République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahya - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

d'ordre : ....
de séries : ....

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques
Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Thème

Analyse des écoulements quasi-Newtoniens

Présenté par :

Aziza Amiour

Devant le jury :

Président	: Sarra Maarouf	MCB Université de Jijel
Encadreur	: Nadir Arada	MCA Université de Jijel
Examinateur	: Razika Boufenouche	MCB Université de Jijel

Promotion **2018/2019**

Un remerciement chaleureux et spécial à M. Arada Nadir pour avoir accepté de m'encadrer, m'avoir proposer ce sujet, m'avoir dirigé et accompagné durant toute cette période de travail.

Nous remercions Mmes Maarouf Sarra et Boufenouche Razika d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à tous mes enseignants au niveau du département de mathématiques et en particulier à ceux du master EDP.

Mes remerciements vont vers tous mes collègues, amis et toutes les personnes qui m'ont soutenue et encouragée.

Finalement, je ne peux pas oublier ma chère famille. Ce travail est aussi un hommage destiné à les remercier pour tous ses efforts.

Dédicace

À

Mes chers parents,

Mes frères et mes soeurs,

Mon petit frère Mohammed et ma petite soeur Meriem,

Mon grand-père,

Ma grande famille et mes amies,

Tous mes collègues de la promotion 2018-2019*,*

Tous ceux qui sont proches de mon cœur.

Aziza.

Table des matières

Introduction **1**

1 Problème de Stokes généralisé **5**

1.1 Introduction 6
1.2 Notations et cadre fonctionnel 6
1.3 Tenseur des contraintes de viscosité 9
1.3.1 Exemple 10
1.3.2 Propriétés algébriques 12
1.3.3 Propriétés de continuité, coercivité et monotonie dans les espaces de Lebesgue 17
1.4 Formulation faible 18
1.5 Existence et unicité de solution 20
1.5.1 Solvabilité pour $p \geq 2$ 21
1.5.2 Solvabilité pour $1 < p < 2$ 27

2 Problème de Navier-Stokes généralisé **31**

2.1 Introduction 32
2.2 Formulation faible 32
2.3 Existence et unicité de solution 33
2.3.1 Propriétés de la forme trilinéaire associée au terme convectif 33
2.3.2 Solvabilité pour $p \geq 2$ 34
2.3.3 Solvabilité pour $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2$ 39

Bibliographie **43**

Introduction

Dans le cas des fluides incompressibles, les équations de conservation de quantité de mouvement et de masse dans un domaine Ω s'écrivent

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{1}$$

où ρ est la densité (constante) du fluide, $\boldsymbol{u}$ est la vitesse du fluide, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{f}$ une force volumique, T un temps fixé. Lorsque le fluide est en mouvement, il est commode de décomposer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = -\pi\mathbb{I} + \boldsymbol{\tau} \qquad (\text{i.e. } \sigma_{ij} = -\pi\delta_{ij} + \tau_{ij}).$$

Dans cette décomposition, la pression statique π est une variable qui ne dépend que de l'état thermodynamique du système étudié, alors que le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ dépend du taux de déformation. Reportant cette décomposition dans (1), on obtient

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) + \nabla\pi = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[. \end{cases} \tag{2}$$

La relation entre les déformations du fluide et les contraintes appliquées s'exprime généralement par une équation constitutive reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}$ et le tenseur des déformations $D\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^\top\right)$. Il existe une grande variété de comportements rhéologiques, allant d'une simple relation linéaire à des modèles complexes pouvant dépendre des vitesses de déformation, de l'histoire du fluide ou des conditions d'écoulement.

Si la viscosité est uniforme dans le fluide, l'équation donnant la loi de comportement est une relation linéaire entre contraintes de viscosité et déformations, donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\, D\boldsymbol{u}.$$

Substituant dans (2), nous obtenons les équations de Navier-Stokes instationnaires

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right) - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[. \end{cases} \tag{3}$$

Les équations de Navier-Stokes sont considérés comme un très bon modèle pour décrire l'écoulement d'une large classe de fluides. Il existe cependant de nombreux fluides dont le comportement viscoélastique, extrêmement complexe, ne peut être décrit par le modèle newtonien linéaire classique. Pour des conditions aux limites identiques, les profils de vitesse et de température ne seront donc plus les mêmes que dans un écoulement de fluide newtonien. Les fluides quasi-newtoniens (encore appelés newtonien généralisés) représentent l'exemple le plus simple de tels fluides. La non-linéarité résulte d'une simple modification de l'équation constitutive linéaire par incorporation du taux de cisaillement $|D\boldsymbol{u}|$ au niveau de la viscosité. Le tenseur des contraintes de viscosité correspondant est de la forme

$$\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}) = 2\mu(|D\boldsymbol{u}|)D\boldsymbol{u},$$

Le fluide décrit par ces modèles est dit dilatant si la viscosité croît avec le taux de cisaillement et pseudo-plastique si la viscosité décroît avec le taux de cisaillement. Parmis ces modèles, un des plus populaires dans la communauté des ingénieurs est le modèle de Carreau donné par

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) = 2\mu\left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\boldsymbol{\eta}, \tag{4}$$

où μ est une constante matérielle positive. Pour le cas particulier $p = 2$, nous recouvrons le modèle classique de Navier-Stokes avec le coefficient de viscosité $\mu > 0$.

Les équations aux dérivées partielles décrivant cette classe de fluides ont été proposé par Ladyzhenskaya comme une modification des équations de Navier-Stokes instationnaires et systématiquement étudiées dans [7] et [8]. Sous des restrictions relatives à l'exposant p, et utilisant des arguments de compacité et la théorie des opérateurs monotones, elle a établi l'existence et l'unicité de solutions dans la même classe (ce qui, dans le cas des équations de Navier-Stokes, est encore un problème ouvert). Sensiblement à la même période, Lions a développé des résultats comparables (voir [9]). Depuis lors, ces problèmes ont fait l'objet de beaucoup d'études approfondies et nous voudrions mettre particulièrement l'accent sur les travaux de Nečas et de Beirão da veiga et leurs co-auteurs.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'écoulement de fluides incompressibles quasi-Newtoniens stationnaires. Le système d'équation correspondant est donnée par

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{5}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ or $n = 3$) est un domaine borné dont la frontière Γ est de classe C^1. Le tenseur des contraites de viscosité $\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ est issu d'un potentiel, i.e. qu'il existe une fonction $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^+_0, \mathbb{R}^+_0)$ avec $\Phi(0) = 0$ tel que

$$\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial\Phi(|\boldsymbol{\eta}|^2)}{\partial\eta_{ij}} = 2\Phi'(|\boldsymbol{\eta}|^2)\,\eta_{ij}, \qquad \boldsymbol{\tau}(0) = 0$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, où $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ est l'espace de toutes les matrices $(n \times n)$ symétriques. De plus, nous supposons que pour $p > 1$ les hypothèses suivantes sont satisfaites

H_1 - Il existe une constante positive γ tel que pour tout $i, j, k, \ell = 1, \cdots, n$

$$\left|\frac{\partial \tau_{k\ell}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_{ij}}\right| \leq \gamma \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$$

H_2 - Il existe une constante positive μ tel que

$$\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} \geq \mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$$

où $\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\xi} = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial \tau_{k\ell}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_{ij}} \zeta_{k\ell} \xi_{ij}$, pour $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ces hypothèses sont satisfaites par une grande classe de modèles et, comme on le verra plus loin, par le modèle de Carreau (4).

La principale difficulté mathématique pour ce type de problèmes est liée à la non-linéarité du tenseur des contraintes de viscosité $\boldsymbol{\tau}$ et aux effets combinés de ce tenseur et du terme convectif. Après établissement d'une formulation variationnelle adéquate, nous appliquons une méthode de Galerkin pour définir un problème approché. Nous montrons que cette solution existe et qu'elle satisfait certaines estimations uniformes. Des arguments de compacité et de monotonie nous permettent de passer à la limite et de montrer que notre problème admet au moins une solution. Finalement, des arguments de monotonie nous permettent d'obtenir des résultats d'unicité.

Afin de mettre en valeur l'effet séparé et puis combiné du tenseur des contraintes et du terme convectif, nous avons opté pour une étude en deux temps. Nous commençons par les fluides quasi-Newtoniens rampants (ou fluides de Stokes généralisé) où le terme convectif est négligé, et enchainons avec le problème (5).

Chapitre 1

Existence et unicité de solution pour le problème de Stokes généralisé

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la solvabilité du système de Stokes généralisé stationnaire donné par

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})) + \nabla \pi = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{1.1}$$

La principale difficulté mathématique pour ce type de problèmes est liée à la non-linéarité du tenseur des contraintes de viscosité $\boldsymbol{\tau}$. Si la construction de suites approximantes via une méthode de Galerkin se fait assez aisément, l'estimation de ces suites et le passage à la limite dans des topologies adéquates nécessite de faire une analyse minutieuse du problème.

Le plan du chapitre est le suivant : dans la première section nous présentons les différentes notations et posons le cadre fonctionnel. Nous passons ensuite à l'étude du tenseur des contraintes de viscosité : après avoir donné un exemple satisfaisant nos hypothèses de travail relatives à ce tenseur, nous montrons que celles-ci induisent des propriétés algébriques de continuité, coercivité et monotonie et que ces propriétés sont héritées après intégration dans des espaces de Lebesgue.

Dans la section suivante, nous établissons une formulation variationnelle et nous nous en inspirons pour définir un problème approché obtenu en utilisant une méthode de Galerkin appropriée.

Utilisant des arguments de compacité et de monotonie, nous établissons l'existence de solutions approchées, des estimations correspondantes et prouvons que la limite est une solution faible de notre problème. L'unicité de cette solution est ensuite établie grâce à des arguments de monotonie. Cette approche globale est faite dans le cas des écoulements dilatants en premier lieu et reproduite, après adaptation, dans le cas des écoulements pseudo-plastiques.

1.2 Notations et cadre fonctionnel

La plupart des résultats énoncés dans cette section sont classiques et peuvent-être trouvés dans n'importe quel bon livre d'analyse fonctionnel (voir par eexmple [4]) ; Nous les rappelons pour le confort du lecteur.

Soit $1 \leq p < +\infty$. Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega |v(x)|^p \, dx < +\infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| = \inf \{ M \in \mathbb{R} \mid \; |v(x)| \leqslant M \text{ p.p. dans } \Omega \} < +\infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_\infty = \text{ess } \sup_{x\in\Omega} |v(x)|,$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Dans toute la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$\begin{aligned}
(u, v) &= \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \qquad u \in L^p(\Omega),\; v \in L^{p'}(\Omega), \\
(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_\Omega \boldsymbol{u}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_\Omega u_j(x)\, v_j(x)\, dx, \qquad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)^n,\; \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)^n, \\
(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) &= \int_\Omega \boldsymbol{\eta}(x) : \boldsymbol{\zeta}(x)\, dx \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \eta_{ij}(x)\, \zeta_{ij}(x)\, dx, \qquad \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)^{n\times n},\; \boldsymbol{\zeta} \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)^{n\times n}.
\end{aligned}$$

Vu que beaucoup des quantités qu'on utilisera dans cette thèse sont des fonctions vectorielles, la notation sera simplifiée et on omettra la dimension n dans la notation de l'espace (le sens sera clair d'après le contexte).

Passons à présent à la définition de certains espaces de Sobolev et à l'énoncé de propriétés utiles qui y sont relatives.

Définition 1.2.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) = \{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \mid \nabla \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \},$$

où le gradient est à prendre dans le sens faible.

Muni de la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,p} = \left(\|\boldsymbol{v}\|_p^p + \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty,$$

qu'est un espace de Banach.
On pose $\boldsymbol{H}^1(\Omega) = \boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$; Muni du produit scalaire

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{H}^1} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{L}^2} + (\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{w})_{\boldsymbol{L}^2} ,$$

c'est un espace de Hilbert.

En plus des liens évidents avec les espaces de Lebesgue $\boldsymbol{L}^p$, conséquence de leur propre définition, les espaces de Sobolev $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ sont naturellement liés à d'autres espaces de Lebesgue via les fameuses injections de Sobolev. Plus précisemment, on a

- Si $p > n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$
- Si $p = n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$
- Si $p < n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{np}{n-p}$

Toutes ces injections sont continues et engendrent les inégalités de Sobolev

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{v}\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{1,p} && \text{si } p > n, \\ &\|\boldsymbol{v}\|_q \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{1,n} && \text{pour tout } q \in [1, +\infty[, \\ &\|\boldsymbol{v}\|_{p^*} \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{1,p} && \text{si } p < n, \end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$.
Nous rappelons aussi des résultats de compacité qui nous seront seront très utiles.

- Si $p > n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$
- Si $p = n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$
- Si $p < n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$ avec $p^* = \frac{np}{n-p}$

Toutes ces injections sont compactes et, en particulier, l'injection de $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ est compacte.

Définissons à présent un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ et qui est utile pour l'étude des problèmes avec conditions au bord de Dirichlet homogènes.

Définition 1.2.2. *Soit $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\boldsymbol{C}^\infty$ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ dans $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$.*

Le résultat suivant caractérise l'espace $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.2.3. *L'espace $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ coincide avec le sous-espace de $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ constitué de fonctions qui s'annulent au bord.*

Un résultat essentiel et lié à l'espace $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ est l'inégalité suivante.

Proposition 1.2.4. (*Inégalité de Poincaré*) *Soit* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$. *Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\boldsymbol{v}\|_p \leq C_P \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p ,$$

où $C_P > 0$ *est une constante dépendant de* p, n *et de* Ω.

Une conséquence importante de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente dans $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollaire 1.2.5. *La semi-norme*

$$|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p$$

est une norme sur $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *équivalente à la norme usuelle induite par celle de* $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$.

Le dual de $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (i.e. l'espace des formes linéaire et continues sur $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$) est appelé $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$, p' étant le conjugué de p. Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega),\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)}$ le produit de dualité entre $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ et son dual.
Nous finissons cette section par énoncer le une version de l'inégalité de Korn posée sur l'espace $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.2.6. *Soit* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 < p \leq +\infty$. *Il existe une constante* $C_K \leq 1$ *dépendant uniquement de* p *et* Ω *tel que*

$$C_K \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \leq \|D\boldsymbol{v}\|_p .$$

De plus, si $p = 2$ *on peut prendre* $C_K = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration. Voir par exemple [10]. ∎

Une conséquence de ce résultat est que la semi-norme $|||\boldsymbol{v}|||_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} = \|D\boldsymbol{v}\|_p$ est aussi une norme équivalente à $|\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)}$.
Nous terminons cette section par deux inégalités classiques qui nous seront utiles.

Lemme 1.2.7. *Soient* $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_d$ *des nombres réels positifs. Alors pour tout* $r > 0$, *on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i\right)^r \leq C_r \sum_{i=1}^{d} (\beta_i)^r \qquad \text{avec } C_r = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1 \\ d^{r-1} & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Lemme 1.2.8. (*Inégalité de Young*) *Soient* $a, b > 0$ *et* $\alpha, \alpha' \in]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$ab \leq \frac{\varepsilon\, a^{\alpha}}{\alpha} + \frac{b^{\alpha'}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha-1}}\alpha'}.$$

1.3 Tenseur des contraintes de viscosité

Cette section est dévolue à l'étude des propriétés du tenseur des contraintes de viscosité $\boldsymbol{\tau}$ découlant des hypothèses H_1-H_2. Nous montrerons en particulier que sous ces hypothèses, le tenseur possède des propriétés algèbriques de continuité, coercivité et monotonie.

1.3.1 Exemple

Avant de donner un exemple de tenseur satisfaisant H_1-H_2, nous commencerons par rappeler certaines définitions et propriétés liées au produit tensoriel.
Pour $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nous définissons le produit scalaire et la norme correspondante par

$$\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta} = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}\, \zeta_{ij} \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{\eta}| = (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta})^{\frac{1}{2}}\,.$$

Pour $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n\times n\times n}$ et $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, le produit scalaire $\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est défini par

$$(\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\eta})_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \xi_{ijk\ell}\, \eta_{k\ell} \qquad i, j = 1, \cdots, n,$$

et on peut vérifier que pour $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n\times n\times n}$, $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nous avons

$$(\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\eta},$$

où $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est donné par $(\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\xi})_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \xi_{k\ell ij}\, \zeta_{k\ell}$.
Considérons maintenant le tenseur obéissant à *la loi de Carreau* et défini par

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) = 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \boldsymbol{\eta} \qquad \mu > 0,$$

et montrons qu'il satisfait H_1-H_2. Soit Φ la fonction définie par

$$\Phi\,(x) = \tfrac{2\mu}{p}\left(1 + x^2\right)^{\frac{p}{2}} - \tfrac{2\mu}{p}.$$

Il est clair que $\Phi \in C^2\left(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+\right)$ avec $\Phi(0) = 0$ et que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(|\boldsymbol{\eta}|^2)}{\partial \eta_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \eta_{ij}} \left(\frac{2\mu}{p} \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p}{2}} - \frac{2\mu}{p} \right) \\
&= \frac{2\mu}{p} \, \frac{p}{2} \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial |\boldsymbol{\eta}|^2}{\partial \eta_{ij}} \\
&= 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \eta_{ij} \\
&= \tau_{ij}(\boldsymbol{\eta}).
\end{aligned}$$

De plus, des calculs standards montrent que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{k\ell}}{\partial \eta_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \eta_{ij}} \left(2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \eta_{k\ell} \right) \\
&= 2\mu \, \frac{p-2}{2} \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \frac{\partial |\boldsymbol{\eta}|^2}{\partial \eta_{ij}} \, \eta_{k\ell} + 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial \eta_{k\ell}}{\partial \eta_{ij}} \\
&= 2\mu \, (p-2) \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \eta_{ij} \, \eta_{k\ell} + 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \delta_{ik}\delta_{j\ell}, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Montrons à présent que le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ satisfait les hypothèses H_1-H_2.

- Prenant en compte (1.2), il vient alors que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \tau_{k\ell}}{\partial \eta_{ij}} \right| &\leq 2\mu \, |p-2| \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} |\eta_{ij}| \, |\eta_{k\ell}| + 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \delta_{ik}\delta_{j\ell} \\
&\leq 2\mu \, |p-2| \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} |\boldsymbol{\eta}|^2 + 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&\leq 2\mu \, |p-2| \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right) + 2\mu \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= 2\mu \, (1 + |p-2|) \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}},
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'hypothèse H_1 est satisfaite.

- De manière similaire, grâce à (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \tfrac{\partial \tau_{k\ell}}{\partial \eta_{ij}} \zeta_{k\ell}\zeta_{ij} \\
&= 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \eta_{ij}\,\eta_{k\ell}\,\zeta_{ij}\,\zeta_{k\ell} \\
&\quad +2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \zeta_{ij}\,\zeta_{k\ell}\,\delta_{ik}\delta_{j\ell} \\
&= 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}\,\zeta_{ij}\right) \left(\sum_{k,\ell=1}^{n} \eta_{k\ell}\,\zeta_{k\ell}\right) \\
&\quad +2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_{i,j=1}^{n} \zeta_{ij}\,\zeta_{ij} \\
&= 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta})^2 + 2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 .
\end{aligned}$$

i) Supposons que $p \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} &= 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta})^2 + 2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \\
&\geq 2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 ,
\end{aligned}$$

et H_2 est satisfaite.

ii) Supposons maintenant que $1 < p < 2$. Remarquant que

$$\begin{aligned}
\left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta})^2 &\leq \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} |\boldsymbol{\eta}|^2\,|\boldsymbol{\zeta}|^2 \\
&\leq \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right) |\boldsymbol{\zeta}|^2 \\
&= \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 ,
\end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta} &= 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1} (\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta})^2 + 2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \\
&\geq 2\mu\,(p-2) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 + 2\mu \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 \\
&= 2\mu\,(p-1) \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\zeta}|^2 ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que H_2 est satisfaite dans ce cas aussi.

1.3.2 Propriétés algébriques

Les hypothèses H_1-H_2 impliquent les propriétés suivantes pour le tenseur $\boldsymbol{\tau}$.

Lemme 1.3.1. *Soit $p \geq 2$ et $\boldsymbol{\tau}$ satisfaisant H_1-H_2. Alors, pour tout $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ les propriétés suivantes sont satisfaites*

Continuité.

$$|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta})| \leq \tfrac{n^2\gamma}{p-1}\,(1+|\boldsymbol{\eta}|)^{p-1} \tag{1.3}$$

Coercivité.

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq \mu|\boldsymbol{\eta}|^2 \qquad et \qquad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq \tfrac{\mu}{p-1}|\boldsymbol{\eta}|^p \tag{1.4}$$

Monotonie.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) &\geq \mu\,|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^2 \\ (\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) &\geq \tfrac{\mu}{2^{p-2}(p-1)}\,|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^p\end{aligned} \tag{1.5}$$

où γ et μ sont les constantes apparaissant dans les hypothèses H_1-H_2.

Démonstration. La preuve est divisée en trois parties.

Continuité. Pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, on a

$$\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta}) = \int_0^1 \tfrac{d}{ds}\tau_{ij}(s\boldsymbol{\eta})\,ds = \sum_{k,\ell=1}^{n}\int_0^1 \tfrac{\partial\tau_{ij}}{\partial\eta_{k\ell}}(s\boldsymbol{\eta})\eta_{k\ell}\,ds = \sum_{k,\ell=1}^{n}\left(\int_0^1 \tfrac{\partial\tau_{ij}}{\partial\eta_{k\ell}}(s\boldsymbol{\eta})\,ds\right)\eta_{k\ell},$$

et utilisant H_1, il vient que

$$\begin{aligned}|\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})| &\leq \sum_{k,\ell=1}^{n}\int_0^1 \left|\tfrac{\partial\tau_{ij}}{\partial\eta_{k\ell}}(s\boldsymbol{\eta})\right| ds\,|\eta_{k\ell}| \\ &\leq \sum_{k,\ell=1}^{n}\int_0^1 \gamma\left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} ds\,|\eta_{k\ell}| \\ &\leq n\gamma\int_0^1 \left(1+|\boldsymbol{\eta}|^2 s^2\right)^{\frac{p-2}{2}} ds\,|\boldsymbol{\eta}|\,.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Remarquant que

$$1 + x^2 \leq (1+x)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

et vu que $p \geq 2$, il vient que

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \leq (1+x)^{p-2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})| &\leq n\gamma \int_0^1 (1+|\boldsymbol{\eta}|s)^{p-2}\, ds\, |\boldsymbol{\eta}| = \tfrac{n\gamma}{p-1} \Big[(1+|\boldsymbol{\eta}|s)^{p-1}\Big]_0^1 \\ &\leq \tfrac{n\gamma}{p-1}\,(1+|\boldsymbol{\eta}|)^{p-1} \end{aligned}$$

et donc

$$|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta})| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tfrac{n^2\gamma}{p-1}\,(1+|\boldsymbol{\eta}|)^{p-1},$$

ce qui donne l'estimation (1.3).

<u>Coercivité.</u> Pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} &= \sum_{i,j=1}^{n} \tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})\, \eta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \tfrac{d}{ds}\tau_{ij}(s\boldsymbol{\eta})\, ds\, \eta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \int_0^1 \tfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial \eta_{k\ell}}(s\boldsymbol{\eta})\eta_{k\ell}\, ds\, \eta_{ij} \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{\tau}'(s\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}\, ds \end{aligned}$$

et prenant en compte l'hypothèse H_2, nous déduisons que

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq \mu \int_0^1 \left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2\, ds.$$

Vu que $p \geq 2$, on a

$$\left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2 \geq |\boldsymbol{\eta}|^2,$$

et donc

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq \mu \int_0^1 \left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2\, ds \geq \mu \int_0^1 |\boldsymbol{\eta}|^2\, ds = \mu\, |\boldsymbol{\eta}|^2,$$

ce qui donne $(1.4)_1$. De la même manière, on a

$$\left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2 \geq \left(|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2 = s^{p-2}\, |\boldsymbol{\eta}|^p$$

et par conséquent

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \geq \mu \int_0^1 \left(1+|s\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2\, ds \geq \mu \int_0^1 s^{p-2}\, |\boldsymbol{\eta}|^p\, ds = \tfrac{\mu}{p-1}\, |\boldsymbol{\eta}|^p,$$

ce qui montre $(1.4)_2$.

Monotonie. Utilisant les mêmes arguments que précédemment, pour tout $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, nous avons

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) &= \sum_{i,j=1}^{n} (\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta}) - \tau_{ij}(\boldsymbol{\zeta}))\, (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \tfrac{d}{ds}\tau_{ij}(\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}))\, ds\, (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,\ell=1}^{n} \int_0^1 \tfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial \eta_{k\ell}}(\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}))\, (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})_{k\ell}\, ds\, (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})_{ij} \\
&= \int_0^1 \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})\ ds
\end{aligned}$$

et prenant en compte l'hypothèse H_2, nous déduisons que

$$(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) \geq \mu \int_0^1 \left(1 + |\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^2\, ds. \tag{1.7}$$

Vu $p \geq 2$, (1.7) implique directement l'estimation $(1.5)_1$. De plus

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}) &\geq \mu \int_0^1 |\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta})|^{p-2}\, |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^2\, ds \\
&\geq \mu \int_0^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\, |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^2\, ds.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour obtenir $(1.5)_2$, il suffit de montrer que

$$\int_0^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\ ds \geq \tfrac{1}{2^{p-2}(p-1)}\, |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^{p-2}.$$

Nous considérons alors deux cas.

i) Si $|\boldsymbol{\zeta}| \geq |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|$, alors pour tout $s \in [0, 1]$

$$||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|| = |\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}| \geq (1 - s)|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|$$

et donc

$$\int_0^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\ ds \geq \int_0^1 (1 - s)^{p-2}\, ds |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^{p-2} = \tfrac{1}{p-1}\, |\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}|^{p-2}. \tag{1.9}$$

ii) Si $|\boldsymbol{\zeta}| < |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\, ds \\
&= \int_0^{\frac{|\boldsymbol{\zeta}|}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}} ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\, ds + \int_{\frac{|\boldsymbol{\zeta}|}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}}^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\, ds \\
&= \int_0^{\frac{|\boldsymbol{\zeta}|}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}} (|\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|)^{p-2}\, ds + \int_{\frac{|\boldsymbol{\zeta}|}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}}^1 (-|\boldsymbol{\zeta}| + s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|)^{p-2}\, ds \\
&= \tfrac{1}{p-1}\tfrac{1}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}\left(|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} + (|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}| - |\boldsymbol{\zeta}|)^{p-1}\right).
\end{aligned}$$

Remarquant que

$$|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} = (|\boldsymbol{\zeta}| + |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}| - |\boldsymbol{\zeta}|)^{p-1} \le 2^{p-2}\left(|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} + (|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}| - |\boldsymbol{\zeta}|)^{p-1}\right)$$

nous déduisons que

$$\int_0^1 ||\boldsymbol{\zeta}| - s|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}||^{p-2}\, ds \ge \tfrac{1}{p-1}\tfrac{1}{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|}\tfrac{|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^{p-1}}{2^{p-2}} = \tfrac{1}{2^{p-2}(p-1)}|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^{p-2} \tag{1.10}$$

et $(1.5)_2$ est obtenue en prenant en compte (1.8), (1.9) et (1.10). ■

Lemme 1.3.2. *Soit $1 < p < 2$ et $\boldsymbol{\tau}$ satisfaisant H_1-H_2. Alors, pour tout $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ les propriétés suivantes sont satisfaites*

Continuité.

$$|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta})| \le \tfrac{2n^2\gamma}{p-1}(1 + |\boldsymbol{\eta}|)^{p-1}, \tag{1.11}$$

Coercivité.

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \ge \mu\left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}|^2, \tag{1.12}$$

Monotonie.

$$(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}) \ge \mu\left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2 + |\boldsymbol{\zeta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^2 \tag{1.13}$$

où γ et μ sont les constantes apparaissant dans les hypothèses H_1-H_2.

Démonstration. La preuve, similaire à celle donnée pour le lemme précédent, est divisée en deux parties.

Continuité. Remarquant que

$$\tfrac{1}{2}\,(1+x)^2 \le 1+x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

il vient que pour $p \in]1,2[$, on a

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \le 2^{\frac{2-p}{2}}\,(1+x)^{p-2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Grâce à (1.6), il vient que pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, on a

$$\begin{aligned} |\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})| &\le 2^{\frac{2-p}{2}} n\gamma \int_0^1 (1+|\boldsymbol{\eta}|s)^{p-2}\,ds\,|\boldsymbol{\eta}| = \tfrac{2^{\frac{2-p}{2}} n\gamma}{p-1} \left[(1+|\boldsymbol{\eta}|s)^{p-1}\right]_0^1 \\ &\le \tfrac{2^{\frac{2-p}{2}} n\gamma}{p-1}\,(1+|\boldsymbol{\eta}|)^{p-1} \end{aligned}$$

et donc

$$|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta})| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\tau_{ij}(\boldsymbol{\eta})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \tfrac{2^{\frac{2-p}{2}} n^2\gamma}{p-1}\,(1+|\boldsymbol{\eta}|)^{p-1},$$

ce qui donne l'estimation (1.11).

Monotonie et coercivité. Pour tout $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ et tout $s \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta})|^2 &= |s\boldsymbol{\eta} + (1-s)\boldsymbol{\zeta}|^2 \\ &= s^2\,|\boldsymbol{\eta}|^2 + (1-s)^2\,|\boldsymbol{\zeta}|^2 + 2s\,(1-s)\,\boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\zeta} \\ &\le s^2\,|\boldsymbol{\eta}|^2 + (1-s)^2\,|\boldsymbol{\zeta}|^2 + 2s\,(1-s)\,|\boldsymbol{\eta}|\,|\boldsymbol{\zeta}| \\ &\le s^2\,|\boldsymbol{\eta}|^2 + (1-s)^2\,|\boldsymbol{\zeta}|^2 + s\,(1-s)\left(|\boldsymbol{\eta}|^2 + |\boldsymbol{\zeta}|^2\right) \\ &\le s\,|\boldsymbol{\eta}|^2 + (1-s)\,|\boldsymbol{\zeta}|^2 \\ &\le |\boldsymbol{\eta}|^2 + |\boldsymbol{\zeta}|^2. \end{aligned}$$

Prenant alors en compte (1.7) et le fait que $p < 2$, il vient que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\zeta})) : (\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}) &\ge \mu \int_0^1 \left(1 + |\boldsymbol{\zeta} + s(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^2\,ds \\ &\ge \mu \int_0^1 \left(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2 + |\boldsymbol{\zeta}|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta}|^2\,ds \end{aligned}$$

ce qui donne (1.13). L'estimation (1.12) est alors obtenue en posant $\boldsymbol{\zeta} = 0$. ■

1.3.3 Propriétés de continuité, coercivité et monotonie dans les espaces de Lebesgue

Proposition 1.3.3. *Soit $p \geq 2$ et $\boldsymbol{\tau}$ satisfaisant H_1-H_2. Alors, pour tout $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ les propriétés suivantes sont satisfaites*

$$\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v})\|_{p'}^{p'} \leq C_1 \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p\right), \tag{1.14}$$

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}), D\boldsymbol{v}) \geq \mu \|D\boldsymbol{v}\|_2^2 \qquad et \qquad (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}), D\boldsymbol{v}) \geq \tfrac{\mu}{p-1} \|D\boldsymbol{v}\|_p^p, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D\boldsymbol{v} - D\boldsymbol{w}) \geq \mu \|D(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\|_2^2 \\ &(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D\boldsymbol{v} - D\boldsymbol{w}) \geq C_2 \, \mu \|D(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\|_p^p, \end{aligned} \tag{1.16}$$

où C_1 est une constante positive dépendant de γ, n et p et où C_2 est une constante positive dépendant de p.

Démonstration. Prenant en compte (1.3) et faisant des calculs standards, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v})\|_{p'}^{p'} &= \int_\Omega |\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v})|^{p'} \, dx \\ &\leq \left(\tfrac{n^2\gamma}{p-1}\right)^{p'} \int_\Omega (1 + |D\boldsymbol{v}|)^{p'(p-1)} \, dx \\ &= \left(\tfrac{n^2\gamma}{p-1}\right)^{p'} \int_\Omega (1 + |D\boldsymbol{v}|)^{p} \, dx \\ &\leq 2^{p-1} \left(\tfrac{n^2\gamma}{p-1}\right)^{p'} \int_\Omega (1 + |D\boldsymbol{v}|^p) \, dx \\ &= 2^{p-1} \left(\tfrac{n^2\gamma}{p-1}\right)^{p'} \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p\right) \end{aligned}$$

ce qui donne la première estimation. Avec des arguments similaires, la condition de coercivité (1.4) implique que

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}), D\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) : D\boldsymbol{v} \, dx \geq \tfrac{\mu}{p-1} \int_\Omega |D\boldsymbol{v}|^p \, dx = \tfrac{\mu}{p-1} \|D\boldsymbol{v}\|_p^p$$

et

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}), D\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) : D\boldsymbol{v} \, dx \geq \mu \int_\Omega |D\boldsymbol{v}|^2 \, dx = \mu \|D\boldsymbol{v}\|_2^2 .$$

De même, les deux dernières estimations sont une conséquence directe de (1.5). ∎

Proposition 1.3.4. *Soit $1 < p < 2$ et $\boldsymbol{\tau}$ satisfaisant H_1-H_2. Alors, pour tout $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ les propriétés suivantes sont satisfaites*

$$\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v})\|_{p'}^{p'} \leq C_1 \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p\right), \tag{1.17}$$

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})) \geq \mu \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p + \|D\boldsymbol{w}\|_p^p\right)^{\frac{p-2}{p}} \|D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\|_p^2, \tag{1.18}$$

où C_1 est une constante positive dépendant de γ, n et p.

Démonstration. L'estimation (1.17) peut-être obtenue exactement de la même manière que (1.14), en prenant en compte (1.11). Pour prouver (1.18), rappelons que grâce à (1.13), on a

$$|D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})|^2 \leq \left(1 + |D\boldsymbol{v}|^2 + |D\boldsymbol{w}|^2\right)^{\frac{2-p}{2}} \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w})) : D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}).$$

Utilisant alors l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned}
&\|D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\|_p^p = \int_\Omega \left(|D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\left(1 + |D\boldsymbol{v}|^2 + |D\boldsymbol{w}|^2\right)^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w})) : D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\right)^{\frac{p}{2}} dx \\
&\leq \left\| \left(\left(1 + |D\boldsymbol{v}|^2 + |D\boldsymbol{w}|^2\right)^{\frac{2-p}{2}}\right)^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{2-p}} \left\| \left(\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w})) : D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\right)^{\frac{p}{2}} \right\|_{\frac{2}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left(1 + |D\boldsymbol{v}|^2 + |D\boldsymbol{w}|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \left\| \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w})) : D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \right\|_1^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \left(1 + |D\boldsymbol{v}|^2 + |D\boldsymbol{w}|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}))\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (1 + |D\boldsymbol{v}|^p + |D\boldsymbol{w}|^p)\, dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}))\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p + \|D\boldsymbol{w}\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}))\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\|_p^2 \leq \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{v}\|_p^p + \|D\boldsymbol{w}\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}} \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{w}), D(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})).$$

Ceci donne l'estimation énoncée et termine la preuve. ■

1.4 Formulation faible

Commençons par observer que $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$ et donc

$$\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\Omega).$$

De plus, si $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$, alors

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Pour trouver la formulation variationnelle, on considère le produit dual de chaque membre du système (1.1) par une fonction test scalaire $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\langle f_i, v_i \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} &= -\left\langle (\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})))_i, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \left\langle (\nabla \pi)_i, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial \tau_{ij}(D\boldsymbol{u})}{\partial x_j}, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \left\langle \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, v_i \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \tau_{ij}(D\boldsymbol{u}), \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \left\langle \pi, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \qquad \forall i = 1, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Sommant pour $i = 1, \cdots, n$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} &= \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, v_i \rangle_{W^{-1,p'}, W_0^{1,p}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \tau_{ij}(D\boldsymbol{u}), (\nabla \boldsymbol{v})_{ij} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{n} \langle \pi, (\nabla \boldsymbol{v})_{ii} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} - \langle \pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

pour tout $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)^\top \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. Remarquant que le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ est symétrique, on voit facilement que

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v}^\top \right\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \tau_{ij}(D\boldsymbol{u}), \left(\nabla \boldsymbol{v}^\top\right)_{ij} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \tau_{ij}(D\boldsymbol{u}), (\nabla \boldsymbol{v})_{ji} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \tau_{ji}(D\boldsymbol{u}), (\nabla \boldsymbol{v})_{ji} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\
&= \langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), \nabla \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}}. \tag{1.20}$$

Combinant (1.19) et (1.20), on obtient

$$\langle \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} - \langle \pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}', \boldsymbol{\mathcal{D}}} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Comme nous le verrons plus loin, et pour des raisons techniques liées aux propriétés de coercivité et de monotonie de notre problème, il est plus indiqué de considérer la forme précédente (faisant intervenir le tenseur symétrique $D\boldsymbol{v}$) au lieu de celle donnée par (1.19) (et faisant intervenir le gradient $\nabla\boldsymbol{v}$). De plus, et afin de tenir en compte de la condition d'incompressibilité $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$, on choisit des fonctions test à divergence nulle. L'identité précédente implique alors que

$$\langle\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}),D\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{\mathcal{D}}',\boldsymbol{\mathcal{D}}}=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}$$

pour tout $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}=\{\boldsymbol{\phi}\in\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)\mid\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=0\}$. Cette formulation faisant intervenir des fonctions test très régulières est une formulation *très faible* donnée au sens des distributions. Afin de définir une *solution faible*, nous devrions considérer des fonctions test dans des espaces de Sobolev $\boldsymbol{W}_0^{1,q}(\Omega)$ où l'exposant q est à choisir de manière appropriée. L'espace le plus approprié est défini par

$$\boldsymbol{V}_q=\overline{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{W}_0^{1,q}(\Omega)}.$$

Des résultats classiques montrent que $\boldsymbol{V}_q$ peut-être caractérisé d'une manière très simple. Plus précisément, on a

$$\boldsymbol{V}_q=\left\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}_0^{1,q}(\Omega)\mid\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\right\}.$$

Revenons au choix de q et supposons donc que $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}_0^{1,q}(\Omega)$, alors $D\boldsymbol{u}$, $D\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^q(\Omega)$ et pour que

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}),D\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}):D\boldsymbol{v}\,dx$$

soit bien défini, il faudrait que $\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})$ appartienne à $\boldsymbol{L}^{q'}(\Omega)$. Raisonnant comme dans la preuve des propositions 1.3.3 et 1.3.4, nous obtenons

$$\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{q'}^{q'}=\int_\Omega|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})|^{q'}\,dx\le C_1^{q'}\int_\Omega(1+|D\boldsymbol{u}|)^{q'(p-1)}\,dx$$

et pour que ce terme soit fini, il suffit de choisir q tel que $q'(p-1)=p$, autrement dit $p=q$.
Toutes ces considérations réunies justifient la définition suivante.

Définition 1.4.1. *Soit $p>1$ et $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors une fonction $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de* (1.1) *si*

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}),D\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_p.\tag{1.21}$$

1.5 Existence et unicité de solution

La solution de notre problème est construite grâce à la méthode de Galerkin, en utilisant un développement dans une base appropriée. Cette méthode classique est très utile pour l'étude théorique des problèmes non-linéaires. L'existence de la base que nous utiliserons, et dont les propriétés sont énoncés dans le lemme suivant, a été établie dans [5], Lemme VII.2.1.

Lemme 1.5.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Alors il existe une famille dénombrable $(\boldsymbol{\omega}_k)_k \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$ tel que*

(i) $(\boldsymbol{\omega}_k)_k$ *est une base dans* $\boldsymbol{V}_2$ *et son enveloppe linéaire est dense dans* $\boldsymbol{V}_2$.

(ii) $(\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j) = \delta_{ij}$ *pour tout* $i, j \in \mathbb{N}$.

(iii) Soit $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *et* $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\left\| \boldsymbol{\phi} - \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{\omega}_i \right\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

Utilisant cette base et s'inspirant de la formulation variationnelle (1.21), nous définissons notre problème approché comme suit

$$\begin{cases} \text{Chercher } \boldsymbol{u}_\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \zeta_{i\ell}\, \boldsymbol{\omega}_i \text{ solution de} \\ \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad 1 \leq j \leq \ell. \end{cases} \tag{1.22}$$

Afin de prouver que le problème discret (1.22) admet une solution, nous avons besoin du résultat suivant. Il concerne les points d'annulation d'une fonction continue de $\mathbb{R}^\ell$ sur lui-même et est une généralisation au cas $\ell > 1$ du théorème des valeurs intermédiaires (encore appelé théorème de Bolzano) qui stipule qu'une fonction réelle continue qui atteint des valeurs de signes opposés aux bornes d'un intervalle doit nécessairement s'annuler à l'intérieur de cet intervalle.

Lemme 1.5.2. (*Voir le lemme* 9.3.1 *dans* [5]) *Soit* $\mathbb{P}$ *une fonction continue de* $\mathbb{R}^\ell$, $\ell \geq 1$, *dans lui-même telle que pour un certain* $\rho > 0$

$$\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq 0 \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^\ell \text{ tel que } |\boldsymbol{\zeta}| = \rho.$$

Alors, il existe $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \mathbb{R}^\ell$, $|\boldsymbol{\zeta}_0| \leq \rho$ *tel que* $\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta}_0 = 0$.

1.5.1 Solvabilité pour $p \geq 2$

Nous commençons notre étude par le cas des écoulements de fluides dilatants.

Proposition 1.5.3. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $p \geq 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème (1.22) admet au moins une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\| D\boldsymbol{u}_\ell^0 \right\|_p^{p-1} \leq \tfrac{p-1}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{1.23}$$

où C_K est la constante de Korn.

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ fixé et considérons l'application $\mathbb{P} : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ définie par

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j = \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{\omega}_j\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad 1 \leq j \leq \ell,$$

où $\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_i$. Il est clair que $\mathbb{P}$ est continue. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} &= \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j \zeta_j \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \Big(\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{\omega}_j\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \Big) \zeta_j \\
&= \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \, D\boldsymbol{\omega}_j \right) - \left\langle \boldsymbol{f}, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \, \boldsymbol{\omega}_j \right\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \\
&= \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{u}_\ell\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Par définition, on a

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \|\nabla \boldsymbol{u}_\ell\|_p$$

et grâce à l'inégalité de Korn, on obtient

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \leq \tfrac{1}{C_K} \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p . \tag{1.25}$$

De plus, la condition de coercivité $(1.4)_2$ implique que

$$\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{u}_\ell\right) \geq \tfrac{\mu}{p-1} \|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p^p . \tag{1.26}$$

Combinant (1.24), (1.25) et (1.26), nous déduisons que

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq \left(\tfrac{\mu}{p-1} \left\| D\boldsymbol{u}_\ell \right\|_p^{p-1} - \tfrac{1}{C_K} \left\| \boldsymbol{f} \right\|_{-1,p'} \right) \left\| D\boldsymbol{u}_\ell \right\|_p . \tag{1.27}$$

Introduisons alors l'application $|\cdot|_*$ définie par

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j D\boldsymbol{\omega}_j \right\|_p$$

et vérifions que c'est une norme sur $\mathbb{R}^\ell$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont directes. Reste à montrer que

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\zeta} = 0.$$

Pour cela, remarquons qu'en utilisant l'inégalité de Korn et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j \right\|_p \leq C_P \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \nabla\boldsymbol{\omega}_j \right\|_p \leq \tfrac{C_P}{C_K} \left\| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j D\boldsymbol{\omega}_j \right\|_p = \tfrac{C_P}{C_K} |\boldsymbol{\zeta}|_* .$$

Ainsi

$$|\boldsymbol{\zeta}|_* = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j = 0$$

ce qui, vu que $(\boldsymbol{\omega}_j)_{j=1,\cdots,\ell}$ est libre, implique à son tour que $\boldsymbol{\zeta} = 0$. Substituant dans (1.27), il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \ &\geq \left(\tfrac{\mu}{p-1} |\boldsymbol{\zeta}|_*^{p-1} - \tfrac{1}{C_K} \left\| \boldsymbol{f} \right\|_{-1,p'} \right) |\boldsymbol{\zeta}|_* \\ &\longrightarrow +\infty \qquad \text{quand } |\boldsymbol{\zeta}|_* \to +\infty. \end{aligned}$$

Nous déduisons qu'il existe donc une constante positive ρ tel que $\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} > 0$ pour tout $\boldsymbol{\zeta}$ tel que $|\boldsymbol{\zeta}|_* = \rho$ et, d'après le lemme 1.5.2, il existe $\boldsymbol{\zeta}_\ell^0 \in \mathbb{R}^\ell$, $\left|\boldsymbol{\zeta}_\ell^0\right|_* \leq \rho$ tel que $\mathbb{P}\boldsymbol{\zeta}_\ell^0 = 0$. La fonction $\boldsymbol{u}_\ell^0 = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \zeta_{i\ell}^0 \, \boldsymbol{\omega}_i$ satisfait donc

$$\left(\boldsymbol{\tau} \left(D\boldsymbol{u}_\ell^0 \right), D\boldsymbol{\omega}_j \right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq \ell$. Autrement dit, $\boldsymbol{u}_\ell^0$ est solution du problème (1.22).

Multiplions alors (1.22) par $\zeta_{i\ell}^0$ et sommons pour obtenir

$$\left(\boldsymbol{\tau} \left(D\boldsymbol{u}_\ell^0 \right), D\boldsymbol{u}_\ell^0 \right) = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell^0 \right\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} . \tag{1.28}$$

Utilisant alors l'inégalité de Korn et $(1.4)_2$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{p-1}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^p &\leq \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right), D\boldsymbol{u}_\ell^0\right) = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell^0\right\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \\ &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \\ &\leq \frac{1}{C_K}\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation recherchée. ■

Nous sommes en mesure de prouver le résultat d'existence et d'unicité concernant notre problème.

Théorème 1.5.4. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $p \geq 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (1.1) *admet une solution faible unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p \leq \kappa_1\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{1.29}$$

$$\|D\boldsymbol{u}\|_2 \leq \kappa_2\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}}, \tag{1.30}$$

où $\kappa_1 = \left(\frac{p-1}{C_K}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, $\kappa_2 = \left(\frac{p-1}{C_K}\right)^{\frac{p'}{2}}$, C_K étant la constante de Korn.

Démonstration. La démonstration est divisée en deux parties.

Partie 1. (Existence d'une solution) Soit $\boldsymbol{u}_\ell^0$ la solution du problème approché 1.22. Grâce à (1.14), on a

$$\left\|\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)\right\|_{p'}^{p'} \leq C_1\left(|\Omega| + \left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^p\right).$$

Prenant en compte l'estimation (1.23), nous déduisons que la suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{V}_p$ et que la suite $\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)\right)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ (toujours indexée par ℓ pour simplifier), un vecteur $\boldsymbol{u}$ et un tenseur $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ tel que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{V}_p,$$

$$\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right) \longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega).$$

En passant à la limite dans (1.22), on obtient

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{\omega}_j) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

et grâce au lemme 1.5.1, nous déduisons que

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$

La densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{V}_p$ implique alors que

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p \tag{1.31}$$

et en particulier

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}}\,. \tag{1.32}$$

De l'autre côté, la propriété de monotonie (1.16) implique que

$$\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right) - \boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right), D\boldsymbol{u}_\ell^0 - D\boldsymbol{v}\right) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p. \tag{1.33}$$

Prenant alors en compte (1.28) et substituant dans (1.33), on obtient

$$\left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell^0 \right\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} - \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right), D\boldsymbol{v}\right) - \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right), D\boldsymbol{u}_\ell^0 - D\boldsymbol{v}\right) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p.$$

Le passage à la limite, quand ℓ tend vers l'infini, donne

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} - (\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right), D\boldsymbol{u} - D\boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p.$$

Cette inégalité, avec (1.32), implique

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right), D\boldsymbol{u} - D\boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p$$

et en choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - t\boldsymbol{\psi}$ avec $t > 0$ et $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_p$, on obtient

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u} - tD\boldsymbol{\psi}\right), \boldsymbol{\psi}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_p.$$

Faisant tendre t vers zéro et utilisant la continuité de $\boldsymbol{\tau}$, nous déduisons que

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right), \boldsymbol{\psi}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_p$$

et par conséquent

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right), \boldsymbol{\psi}) \qquad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_p. \tag{1.34}$$

Combinant (1.31) et (1.34), il vient que

$$(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right), D\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p,$$

autrement dit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de (1.1). L'estimation (1.29) est obtenue en passant à la limite dans (1.23) et en tenant en compte de la semi-continuité inférieure de la norme $\|D\cdot\|_p$. Finalement, prenant en compte $(1.4)_1$ et utilisant l'inégalité de Korn et l'estimation (1.29), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|D\boldsymbol{u}\|_2^2 &\leq \frac{1}{\mu}\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \\
&\leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_p \\
&\leq \frac{1}{C_K}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\|D\boldsymbol{u}\|_p \\
&\leq \frac{1}{C_K}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\left(\frac{p-1}{C_K}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&\leq \left(\frac{p-1}{C_K}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{1+\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}
$$

ce qui donne l'estimation (1.30).

Partie 2. (Unicité) Supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (1.1). Alors

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_2), D\boldsymbol{v}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p.$$

Choisissant alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ et utilisant l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Korn et la propriété de monotonie $(1.16)_1$, nous déduisons que

$$
\begin{aligned}
\frac{C_{K,2}^2}{C_{P,2}^2}\mu\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_2^2 &\leq \mu\, C_{K,2}^2\|\nabla(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)\|_2^2 \\
&\leq \mu\|D(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)\|_2^2 \\
&\leq (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_2), D(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)) = 0,
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ et complète la preuve. ∎

Une fois garantie l'existence et l'unicité d'une solution faible $\boldsymbol{u}$ au problème (1.1), la question suivante concerne l'existence d'une pression π adéquate qui y soit associée. Ceci fait l'objet du corollaire 1.5.6 ci-dessous. Pour établir ce résultat, nous aurons besoin d'une version du théorème de De Rham posé dans $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Lemme 1.5.5. (*Voir Lemme* 2.7 *dans* [*1*]) *Soit* Ω *un ouvert, borné de frontière lipschitzienne. Une distribution* $\boldsymbol{\mathcal{F}} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *satisfait*

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p$$

si, et seulement si, il existe $\pi \in L_0^{p'}(\Omega) = \left\{q \in L^{p'}(\Omega) \mid \int_\Omega q\,dx = 0\right\}$ *tel que* $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \nabla\pi$. *De plus, si* Ω *est connexe alors il existe une constante* $C > 0$ *indépendante de* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *tel que*

$$\|\pi\|_{p'} \leq C \|\boldsymbol{\mathcal{F}}\|_{-1,p'}.$$

Corollaire 1.5.6. *Supposons que les hypothèses du théorème* 1.5.4 *sont satisfaites et soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ *la solution faible de* (1.1)*. Alors il existe* $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ *unique tel que* $(1.1)_1$ *soit définie dans* $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$*. De plus, si* Ω *est connexe alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right),$$

où $\kappa > 0$ *est une constante dépendant seulement de* p, Ω *et de* n.

Démonstration. D'après que précède, le problème variationnel (1.21) admet une solution unique $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_p$. Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}, \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est bien définie et que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})| &\leq |(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v})| + \left|\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\right| \\
&\leq \|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} \|D\boldsymbol{v}\|_p + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \|\nabla\boldsymbol{v}\|_p \\
&\leq \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right) \|\nabla\boldsymbol{v}\|_p \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$. D'après le lemme 1.5.5, il existe $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = -\langle \nabla\pi, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} = (\pi, \nabla\cdot\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

De plus, si Ω est connexe alors il existe une constante $\kappa > 0$ dépendant seulement de p, Ω et n, tel que

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa \|\nabla\pi\|_{-1,p'} = \kappa \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\left|\langle \nabla\pi, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\right|}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_p}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|\pi\|_{p'} &\leq \kappa \|\nabla \pi\|_{-1,p'} = \kappa \sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})|}{\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p} \\ &\leq \kappa \sup_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'}+\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right)\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p}{\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p} \\ &\leq \kappa \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right),\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. ■

Remarque 1.5.7. *Combinant l'estimation donnée par le résultat précédent avec* (1.14) *et* (1.29), *il est possible d'estimer la pression π en fonction de μ et de $\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}$.*

1.5.2 Solvabilité pour $1 < p < 2$

Le cas des écoulements pseudo-plastiques est traité de la même manière. Nous commençons par l'existence d'une solution au problème approché.

Proposition 1.5.8. *Supposons que les hypothèses H_1-H_2 sont satisfaites avec $1 < p < 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (1.22) *admet au moins une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \leq \kappa_3 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{1.35}$$

où κ_3 est une constante dépendant de p, n et Ω.

Démonstration. Arguant de la même manière que dans la preuve de la proposition 1.5.3, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} \geq (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), D\boldsymbol{u}_\ell) - \tfrac{1}{C_K} \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p,$$

où $\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j$. Prenant en compte (1.18), nous avons la propriété de coercivité suivante

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), D\boldsymbol{v}) \geq \frac{\mu\|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p^2}{\left(|\Omega|+\|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})\cdot\boldsymbol{\zeta} &\geq \left(\frac{\mu\|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p}{\left(|\Omega|+\|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}}-\frac{1}{C_K}\,\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right)\|D\boldsymbol{u}_\ell\|_p\\ &= \left(\frac{\mu|\boldsymbol{\zeta}|_*}{\left(|\Omega|+|\boldsymbol{\zeta}|_*^p\right)^{\frac{2-p}{p}}}-\frac{1}{C_K}\,\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right)|\boldsymbol{\zeta}|_*\\ &\longrightarrow +\infty \qquad \text{quand } |\boldsymbol{\zeta}|_*\to+\infty.\end{aligned}$$

Suivant pas à pas la preuve de la proposition 1.5.3, nous montrons l'existence d'une solution faible $\boldsymbol{u}_\ell^0$ au problème de Galerkin (1.22), satisfaisant l'estimation suivante

$$\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \leq \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\left(|\Omega|+\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}$$

et donc

$$\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^{\frac{p}{2-p}} \leq \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{2-p}}\left(|\Omega|+\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^p\right). \tag{1.36}$$

De l'autre côté, l'inégalité de Young nous donne

$$\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{2-p}}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^p \leq (2-p)\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^{\frac{p}{2-p}}+(p-1)\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{(2-p)(p-1)}}. \tag{1.37}$$

Combinant (1.36) et (1.37), nous déduisons que

$$(p-1)\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^{\frac{p}{2-p}} \leq \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{2-p}}|\Omega|+(p-1)\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{(2-p)(p-1)}}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p &\leq \left(\frac{|\Omega|}{p-1}+\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2-p}{p}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{C_K\,\mu}\\ &\leq \frac{1}{C_K}\left(\frac{|\Omega|}{p-1}+\left(\frac{1}{C_K}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2-p}{p}}\left(1+\left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2-p}{p}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\\ &\leq \frac{1}{C_K}\left(\frac{|\Omega|}{p-1}+\left(\frac{1}{C_K}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2-p}{p}}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}.\end{aligned}$$

Ceci donne l'estimation (1.35) et termine la preuve. ■

Théorème 1.5.9. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $1<p<2$ et que $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (1.1) *admet une solution faible unique $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_p$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p \leq \kappa_3\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{1.38}$$

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p^p \leq \kappa_4 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}}, \tag{1.39}$$

où κ_4 est une constante dépendant de p, n et Ω.

Démonstration. Prenant en compte les propriétés énoncés dans la proposition 1.3.4, nous pouvons établir l'existence, l'unicité et l'estimation (1.38) en suivant pas à pas la démonstration du théorème 1.5.4.

• Pour prouver l'unicité, supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (1.1). Alors

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_2), D\boldsymbol{v}) = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p.$$

Choisissant alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ et utilisant l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Korn et la propriété de monotonie (1.18), nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\frac{C_K^2 \mu \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_p^2}{C_P^2 \left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{u}_1\|_p^p + \|D\boldsymbol{u}_2\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq \frac{C_K^2 \mu \|\nabla(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)\|_p^2}{\left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{u}_1\|_p^p + \|D\boldsymbol{u}_2\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}} \\
&\leq \frac{\mu \|D(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)\|_p^2}{\left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{u}_1\|_p^p + \|D\boldsymbol{u}_2\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}} \\
&\leq (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_2), D(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_p = 0$ et montre que $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$.

• Reste à prouver l'estimation (1.39). Grâce à (1.13), on a

$$\begin{aligned}
\|D\boldsymbol{u}\|_p^p &= \int_{\{x \,|\, |D\boldsymbol{u}(x)| \geq 1\}} |D\boldsymbol{u}(x)|^p \, dx + \int_{\{x \,|\, |D\boldsymbol{u}(x)| < 1\}} |D\boldsymbol{u}(x)|^p \, dx \\
&\leq \int_{\{x \,|\, |D\boldsymbol{u}(x)| \geq 1\}} \frac{|D\boldsymbol{u}(x)|^2}{|D\boldsymbol{u}(x)|^{2-p}} \, dx + |\Omega| \\
&\leq 2^{\frac{2-p}{2}} \int_{\{x \,|\, |D\boldsymbol{u}(x)| \geq 1\}} \frac{|D\boldsymbol{u}(x)|^2}{(1 + |D\boldsymbol{u}(x)|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \, dx + |\Omega| \\
&\leq \frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{\mu} \int_{\{x \,|\, |D\boldsymbol{u}(x)| \geq 1\}} \boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}(x)) : D\boldsymbol{u}(x) \, dx + |\Omega| \\
&\leq \frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{\mu} (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{u}) + |\Omega| = \frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{\mu} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} + |\Omega| \\
&\leq \frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu} \|D\boldsymbol{u}\|_p + |\Omega|.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

L'inégalité de Young implique alors que

$$\frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu} \|D\boldsymbol{u}\|_p \leq \frac{p-1}{p} \left(\frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p} \|D\boldsymbol{u}\|_p^p. \tag{1.41}$$

Combinant (1.40) et (1.41), on obtient

$$\begin{aligned}\|D\boldsymbol{u}\|_p^p &\leq \left(\frac{2^{\frac{2-p}{2}}}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu} \right)^{\frac{p}{p-1}} + p'|\Omega| \\ &\leq C \left(1 + \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right) \\ &\leq \kappa_4 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu} \right)^{\frac{p}{p-1}}\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

Corollaire 1.5.10. *Supposons que les hypothèses du théorème* 1.5.9 *sont satisfaites et soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ *la solution faible de* (1.1). *Alors il existe* $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ *unique tel que* $(1.1)_1$ *soit définie dans* $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. *De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \right),$$

où $\kappa > 0$ *est une constante dépendant seulement de* p, Ω *et de* n.

Démonstration. Elle peut-être adaptée en suivant pas à pas la démonstration du Corollaire 1.5.6 et sera donc omise. ■

Chapitre 2

Existence et unicité de solution pour le problème de Navier-Stokes généralisé

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions faible au problème de Navier-Stokes généralisé stationnaire (5). L'approche considérée, similaire à celle utilisée dans le chapitre précédent, est classique et consiste dans l'approximation du problème variationnel associé en utilisant une méthode de Galerkin appropriée. Nous commençons par montrer que ce problème approché admet une solution et établissons des estimations a priori correspondantes. Des arguments de compacité et de monotonie nous permettent ensuite de passer à la limite et d'établir l'existence d'une solution faible.

Outre les difficultés déjà rencontrées au chapitre 1 dans le traitement de la non-linéarité associée au tenseur des contraintes de viscosité, des difficultés liées au terme convectif et à la combinaison des effets des deux termes apparaissent et doivent être gérées de manière appropriée. Ceci est particulièrement visible lors du passage à la limite et de l'analyse de l'unicité de la solution. Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, celle-ci n'est garantie que sous des contraintes relatives à la taille des données.

Le plan du chapitre est comme suit : dans la première section nous définissons une formulation faible adaptée. L'analyse mathématique du problème suit dans la section suivante. Après une sous-section consacrée à l'étude des propriétés de la forme trilinéaire associée au terme convectif, nous analysons la solvabilité du problème dans le cas des écoulements dilatants. L'existence d'une solution approchée est prouvée, des estimations uniformes associées établies et l'existence d'une solution faible est obtenue par passage à la limite. L'unicité est ensuite finalement étudiée. Suivant les mêmes étapes, des résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles sont établis dans le cas des écoulements pseudo-plastiques.

2.2 Formulation faible

Contrairement au cas de Stokes généralisé où aucune restriction sur l'exposant p n'est nécessaire, ici nous aurons à imposer des restrictions afin de garantir que la forme trilinéaire b donnée par

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

soit bien définie sur $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \times \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$. En effet, grâce aux injections de Sobolev classiques, nous avons :

• Si $p > n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^{\infty}(\Omega)$ et $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est bien défini.

• Si $p = n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^{q}(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$. En particulier $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{w}$ appartiennent à $\boldsymbol{L}^{2p'}(\Omega)$ et $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est aussi bien défini.

• Si $p < n$, alors $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{np}{n-p}$. Pour que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{w}$ appartiennent à

$\boldsymbol{L}^{2p'}(\Omega)$, et par conséquent que $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ soit bien défini, il suffit que

$$2p' \leq p^* \iff \tfrac{2p}{p-1} \leq \tfrac{np}{n-p} \iff p \geq \tfrac{3n}{n+2}.$$

Ces considérations étant faites, nous définissons la solution faible de notre problème de la manière suivante.

Définition 2.2.1. *Soit $p \geq \frac{3n}{n+2}$ et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors une fonction $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de* (5) *si*

$$(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_p. \tag{2.1}$$

2.3 Existence et unicité de solution

Comme dans le cas du problème de Stokes généralisé, la solution du problème de Navier-Stokes généralisé est construite grâce à la méthode de Galerkin, en utilisant un développement dans la base donnée par le lemme 1.5.1. Le problème approché est défini par

$$\begin{cases} \text{Chercher } \boldsymbol{u}_\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \zeta_{i\ell}\,\boldsymbol{\omega}_i \text{ solution de} \\ \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{\omega}_j\right) + b\left(\boldsymbol{u}_\ell,\boldsymbol{u}_\ell,\boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{\omega}_j\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad 1\leq j\leq \ell. \end{cases} \tag{2.2}$$

Toutes les difficultés liées à la non-linéarité du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ (et déjà rencontrées lors de l'analyse du problème de Stokes généralisé) se posent et sont exacerbées par la difficulté supplémentaire posée par le terme convectif et la gestion simultannée des deux types de non-linéarité.

2.3.1 Propriétés de la forme trilinéaire associée au terme convectif

Les propriétés de $\boldsymbol{\tau}$ ayant déjà été analysées au chapitre 1, nous considérons donc la forme trilinéaire b associée au terme convectif et étudions certaines de ses propriétés les plus utiles.

Lemme 2.3.1. *Soit $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_p$ et $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ avec $p\geq\frac{3n}{n+2}$. Alors*

$$b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right) = 0, \tag{2.3}$$

$$b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right) = -b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right). \tag{2.4}$$

Démonstration. Pour prouver (2.3), il suffit de remarquer que

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\, dx = \tfrac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \left(|\boldsymbol{v}|^2 \right) dx,$$

et d'appliquer la formule de Green et d'utiliser le fait que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ pour obtenir

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2} \left(- \int_\Omega (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) |\boldsymbol{v}|^2 \, dx + \int_\Gamma \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \cdot |\boldsymbol{v}|^2 \, ds \right) = 0.$$

La propriété (2.4) est alors une conséquence de la propriété (2.3). En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \\ &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

Lemme 2.3.2. *Soit* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. *Alors*

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq \kappa_5 \|D\boldsymbol{u}\|_2 \|D\boldsymbol{v}\|_2 \|D\boldsymbol{w}\|_2 ,$$

où $\kappa_5 > 0$ *est une constante dépendant uniquement de* Ω *et de* n.

Démonstration. De simples calculs, avec l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Korn montrent que

$$\begin{aligned} |b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq \|\boldsymbol{u}\|_4 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2 \|\boldsymbol{w}\|_4 \\ &\leq C_S^2 \|\nabla \boldsymbol{u}\|_2 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_2 \|\nabla \boldsymbol{w}\|_2 \\ &\leq 2^{\frac{3}{2}} C_S^2 \|D\boldsymbol{u}\|_2 \|D\boldsymbol{v}\|_2 \|D\boldsymbol{w}\|_2 , \end{aligned}$$

où C_S est la constante de Sobolev. ■

Lemme 2.3.3. *Soient* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *dans* $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2$. *Alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leq \kappa_6 \|D\boldsymbol{u}\|_p \|D\boldsymbol{v}\|_p \|D\boldsymbol{w}\|_p$$

où $\kappa_6 > 0$ *est une constante dépendant uniquement de* p, Ω *et de* n.

Démonstration. De simples calculs, avec l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Sobolev montrent que si $\frac{2p}{p-1} \leq \frac{np}{n-p}$ (et donc que $p \geq \frac{3n}{n+2}$), on a

$$\begin{aligned}|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq \|\boldsymbol{u}\|_{\frac{2p}{p-1}} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \|\boldsymbol{w}\|_{\frac{2p}{p-1}} \leq |\Omega|^{\frac{(n+2)p-3n}{np}} \|\boldsymbol{u}\|_{\frac{np}{n-p}} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \|\boldsymbol{w}\|_{\frac{np}{n-p}} \\ &\leq C_{S,p}^2 |\Omega|^{\frac{(n+2)p-3n}{np}} \|\nabla \boldsymbol{u}\|_p \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \|\nabla \boldsymbol{w}\|_p ,\end{aligned}$$

où $C_{S,p}$ est la constante de Sobolev. La conclusion suit en appliquant l'inégalité de Korn. ■

2.3.2 Solvabilité pour $p \geq 2$

Comme dans le cas de Stokes généralisé, nous allons prouver que notre problème admet au moins une solution faible obtenue comme limite d'une suite engendrée par la méthode de Galerkin.

Proposition 2.3.4. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $p \geq 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème (2.2) admet au moins une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p^{p-1} \leq \frac{p-1}{C_K} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{2.5}$$

où C_K est la constante de Korn.

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ fixé et considérons l'application $\mathbb{P} : \mathbb{R}^\ell \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ définie par

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j = (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), D\boldsymbol{\omega}_j) + b(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{\omega}_j) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad 1 \leq j \leq \ell,$$

où $\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{j=1}^\ell \zeta_j \boldsymbol{\omega}_i$. Il est clair que $\mathbb{P}$ est continue. De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} &= \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta})_j \zeta_j \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \Big((\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), D\boldsymbol{\omega}_j) + b(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{\omega}_j) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \Big) \zeta_j \\ &= \Big(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), \textstyle\sum_{j=1}^\ell \zeta_j\, D\boldsymbol{\omega}_j \Big) + b\Big(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j \boldsymbol{\omega}_j \Big) - \Big\langle \boldsymbol{f}, \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j\, \boldsymbol{\omega}_j \Big\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \\ &= (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}_\ell), D\boldsymbol{u}_\ell) + b(\boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell, \boldsymbol{u}_\ell) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} ,\end{aligned}$$

et prenant en compte (2.3), on obtient

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} = \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{u}_\ell\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} .$$

Le reste de la démonstration concernant l'existence d'une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$ au problème (2.2) est identique à celui de la preuve de la proposition 1.5.3. ■

Théorème 2.3.5. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $p \geq 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (5) *admet au moins une solution faible unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p \leq \kappa_1 \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{2.6}$$

$$\|D\boldsymbol{u}\|_2 \leq \kappa_2 \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}}, \tag{2.7}$$

où κ_1 et κ_2 sont définies dans le théorème 1.5.4.

Démonstration. Les arguments utilisés pour prouver l'existence d'une solution faible de (5) sont identiques à ceux utilisés dans la preuve du théorème 1.5.4 pour le problème de Stokes généralisé. La seule différence notable (et non négligeable) étant liée au terme convectif et au passage à la limite correspondant. Pour le confort du lecteur, nous donnerons certains détails importants.

Prenant en compte l'estimation (2.5) et (1.14), nous déduisons que la suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{V}_p$ et que la suite $\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)\right)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ (toujours indexée par ℓ pour simplifier), un vecteur $\boldsymbol{u}$ et un tenseur $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ tel que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{V}_p,$$

$$\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right) \longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega).$$

Utilisant le fait que $p \geq 2$ et que l'injection de $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ est compacte, nous déduisons que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{fortement dans } \boldsymbol{L}^2(\Omega).$$

L'inégalité de Hölder et la propriété (2.4), impliquent alors que

$$\begin{aligned}\left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{v}\right)-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right| &= \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{v}\right)+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right|\\ &\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{v}\right)\right|+\left|b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right|\\ &\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{v}\right)\right|+\left|-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u}\right)\right|\\ &\leq \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u}\right\|_2\left\|\nabla\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_2\|\boldsymbol{v}\|_\infty+\|\boldsymbol{u}\|_2\left\|\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u}\right\|_2\|\nabla\boldsymbol{v}\|_\infty\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}$. L'inégalité de Korn et l'estimation (2.5) impliquent que

$$\begin{aligned}\left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{u}_\ell^0,\boldsymbol{v}\right)-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right| &\leq \left(\sqrt{2}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_2\|\boldsymbol{v}\|_\infty+\|\boldsymbol{u}\|_2\|\nabla\boldsymbol{v}\|_\infty\right)\left\|\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u}\right\|_2\\ &\leq C\left\|\boldsymbol{u}_\ell^0-\boldsymbol{u}\right\|_2\longrightarrow 0\qquad\text{quand }\ell\to+\infty\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans (2.2), on obtient

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},D\boldsymbol{\omega}_j)+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}_j\right)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\omega}_j\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\qquad\forall j\in\mathbb{N}$$

et grâce au lemme 1.5.1, nous déduisons que

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},D\boldsymbol{v})+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{\mathcal{V}}.$$

La densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{V}_p$ implique alors que

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},D\boldsymbol{v})+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_p\tag{2.8}$$

et en particulier

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},D\boldsymbol{u})=(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},D\boldsymbol{u})+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right)=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}}.$$

De l'autre côté, la propriété de monotonie 1.16 implique que

$$\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)-\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right),D\boldsymbol{u}_\ell^0-D\boldsymbol{v}\right)\geq 0\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_p.$$

Utilisant alors exactement les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 1.5.4, nous obtenons

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},\boldsymbol{\psi})=\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{\psi}\right)\qquad\forall\boldsymbol{\psi}\in\boldsymbol{V}_p.\tag{2.9}$$

Combinant (2.8) et (2.9), il vient que

$$(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right), D\boldsymbol{v}) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p,$$

autrement dit $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de (5). Les estimations (2.6) et (2.7) sont obtenues de la même manière que (1.29) et (1.30), respectivement. ■

Si l'existence d'une solution faible pour (5) est garantie, l'unicité de cette solution ne peut-être obtenue que si l'on impose des restrictions sur la taille des données. Plus précisemment, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3.6. *Supposons que les hypothèses H_1-H_2 sont satisfaites avec $p \geq 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Il existe une constante positive κ^* dépendant uniquement de p, n et Ω, tel que si la condition suivante*

$$\kappa^* \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}} \frac{1}{\mu} < 1 \tag{2.10}$$

est satisfaite, alors l'équation (5) *admet une solution faible unique.*

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (5) et posons $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$. Substituant dans la formulation variationnelle (2.1), utilisant (2.3), le lemme 2.3.2 et l'estimation (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}(\tau(D\boldsymbol{u}_1) - \tau(D\boldsymbol{u}_2), D\boldsymbol{u}) &= -b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}) + b\left(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right)\\ &= -b\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\right) - b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right) = -b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}\right)\\ &\leq \kappa_5 \left\|D\boldsymbol{u}\right\|_2^2 \left\|D\boldsymbol{u}_2\right\|_2 \leq \kappa_2\kappa_5 \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}} \left\|D\boldsymbol{u}\right\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.11}$$

De l'autre côté, grâce à la propriété de monotonie $(1.16)_1$, on a

$$\mu \left\|D\boldsymbol{u}\right\|_2^2 \leq (\tau(D\boldsymbol{u}_1) - \tau(D\boldsymbol{u}_2), D\boldsymbol{u}). \tag{2.12}$$

Combinant (2.11) et (2.12), nous déduisons que

$$\left(\mu - \kappa_2\kappa_5 \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}}\right) \left\|D\boldsymbol{u}\right\|_2^2 \leq 0$$

et donc $\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{u}_2$ si $\mu - \kappa^* \left(\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p'}{2}} > 0$, avec $\kappa^* = \kappa_2\kappa_5$. ■

Corollaire 2.3.7. *Supposons que les hypothèses du théorème* 2.3.5 *sont satisfaites et soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ *la solution faible de* (5). *Alors il existe* $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ *unique tel que* $(5)_1$ *soit définie dans* $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. *De plus, si* Ω *est connexe alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \right),$$

où $\kappa > 0$ *est une constante dépendant seulement de* p, Ω *et de* n.

Démonstration. D'après que précède, le problème variationnel (2.1) admet une solution unique $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_p$. Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v}) + b\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}}, \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est bien définie et que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})| &\leq |(\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u}), D\boldsymbol{v})| + |b\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| + \left| \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \right| \\
&\leq \|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} \|D\boldsymbol{v}\|_p + C \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 \|D\boldsymbol{v}\|_p + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \\
&\leq C \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \right) \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$. D'après le lemme 1.5.5, il existe $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ tel que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = -\, \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} = (\pi, \nabla \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

De plus, si Ω est connexe alors il existe une constante $\kappa > 0$ dépendant seulement de p, Ω et n, tel que

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa \|\nabla \pi\|_{-1,p'} = \kappa \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\left| \langle \nabla \pi, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \right|}{\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|\pi\|_{p'} &\leq \kappa \ \|\nabla \pi\|_{-1,p'} = \kappa \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})|}{\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p} \\
&\leq \kappa \sup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \right) \|\nabla \boldsymbol{v}\|_p}{\|\nabla \boldsymbol{v}\|_p} \\
&\leq \kappa \left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'} \right),
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. ∎

2.3.3 Solvabilité pour $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2$

Le cas des écoulements pseudo-plastiques est traité de la même manière. Nous commençons par l'existence d'une solution au problème approché.

Proposition 2.3.8. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (2.2) *admet au moins une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$. De plus, on a l'estimation suivante*

$$\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \leq \kappa_3 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{2.13}$$

où κ_3 est la même constante que dans la proposition 1.5.8.

Démonstration. Arguant de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.3.4, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\zeta} = \left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell\right), D\boldsymbol{u}_\ell\right) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_\ell \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} .$$

Le reste de la démonstration concernant l'existence d'une solution $\boldsymbol{u}_\ell^0$ au problème (2.2) est identique à celui de la preuve de la proposition 1.5.8. ■

Théorème 2.3.9. *Supposons que H_1-H_2 sont satisfaites avec $\frac{3n}{n+2} \leq p < 2$ et que $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Alors le problème* (5) *admet une solution faible unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$. De plus, les estimations suivantes sont satisfaites*

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p \leq \kappa_3 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}, \tag{2.14}$$

$$\|D\boldsymbol{u}\|_p^p \leq \kappa_4 \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2.15}$$

où κ_4 est comme dans l'énoncé de la proposition 1.5.9.

Démonstration. Prenant en compte l'estimation (2.13) et (1.17), nous déduisons que la suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{V}_p$ et que la suite $\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)\right)_\ell$ est bornée dans $\boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$. Il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{u}_\ell^0)_\ell$ (toujours indexée par ℓ pour simplifier), un vecteur $\boldsymbol{u}$ et un tenseur $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}$ tel que

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{V}_p,$$

$$\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right) \longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\tau}} \qquad \text{faiblement dans } \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega).$$

D'après le théorème de Rellich, l'injection de $\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q < p^* = \frac{np}{n-p}$. Vu que par hypothèse $p \geq \frac{3n}{n+2} > \frac{2n}{n+1}$, nous déduisons que $p' < p^*$, que

$$\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega).$$

et donc

$$\boldsymbol{u}_\ell^0 \longrightarrow \boldsymbol{u} \qquad \text{fortement dans } \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega).$$

Utilisant l'inégalité de Hölder et la propriété (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right) - b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| &= \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| \\
&\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right)\right| + \left|b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| \\
&\leq \left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right)\right| + \left|-b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right)\right| \\
&\leq \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_{p'} \left\|\nabla \boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \|\boldsymbol{v}\|_\infty + \|\boldsymbol{u}\|_p \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_{p'} \|\nabla \boldsymbol{v}\|_\infty
\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. L'inégalité de Korn et l'estimation (2.13) impliquent que

$$\begin{aligned}
\left|b\left(\boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{u}_\ell^0, \boldsymbol{v}\right) - b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right| &\leq \left(\frac{1}{C_K}\left\|D\boldsymbol{u}_\ell^0\right\|_p \|\boldsymbol{v}\|_\infty + \|\boldsymbol{u}\|_p \|\nabla \boldsymbol{v}\|_\infty\right) \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_{p'} \\
&\leq C \left\|\boldsymbol{u}_\ell^0 - \boldsymbol{u}\right\|_{p'} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \ell \to \infty
\end{aligned}$$

pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Prenant en compte ces résultats de convergence et passant à la limite dans (2.2), on obtient

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{\omega}_j\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}_j\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\omega}_j \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

et grâce au lemme 1.5.1, nous déduisons que

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$

La densité de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{V}_p$ implique alors que

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{v}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p \tag{2.16}$$

et en particulier

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{u}\right) = \left(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}, D\boldsymbol{u}\right) + b\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\right) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'}, \boldsymbol{W}_0^{1,p}}.$$

De l'autre côté, la propriété de monotonie 1.16 implique que

$$\left(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}_\ell^0\right)-\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{v}\right),D\boldsymbol{u}_\ell^0-D\boldsymbol{v}\right)\geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_p.$$

Utilisant alors exactement les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 1.5.4, nous obtenons

$$(\widetilde{\boldsymbol{\tau}},\boldsymbol{\psi})=(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{\psi}) \qquad \forall \boldsymbol{\psi}\in \boldsymbol{V}_p. \tag{2.17}$$

Combinant (2.16) et (2.17), il vient que

$$(\boldsymbol{\tau}\left(D\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{v})+b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}^{-1,p'},\boldsymbol{W}_0^{1,p}} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_p,$$

autrement dit $\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{V}_p$ est une solution faible de (5). Les estimations (2.14) et (2.15) sont obtenues de la même manière que (1.38) et (1.39), respectivement.

■

Théorème 2.3.10. *Supposons que les hypothèses H_1-H_2 sont satisfaites avec $\frac{3n}{n+2}\leq p<2$ et que $\boldsymbol{f}\in \boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Il existe une constante positive κ^{**} dépendant uniquement de p, n et Ω, tel que si la condition suivante*

$$\kappa^{**}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2(2-p)}{p-1}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu^2}<1 \tag{2.18}$$

est satisfaite, alors l'équation (5) *admet une solution faible unique.*

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont deux solutions faibles de (5) et posons $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$. Substituant dans la formulation variationnelle (2.1), utilisant (2.3), le lemme 2.3.3 et l'estimation (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mu\|D\boldsymbol{u}\|_p^2}{\left(|\Omega|+\|D\boldsymbol{u}_1\|_p^p+\|D\boldsymbol{u}_2\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}}} &\leq (\tau(D\boldsymbol{u}_1)-\tau(D\boldsymbol{u}_2),D\boldsymbol{u})\\
&=-b(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u})+b\left(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}\right)\\
&=-b\left(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right)-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}\right)=-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}\right)\\
&\leq \kappa_6\left\|D\boldsymbol{u}\right\|_p^2\left\|D\boldsymbol{u}_2\right\|_p\\
&\leq \kappa_6\kappa_3\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\left\|D\boldsymbol{u}\right\|_p^2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

De l'autre côté, prenant en compte l'estimation (2.15), on a

$$\begin{aligned}\left(|\Omega| + \|D\boldsymbol{u}_1\|_p^p + \|D\boldsymbol{u}_2\|_p^p\right)^{\frac{2-p}{p}} &\leq \left(|\Omega| + 2\kappa_4\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2-p}{p}} \\ &\leq \kappa_7\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Combinant (2.19) et (2.20), nous déduisons que

$$\left(\frac{\mu}{\kappa_7\left(1+\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}} - \kappa_3\kappa_6\left(1 + \frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}\right)\|D\boldsymbol{u}\|_p^2 \leq 0$$

et donc $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ si la condition est satisfaite avec $\kappa^{**} = \kappa_3\kappa_6\kappa_7$. ■

Remarque 2.3.11. *Les conditions* (2.10) *et* (2.18) *sont satisfaites si le terme* $\frac{\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}}{\mu}$ *est suffisamment petit. Ceci peut-être interprété comme une condition sur la taille de* $\|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}$ (*qui devrait être suffisamment petite*) *ou sur le coefficient de viscosité* μ (*qui devrait être suffisamment grand*)*.*

Corollaire 2.3.12. *Supposons que les hypothèses du théorème* 2.3.9 *sont satisfaites et soit* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_p$ *la solution faible de* (5)*. Alors il existe* $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ *unique tel que* $(5)_1$ *soit définie dans* $\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega)$*. De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|\pi\|_{p'} \leq \kappa\left(\|\boldsymbol{\tau}(D\boldsymbol{u})\|_{p'} + \|D\boldsymbol{u}\|_p^2 + \|\boldsymbol{f}\|_{-1,p'}\right),$$

où $\kappa > 0$ *est une constante dépendant seulement de* p*,* Ω *et de* n*.*

Démonstration. Elle peut-être adaptée en suivant pas à pas la démonstration du Corollaire 2.3.7 et sera donc omise. ■

Bibliographie

[1] C. Amrouche, V. Girault, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension, Czechoslovak Mathematical Journal, 44 (1994), 109-140.

[2] N. Arada, Optimal control of shear-thinning flows, SIAM J. Control Optim. 50 (2012), 2515-2542.

[3] N. Arada, Optimal control of shear-thickening flows, SIAM J. Control Optim. 51 (2013), 1940-1961.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[5] G. P. Galdi, An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, second edition, Springer-Verlag, New York, 2011.

[6] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.

[7] O. A. Ladyzhenskaya, New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them, Proc. Stek. Inst. Math., 102 (1967), 95-118.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, On some modifications of the Navier-Stokes equations for large gradients of Velocity, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 7 (1968), 126-154.

[9] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[10] J. Nečas, J. Málek, J. Rokyta, M. Ružička, Weak and measure-valued solutions to evolutionary partial differential equations, Applied Mathematics and Mathematical Computation, Vol. 13, Chapmann and Hall, London, 1996.