



Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Approximation polynomiale-fonctions Splines-

Présenté par :

- Boumaza Okba.
- Abbas Zakarya.

Devant le jury :

- | | | |
|-----------|---------------|----------------------------|
| Président | : I. Touil | M.C.B Université de Jijel. |
| Encadreur | : A. Nasri | M.C.B Université de Jijel. |
| Examineur | : L. Menniche | M.C.B Université de Jijel. |

Dédicace

A

Mes parents,

mes frères,

à tous ceux qui ont toujours cru à ma
réussite...

Nous dédions ce modeste travail.

﴿ *B.Okba* ﴾

﴿ *A.Zakarya* ﴾

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr Nasri Ahmed, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. I.Touil, qui me fait l'honneur de présider ce jury. L.Menniche, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

A, TOUS, UN GRAND MERCI.

Table des matières

1	Interpolation polynomiale et théorème de Weierstrass	4
1.1	Interpolation Polynomiale	4
1.1.1	Interpolation de Lagrange	5
1.1.2	Formule de Newton. Différences divisées	7
1.1.3	Interpolation d'Hermite	10
1.2	Théorèmes d'approximation de Weierstrass	15
2	Meilleure approximations dans un e.v.n	20
2.1	Meilleure approximation pour la norme uniforme $\ \cdot\ _\infty$	21
2.1.1	Existence de la meilleure approximation	21
2.1.2	Unicité de la meilleure approximation	24
2.2	Meilleure approximation pour la norme quadratique $\ \cdot\ _2$	27
2.2.1	Existence et unicité de la meilleure approximation au sens de Tchebychev	28
2.2.2	Existence et unicité de la meilleure approximation dans un Préhilbertien .	30
2.2.3	Polynômes orthogonaux (Polynômes de Tchebychev)	33
3	Splines	36
3.1	Interpolation aux nœuds de Tchebychev	37
3.2	Phénomène de Runge	39
3.3	Fonctions splines	40

Introduction

La théorie de l'approximation est un domaine bien établi des mathématiques qui a connu un grand développement à partir de la fin du 19^{ème} siècle et elle prend leur point de départ avec Weierstrass. L'approximation d'une fonction est liée aux problèmes de représentation des fonctions comme limites de fonctions plus simples (développements en série, développements en série de Fourier, représentations intégrales, etc.). En pratique, on cherche à construire une suite de fonctions f_n qui converge vers la fonction de base f . Lorsque les fonctions f_n sont des polynômes, on parle d'approximation polynomiale.

L'approximation polynomiale est beaucoup plus utilisée, car il est facile de rendre l'erreur d'approximation arbitrairement petite en augmentant le degré du polynôme. Elle se fonde sur le théorème de Weierstrass (1866) qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Ce travail, qui porte sur l'interpolation et l'approximation polynomiale qui sont très étroitement reliés puisqu'ils tendent à répondre aux mêmes questions. Nous étudions l'approximation d'une fonction continue par un polynôme et le problème se pose en ces termes : Etant donné une fonction f d'une variable réelle et définie sur un intervalle fermé et borné, peut on approcher f par un polynôme de degré au plus n de tel sorte que l'erreur entre ce polynôme et la fonction f soit minimal ou contrôlable.

Au chapitre 01, nous allons commencer par l'interpolation polynomiale où nous étudierons au moins trois polynômes d'interpolation : Lagrange, Newton (différences divisées) et celle de Hermite. On démontre l'existence et l'unicité d'un tel polynôme avec l'erreur pour chaque interpolation. Ensuite, nous citons le théorème de Weierstrass avec une démonstration basée sur les polynômes de **S. N. Bernstein** [4].

Dans le deuxième chapitre et après avoir l'existence d'un polynôme qui approche une fonc-

tion continue, nous définissons le procédé d'approximation dans le sens fonctionnelle, et comme choix des espaces et des normes, nous avons choisis l'espace des fonctions continues $C([a, b])$ muni de la norme de convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$ et une autre norme, celle de la convergence quadratique notée $\|\cdot\|_2$.

On définit d'abord le concept de meilleure approximation et on démontre ensuite l'existence et l'unicité du polynômes de meilleure approximation dans les deux cas, et on termine bien sur avec un exemple.

Nous rappelons aussi les propriétés fondamentales d'un espace de préhilbertien et nous insisterons sur la notion de projection orthogonale qui nous aide à définir une meilleure approximation polynomiale sur un sous espace vectoriel de dimension finie. Nous terminons ce chapitre avec les polynômes orthogonaux et quelques propriétés fondamentales de ces polynômes.

L'interpolation au zeros des polynômes de Tchebychev sert à diminuer l'erreur commise entre la fonction et le polynôme interpolant.

Nous abordons dans le dernier chapitre un second procédé d'interpolation, probablement le plus ancien et on parle des fonctions splines. Pour tracer une courbe passant par des points donnés, les dessinateurs utilisaient des lattes (en anglais "splines") flexible, en fait une planche de peu d'épaisseur, que l'on astreint à passer par les points souhaités et dont on n'a plus qu'à suivre le bord d'un coup de crayon. L'expression "spline function" a été utilisée pour la première fois par Isaac Schoenberg dans un article publié en 1946.

On vient ainsi de définir une nouvelle classe de fonctions appelées fonctions splines qui définissent un espaces vectoriel de dimension finie, mais on restreint sur les splines de degré 3 (cubique).

A travers les splines cubiques d'interpolation, nous reproduisons quelques estimations de l'erreur et nous évitons le phénomène de Runge (l'un des inconvénients de l'interpolation de Lagrange).

Chapitre 1

Interpolation polynômiale et théorème de Weiestrass

Dans les problèmes numériques, on substitue très souvent une fonction $f(x)$ connue en un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n par une fonction $P(x)$ plus simple et facilement calculable : c'est l'*approximation*. En termes mathématiques, l'approximation consiste à minimiser la distance qui sépare les fonctions $f(x)$ et $P(x)$. L'interpolation impose de plus que les fonctions $f(x)$ et $P(x)$ coïncident aux points x_j . Lorsque la fonction $P(x)$ représente la fonction $f(x)$ décrite par un ensemble de points expérimentaux $(x_j, f(x_j))$, on parle de lissage.

1.1 Interpolation Polynomiale

On désigne dans tout ce qui suit par \mathcal{P}_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur \mathbb{R} à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n . On a donc $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Par ailleurs, si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} la norme uniforme de f sur $[a, b]$ sera notée

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On note aussi par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1.1.1 Interpolation de Lagrange

Etant donné une fonction réelle f définie par les $(n+1)$ points x_0, x_1, \dots, x_n dans un intervalle $[a, b]$ deux à deux distincts, non nécessairement rangés par ordre croissant.

Notre problème est le suivant : *Existe-t-il un polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que*

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, 1, \dots, n ?$$

Théorème 1.1.1 *Le problème d'interpolation $p_n(x_i) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, admet une seule solution, donnée par la formule (1.1).*

Preuve. Un tel polynôme sera appelé polynôme d'interpolation (de Lagrange) de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

Posons :

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

où le produit est effectué sur les indices j tels que $0 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Il est clair que $L_i \in \mathcal{P}_n$ et que

$$\delta_{ij} = L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Le problème ci-dessus admet donc au moins une solution

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad p_n \in \mathcal{P}_n. \quad (1.1)$$

Il reste à prouver l'unicité. Supposons que $q_n \in \mathcal{P}_n$ soit une autre solution du problème. Alors $p_n(x_i) = q_n(x_i) = f(x_i)$, donc x_i est racine de $q_n - p_n$. Par suite le polynôme

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j),$$

divise $q_n - p_n$. Comme $\deg \pi_n = n + 1$ et $q_n - p_n \in \mathcal{P}_n$, la seule possibilité est que $q_n - p_n = 0$.

■

Remarque 1.1.2 *Pour démontrer le théorème d'existence explicitement, on peut également*

poser $p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ et résoudre un système linéaire de $n+1$ équations

$$\sum_{j=0}^n a_j x_i^j = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n,$$

en $n+1$ inconnues a_0, a_1, \dots, a_n dont le déterminant associé est de Vandermonde.

Théorème 1.1.3 *On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\zeta_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\zeta_x) \quad (1.3)$$

Preuve. Pour $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, les deux membres sont nuls, quel que soit ξ . Supposons désormais que $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ et considérons la fonction $t \mapsto g(t)$

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\pi_{n+1}(t)}{\pi_{n+1}(x)} \quad (1.3.*)$$

$g \in C^{n+1}([a, b])$. ($g - f$ est un polynôme). En outre, g a au moins $n+2$ racines distinctes dans $[a, b]$. En effet, on vérifie que $g(x_k) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n$ et que $g(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle $n+1$ fois, on en déduit d'abord que g' a au moins n racines distinctes dans $[a, b]$, puis que g'' a au moins $n-1$ racines distinctes dans $[a, b]$, etc., et finalement que $g^{(n+1)}$ a au moins une racine dans $[a, b]$. Il existe donc $\xi \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

D'autre part, on déduit directement de (1.3.*) que

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)!,$$

parce que $p_n^{(n+1)} = 0$ et $\pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$. On conclut en choisissant $t = \xi$. ■

Corollaire 1.1.4

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}(x)\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Remarque 1.1.5

1. Ces formules montrent que la taille de l'erreur d'interpolation $f(x) - p_n(x)$ dépend à la fois de la quantité $\|f^{(n+1)}\|$ qui peut être grande si f oscille trop vite et de la quantité $\|\pi_{n+1}(x)\|$ qui est liée à la répartition des points x_i dans l'intervalle $[a, b]$.
2. Les polynômes de Lagrange ne sont pas pratiques puisque d'un point de vue numérique, il est difficile de déduire L_{i+1} à partir de L_i .

1.1.2 Formule de Newton. Différences divisées

La formule d'interpolation de Lagrange a l'inconvénient suivant : si on rajoute un point, il faut refaire tous les calculs. De ce point de vue, il est plus avantageux de chercher le polynôme d'interpolation sous la forme

$$p_n(x) = A_1 + A_2(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \quad (1.4)$$

proposée par Newton (bien avant Lagrange). En posant $x = x_1, \dots, x_n$, on peut calculer successivement les coefficients A_1, A_2, \dots, A_n . Nous allons donner une formule explicite de ces coefficients.

Étant donné k nombres distincts x_1, \dots, x_k , posons

$$\omega_k(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k),$$

et

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)},$$

la notation est correcte car, pour $k = 1$, on retrouve la valeur de f en x_1 . Il est clair que $f(x_1, \dots, x_k)$ est une fonction symétrique de ces variables.

Pour $k = 2$, on obtient

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Remarque 1.1.6 Posons $\omega_k(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$

On vérifie sans peine que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k\}, l_k(x) = \frac{\omega_k(x)}{\omega'_k(x_k)(x - x_k)}, k = 1, \dots, n.$$

Proposition 1.1.7 (Formule d'interpolation de Newton)

a) Le polynôme d'interpolation de Newton est donné par

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j). \quad (1.5)$$

b) Les coefficients se calculent par les formules de différences divisées ;

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_2, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_1}, \quad k = 2, 3, \dots. \quad (1.6)$$

Preuve.

(a) Pour $1 \leq m \leq n$ fixé quelconque, posons

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^m A_k \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j). \quad (1.7)$$

On utilise les coefficients A_k de (1.4). Alors $p_m \in \mathcal{P}_{m-1}$ et $p_m(x_k) = f(x_k)$ pour $1 \leq k \leq m$, donc p_m est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f , associé aux points x_1, \dots, x_m .

Par conséquent, on a

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{\omega_m(x)}{\omega'_m(x_k)(x - x_k)}, \quad (1.8)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$. En comparant les coefficients principaux au second membre de (1.7) et (1.8), on obtient que $A_m = f(x_1, \dots, x_m)$ et (1.5) se résulte de (1.4).

(b) On introduit les polynômes d'interpolation $p, q \in \mathcal{P}_{k-2}$ par les conditions

$$p(x_j) = f(x_j), 1 \leq j \leq k-1 \quad \text{et} \quad q(x_j) = f(x_j), 2 \leq j \leq k,$$

et on définit ensuite le polynôme $r \in \mathcal{P}_{k-1}$ par

$$r(x) = \frac{x - x_1}{x_k - x_1} q(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_1} p(x). \quad (1.9)$$

On vérifie sans peine que $r(x_j) = f(x_j)$ pour tout $1 \leq j \leq k$, donc r est le polynôme d'interpolation de f associé aux points x_1, \dots, x_k .

D'après la partie (a), les coefficients principaux des polynômes p, q et r sont donnés respectivement par

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}), f(x_2, \dots, x_k) \quad \text{et} \quad f(x_1, \dots, x_k).$$

En utilisant l'identité (1.9), on en déduit (1.6). ■

Exemple 1.1.8 Soit $f(x) = x^3, n = 3, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$. Le schéma

$$\begin{array}{c|ccc} x_1 & f(x_1) & & \\ x_2 & f(x_2) & f(x_1, x_2) & \\ x_3 & f(x_3) & f(x_2, x_3) & f(x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

Figure01

permet de faciliter le calcul de

$$p_2(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2);$$

ici le schéma est

1	1		
2	8	7	7
4	64	28	

Figure02

d'où

$$p_2(x) = 1 + 7(x - 1) + 7(x - 1)(x - 2).$$

1.1.3 Interpolation d'Hermite

On fixe n points distincts x_1, \dots, x_n dans un intervalle compact $[a, b]$ et n entiers strictement positifs m_1, \dots, m_n . Pour des nombres réels $y_k^{(j)}$, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq m_k - 1$, donnés quelconques, on cherche un polynôme p de degré minimal tel que

$$p^{(j)}(x_k) = y_k^{(j)}, \quad 1 \leq k \leq n \quad 0 \leq j \leq m_k - 1. \quad (1.10)$$

Pour $m_1 = \dots = m_n = 1$, on retrouve l'interpolation de Lagrange.

Définition 1.1.9 p est le polynôme d'interpolation d'Hermite de f , associé aux points x_1, \dots, x_n avec multiplicités m_1, \dots, m_n .

Proposition 1.1.10 (Théorème d'interpolation d'Hermite) Posons $m := m_1 + \dots + m_n$.

- (a) Il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ vérifiant (1.10).
- (b) Soit $f \in C^m(I)$. Il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ tel que

$$p^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \quad 1 \leq k \leq n \quad 0 \leq j \leq m_k - 1. \quad (1.11)$$

Preuve. Il suffit de montrer (a). Considérons l'application linéaire $A : \mathcal{P}_{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$Ap: = \left(p(x_1), \dots, p^{(m_1-1)}(x_1), \dots, p(x_n), \dots, p^{(m_n-1)}(x_n) \right).$$

Il faut montrer qu'elle est bijective. Comme $\dim \mathcal{P}_{m-1} = \dim \mathbb{R}^m < \infty$, il suffit de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que $Ap = 0 \Rightarrow p = 0$.

Si $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ et $Ap = 0$, alors x_k est une racine de p de multiplicité $\geq m^k$ pour chaque k . Par conséquent le polynôme p a au moins $m_1 + \dots + m_n = m$ racines, plus que son degré. Donc il est identiquement nul. ■

Exemple 1.1.11 Pour $m_1 = \dots = m_n = 2$, on a

$$p(x) = \sum_{k=1}^n \left(y_k^{(0)} h_k^0(x) + y_k^{(1)} h_k^1(x) \right)$$

avec

$$h_k^1(x) = (x - x_k) L_k(x)^2$$

et

$$\begin{aligned} h_k^0(x) &= (1 - 2L_k'(x)(x - x_k)) L_k(x)^2 \\ &= L_k(x)^2 - 2L_k'(x_k) h_k^1(x), \end{aligned}$$

où L_1, \dots, L_k sont les polynômes de base de Lagrange :

$$L_k \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad L_k(x_j) = \delta_{kj}.$$

En effet, il est clair que $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Il suffit de vérifier les relations

$$h_k^0(x_j) = (h_k^1)'(x_j) = \delta_{kj} \quad \text{et} \quad (h_k^0)'(x_j) = h_k^1(x_j) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} h_k^1(x_j) &= (x_j - x_k) L_k(x_j)^2 = (x_j - x_k) \delta_{kj} = 0, \\ h_k^0(x_j) &= L_k(x_j)^2 - 2L_k'(x_k) h_k^1(x_j) = L_k(x_j)^2 = \delta_{kj}, \\ (h_k^1)'(x_j) &= L_k(x_j)^2 + 2(x_j - x_k) L_k(x_j) L_k'(x_j) \\ &= \delta_{kj} + 2(x_j - x_k) \delta_{kj} L_k'(x_j) = \delta_{kj}, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} (h_k^0)'(x_j) &= 2L_k(x_j)L_k'(x_j) - 2L_k'(x_k)(h_k^1)'(x_j) \\ &= 2\delta_{kj}(L_k'(x_j) - L_k'(x_k)) = 0. \end{aligned}$$

D'où l'expression de p_n .

Posons maintenant

$$\Omega := (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_n)^{m_n}. \quad (1.12)$$

Le résultat suivant généralise le **théorème 1.1.3**.

Théorème 1.1.12 Soit $f \in C^m([a, b])$ et $x \in [a, b]$. Il existe $\xi = \xi(x) \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{\Omega(x)}{m!} f^{(m)}(\xi). \quad (1.13)$$

Par conséquent,

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{\|\Omega\|_\infty}{m!} \|f^{(m)}\|_\infty. \quad (1.14)$$

Remarque 1.1.13 L'estimation (1.14) est optimale : on a l'égalité pour tout $f \in \mathcal{P}_m$, et les deux membres ne sont pas nuls si $\deg f = m$, parce que $f - p$ est un multiple de Ω d'après (1.13).

Pour la démonstration nous avons besoin d'une généralisation du théorème de Rolle pour des fonctions ayant des racines multiples. Rappelons que si une fonction g vérifie les conditions

$$g^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

pour un certain point α et pour un entier $m \geq 0$, alors on dit que α est une racine de g de multiplicité $\geq m$. Il est clair que dans ce cas α est une racine de $g^{(i)}$ de multiplicité $\geq m - i$ pour $i = 1, \dots, m$.

Lemme 1.1.14 Soit $g \in C^m([a, b])$. Si g a au moins $m+1$ racines (comptées avec multiplicité), alors $g^{(m)}$ a au moins une racine dans $[a, b]$.

Preuve. Il suffit de montrer que g' a au moins m racines (avec multiplicité); le cas général s'en déduit par récurrence.

D'après l'hypothèse, il existe des points $x_1 < \dots < x_n$ dans $[a, b]$ ($n \geq 1$) et des entiers $m_1, \dots, m_n \geq 1$ tels que $m_1 + \dots + m_n = m + 1$ et x_k est une racine de g de multiplicité $\geq m_k$, $k = 1, \dots, n$. En appliquant le théorème habituel de Rolle, on trouve que g' a au moins une racine dans chacun des $n - 1$ intervalles ouverts $]x_k, x_{k+1}[$, $k = 1, \dots, n - 1$. En outre, d'après la remarque ci-dessus, x_k est une racine de g' de multiplicité $\geq m_k - 1$, $k = 1, \dots, n$. Par conséquent, g' a au moins

$$(n - 1) + \sum_{k=1}^n (m_k - 1) = m_1 + \dots + m_n - 1 = m$$

racines. ■

Preuve. (du théorème 1.1.11) Il suffit de prouver (1.13). Si $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$, alors les deux membres sont nuls, quel que soit ξ . Supposons donc que $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ (alors $\Omega(x) \neq 0$) et introduisons la fonction $g \in C^m([a, b])$ par la formule

$$g(y) = f(y) - p(y) - (f(x) - p(x)) \frac{\Omega(y)}{\Omega(x)}, \quad y \in [a, b]. \quad (1.15)$$

Montrons que g a au moins $m + 1$ racines dans $[a, b]$ (avec multiplicité). En effet, on déduit de (1.11) et (1.12) que x_k est une racine de g de multiplicité $\geq m_k$, $k = 1, \dots, n$. De plus, on a $g(x) = 0$. En appliquant le théorème précédent, on en déduit que $g^{(m)}$ a au moins une racine dans $[a, b]$. Il existe donc ξ tel que $g^{(m)}(\xi) = 0$.

Par ailleurs, on déduit directement de (1.15) que

$$\begin{aligned} g^{(m)}(y) &= f^{(m)}(y) - p^{(m)}(y) - (f(x) - p(x)) \frac{\Omega^{(m)}(y)}{\Omega(x)} \\ &= f^{(m)}(y) - \frac{f(x) - p(x)}{\Omega(x)} m!. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$0 = g^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Omega(x)} m!$$

d'où (1.13). ■

Exemple 1.1.15 1) $n = 1$ le polynôme p est le polynôme de Taylor d'ordre m associé à la fonction f au point x_1 .

2) Considérons le cas particulier suivant avec $n = 3$ et $m = 4$

$$\mathbf{I} = [-1, 1], \quad (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1), \quad (m_1, m_2, m_3) = (1, 2, 1).$$

Pour $f \in C^4(\mathbf{I})$, $p \in \mathcal{P}_3$ est donc défini par les conditions

$$p(x) = f(x), \quad x = -1, 0, 1 \quad \text{et} \quad p'(0) = f'(0). \quad (1.16)$$

On déduit du théorème 1.1.11 que

$$\forall x \in \mathbf{I}, \quad |(f - p)(x)| \leq \frac{|\Omega(x)|}{4!} \|f^{(4)}\|_{\infty}.$$

En intégrant cette inégalité sur \mathbf{I} et en utilisant l'égalité

$$\|\Omega\|_1 = \left| \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx \right| = \frac{4}{15},$$

on en déduit que

$$\left| \int_{-1}^1 f dx - \int_{-1}^1 p dx \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{90}. \quad (1.17)$$

Calculons $\int_{-1}^1 p dx$. comme $p \in \mathcal{P}_3$, on a

$$p(x) = a + bx + cx(x+1) + dx(x+1)(x-1)$$

avec des coefficients réels a, b, c, d convenables. Comme

$$\int_{-1}^1 p dx = \int_{-1}^1 a + cx(x+1) dx = 2a + \frac{2}{3}c \quad (1.18)$$

il suffit de déterminer les coefficients a et c . En utilisant les trois premières conditions de (1.16),

on obtient le système linéaire

$$\begin{cases} f(-1) = p(-1) = a - b, \\ f(0) = p(0) = a, \\ f(1) = p(1) = a + b + 2c. \end{cases}$$

D'où

$$a = f(0) \quad \text{et} \quad 2c = f(-1) - 2f(0) + f(1).$$

En reportant dans (1.18) et ensuite en reportant (1.18) dans (1.17), on trouve la formule :

$$\left| \int_{-1}^1 f \, dx - \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3} \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{90}, \quad (1.19)$$

pour tout $f \in C^4(\mathbf{I})$.

Remarque 1.1.16 Nous pouvons définir des formules d'interpolation mixte Lagrange-Hermite où les valeurs des dérivées ne sont utilisées que pour certains points. Nous pouvons également faire intervenir des dérivées d'ordre plus élevée.

1.2 Théorèmes d'approximation de Weierstrass

Nous rappelons d'abord le théorème d'approximation de Weierstrass qui établit la densité de l'espace des polynôme dans l'espace $C([0, 1])$ pour la norme uniforme. En d'autres termes, la suite des fonctions

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

est totale dans $C([0, 1])$ muni de la norme uniforme. Ce théorème a fasciné les mathématiciens qui lui ont donné plusieurs démonstrations. La démonstration originale de Weierstrass ne donne pas un procédé d'approximation pratique et ne fournit pas une majoration commode de la quantité $\|f - p\|_{\infty}$. On présente ici un procédé explicite d'approximation uniforme d'une fonction f continue sur $[0, 1]$ qui dépend des polynômes de **S. N. Bernstein**.

Définition 1.2.1 On appelle polynôme de Bernstein d'ordre n d'une fonction f de $C([0, 1])$ et

on note $B_n f$, le polynôme de degré inférieure ou égal à n défini par

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad n = 1, 2, \dots$$

Théorème 1.2.2 Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction dans $C([a, b])$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, et un polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ tels que

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon.$$

Preuve. Quitte à faire le changement $t = (x - a) / (b - a)$, on peut supposer dans la suite que $a = 0$ et $b = 1$.

Désignons par q_{ni} le polynôme défini par

$$q_{ni}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad \text{où } 0 \leq i \leq n.$$

Les polynômes q_{ni} sont positifs sur $[0, 1]$, forment une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et vérifient les relations :

$$\sum_{i=0}^n q_{ni}(x) = 1, \tag{1.20}$$

$$\sum_{i=0}^n i q_{ni}(x) = nx, \tag{1.21}$$

$$\sum_{i=0}^n i(i-1) q_{ni}(x) = n(n-1)x^2. \tag{1.22}$$

Pour le voir, on considère la formule de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

En prenant $y = 1 - x$, on obtient (1.20). Si l'on dérive la formule de Newton par rapport à x et on multiplie par x , on obtient

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} x^i y^{n-i},$$

et la relation de (1.21) s'en déduit en prenant $y = 1 - x$. En dérivant deux fois la formule de Newton par rapport à x et en multipliant par x^2 , on obtient la relation

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{i=0}^n i(i-1) \binom{n}{i} x^i y^{n-i},$$

qui implique (1.22) lorsque l'on prend $y = 1 - x$. Les formules (1.20), (1.21) et (1.22), ainsi prouvées, impliquent la suivante

$$\sum_{i=0}^n (i - nx)^2 q_{ni}(x) = nx(1-x). \quad (1.23)$$

La relation (1.20) permet d'écrire

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{i=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] q_{ni}(x),$$

et il vient donc, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \sum_{i=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| q_{ni}(x). \quad (1.24)$$

Ceci étant, la fonction f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}$ et ce pour tout x tel que $\left| x - \left(\frac{i}{n}\right) \right| < \delta$. Considérons, alors pour tout $x \in [0, 1]$ les deux ensembles

$$N' = \left\{ i \in \mathbb{N} : \left| x - \left(\frac{i}{n}\right) \right| < \delta \right\}$$

$$N'' = \left\{ i \in \mathbb{N} : \left| x - \left(\frac{i}{n}\right) \right| \geq \delta \right\}$$

On a

$$\sum_{i \in N'} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| q_{ni}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i \in N'} q_{ni}(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=0}^n q_{ni}(x) = \frac{\epsilon}{2}.$$

En désignant par M le maximum de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et sachant que pour n dans N'' , $(nx - i)^2 \geq n^2\delta^2$, on a aussi d'après (2.4)

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N''} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| q_{ni}(x) &\leq 2M \sum_{i \in N''} q_{ni}(x) \leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{i=0}^n q_{ni}(x) (i - nx)^2 \\ &\leq \frac{2M}{n\delta^2} x(1-x) \leq \frac{M}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

Il existe un entier $N(\epsilon)$ tel que le dernier terme de l'inégalité ci-dessus soit inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$ dès que $n \geq N(\epsilon)$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, et pour n plus grand que $N(\epsilon)$,

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

pour tout $x \in [0, 1]$, ce qui établit la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite $B_n(f)$ vers f . ■

Remarque 1.2.3 1) Les polynômes de Bernstein $B_n f$ ne constituent pas une bonne approximation uniforme de f pour n petit. Leur succès vient du fait que, pour n petit, il conservent les propriétés géométriques globales de f (monotonie, convexité). La figure (3), qui représente les graphes de $f(x) = x^3$ et les polynômes Bernstein $B_2 f$ et $B_5 f$, montre que la convergence de $(B_n f)$ est lente.

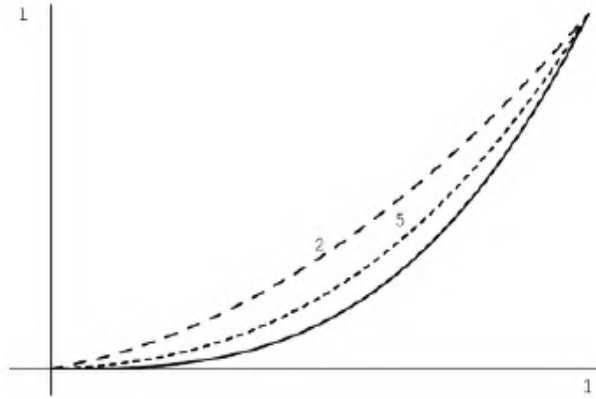


Figure 03

2) Notons aussi que la méthode d'approximation la plus naturelle, à savoir l'interpolation polynomiale, ne donne pas nécessairement de suite de polynômes convergente vers f . Par exemple,

Bernstein à montré que si les points d'interpolation sont équidistants dans l'intervalle $[-1, 1]$, avec $x_0 = -1$ et $x_n = 1$, alors pour $f(x) = |x|$, les polynômes d'interpolation de Lagrange divergent en chaque point de $[-1, 1]$ excepté en $x = 0, x = -1$, et $x = 1$! Cette situation est connue sous le nom de **phénomène de Runge**.

Chapitre 2

Meilleure approximations dans un e.v.n

Le problème type de l'approximation des fonctions est le suivant : "Approcher" les éléments d'un espace fonctionnel E par les éléments d'un sous ensemble donné X .

L'exemple le plus usuel est celui où E est un espace des fonctions réelles continue sur un intervalle de \mathbb{R} avec la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ ou la norme de la convergence quadratique $\|\cdot\|_2$ et X est l'ensemble \mathcal{P}_n des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

Supposons que E est un espace vectoriel normé. On peut espérer pour le problème considéré deux types de solutions :

A) On démontre que X est dense dans E .

Autrement dit tout élément de E peut être approché d'aussi près que l'on veut par des éléments de X . Parmi les résultats les plus célèbres de ce genre, on a le théorème de Weierstrass (L'approximation des fonctions par des polynômes) ou plus généralement les théorèmes de Stone- Weierstrass, et certain théorèmes de convergence dans la théorie des séries de Fourier.

B) X n'est pas dense dans E

Si $f \in E$, alors la distance de f à X

$$d(f, X) = \inf_{q \in X} \|f - q\| ,$$

est en général non nulle, et le problème intéressant est alors le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } p \in X, \text{ tel que} \\ \|f - p\| = d(f, X) \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.0.4 Dans les conditions qui précèdent, si p vérifie (2.1) on dit que p est l'élément de meilleure approximation de f dans X .

2.1 Meilleure approximation pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ (i.e $f \in C([a, b])$) et on définit sur cet espace la norme $\|\cdot\|_\infty$ (appelée norme de la borne uniforme):

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad (2.2)$$

où la distance entre deux fonctions $f(x), g(x) \in C([a, b])$ est donc donnée par

$$\|f - g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|. \quad (2.3)$$

2.1.1 Existence de la meilleure approximation

Théorème 2.1.1 Étant donné que $f \in C([a, b])$, il existe un polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\|f - p_n\|_\infty = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty.$$

Preuve. Définissons la fonction E

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (c_0, \dots, c_n) &\mapsto E(c_0, \dots, c_n) = \|f - q_n\|_\infty, \text{ où } q_n(x) = c_0 + \dots + c_n x^n \end{aligned}$$

Nous allons d'abord montrer que E est continue; ceci implique que E atteint ses bornes sur tout ensemble fermé de \mathbb{R}^{n+1} (théorème de Heine). Nous serons alors construire un ensemble non vide fermé et borné $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tel que la borne inférieure de E sur S est la même que sa borne inférieure sur l'ensemble de \mathbb{R}^{n+1} .

Pour montrer que E est continue à chaque point $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, soient $(\delta_0, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ définissons de plus le polynôme $\eta_n \in \mathcal{P}_n$ par

$$\eta_n(x) = \delta_0 + \dots + \delta_n x^n.$$

D'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) &= \|f - (q_n + \eta_n)\|_\infty \\ &\leq \|f - q_n\|_\infty + \|\eta_n\|_\infty = E(c_0, \dots, c_n) + \|\eta_n\|_\infty \end{aligned}$$

Maintenant, pour un certain nombre ϵ positif donné, choisissons

$$\delta = \epsilon / (1 + \dots + K^n)$$

où $K = \max\{|a|, |b|\}$. Considérons pour toute $(\delta_0, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $|\delta_i| \leq \delta$, $i = 0, \dots, n$.

Alors

$$E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) - E(c_0, \dots, c_n) \leq \|\eta_n\|_\infty \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) - E(c_0, \dots, c_n) &\leq \max_{x \in [a, b]} (|\delta_0| + |\delta_1| |x| + \dots + |\delta_n| |x|^n) \\ &\leq \delta (1 + \dots + K^n) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

d'une façon similaire

$$\begin{aligned} E(c_0, \dots, c_n) &= \|f - (q_n + \eta_n) + \eta_n\|_\infty \\ &\leq \|f - (q_n + \eta_n)\|_\infty + \|\eta_n\|_\infty \\ &\leq E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) + \epsilon \end{aligned}$$

et donc

$$E(c_0, \dots, c_n) - E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) \leq \epsilon \quad (2.5)$$

de (2.4), (2.5) on a

$$|E(c_0 + \delta_0, \dots, c_n + \delta_n) - E(c_0, \dots, c_n)| \leq \varepsilon$$

pour tout $(\delta_0, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $|\delta_i| \leq \delta, i = 0, \dots, n$, où $\delta = \varepsilon / (1 + \dots + K^n)$ et $K = \max\{|a|, |b|\}$. La fonction E est continue au point $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et comme (c_0, \dots, c_n) est un point arbitraire dans \mathbb{R}^{n+1} , il en résulte que E est continue sur l'ensemble de \mathbb{R}^{n+1} .

Notons par S l'ensemble des points (c_0, \dots, c_n) dans \mathbb{R}^{n+1} tel que

$$E(c_0, \dots, c_n) \leq \|f\|_\infty + 1,$$

l'ensemble S est évidemment bornée et fermée dans \mathbb{R}^{n+1} , en outre S est non vide puisque

$$\begin{aligned} E(0, \dots, 0) &= \|f\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty + 1, \end{aligned}$$

comme $(0, \dots, 0) \in S$. D'où la fonction continue E atteint sa borne inférieure sur l'ensemble S .

Notons cette borne inférieure par d et notons (c_0^*, \dots, c_n^*) le point de S où il est atteint.

Comme $(0, \dots, 0) \in S$, il en résulte que

$$d = \min_{(c_0, \dots, c_n) \in S} E(c_0, \dots, c_n) \leq E(0, \dots, 0) = \|f\|_\infty.$$

Selon la définition de S

$$E(c_0, \dots, c_n) > \|f\|_\infty + 1 \quad \forall (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus S.$$

Par conséquent, si $(c_0, \dots, c_n) \notin S$, alors $E(c_0, \dots, c_n) > d + 1 > d$. Par suite la borne inférieure d de la fonction E sur l'ensemble S est la même que la borne inférieure de E sur toutes les valeurs de $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

La limite inférieure est d atteint en un point (c_0^*, \dots, c_n^*) dans S .

Soit $p_n^*(x) = c_0^* + \dots + c_n^* x^n$, nous constatons que

$$d = \|f - p_n^*\|_\infty$$

et donc p_n^* est le polynôme nécessaire de meilleure approximation de degré n de la fonction f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. ■

2.1.2 Unicité de la meilleure approximation

L'unicité de la meilleure approximation est une conséquence du théorème de l'alternance de Tchebyshev (dit aussi théorème d'oscillation). Nous citons le théorème sans démonstration.

Théorème 2.1.2 *Supposons que $f \in C([a, b])$, alors $p^* \in \mathcal{P}_n$ est le polynôme de meilleure approximation pour f sur $[a, b]$ si et seulement si, il existe une suite de $n+2$ points x_0, x_1, \dots, x_n ($a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$) telle que*

$$f(x_k) - p^*(x_k) = \epsilon (-1)^k \|f - p^*\|, \quad k = 0, 1, \dots, n+1, \quad \epsilon = \pm 1.$$

L'énoncé du théorème est souvent exprimé en disant que $f - p^*$ atteint sa valeur maximale absolue avec des signes en alternance aux points x_i , $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Théorème 2.1.3 *Etant donné un intervalle $[a, b]$ fermé et borné de \mathbb{R} , alors toute fonction $f \in C([a, b])$ admet un unique polynôme de meilleure approximation $p_n \in \mathcal{P}_n$ sur $[a, b]$.*

Preuve. Soit $f \in C([a, b])$, et

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max |f(x)| \quad \text{et} \quad E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\| = \|f - p_n\|.$$

Supposons de plus que $q_n \in \mathcal{P}_n$ est aussi un polynôme de meilleure approximation pour f , et que p_n et q_n sont distincts, alors,

$$\|f - p_n\| = \|f - q_n\| = E_n(f) = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|,$$

Cela implique d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned} \left\| f - \frac{1}{2}(q_n + p_n) \right\|_\infty &= \left\| \frac{1}{2}(f - q_n) + \frac{1}{2}(f - p_n) \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - q_n\|_\infty + \frac{1}{2} \|f - p_n\|_\infty = E_n(f) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}(p_n + q_n) \in \mathcal{P}_n$$

est également un polynôme de meilleure approximation de f sur $[a, b]$.

Par la Théorème Oscillation il existe une suites de $n + 2$ points $x_i, i = 0, 1, \dots, n + 1$, où

$$\left| f(x_i) - \frac{1}{2}(q_n(x_i) + p_n(x_i)) \right| = E_n(f), \quad i = 0, \dots, n + 1.$$

ceci est équivalent à

$$|f(x_i) - p_n(x_i) + f(x_i) - q_n(x_i)| = 2E_n(f).$$

Maintenant

$$|f(x_i) - p_n(x_i)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = \|f - p_n\|_\infty = E_n(f)$$

pour la même raison, il s'ensuit donc que

$$|f(x_i) - q_n(x_i)| \leq E_n(f).$$

Il en résulte que

$$f(x_i) - p_n(x_i) = f(x_i) - q_n(x_i), \quad i = 0, \dots, n + 1.$$

Ainsi, la différence $p_n - q_n = 0$ au $n + 2$ points distincts. Comme $p_n - q_n$ est un polynôme de degré $\leq n$, il en résulte que $p_n - q_n$ est identiquement nul. Ceci, cependant, contredit notre hypothèse initiale selon laquelle p_n et q_n sont distincte, et implique finalement l'unicité du polynôme de meilleure approximation $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour $f \in C([a, b])$. ■

Construction du polynôme minimax (polynôme de meilleure approximation)

La caractérisation du polynôme minimax en termes de nombre de points dans lesquels la distance maximale doit être obtenue avec signe oscillant nous permet de construire le polynôme minimax dans des cas simples par calcul direct.

Nous n'allons pas traiter de la construction du polynôme de minimax dans le cas général.

L'algorithme permettant de le faire est connu sous le nom d'algorithme de Remez.

Un cas simple où nous pouvons démontrer une construction directe du polynôme est lorsque la fonction est convexe, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 2.1.4 Soit $f(x) = e^x$, $x \in [1, 3]$. Trouver le polynôme minimax de degré ≤ 1 noté $P_1^*(x)$.

D'après la caractérisation du polynôme minimax, nous recherchons un polynôme $P_1^*(x)$ telle que sa distance maximale entre $P_1^*(x)$ et $f(x)$ est obtenue 3 fois avec un signe alternatif. Clairement, dans le cas du problème présent, puisque la fonction est convexe, la distance maximale sera obtenue aux deux bords de l'intervalle avec un point intérieur. Nous utiliserons cette observation dans la construction qui suit.

La construction elle-même est représentée graphiquement (voir figure 04.)

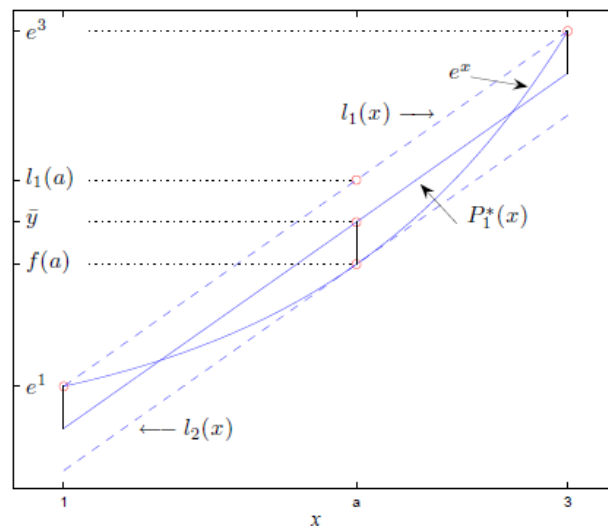


Figure 04

Soit $l_1(x)$ la ligne qui relie les extrémités $(1, e)$ et $(3, e^3)$, c'est à dire,

$$l_1(x) = e + m(x - 1).$$

La pente m est donnée par $m = \frac{e^3 - e}{2}$.

Soit $l_2(x)$ la tangente de $f(x)$ en un point a identifié de telle sorte que la pente soit m .

Puisque $f'(x) = e^x$, on a $e^a = m$, c'est à dire,

$$a = \log m.$$

Maintenant

$$f(a) = e^{\log m} = m,$$

et

$$l_1(a) = e + m(\log m - 1).$$

Par conséquent, la moyenne entre $f(a)$ et $l_1(a)$ que nous désignons par \bar{y} est donnée par

$$\bar{y} = \frac{f(a) + l_1(a)}{2} = \frac{m + e + m \log m - m}{2} = \frac{e + m \log m}{2}.$$

Le polynôme de minimax $P_1^*(x)$ est la droite de la pente m passant par (a, \bar{y}) ,

$$P_1^*(x) - \frac{e + m \log m}{2} = m(x - \log m),$$

c'est à dire

$$P_1^*(x) = mx + \frac{e - m \log m}{2}.$$

Nous notons que la différence maximale entre $P_1^*(x)$ et $f(x)$ est obtenue à $x = 1, a$ et 3 .

2.2 Meilleure approximation pour la norme quadratique $\|\cdot\|_2$

Dans un espace muni d'un produit scalaire (préhilbertien), le problème théorique de la détermination de meilleure approximation est devenu peut être simple que dans un espace normé quelconque, découle directement sur le théorème de la projection orthogonale.

On dispose ici deux méthodes de détermination de la meilleure approximation : l'une déjà vu auparavant et similaire à la première dite méthode de Tchebyshev et l'autre se base sur la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie ou un convexe fermé en général.

2.2.1 Existence et unicité de la meilleure approximation au sens de Tchebychev

Nous rappelons que la norme $\|\cdot\|_2$ d'une fonction $f(x)$ est définie comme $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme précédemment, on note \mathcal{P}_n l'espace de tout polynôme de degré $\leq n$.

Le problème de l'approximation suivant la norme $\|\cdot\|_2$ peut être reformulé par : parmi tous les polynômes de degré $\leq n$, trouver le polynôme qui est le proche de f suivant la norme $\|\cdot\|_2$, autrement dit

$$\text{Trouver } Q_n^* \in \mathcal{P}_n \text{ tel que } \|f - Q_n^*\|_2 = \min_{Q_n \in \mathcal{P}_n} \|f - Q_n\|_2.$$

Soit

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Nous voulons minimiser $\|f(x) - Q_n(x)\|_2$ parmi tous les $Q_n \in \mathcal{P}_n$. Par commodité, au lieu de minimiser différence en norme $\|\cdot\|_2$, nous minimisons son carré. Soit donc ϕ le carré de la distance entre $f(x)$ et $Q_n(x)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \phi(a_0, \dots, a_n) &= \int_a^b (f(x) - Q_n(x))^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b x^i f(x) dx + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j \int_a^b x^{i+j} dx. \end{aligned}$$

ϕ est une fonction de $n+1$ coefficient du polynôme $Q_n(x)$. Cela signifie que nous voulons trouver un point $\hat{a} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour lequel ϕ atteint son minimum, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_k} \Big|_{a=\hat{a}} = 0. \quad (2.6)$$

La condition (2.6) implique que

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \int_a^b x^k f(x) dx + \sum_{i=0}^n \hat{a}_i \int_a^b x^{i+k} dx + \sum_{j=0}^n \hat{a}_j \int_a^b x^{j+k} dx \\ &= 2 \left[\sum_{i=0}^n \hat{a}_i \int_a^b x^{i+k} dx - \int_a^b x^k f(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ceci nous donne un système d'équations linéaires dont les inconnus sont $(\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n)$:

$$\sum_{i=0}^n \hat{a}_i \int_a^b x^{i+k} dx = \int_a^b x^k f(x) dx, \quad k = 0, \dots, n. \quad (2.8)$$

La solution du problème pour la norme $\|\cdot\|_2$ est donnée par

$$Q_n^*(x) = \sum_{i=0}^n \hat{a}_i x^i,$$

où les coefficients \hat{a}_i , $i = 0, \dots, n$ sont solution de (2.8).

Remarque 2.2.1 *Le système (2.8) a toujours une solution.*

Laissons $H_{n+1}(a, b)$ dénoter la matrice de coefficients $(n+1) \times (n+1)$ du système (2.8) sur l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire,

$$(H_{n+1}(a, b))_{i,k} = \int_a^b x^{i+k-2} dx, \quad 1 \leq i, k \leq n+1.$$

Pour $[a, b] = [0, 1]$ la matrice $H_n(0, 1)$ est donnée par :

$$H_n(0, 1) = \begin{pmatrix} 1/1 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & 1/(2n+1) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La matrice (2.9) est connue sous le nom de matrice de Hilbert dont le déterminant est de Cauchy.

$$\det(H_n) = \frac{(1!2! \dots (n-1)!)^4}{1!2! \dots (2n-1)!}.$$

Par conséquent, $\det(H_n) \neq 0$ et H_n est inversible, et en générale les matrices de Hilbert sont des matrices inversibles. Ce qui prouve que non seulement le problème de meilleure approximation au sens de $\|\cdot\|_2$ a une solution, de plus cette solution est unique.

2.2.2 Existence et unicité de la meilleure approximation dans un Préhilbertien

Définition 2.2.2 On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel réel E une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

qui possède les propriétés suivants : $\forall x, y, z \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\ \langle x, x \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array} \right.$$

c'est à dire : le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 2.2.3 Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, où l'application $x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ satisfait les axiomes d'une norme et on posera donc :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 2.2.4 On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. L'orthogonale d'une partie non vide A de E est l'ensemble A^\perp des éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in A\}.$$

Lemme 2.2.5 A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Commençons par étudier brièvement quelques résultats bien connue de l'analyse hilbertienne : soit E est un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle x, y \rangle$ et de la norme associée $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Théorème 2.2.6 (*Projection orthogonale*)

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E : Pour tout vecteur $f \in E$, il existe un unique vecteur p dans F tel que :

$$\|f - p\| = \inf_{q \in F} \|f - q\|.$$

C'est la projection orthogonale de f sur F . autrement dit l'unique $p \in F$ tel que

$$\langle f - p, q \rangle = 0,$$

pour tout $q \in F$. On dit que p est la meilleure approximation de f par un élément de F .

Preuve. Elle se fait en deux étapes : on commence par prouver l'existence et l'unicité de la projection orthogonale de f sur F , puis on montre qu'elle minimise la distance de f à F . Soit $p_k, k = 0, \dots, n$, une base de F . L'identité

$$\langle f - p, q \rangle = 0, \forall q \in F$$

est équivalent à

$$\langle f - p, p_l \rangle = 0,$$

pour tout $l = 0, \dots, n$. Prenons $p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k$, on obtient le système

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \langle p_k, p_l \rangle = \langle f, p_l \rangle, \quad l = 0, \dots, n,$$

dont il faut montrer qu'il possède une et une seule solution. C'est le cas si le système homogène associé n'admet que la solution identiquement nulle. Si

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \langle p_k, p_l \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k, p_l \right\rangle = 0,$$

pour tout l , alors

$$\left\langle \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k, \sum_{l=0}^n \lambda_l p_l \right\rangle = \left\| \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k \right\|^2 = 0,$$

et donc $\sum_{k=0}^n \lambda_k p_k = 0$. Comme les p_k constituent une base de F , ils sont indépendants, de sorte que $\lambda_k = 0$ pour tout k , ce qu'il fallait démontrer. Ce raisonnement montre l'existence et l'unicité de la projection orthogonale.

Montrons que la projection orthogonale réalise la plus courte distance de f à F . En effet, pour tout $q \in F$, on a

$$\begin{aligned} \|f - q\|^2 &= \|f - p + p - q\|^2 &= \|f - p\|^2 + \|p - q\|^2 + 2 \langle f - p, p - q \rangle \\ &= \|f - p\|^2 + \|p - q\|^2 &\geq \|f - p\|^2. \end{aligned}$$

Réciproquement, montrons qu'un point $p \in F$ a plus courte distance de f est nécessairement la projection orthogonale. Si $\|f - q\|^2 \geq \|f - p\|^2$ pour tout $q \in F$, remplaçons q dans cette expression par $p - \epsilon h$ avec $h \in F$ et ϵ un nombre réel non nul. On obtient

$$\|f - p + \epsilon h\|^2 = \|f - p\|^2 + 2\epsilon \langle f - p, h \rangle + \epsilon^2 \|h\|^2 \geq \|f - p\|^2,$$

de sorte que

$$2\epsilon \langle f - p, h \rangle + \epsilon^2 \|h\|^2 \geq 0.$$

Divisons par $\epsilon > 0$ et faisons tendre ϵ vers 0, on obtient

$$2 \langle f - p, h \rangle \geq 0$$

De même, mais avec $\epsilon < 0$, on a

$$2 \langle f - p, h \rangle \leq 0,$$

de sorte que $\langle f - p, h \rangle = 0$ pour tout $h \in F$. ■

Corollaire 2.2.7 *La meilleure approximation de f par un élément p de F est unique. Si p_k , $k = 0, \dots, n$, est une base de F , on a*

$$p = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k$$

où les coefficients λ_k sont solutions du système $\sum_{k=0}^n \lambda_k \langle p_k, p_l \rangle$, $l = 0, \dots, n$.

Lorsque les p_k sont deux à deux orthogonaux. Cette matrice est diagonale de sorte que l'on

obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.8 *Si p_k , $k = 0, \dots, n$, est une base orthogonale de F , la meilleure approximation de f est donnée par*

$$p = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} p_k$$

2.2.3 Polynômes orthogonaux (Polynômes de Tchebychev)

Définition 2.2.9 *Notons $[a, b]$ un intervalle fermé ou non, borné ou non et soit $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive ($w(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$) et telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale*

$$\int_a^b x^n w(x) dx$$

est absolument convergente. La fonction w est appelée fonction poids. Notons $C_w([a, b])$ l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx$$

est convergente.

Proposition 2.2.10 *Pour tout $f, g \in C_w([a, b])$, l'intégrale*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

est absolument convergente et définit un produit scalaire sur $C_w([a, b])$.

Définition 2.2.11 *On appelle polynômes orthogonaux associés à la fonction poids w sur l'intervalle $[a, b]$, la suite des polynômes p_n obtenus par orthogonalisation de Gram-Schmidt de la suite des monômes x^n , $n \geq 0$.*

Quelques exemples classiques de fonctions poids et polynômes orthogonaux associées :

Polynômes	Poids $w(x)$	Intervalle
Legendre	1	$[-1, 1]$
Laguerre	$\exp(-x)$	$[0, \infty[$
Hermite	$\exp(-x^2)$	$]-\infty, \infty[$
Tchebychev	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$

Théorème 2.2.12 *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, les polynômes orthogonaux unitaires vérifient*

01/ $p_0(x) = 1$,

02/ degré $p_n = n$,

03/ $p_n(x)$ est un polynôme (x^n a pour coefficient 1),

04/ $\int_{\mathbf{I}} p_n(x)q(x)w(x)dx = 0$ pour tout polynôme q de degré $< n$,

05/ p_0, \dots, p_n engendrent l'espace des polynômes de degré $\leq n$,

06/

$$p_{n+1}(x) = (x - \delta_{n+1})p_n(x) - \gamma_{n+1}^2 p_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \geq 0$$

avec

$$\delta_{n+1} = \langle xp_n, p_n \rangle / \langle p_n, p_n \rangle, n \geq 0,$$

$$\gamma_1^2 = 0, \quad \gamma_{n+1}^2 = \langle p_n, p_n \rangle / \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle, n > 0, \quad p_{-1}(x) = 0.$$

Polynômes de Tchebychev

On définit les polynômes de Tchebychev par

$$t_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x) \quad , \quad x \in [-1, 1].$$

Il n'est pas évident a priori que t_n est un polynôme! Pour le voir, on procède comme suit.

Posons $\theta = \operatorname{Arccos} x$, c'est-à-dire $x = \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Il vient alors

$$t_n(x) = \cos n\theta,$$

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\ &= 2 \cos n\theta \cos \theta = 2xt_n(x), \end{aligned}$$

La fonction t_n se calcule donc par les formules de récurrence

$$t_0(x) = 1, \quad t_1(x) = x, \dots, \quad t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

Il en résulte que t_n est un polynôme de degré n , dont le coefficient directeur est 2^{n-1} si $n \geq 1$.

Déterminons les racines de t_n .

Si $x = \cos \theta \in [-1, 1]$ avec $\theta \in [0, \pi]$, on a $t_n(x) = \cos n\theta = 0$ si et seulement si $n\theta = \frac{\pi}{2} + i\pi$, soit $\theta = \frac{2i+1}{2n}\pi$ avec $0 \leq i \leq n-1$. Le polynôme t_n admet donc exactement n racines distinctes :

$$\cos \frac{2i+1}{2n}\pi \in]-1, 1[, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Comme t_n est de degré n , il ne peut avoir d'autres racines.

L'intégrale suivante se calcule par le changement de variable $x = \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$

$$\int_0^1 t_m(x)t_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{si } m = n = 0. \end{cases}$$

Elle montre que les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux sur l'intervalle $] -1, 1[$ pour la fonction poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Remarque 2.2.13 *Le théorème de la meilleure approximation en utilisant les polynômes orthogonaux est donné par le corollaire 2.2.8.*

Chapitre 3

Splines

Jusqu'à maintenant, notre objectif est basé sur l'approximation d'une fonction donnée sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, par un polynôme d'interpolation ou par la méthode de projection orthogonal sur des espaces vectoriels de dimension finie (définir une meilleure approximation pour au moins deux normes). Tous ces constrictions son *global* dans la nature, dans le sens où une approximation d'une fonction est définie par la même expression analytique sur tout l'intervalle $[a, b]$. Une alternative est plus efficace et flexible pour approcher une fonction est de diviser $[a, b]$ en sous intervalles et définir des polynômes sur chacune, qu'on l'appelé splines.

Les splines vont réaliser une interpolation polynomiale par morceaux mais on imposera de plus un degré de régularité aux points de discrétisation appelés aussi "nœuds". Nous ne présenterons ici qu'un exemple élémentaire des fonctions splines cubiques. On obtient des résultats similaires de l'interpolation polynomiale.

Nous nous proposons d'interpoler la fonction $f(x)$ sur un intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$, choisissons pour cela une partition de \mathbf{I}

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

On na déjà vu dans le premier chapitre au moins trois modèles d'interpolation basé surtout des polynômes de lagrange explicitement ou implicitement. Le but toujours est d'améliorer les polynômes d'interpolation et de faire minimiser l'erreur qu'on veut, pour cela on reviendra à l'interpolation polynomials avec les splines notre objectif dans ce chapitre.

Avant de mettre les définitions préliminaires des splines on introduit au moins deux in-

convénients de l'interpolation polynomiale. Donc la procédure est la suivante, on introduit une nouvelle interpolation aux racines des polynômes de Tchebychev. De plus citons avec un exemple le phénomène de Runge connu de la théorie de l'approximation même dans la théorie d'approximation de Fourier.

3.1 Interpolation aux nœuds de Tchebychev

Pour l'instant, nous allons nous intéresser à l'interpolation polynomiale dans le cas où les nœuds peuvent être choisis. Comment le procéder? Une des approches passe par la fonction de (1.2)

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

intervient dans la formule d'erreur

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\zeta_x),$$

avec ζ_x dans le plus petit intervalle contenant tous les nœuds ainsi que x . Les fortes oscillations aux extrémités sur la figure 05.

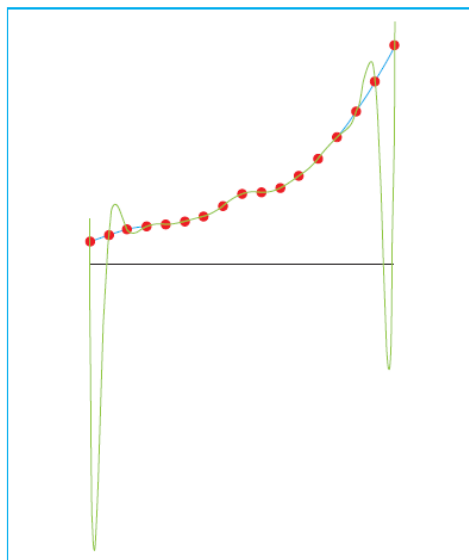


Figure 05

sont le reflet de celles de $\pi_{n+1}(x)$ pour des points équidistants. L'idée est maintenant de choisir un ensemble de nœuds $\{x_j\}$ minimisant $\|\pi_{n+1}(x)\|_\infty$.

Définition 3.1.1 Les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n sont les points $x_i = \cos \frac{2i+1}{2n+2}\pi$, $0 \leq i \leq n$, racines du polynôme t_{n+1} . Les points x_i sont répartis symétriquement autour de 0 (avec $x_{n-i} = -x_i$), de façon plus dense au voisinage de 1 et -1 .

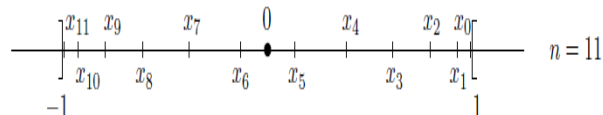


Figure 06

Puisque le coefficient directeur de t_{n+1} est 2^n , il vient

$$t_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=0}^n (x - x_i) = 2^n \pi_{n+1}(x)$$

Pour se ramener à un intervalle $[a, b]$ quelconque au lieu de $[-1, 1]$, on utilisera la bijection linéaire

$$\begin{aligned} [-1, 1] &\rightarrow [a, b] \\ u &\mapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}u \end{aligned}$$

qui envoie -1 sur a et 1 sur b . Les images des points d'interpolation de Tchebychev $u_i \in]-1, 1[$ sont donnés par

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos \frac{2i+1}{2n+2}\pi, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Ces points sont encore appelés points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas, on a $x - x_i = \frac{b-a}{2}(u - u_i)$, donc le polynôme π_{n+1} est donné par

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^n (u - u_i).$$

où $\prod_{i=0}^n (u - u_i) = \frac{1}{2^n} t_{n+1}(u)$ est le polynôme $\pi_{n+1}(u)$ correspondant à $[-1, 1]$. On obtient donc

$$\pi_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} t_{n+1}(u) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} t_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Théorème 3.1.2 Pour $f \in C^{n+1}([-1, +1])$ et $x \in [-1, +1]$

$$|f(x) - p_n(x)| = \frac{\max_{\zeta_x \in [-1, +1]} |f^{(n+1)}(\zeta_x)|}{(n+1)!} 2^{-n}.$$

Si f est infiniment dérivable et la norme de ses dérivées croît plus lentement avec n que $(n+1)!$, l'erreur décroît donc exponentiellement avec le degré n . Aucun interpolant par morceaux ne fait aussi bien !

Remarque 3.1.3 Cette valeur est beaucoup plus petite que l'estimation $(\frac{b-a}{e})^{n+1}$ obtenue pour $\|\pi_{n+1}\|$ avec des points x_i équidistants, surtout lorsque n est assez grand : pour $n = 30$ par exemple, on a $(\frac{e}{4})^{n+1} < 7 \times 10^{-6}$. Il en résulte que l'interpolation aux points de Tchebychev est en général considérablement plus précise que l'interpolation en des points équidistants, d'où son intérêt pratique.

3.2 Phénomène de Runge

Exemple 3.2.1 Supposons qu'on approche la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5,$$

en utilisant l'interpolation de Lagrange avec nœuds équirépartis. On peut vérifier qu'il existe des points x à l'intérieur de l'intervalle d'interpolation tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - Q_n f(x)| \neq 0$$

En particulier, l'interpolation de Lagrange diverge pour $|x| > 3.63$. Ce phénomène est particulièrement évident au voisinage des extrémités de l'intervalle d'interpolation comme le montre la figure 07.

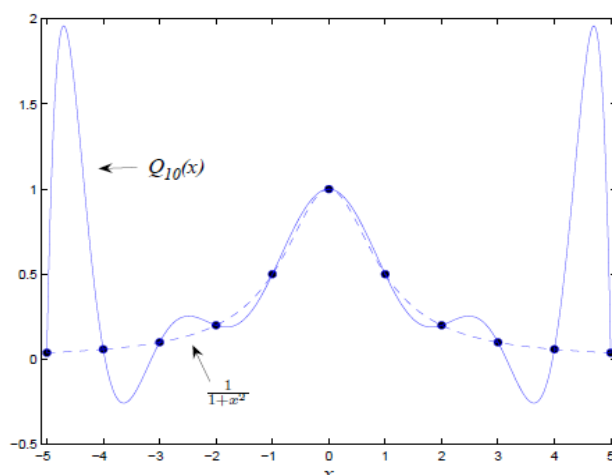


Figure 07

3.3 Fonctions splines

Définition 3.3.1 Soit $G_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $n + 1$ points dans $[a, b]$, où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Une fonction $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **spline cubique** si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 01) Pour chacun $j = 0, \dots, n - 1$, la restriction $S|_{[x_j, x_{j+1}]}$ est un polynôme de degré 3.
- 02) $S \in C^2([a, b])$. Par conséquent, spline cubique peut être représenté comme

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3] \chi_{[x_j, x_{j+1}]}(x), \quad (3.1)$$

où χ_D est la fonction caractéristique de l'ensemble D avec $\chi_D(x) := 0$ pour $x \notin D$ et $\chi_D(x) := 1$ pour $x \in D$. Notons que la valeur à x_n est automatiquement donnée en raison de la continuité de S .

En combinant avec les conditions d'interpolation $S(x_j) = y_j$, $j = 0, \dots, n$ où (y_0, \dots, y_n) est donné, la plupart des coefficients de S sont uniquement déterminés.

Plus précisément, $S(x_j) = y_j$, $j = 0, \dots, n - 1$, donne en utilisant (3.1) immédiatement $a_j = y_j$ pour tous $j = 0, \dots, n - 1$. En outre, le fait que $S \in C^2([a, b])$ nous fournira

$$y_j + b_j (x_{j+1} - x_j) + c_j (x_{j+1} - x_j)^2 + d_j (x_{j+1} - x_j)^3 = y_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, n-1, \quad (3.2)$$

$$b_j + 2c_j (x_{j+1} - x_j) + 3d_j (x_{j+1} - x_j)^2 = b_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, n-2, \quad (3.3)$$

$$2c_j + 6d_j (x_{j+1} - x_j) = 2c_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, n-2. \quad (3.4)$$

Avec un pas $h_j := x_{j+1} - x_j$, (3.4) on obtient

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad \forall j = 0, \dots, n-2. \quad (3.5)$$

L'insertion de (3.5) dans (3.2) donne

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - c_j h_j - \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^2 \\ &= \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{3} (c_{j+1} + 2c_j) h_j \quad \forall j = 0, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalement, en insérant (3.5) et (3.6) dans (3.3), on obtient

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{1}{3} (c_{j+1} + 2c_j) h_j + 2c_j h_j + (c_{j+1} - c_j) h_j = \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{1}{3} (c_{j+2} + 2c_{j+1}) h_{j+1}, \quad (3.7)$$

pour tout $j = 0, \dots, n-3$.

qui est équivalent à

$$\frac{1}{3} h_j c_j + \frac{2}{3} (h_{j+1} + h_j) c_{j+1} + \frac{1}{3} h_{j+1} c_{j+2} = \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}, \quad \forall j = 0, \dots, n-3. \quad (3.8)$$

Equation (3.8) est un système linéaire dont vecteur inconnu correspondant est $(c_0, \dots, c_{n-1})^T$, et la matrice associée est :

Par conséquent, (3.8) peut également être obtenue de façon analogue pour $j = n - 2$. Nous obtenons

$$\frac{1}{3}h_{n-2}c_{n-2} + \frac{2}{3}(h_{n-1} + h_{n-2})c_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \quad (3.13)$$

Cela ajoute la dernière ligne

$$\left(0, \dots, 0, \frac{1}{3}h_{n-2}, \frac{2}{3}(h_{n-1} + h_{n-2})\right) \quad (3.14)$$

à la matrice au-dessus, est maintenant on obtient une matrice tridiagonal (avec la taille $(n - 1) \times (n - 1)$). Cette matrice est maintenant, en effet, régulière. elle est même définie positive. Cela peut être vu comme suit : Nous observons d'abord que la matrice (appelons-la $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n-1}$) satisfait

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} |a_{ij}| < a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n - 1, \quad (3.15)$$

pour la raison très triviale que $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$.

Remarque 3.3.2 *La matrice qui vérifie 3.15 est dite matrice d'une diagonale strictement dominante*

(H) Le spline cubique hermitienne a la propriété de donné des dérivés au bord : $S'(x_0)$ et $S'(x_n)$ sont donnés.

(P) Le spline cubique périodique sont donné par : $y_0 = y_n, S'(x_0) = S'(x_n)$, et $S''(x_0) = S''(x_n)$.

Propriété extrême

le théorème suivant stipule que la spline naturelle ne peut pas avoir une plus grande norme $\|\cdot\|_2$ de la dérivée seconde que la fonction qu'elle interpole (en supposant que cette fonction a une dérivée seconde continue). En fait, nous minimisons la norme $\|\cdot\|_2$ de la dérivée seconde non seulement par rapport à la fonction "originale" que nous interpolons, mais également par rapport à toute fonction qui interpole les données (et possède une dérivée seconde continue). En ce sens, nous appelons la spline naturelle "naturelle".

Théorème 3.3.3 *Supposons que $f''(x)$ soit continue dans $[a, b]$, et que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Si $s(x)$ est la spline cubique naturelle interpolant $f(x)$ aux nœuds $\{t_i\}$ alors*

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

Preuve. On définit $g(x) = f(x) - s(x)$. Comme $s(x)$ interpole $f(x)$ aux nœuds $\{t_i\}$ leur différence s'annule à ces points, c.-à-d.

$$g(t_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Maintenant

$$\int_a^b (f'')^2 dx = \int_a^b (s'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx + 2 \int_a^b (s'' g'') dx.$$

Nous montrerons que le dernier terme du côté droit est zéro, ce qui termine la preuve puisque les deux autres termes du côté droit sont non négatifs. En divisant ce terme en une somme d'intégrales sur les sous-intervalles et en intégrant par parties sur chaque sous-intervalle, nous avons

$$\int_a^b s'' g'' dx = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} s'' g'' dx = \sum_{i=1}^n \left[(s'' g') \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} s''' g' dx \right]$$

Puisque nous avons choisis les splines cubiques i.e $s''(t_0) = s''(t_n) = 0$, et puisque $s'''(x)$ est constant sur $[t_{i-1}, t_i]$ (dire c_i) on se retrouve avec

$$\int_a^b s'' g'' dx = - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} s''' g' dx = -c_i \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g' dx = - \sum_{i=1}^n c_i (g(t_i) - g(t_{i-1})) = 0.$$

■

Conclusion

L'approximation d'une fonction f (connue ou non) par un polynôme est une démarche naturelle que l'on rencontre dans divers contextes en analyse : lorsque f est assez régulière, elle permet d'analyser le comportement local (développement de Taylor) mais aussi dans certains cas d'approcher globalement ou par morceaux la fonction par un polynôme d'interpolation (par exemple).

Dans ces deux situations la précision avec laquelle on peut approcher f par un polynôme dépend de la régularité de la fonction.

A l'inverse, avec une hypothèse de régularité relativement faible, le théorème de Weierstrass nous assure que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue sur un intervalle compact, d'autant plus que l'on veut, par un polynôme.

Dans ce travail, on a traité le problème dans les deux sens pratique et théorique ; on a commencé avec l'interpolation polynomiale où nous considérons les questions d'existence, d'unicité et même la procédure de calcul du polynôme interpolant f .

Le théorème de Weierstrass nous amène à chercher théoriquement un certain polynôme qui nous donne une meilleure approximation, c'est-à-dire avec une différence d'erreur assez petite avec la norme de la convergence uniforme et de la norme quadratique ; pour cette raison on a défini la projection orthogonale dans un espace préhilbertien sur un espace de dimension finie, alors que l'interpolation est une projection seulement linéaire sur l'espace des polynômes.

Pratiquement, on a vu que la théorie d'approximation (respectivement d'interpolation) est entièrement liée à la dimension de l'espace où on fait l'approximation ($X = \mathcal{P}_n$ dans notre cas) et par suite avec des systèmes d'équations linéaires. On a commencé par un système où la matrice est pleine avec un déterminant de Vandermonde (Lagrange), puis un système triangulaire inférieure

(Newton) et finalement avec une matrice tridiagonale.

Bibliographie

- [1] **Demailly.J.P.**, *Analyse numérique et équation différentielle*, EDP sciences 2006.
- [2] **Grivet.J.P.**, *Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur*, EDP sciences 2009.
- [3] **Michel.V.**, *Lectures on Constructive Approximation*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.
- [4] **Natanson.I.P.**, *Constructive function theory (Uniform Approximation)*, Vol I, Frederick ungar publishing, co 1964.
- [5] **Phillips.M.G.**, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer 2003.
- [6] **Quarteroni.v, Saleri.F., Gervasio.P.**, *Méthodes numérique pour le calcul scientifique, programmes en MATLAB*, Springer 2000.
- [7] **Quarteroni.v, Saleri.F., Gervasio.P.**, *Calcul Scientifique, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*, springer 2008.
- [8] **Súli.E. and Mayers.D.F.**, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University press, 2003.
- [9] **Temam.R.**, *Analyse 03 notions sur l'approximation des fonctions*, Faculté des sciences d'orsay.