i+1}^n \end{cases}$$

algorithme :

-Posons $u_0^n := u_0$.

-Pour $0 \leq i \leq n-1$, trouver v_{i+1}^n et u_{i+1}^n tel que

$$\begin{aligned} v_{i+1}^n &\in -N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n)}(Av_{i+1}^n + Bu_i^n). \\ u_{i+1}^n &= u_i^n + h_n v_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'après la proposition 1.5.2, on peut écrire (2.20) comme

$$v_{i+1}^n \in -N_{C(t_{i+1}^n, u_i^n) - Bu_i^n}(Av_{i+1}^n). \quad (2.21)$$

Posons $D = C(t_{i+1}^n, u_i^n) - Bu_i^n$ et en utilisant le lemme 2.1.3, on trouve

$$Av_{i+1}^n \in -AN_D(Av_{i+1}^n) = -N_{A^{-1}(D)}(v_{i+1}^n). \quad (2.22)$$

(2.22) équivalant à

$$0 \in (N_{A^{-1}(D)} + A)(v_{i+1}^n).$$

En utilisant la relation suivante ($y \in Ax \Leftrightarrow x \in A^{-1}y$), on obtient

$$v_{i+1}^n \in (N_{A^{-1}(D)} + A)^{-1}(0).$$

D'après le lemme 2.1.4, on déduit que

$$v_{i+1}^n = (N_{A^{-1}(D)} + A)^{-1}(0). \quad (2.23)$$

et cet algorithme est bien définie.

Maintenant, nous utilisons la suite discrètes (u_i^n) pour construire la suite des solutions approchées (u_n) de $[0, T]$ à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle I_{i+1}^n comme suit.

$$u_n(t) = \begin{cases} u_0^n & \text{si } t = 0, \\ u_i^n + \frac{t - t_i^n}{h_n} (u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{si } t \in I_{i+1}^n; \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

$u_n(t)$ est l'interpolation de Lagrange de u_i^n et u_{i+1}^n .

On remarque que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C([0, T], H)$, de plus

$$u_n'(t) = v_{i+1}^n, \quad p.p \ t \in I_{i+1}^n, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (i.e. \ p.p \ t \in [0, T]). \quad (2.24)$$

Voir figure 2.1.

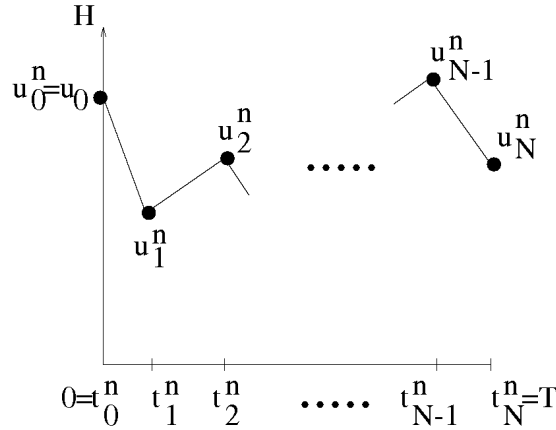


FIGURE 2.1 – La solution approchée u_n .

(a) $u_n(\cdot)$ est uniformément bornée

Par la coercivité de A et la relation (2.20), on a pour tout $v \in C(t_{i+1}^n, u_i^n)$

$$\begin{aligned} \beta \|v_{i+1}^n\|^2 &\leq \langle v_{i+1}^n, Av_{i+1}^n \rangle \\ &= \langle v_{i+1}^n, Av_{i+1}^n + Bu_i^n - v + v - Bu_i^n \rangle \\ &\leq \langle v_{i+1}^n, v - Bu_i^n \rangle \\ &\leq \|v - Bu_i^n\| \|v_{i+1}^n\| \end{aligned}$$

En utilisant la relation suivante ($u_i^n = u_0 + h_n \sum_{k=1}^i v_k^n \dots (*)$) et la linéarité de B , on obtient

$$\begin{aligned} \|v_{i+1}^n\| &\leq \frac{1}{\beta} \|v - Bu_i^n\| = \|v - Bu_0 - h_n \sum_{k=1}^i Bv_k^n\| \\ &\leq \frac{1}{\beta} (\|v\| + \|Bu_0\| + h_n \|B\| \sum_{k=1}^i \|v_k^n\|) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.1.5 :

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \frac{1}{\beta} (c + L \|u_i^n - u_0\| + \|Bu_0\| + h_n \|B\| \sum_{k=1}^i \|v_k^n\|)$$

En utilisant pour la deuxième fois la relation (*), alors

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \frac{1}{\beta} (c + \|Bu_0\|) + \frac{1}{\beta} h_n (L + \|B\|) \sum_{k=1}^i \|v_k^n\|$$

D'après l'inégalité de Grönwall (version discret), on trouve

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \frac{1}{\beta}(c + \|Bu_0\|) + \exp\left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{\beta} h_n(L + \|B\|)\right)$$

D'où

$$\|u'_n(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.25)$$

Où, $M = \frac{1}{\beta}(c + \|Bu_0\|) + \frac{1}{\beta} h_n(L + \|B\|) \exp(\frac{1}{\beta}(L + \|B\|)T)$.

Et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est continue alors elle est absolument continue, donc on peut écrire

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t u'_n(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [0, T].$$

Par (2.25), on déduit que

$$\|u_n(t)\| \leq \|u_0\| + MT, \quad \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée.

De plus pour tout $t, s \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u_n(s)\| &= \left\| \int_s^t u'_n(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|u'_n(\tau)\| d\tau \\ &= M|t - s|. \end{aligned}$$

Alors, $u_n(\cdot)$ M-continûment Lipschitz.

(b) convergence

Pour passer du cas discret au cas continue on introduit les fonctions pas suivante :

$$\begin{cases} \theta_n(t) = t_{i+1}^n & ; \quad t \in I_{i+1}^n \\ \eta_n(t) = t_i^n & ; \quad t \in I_{i+1}^n \\ \theta_n(0) = \eta_n(0) = 0. \end{cases}$$

On note que :

$$\sup_{t \in [0, T]} |\theta_n(t) - t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0, T]} |\eta_n(t) - t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad .$$

Maintenant, nous prouvons la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Pour cela il suffit de démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans l'espace

$C([0, T], H)$.

Fixons $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$, $t \in [0, T] \setminus \{t_i^m, t_j^n\}$ tel que $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$:

On note que $v_{i+1}^m \in -N_{C(t_{i+1}^m, u_i^m)}(Av_{i+1}^m + Bu_i^m)$ et $v_{j+1}^n \in -N_{C(t_{j+1}^n, u_j^n)}(Av_{j+1}^n + Bu_j^n)$.

D'après ce qui précède et comme les opérateurs A, B sont bornés, nous avons que les suites $(u_i^m)_{1 \leq i \leq m}, (u_j^n)_{1 \leq j \leq n}, (Av_{i+1}^m + Bu_i^m)_{1 \leq i \leq m}, (Av_{j+1}^n + Bu_j^n)_{1 \leq j \leq n}$ sont uniformément bornées. alors par l'**hypomonotonicity-like** du cône normale de C , il existe $\tilde{L} > 0$ et une fonction absolument continue $\tilde{v} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \omega &= \langle v_{j+1}^n - v_{i+1}^m, Av_{j+1}^n + Bu_j^n - Av_{i+1}^m - Bu_i^m \rangle \\ &= \langle v_{j+1}^n - v_{i+1}^m, A(v_{j+1}^n - v_{i+1}^m) \rangle - \langle v_{j+1}^n - v_{i+1}^m, B(u_j^n - u_i^m) \rangle \\ &\leq |\tilde{v}(t_{i+1}^m) - \tilde{v}(t_{j+1}^n)|(\|v_{i+1}^m\| + \|v_{j+1}^n\|) + \tilde{L}\|u_i^m - u_j^n\|\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\| \\ &= |\tilde{v}(t_{i+1}^m) - \tilde{v}(t) + \tilde{v}(t) - \tilde{v}(t_{j+1}^n)|(\|v_{i+1}^m\| + \|v_{j+1}^n\|) + \tilde{L}\|u_i^m - u_j^n\|\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\| \\ &\leq 2M(w(h_m) + w(h_n)) + \tilde{L}\|u_i^m - u_j^n\|\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\| \end{aligned}$$

Or

$$\langle v_{j+1}^n - v_{i+1}^m, A(v_{j+1}^n - v_{i+1}^m) \rangle \leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + \tilde{L}\|u_i^m - u_j^n\|\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\| + \langle v_{i+1}^m - v_{j+1}^n, B(u_j^n - u_i^m) \rangle$$

Où $\varepsilon_1(h_m, h_n) := 2M(w(h_m) + w(h_n))$ et $w(\cdot)$ est le module de continuité de \tilde{v} . En utilisant la coercivité et la continuité de A et B (respectivement) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2}\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\|^2 &\leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + (\tilde{L} + \|B\|)\|u_i^m - u_j^n\|\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\| - \frac{\beta}{2}\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\|^2 \\ &\leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + \frac{\tilde{L}_1^2}{2\beta}\|u_i^m - u_j^n\|^2, \quad \tilde{L}_1 = \tilde{L} + B \end{aligned}$$

(En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto \alpha x - \beta x^2$ est concave et $\frac{\alpha}{2\beta}$ le point de maximum)

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + \frac{\tilde{L}_1^2}{2\beta}\|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t) + u_m(t) - u_n(t) + u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\|^2 \\ &\leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + \frac{3\tilde{L}_1^2}{2\beta}(\|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\|^2 + \|u_m(t) - u_n(t)\|^2 + \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\|^2) \end{aligned}$$

(En utilisant l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$)

Comme la fonction $u_n(\cdot)$ est M-Lipschitzienne, on déduit que

$$\frac{\beta}{2}\|v_{i+1}^m - v_{j+1}^n\|^2 \leq \varepsilon_1(h_m, h_n) + \frac{3M^2\tilde{L}_1^2}{2\beta}(h_m^2 + h_n^2) + \frac{3\tilde{L}_1^2}{2\beta}\|u_m(t) - u_n(t)\|^2$$

Posons

$$\varepsilon_2(h_m, h_n) := \varepsilon_1(h_m, h_n) + \frac{3M^2 \tilde{L}_1^2}{2\beta} (h_m^2 + h_n^2) \quad (2.26)$$

Alors, $\varepsilon_2(h_m, h_n) \rightarrow 0$ quand $m, n \rightarrow \infty$, car $w(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. donc de (2.26), on a

$$\frac{\beta}{2} \|u'_m(t) - u'_n(t)\|^2 \leq \varepsilon_2(h_m, h_n) + \frac{3\tilde{L}_1^2}{2\beta} \|u_m(t) - u_n(t)\|^2$$

Or

$$\|u'_m(t) - u'_n(t)\| \leq \varepsilon(h_m, h_n) + \frac{\sqrt{3}\tilde{L}_1}{\beta} \|u_m(t) - u_n(t)\|$$

Où

$$\varepsilon(h_m, h_n) := \sqrt{\frac{2\varepsilon_2(h_m, h_n)}{\beta}}$$

Par l'inégalité de Grönwall (version continue) et comme $u_m(0) = u_n(0) = u_0$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|u_m(t) - u_n(t)\| &\leq \exp\left(\frac{2\tilde{L}_1 T}{\beta}\right) \varepsilon(h_m, h_n) t \\ &\leq \exp\left(\frac{2\tilde{L}_1 T}{\beta}\right) \varepsilon(h_m, h_n) T. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_{C([0, T], H)} \leq \exp\left(\frac{2\tilde{L}_1 T}{\beta}\right) \varepsilon(h_m, h_n) T.$$

En passant à la limite, on déduit que $\|u_m(t) - u_n(t)\|_{C([0, T], H)} \xrightarrow{m, n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent $(u_n(\cdot))_n$ est une suite de Cauchy dans $C([0, T], H)$ qui est complet, et par suite il existe $u \in C([0, T], H)$ tel que u_n converge uniforme vers u .

(c) u solution de (2.5) :

Pour démontrer que u est une solution de (2.5), on va vérifier la définition

2.2.1 : 1) On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t), \forall t \in [0, T]$, pour $t = 0$, on a

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = u(0)$, mais $u_n(0) = u_0$, alors $u(0) = u_0$.

2) $u(\cdot)$ est M-continument Lipschitzienne, puisque pour tous $s, t \in [0, T]$, on a

$$\|u(t) - u(s)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u_n(s)\| \leq M|t - s|.$$

Et par suite d'après la remarque 1.12.1, on déduit que $u(\cdot)$ est dérivable p.p sur $[0, T]$.

3) D'après (2.25) on peut remarquer que $\|u'_n(t)\|_{L^2([0, T], H)} \leq M\sqrt{T}$, i.e. $(u'_n)_n \subset L^2([0, T], H)$.

De plus d'après la proposition 1.3.1, il existe $w \in L^2([0, T], H)$ et une sous-suite de $(u'_n(\cdot))_n$ noté aussi $(u'_n(\cdot))_n$ tels que $u'_n(\cdot)$ converge faiblement vers w dans $L^2([0, T], H)$.

On montre que $u'(t) = w(t)$, p.p $t \in [0, T]$.

On a $u_n(t) = u_0 + \int_0^t u'_n(s)ds, \forall t \in [0, T]$.

Soit $z \in H$, tel que $\|z\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \langle z, u_n(t) \rangle &= \langle z, u_0 + \int_0^t u'_n(s)ds \rangle \\ &= \langle z, u_0 + \int_0^T \iota_{[0,t]} u'_n(s)ds \rangle \\ &= \langle z, u_0 \rangle + \int_0^T \langle z \iota_{[0,t]}, u'_n(s) \rangle ds \end{aligned}$$

On fait tendre $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \langle z, u(t) \rangle &= \langle z, u_0 \rangle + \int_0^T \langle z \iota_{[0,t]}, w(s) \rangle ds \\ &= \langle z, u_0 + \int_0^t w(s)ds \rangle. \end{aligned} \tag{2.27}$$

$\forall z' \in H - \{0\}$, il est clair que $\|\frac{z'}{\|z'\|}\| = 1$, donc de (2.27) on a

$$\left\langle \frac{z'}{\|z'\|}, u(t) \right\rangle = \left\langle \frac{z'}{\|z'\|}, u_0 + \int_0^t w(s)ds \right\rangle$$

Or

$$\langle z', u(t) \rangle = \langle z', u_0 + \int_0^t w(s)ds \rangle$$

Ce qui implique que $u(t) = u_0 + \int_0^t w(s)ds$

D'où $u'(t) = w(t)$ p.p $t \in [0, T]$, et par suite $u'_n(\cdot)$ converge faiblement vers $u'(\cdot)$ dans $L^2([0, T], H)$.

Maintenant, nous montrons que $Au'(t) + Bu(t) \in C(t, u(t)), \forall t \in [0, T]$.

Soit $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble suivant :

$$D_\varepsilon := \{\varphi \in L^2([0, T], H) : A\varphi(t) + Bu(t) \in C(t, u(t)) + \varepsilon\mathbb{B} \text{ p.p } t \in [0, T]\}.$$

D_ε est un ensemble convexe et fermé, d'après la proposition 1.3.2 D_ε est faiblement fermé dans $L^2([0, T], H)$.

D'autre part, de (2.20) on a

$$\begin{aligned} Au'_n(t) + Bu_n(\theta_n(t)) &\in C(\eta_n(t), u_n(\theta_n(t))) \\ &\subset C(t, u(t)) + (|v(\eta_n(t)) - v(t)| + L\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|)\mathbb{B} \end{aligned}$$

Puisque $\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $|v(\eta_n(t)) - v(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on déduit que $u'_n \in D_\varepsilon$ pour n plus grand, et comme D_ε est faiblement fermé dans $L^2([0, T], H)$ alors $u' \in D_\varepsilon$ car u'_n converge faiblement vers u' dans $L^2([0, T], H)$ et par suite

$$Au'(t) + Bu(t) \subset C(t, u(t)) + \varepsilon\mathbb{B}, \forall \varepsilon > 0.$$

Puisque $C(t, u(t))$ est convexe et fermé, nous obtenons $Au'(t) + Bu(t) \in C(t, u(t))$.

3) Soit $v \in C(t, u(t))$, comme $C(t, u(t)) \subset C(\eta_n(t), u_n(\theta_n(t))) + (|v(\eta_n(t)) - v(t)| + L\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|)\mathbb{B}$, on peut trouver $z \in C(\eta_n(t), u_n(\theta_n(t)))$ tel que $\|v - z\| \leq |v(\eta_n(t)) - v(t)| + L\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|$. de (2.20), on a

$$u'_n(t) \in -N_{C(\eta_n(t), u_n(\theta_n(t)))}(Au'_n(t) + Bu_n(\theta_n(t))), p.p \ t \in [0, T].$$

Ce qui est implique que

$$\langle -u'_n(t), z - Au'_n(t) - Bu_n(\theta_n(t)) \rangle \leq 0$$

Or

$$\begin{aligned} \langle -u'_n(t), v - Au'_n(t) - Bu_n(t) \rangle &\leq \langle -u'_n(t), v - z - Bu_n(t) + Bu_n(\theta_n(t)) \rangle \\ &\leq \alpha_n(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Où $\alpha_n(t) = M(|v(\eta_n(t)) - v(t)| + L\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| + \|B\|M|\theta_n(t) - t|) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Puisque elle est vraie pour tout $v \in C(t, u(t))$, nous obtenons :

$$\sigma(C(t, u(t)), -u'_n(t)) + \langle u'_n(t), Au'_n(t) + Bu_n(t) \rangle \leq \alpha_n(t).$$

En intégrant sur $[0, T]$ et en appliquant la continuité inférieure, on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \{\sigma(C(t, u(t)), -u'_n(t)) + \langle u'_n(t), Au'_n(t) + Bu_n(t) \rangle\} dt \leq 0. \quad (2.29)$$

Posons $D(t) = C(t, u(t))$ alors, comme la fonction support est convexe et d'après le lemme 1.8.1 on a la fonction $x \mapsto \int_0^T \sigma(t, x(t)) dt$ est faiblement semi-continue inférieurement dans $L^2([0, T], H)$.

Et comme $u'_n(\cdot)$ converge faiblement vers $u'(\cdot)$ dans $L^2([0, T], H)$, on a

$$\int_0^T \sigma(t, -u'(t)) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \sigma(D(t), -u'_n(t)) dt \quad (2.30)$$

De plus la fonction $x \mapsto \int_0^T \langle x(t), Ax(t) \rangle dt$ et aussi faiblement semi-continue inférieurement dans $L^2([0, T], H)$ (exemple 1.4.2), et par suite

$$\int_0^T \langle u'(t), Au'(t) \rangle dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle u'_n(t), Au'_n(t) \rangle dt. \quad (2.31)$$

On note par $B = \nabla \varphi_B$ où la fonction $\varphi_B(x) := \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle$ est continue . alors d'après le

lemme 1.12.1 on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u'(t), Bu(t) \rangle dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \varphi_B(u(t)) dt = \varphi_B(u(T)) - \varphi_B(u(0)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_B(u_n(T)) - \varphi_B(u_n(0)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{d}{dt} \varphi_B(u_n(t)) dt \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle u'_n(t), Bu_n(t) \rangle dt.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

De (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), on a

$$\int_0^T \{ \sigma(D(t), -u'(t)) + \langle u'(t), Au'(t) + Bu(t) \rangle \} dt \leq 0. \tag{2.33}$$

D'après ce qui précède $Au'(t) + Bu(t) \in D(t)$ p.p $t \in [0, T]$, alors

$$\langle -u'(t), Au'(t) + Bu(t) \rangle \leq \sigma(D(t), -u'(t)), p.p \ t \in [0, T].$$

Or

$$\sigma(D(t), -u'(t)) + \langle u'(t), Au'(t) + Bu(t) \rangle \geq 0, p.p \ t \in [0, T]. \tag{2.34}$$

De (2.33), (2.34), on a

$$\sigma(D(t), -u'(t)) + \langle u'(t), Au'(t) + Bu(t) \rangle = 0, p.p \ t \in [0, T].$$

Or

$$\sigma(D(t), -u'(t)) = \langle -u'(t), Au'(t) + Bu(t) \rangle, p.p \ t \in [0, T].$$

D'après la proposition 1.8.3, on déduit que

$$u'(t) \in -N_{C(t, u(t))}(Au'(t) + Bu(t)) \quad p.p \ sur \ [0, T].$$

D'où $u(\cdot)$ est une solution de (2.5). **(i)**

On va montrer l'unicité de la solution :

I- Unicité

On suppose que pour toute condition initiale u_0 le problème (2.5) admet deux solutions $u_1(\cdot)$ et $u_2(\cdot)$ i.e. pour $i = 1, 2$, on a

$$\begin{cases} u'_i(t) \in -N_{C(t, u_i(t))}(Au'_i(t) + Bu_i(t)) & p.p \ sur \ [0, T], \\ u_i(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.35}$$

On commence pour démontrer que $u'_i(\cdot)$ est uniformément bornée.

Pour $i = 1, 2$:

$$\langle u'_i(t), y - Au'_i(t) - Bu_i(t) \rangle \geq 0, \forall y \in C(t, u_i(t)), \quad p.p \ sur \ [0, T]$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la coercivité de A :

$$\beta \|u'_i(t)\|^2 \leq \langle u'_i(t), Au'_i(t) \rangle \leq \|u'_i(t)\| \|y - Bu_i(t)\| \quad (2.36)$$

D'après le lemme 2.1.5, on peut trouver $y_t \in C(t, u_i(t))$ tel que $\|y_t\| \leq c + L\|u_i(t) - u_0\|$.

En remplaçant dans (2.36), on trouve

$$\begin{aligned} \|u'_i(t)\| &\leq \frac{1}{\beta} \|y_t - Bu_i(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\beta} [c + L\|u_i(t) - u_0\| + \|B\| \|u_i\|] \\ &\leq \frac{1}{\beta} (L + \|B\|) \|u_i\| + \frac{1}{\beta} (c + L\|u_0\|). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Grönwall (version continue) :

$$\|u'_i(t)\| \leq [\|u_0\| + \frac{T}{\beta} (c + L\|u_0\|)] \exp(\frac{T}{\beta} (L + \|B\|)).$$

Donc $u'_i(t), Au'_i(t) + Bu_i(t)$ sont uniformément bornés par un entier $R > 0$, i.e.

$$u'_i(t), Au'_i(t) + Bu_i(t) \in R\mathbb{B}.$$

Par hypomonotonicity-like du cône normale de C , il existe $\tilde{L} > 0$ tel que

$$\langle u'_1(t) - u'_2(t), Au'_1(t) + Bu_1(t) - Au'_2(t) - Bu_2(t) \rangle \leq \tilde{L} \|u_1(t) - u_2(t)\| \|u'_1(t) - u'_2(t)\|, p.p \ t \in [0, T].$$

Par la coercivité de A et l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \beta \|u'_1(t) - u'_2(t)\|^2 &\leq \tilde{L} \|u_1(t) - u_2(t)\| \|u'_1(t) - u'_2(t)\| + \langle u'_1(t) - u'_2(t), Bu_2(t) - Bu_1(t) \rangle \\ &\leq (\tilde{L} + \|B\|) \|u_1(t) - u_2(t)\| \|u'_1(t) - u'_2(t)\| \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \|u'_1(t) - u'_2(t)\|^2 &\leq \tilde{L} \|u_1(t) - u_2(t)\| \|u'_1(t) - u'_2(t)\| + \langle u'_1(t) - u'_2(t), Bu_2(t) - Bu_1(t) \rangle \\ &\leq (\tilde{L} + \|B\|) \|u_1(t) - u_2(t)\| \|u'_1(t) - u'_2(t)\| - \frac{\beta}{2} \|u'_1(t) - u'_2(t)\|^2 \\ &\leq \frac{\tilde{L}_1^2}{2\beta} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2, \tilde{L}_1 = \tilde{L} + \|B\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|u'_1(t) - u'_2(t)\| \leq \frac{\tilde{L}_1}{\beta} \|u_1(t) - u_2(t)\|$$

En utilisant l'inégalité de Grönwall (version continue) :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \|u_1(0) - u_2(0)\| \exp(\frac{\tilde{L}_1 t}{\beta}) = 0, \forall t \in [0, T].$$

Par conséquent $u_1 \equiv u_2$, d'où l'unicité de la solution. **(ii)**

De **(i)** et **(ii)**, le problème (2.5) admet une unique solution u , de plus elle est M-continûment Lipschitzienne et $\|u(t)\| \leq \|u_0\| + MT \ \forall t \in [0, T]$. ■

2.3 Résolution de l'inégalité quasi-variationnelle d'évolution

Maintenant, nous étudions l'inégalité quasi-variationnelle d'évolution suivante :
 Trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que : $u'(t) \in \mathcal{K}$ p.p. $t \in [0, T]$ et $\forall v \in \mathcal{K}$, on a

$$\begin{cases} a(u'(t), v - u'(t)) + b(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geq \langle f(t, u(t)), v - u'(t) \rangle, \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \quad (2.37)$$

Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H1) $\mathcal{K} \subset H$ est non vide, fermé et cône convexe.

(H2) $a(\cdot, \cdot), b(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires continues et symétriques et $a(\cdot, \cdot)$ satisfait pour tout $x \in H$, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$a(x, x) \geq \beta \|x\|^2.$$

(H3) $j : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, positivement homogène (i.e., $j(\lambda x) = \lambda j(x), \forall \lambda > 0$) et continûment Lipschitzienne avec $j(0) = 0$.

(H4) la fonction $f : [0, T] \times H \rightarrow H$ satisfait :

$$\|f(t, u) - f(s, w)\| \leq |v(t) - v(s)| + L\|u - w\|, \quad \forall t, s \in [0, T] \text{ et } u, w \in H.$$

Où $L \geq 0$ et $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue.

Maintenant, on définit la fonction $J : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivante :

$$J(x) = \begin{cases} j(x), & \text{si } x \in \mathcal{K}, \\ +\infty, & \text{si non.} \end{cases}$$

Et soient $A, B : H \rightarrow H$ deux opérateurs linéaires bornés et symétriques tel que :

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \langle Bu, v \rangle = b(u, v), \quad \forall u, v \in H. \quad (2.38)$$

Et par suite le problème (2.37) s'écrit sous la forme suivante :

Trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que : $\forall v \in H$ p.p. $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{cases} \langle Au'(t), v - u'(t) \rangle + \langle Bu(t), v - u'(t) \rangle + J(v) - J(u'(t)) \geq \langle f(t, u(t)), v - u'(t) \rangle, \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \quad (2.39)$$

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H4), le problème (2.37) (ou (2.39)) admet une solution unique continûment Lipschitzienne pour toute condition initiale $u_0 \in H$.*

Preuve. L'idée de la preuve est basée sur le théorème 2.2.1 c'est à dire, on va écrire le problème (2.37) comme (2.5), ensuite on va vérifier les hypothèses **1,2,3** .

Donc la preuve se fait en 2 étapes :

1^{er}étape : **écrivons (2.37) sous forme du problème (2.5) :**

On a (2.39) équivalent à

$$\begin{cases} f(t, u(t)) - Au'(t) - Bu(t) \in \partial J(u'(t)), \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases} \quad (2.40)$$

Ensuite, D'après les hypothèses **(H1)**, **(H3)**, il est claire que J est une fonction propre convexe, s.c.i et positivement homogène avec $J(0) = 0$, alors d'après la proposition 1.8.2 on a :

$$J(x^*) = \sigma(C_\sigma, x^*) = \delta_{C_\sigma}^*(x^*), \forall x^* \in H. \quad (2.41)$$

Où $C_\sigma = \partial J(0)$ est un ensemble non vide convexe, fermé.

D'autre part, comme la fonction indicatrice de C_σ est propre, convexe et s.c.i et d'après le lemme 1.6.1, théorème 1.6.1 et (2.41) on trouve que :

$$x^* \in \partial J(w) \Leftrightarrow w \in \partial J^*(x^*) = \partial \delta_{C_\sigma}^*(x^*) = N_{C_\sigma}(x^*).$$

Par conséquent de (2.40) on obtient que :

$$u'(t) \in N_{C_\sigma}(f(t, u(t)) - Au'(t) - Bu(t)).$$

D'après la proposition 1.5.2 on déduit que :

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t, u(t))}(Au'(t) + Bu(t)), \\ u(0) = u_0 \in H. \end{cases}$$

Où $C(t, u(t)) := f(t, u) - C_\sigma = f(t, u) - \partial J(0)$.

2^{ème} étape : **vérifions les hypothèses 1,2 et 3 :**

D'après **(H4)** On remarque que l'ensemble C est un cas particulier du lemme 2.1.1, alors les hypothèses **1,2** sont satisfaites, de plus de (2.38) et **(H2)** on déduit que l'hypothèse **3** est satisfaite.

Alors d'après le lemme 2.2.1 le problème (2.37) admet une solution unique continûment Lipschitzienne. ■

Application au problème de contact avec frottement Quasi-statique

L'objet de cette partie est l'étude d'un problème aux limites avec contact, et frottement, entre un corps déformable et une fondation. Nous décrivons la formulation variationnelle de ce modèle qui est sous la forme d'une inéquation variationnelle d'évolution pour le champ des déplacements. Alors, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution pour ce modèle. La démonstration est basée sur les résultats du **chapitre 2**.

Notation : Soit Ω un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 . Nous notons par $\sigma = (\sigma_{ij}(x, t))$ tel que $\sigma_{ij} \in L^2(\Omega)$ le champ des contraintes tel que $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$. Soit $u = u(x, t) = (u_i(x, t))$, $1 \leq i \leq d$, le champ des déplacements. Nous désignons par $\varepsilon = \varepsilon(u)$ le champ des déformations linéarisées. pour un vecteur v nous désignons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu \\ v_\tau = v - v_\nu \nu \end{cases} \quad (3.1)$$

Les composantes normale et tangentielle du champ des contraintes, notées respectivement σ_ν et σ_τ sont définies par les égalités :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = \sigma \nu \cdot \nu \\ \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous utilisons (3.1) et (3.2) pour obtenir la relation suivante :

$$\sigma \nu \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau. \quad (3.3)$$

Rappelons que le tenseur des déformations linéarisées est donné par :

$$\begin{cases} \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq d. \end{cases}$$

Loi de comportement des matériaux visco-élastiques : est une relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations $\varepsilon = \varepsilon(u)$, est décrit par l'équation suivante :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u') + \mathcal{B}\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u') + b_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u). \quad (3.4)$$

Dans cette équation $\mathcal{A} = (a_{ijkh}) \in L^\infty(\Omega)$ est le tenseur des coefficients visco-élastiques, $\mathcal{B} = (b_{ijkh}) \in L^\infty(\Omega)$ est le tenseur des coefficients élastiques.

Condition de contact et de frottement : De façon générale, nous comprenons par condition de contact une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes et nous comprenons par loi de frottement une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et la vitesse tangentielle u'_τ ou bien le déplacement tangentiel u_τ . La contrainte σ_τ s'appelle aussi force de frottement.

On dit que le contact est bilatéral si la composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc $u_\nu = 0$.

De plus le contact est sans frottement si $\sigma_\tau = 0$. Dans le cas où la force de frottement σ_τ ne s'annule pas sur la surface de contact, alors le contact est avec frottement.

Problème : Le cadre physique se compose d'un corps déformable $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) qui est en contact avec une fondation rigide. La frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est régulière et composée de trois parties : $\Gamma = \overline{\Gamma_U} \cup \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_C}$, avec $\Gamma_U \cap \Gamma_N = \Gamma_U \cap \Gamma_C = \Gamma_N \cap \Gamma_C = \emptyset$ et $mes(\Gamma_U) > 0$ (voir figure 3.1). la frontière Γ_U , le corps est supposé être fixé, ce qui signifie que le déplacement est donné et sur Γ_C le corps est en contact de frottement bilatéral avec une fondation, i.e., il n'est pas une perte de contact entre le corps et la fondation. Les tractions agissent sur Γ_N . du cas quasi-statique, où tous les effets d'accélération sont négligés, l'équilibre du corps dans ce cadre physique est basé sur la Loi constitutive avec les conditions aux limites suivantes : trouvez un champ de déplace-

ment $u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tel que :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u'(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) \text{ dans } \Omega \times [0, T]. \quad (3.5)$$

$$-Div(\sigma(t)) = \mathbf{f}(t, u) \text{ dans } \Omega \times [0, T]. \quad (3.6)$$

$$u = 0, \text{ sur }]0, T[\times \Gamma_U \quad (3.7)$$

$$\sigma\nu = \mathbf{h} \text{ sur }]0, T[\times \Gamma_N \quad (3.8)$$

$$|\sigma_\tau| \leq g \text{ sur } \Gamma_C, \quad u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_C \quad (3.9)$$

$$\sigma_\tau = -g \frac{u'_\tau}{|u'_\tau|} \text{ si } u'_\tau \neq 0. \quad (3.10)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (3.11)$$

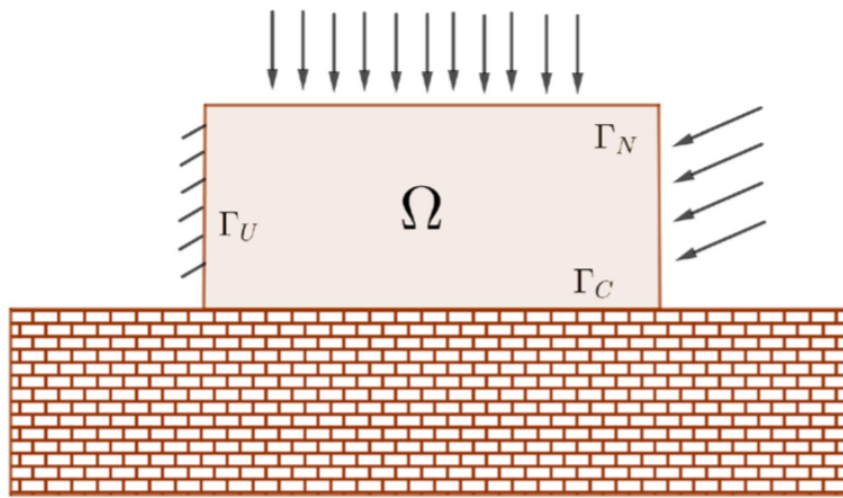


FIGURE 3.1 – Un corps en contact avec une Fondation rigide .

Nous notons que (3.6) représente l'équation d'équilibre, et (3.7) représente la condition aux limites pour le champ de déplacement, et $\mathbf{f}(t, u)$ la densité d'une force volumique, dépendant de t et de u . Nous supposons que les tenseurs des coefficients visco-élastiques $\mathcal{A} = (a_{ijkl}) \in L^\infty(\Omega)$ et des coefficients élastiques $\mathcal{B} = (b_{ijkl}) \in L^\infty(\Omega)$ ont les propriétés de symétrie et d'ellipticité (voir [12] pour plus de détails). La condition (3.8) représente la condition de surface de traction dans laquelle agissent la traction surfacique de densité \mathbf{h} selon le temps t sur la frontière Γ_N .

En (3.9) et (3.10) $g \in L^\infty(\Gamma_C)$ est une fonction non négatif représentant un seuil de frottement.

Théorème 3.1 (Formule de Green). Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 et soit la fonction $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^d$ alors :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} Div(\sigma) \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v d\Gamma, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^d.$$

Où $Div(\sigma) = (\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij})$.

Théorème 3.2 (Inégalité de Korn). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière régulière Γ . Alors il existe une constante c dépendant uniquement de Ω tel que :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} v_i v_i dx \geq c \|v\|_H^2, \quad \forall v \in (H^1(\Omega))^d.$$

Le Théorème suivant est une conséquence de l'inégalité de Korn :

Théorème 3.3. Soit Ω un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^d de frontière régulière Γ . Soient Γ_U, Γ_D deux parties de Γ telle que $\Gamma = \overline{\Gamma_U} \cup \overline{\Gamma_D}$ avec $\Gamma_U \cap \Gamma_D = \emptyset$ et $mes(\Gamma_U) > 0$. Alors il existe une constante $\beta > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx \geq \beta \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V,$$

tel que : $V = \{v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}$.

Nous passons maintenant à la construction de la formulation variationnelle de notre **problème**.

A cet effet nous supposons dans ce qui suit que la force volumique de densité \mathbf{f} et la traction surfacique de densité \mathbf{h} ont la régularité :

$$\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d \text{ et } \mathbf{h} \in (L^2(\Gamma_N))^d.$$

Théorème 3.4. Le **problème** précédent s'écrit sous la forme du problème (2.37).

où

$$H = (H^1(\Omega))^d.$$

$$\mathcal{K} = \{v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \text{ et } v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \quad u, v \in H.$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} b_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \quad u, v \in H.$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_C} g |v_\tau| d\Gamma, \quad v \in \mathcal{K}.$$

$$\langle f(t, u), v \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) v dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t) v d\Gamma, \quad v \in H.$$

Preuve. En multipliant (3.6) par une fonction teste $v \in (H^1(\Omega))^d$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$- \int_{\Omega} Div(\sigma(t)) \cdot v dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx.$$

En utilisant la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx.$$

En utilisant (3.3) :

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma_C} (\sigma_{\nu} \nu_{\nu} + \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau}) d\Gamma - \int_{\Gamma_U \cup \Gamma_N} \sigma \nu \cdot v d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx.$$

Supposons que $v = 0$ sur $]0, T[\times \Gamma_U$, $v_{\nu} = 0$ sur Γ_C et $\sigma \nu = \mathbf{h}$ sur Γ_N alors :

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma_C} \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t) \cdot v d\Gamma.$$

Or

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} \varepsilon(u'(t)) \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \mathcal{B} \varepsilon(u(t)) \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Gamma_C} \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t) \cdot v d\Gamma.$$

D'où

$$\int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u') \varepsilon_{ij}(v) dx + \int_{\Omega} b_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx - \int_{\Gamma_C} \sigma_{\tau} \cdot v_{\tau} d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t) \cdot v d\Gamma.$$

Notons par $a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx$, $b(u, v) = \int_{\Omega} b_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx$, $\mathcal{K} = \{v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \text{ et } v_{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$. Supposons que $u'(t) \in \mathcal{K}$ alors $v - u'(t)$ est aussi, et par suite

$$a(u'(t), v - u'(t)) + b(u(t), v - u'(t)) - \int_{\Gamma_C} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - u'_{\tau}(t)) d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u) \cdot (v - u'(t)) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t) \cdot (v - u'(t)) d\Gamma. \quad (3.12)$$

D'après la loi de frottement (3.10) nous pouvons remarquer que :

$$-\sigma_{\tau} u'_{\tau} = g |u'_{\tau}| \text{ sur } \Gamma_C.$$

Et donc, en tenant compte du fait que :

$$xy \geq -|x||y|.$$

Nous avons

$$\sigma_{\tau} (v_{\tau} - u'_{\tau}) \geq g |u'_{\tau}| - g |v_{\tau}|.$$

Par intégration sur la frontière Γ_C nous obtenons :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_{\tau} (v_{\tau} - u'_{\tau}) d\Gamma \geq \int_{\Gamma_C} (g |u'_{\tau}| - g |v_{\tau}|) d\Gamma.$$

Remplaçant dans (3.12) on trouve que :

$$a(u'(t), v - u'(t)) + b(u(t), v - u'(t)) + j(v) - j(u'(t)) \geq \langle f(t, u(t)), v - u'(t) \rangle \quad \forall v \in \mathcal{K}.$$

Où

$$j(v) = \int_{\Gamma_C} g|v_\tau|d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

$$\langle f(t, u), v \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t, u)v dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{h}(t)v d\Gamma \quad \forall v \in H.$$

D'où le résultat. ■

Pour plus de détails sur la formulation variationnelle du problème (3.6)-(3.11), nous nous référons à ([12], [17], [24]).

Par conséquent, la coercivité des formes bilinéaires a et b est une conséquence du théorème 3.3. La symétrie de a et b découle également de la symétrie des coefficients d'élasticités.

Nous supposons que $(t, u) \mapsto \mathbf{f}(t, u)$ bouge dans un sens absolument continue par rapport au temps t et un sens Lipschitzienne par rapport à u et que $t \mapsto \mathbf{h}(t)$ bouge dans un sens absolument continue.

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 2.1 :

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour chaque $u_0 \in H$, notre **problème** a une solution unique qui est continûment Lipschitzienne.*

Conclusion

Au terme de ce travail nous relevons l'apport de quelques éléments déterminants dans ce mémoire.

D'abord pour le **chapitre 2**, nous devons la convergence forte des suites de solutions approchées à cause de la présence de l'état dans l'ensemble des contraintes. C'est que l'hypomonotone-like est déterminante en ce sens qu'elle joue pour le processus de rafle implicite un rôle analogue à celle de la maximal monotone pour la processus de rafle classique.

Pour le **troisième chapitre** on souligne le rôle du processus de rafle implicite pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution. En effet, le processus de rafle implicite constitue un point entre le problème de contact avec frottement quasi-statique et les inégalités variationnelles.

Bibliographie

- [1] **Adly,S., Haddad,T., et Ba Khiet Le** : *State-Dependent Implicit Sweeping Process in the Framework of Quasistatic Evolution Quasi-Variational Inequalities* Journal of Optimization Theory and Applications springer 2018.
- [2] **Adly, S., Haddad, T.** : *An implicit sweeping process approach to quasistatic evolution variational inequalities.* SIAM J. Math. Anal. 50(1), 761–778 (2018)
- [3] **Adly, S., Haddad, T., Thibault, L.** : *Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities.* Math. Program. Ser. B 148(1), 5–47 (2014)
- [4] **Adly, S.** : *A Variational Approach to Non smooth dynamics. Applications in Unilateral Mechanics and Electronics.* Springer, Cham (2017)
- [5] **Adly, S., Le, B.K.** : *On semicoercive sweeping process with velocity constraint.* Optim. Lett. 12(4), 831–843 (2018)
- [6] **Adly, S., Le, B.K.** : *Unbounded second-order state-dependent Moreau’s sweeping processes in Hilbert spaces.* J. Optim. Theory Appl. 169(2), 407–423 (2016)
- [7] **Addi,K.,Brogliato,B.,Goeleven,D.** : *A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problems.*Appl.Electron. Math.Program.126(1),31–67(2011)
- [8] **Brogliato, B.** : *Non smooth Mechanics. Models, Dynamics and Control. Communications and Control Engineering Series, 3rd edn.* Springer, Cham (2016)
- [9] **Bounkhel,M.,Castaing,C.** : *State dependent sweeping process in p -uniformly smooth and q -uniformly convex banach spaces.* Set Valued Var. Anal. 20, 187–201 (2012)
- [10] **Barbu, V.** : *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces.* Springer, Berlin (2010)

- [11] **D. AZE** : *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, édition marketing S.A., Paris, 1997
- [12] **Duvaut, D., Lions, J.L.** : *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer, Berlin (1976)
- [13] **Goeleven, D.** : *Complementarity and Variational Inequalities in Electronics. Mathematical Analysis and its Applications*. Academic Press, London (2017)
- [14] **H. Brezis** : *Analyse fonctionnelle*, MASSON, Paris, 1983
- [15] **H. Brezis**, : *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973
- [16] **Heinz H. Bauschke, Patrick L. Combettes auth** : *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces* .
- [17] **Han, W., Sofonea, M.** : *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 30. American Mathematical Society/International Press, Providence/Somerville (2002)
- [18] **Kunze, M., Marques, M.D.P.M.** : *An introduction to Moreau's sweeping process*. In : Brogliato, B. (ed.) *Impacts in Mechanical Systems. Analysis and Modelling*, pp. 1–60. Springer, Berlin (2000)
- [19] **Moreau, J.J.** : *Sur l'évolution d'un système élastoplastique*. .C.R.Acad.Sci.Paris Sér.A-B273, A118– A121 (1971)
- [20] **Moreau, J.J.** : *Rafle par un convexe variable I, Sémin. Anal. Convexe Montpellier Exposé 15* (1971)
- [21] **Moreau, J.J.** : *Rafle par un convexe variable II, Sémin. Anal. Convexe Montpellier Exposé 3* (1972)
- [22] **R.T. Rockafellar** : *Convex Integral Functionals and Duality*. In : E.H. Zarantonello (Ed.) *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. Academic Press, New York, 215-236, 1971
- [23] **Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J.** : *Models and Analysis of Quasistatic Contact*. Springer, Berlin (2004) Springer, Berlin (2004)
- [24] **Shillor, M., Sofonea, M., Telega, J.J.** : *Models and Analysis of Quasistatic Contact*. Springer, Berlin (2004)
- [25] **Sofonea, M., Matei, A.** : *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 18*. Springer, New York (2009)