Table des matières

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MSBY DE JIJEL
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique

N° d'ordre :
Série :

Mémoire

présenté pour obtenir le diplome de

Master en Sciences

Spécialité : Physique
Option : Physique théorique

par
Hadjer BOURAHLA

Thème

Interaction Matière Noire- Energie Noire en Cosmologie

Soutenu le : 20/07/2019

Devant le Jury :

Président :	M. S. Zidi	MCA	Univ.MSBY,Jijel
Rapporteur :	Kh. Nouicer	Prof.	Univ.MSBY,Jijel
Examinateur :	S. Haouat	Prof.	Univ.MSBY,Jijel

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Dieu pour m'avoir donné la volanté et la patience tout au long de mes études.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur Pf. kh. Nouicer, Professeur à l'université de Jijel, que je remercie pour ses conseils durant la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements vont ensuite au jury de ce mémoire : Prof. S. Haouat Professeur à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et M. S. Zidi,Maitre de conférences A à l'université de Jijel, qui a accepté de juger ce travail en sa qualité d'examinateur.

Un grand merci pour mes parents qui m'ont aidé beaucoup.

Je tiens à remercier mes soeurs et mes frères et mes amies pour l'encouragement et pour leur soutien moral.

Enfin, je tiens également à remercier tous mes enseignants de physique théorique.

H. BOURAHLA

Chapitre 1

Introduction générale

La relativité générale est considérée comme la plus importante création intellectuelle du 20 ème siècle. C'est l'oeuvre pratiquement d'un seul homme, le physicien Allemand Albert Einstein. Avec sa nouvelle théorie, il a révolutionné notre vision de la nature de l'espace-temps, et notre perception de la force de gravitation, qui possède en relativité générale l'interprétation tout à fait nouvelle, d'être une manifestation géométrique de la dynamique de l'espace-temps produite par la présence des corps massifs. Cette description est une conséquence du principe d'équivalence d'Einstein. Cependant, il a fallu plusieurs générations de brillants physiciens pour completer et assoir définitivement la nature géométrique de la force de gravitation. Cette compréhension inédite a par la suite ouvert la voie à la construction de modèles cosmologiques viables décrivant la dynamique de l'univers comme un tout, et par la suite le devellopement spectaculaire de la cosmologie moderne.

La cosmologie est une branche de l'astrophysique qui a pour objet l'étude de l'univers en tant que système physique. Elle étudie sa structure globale dans laquelle prennent place tous les phénomènes physiques qui sont décrit par la théorie de la relativité générale[1]. La cosmologie moderne a débuté avec la publication d'Einstein de sa dernière modification de la relativité générale dans l'article "cosmological consideration of the general theory of relativity", dont le but au sein de la cosmologie relativiste était de présenter une description viable de l'espace-temps, en ajoutant une constante cosmologique Λ aux équations pour compenser l'effet gravitationnel de la matière, parce qu'il pensait que l'univers devait être stable. En 1922, Friedmann a trouvé une autre solution pour les équations d'Einstein présentant un univers en évolution. Aprés la découverte de l'expansion de l'univers par Hubble en 1929, Einstein a définitivement renoncé à sa constante cosmologique et déclara que c'était la plus grande erreur de sa vie. Cependant, les cosmologistes aujourd'hui, utilisent la dénomanation de constante cosmologique (Λ) pour désigner la composante invisible d'énergie de l'univers, qui est considéré comme responsable de l'accélération de l'expension de l'univers.

La preuve observationnele de son existence est, coincidence, compatible avec la constante cosmologique Λ qui est alors considérée comme l'origine possible de l'énérgie noire (Dark Energy : DE) qui est dans le même temps à l'origine de l'accélération récente de l'expansion de l'univers. Cette énergie noire ne produit pas de forces attractives, mais plutôt une force répulsive. L'univers actuel contient aussi une autre composante invisible désignée sous le nom de matière noire (Dark Matter : DM), qui est une masse invisible insensible aux forces nucléaires et électromagnétiques, mais produisant de la l'attraction gravitationnelle qu'elle exerce sur les structures de l'univers et leurs distributions [2], [3], [4]. Le DM est supposée un fluide sans pression et à une température négligeable. Dans le budget énérgétique de l'univers la matière est de nature baryonique (4%) et de nature non-baryonique (26%). A cause de l'accord avec les observations cosmologiques, le modèle cosmologique standard accepté est communément appelé le modèle standard ou le model ΛCDM (Lambda + Cold Dark Matter, en opposition à HDM (Hot Dark Matter) qui est incompatible avec les données observationnellles), pour indiquer la nature de ses composantes principales. Bien que favorisé par les observations, le modèle ΛCDM trouve son introduction juste après l'apparition du modèle statique de l'univers en relativité générale. Mais ce modèle soufre de beaucoup de problèmes, parmis lesquels le problème de coïncidence[5]. Les extensions du modèle ΛCDM possedent une solution à ces problèmes, et qui consiste à remplacer la constante cosmologique par une forme dynamique d'energie noire [6], [7], [8] dont la densité pourrait varier dans le temps. Ce mémoire de master de physique théorique se concentrera sur divers aspects et différents modèles d'energie noire dynamique. Plus spécifiquement, nous considérons un modèle où l'énergie noire et la matière noire sont couplées par un terme d'interaction, qui est une posssibilité offerte par les observations cosmologiques.

La plupart des modèles cosmologiques supposent implicitement que la matière noire et l'énergie noire interagissent seulement à travers la force gravitationnelle. Si les différentes composantes n'ont pas d'autres interactions, il est difficile décrire ces composantes en terme d'une théorie bien fondée basée sur des principes premiers. Il est également raisonnable de supposer que les différentes composantes du secteur sombre pourraient intéragir entre eux [9] et avec d'autres composantes. Voici quelque propriètés qui peuvent être déduites des observations :

- Le DE doit contribuer avec une pression négative sur le bilan énergétique alors que la pression de la DM est négligeable voir nulle.

- Le couplage de la DE avec les Baryons est probablement négligeable, étant étroitement limité par mesures de gravité locales [10], [8].

- Le couplage avec le rayonnement est également trés difficile à formuler, puisque les photons ne suivent plus un chemin géodésique, et la déviation de la lumière par les sources stellaires pendant les éclipses solaires serait en contraction avec les observation.

- Le couplage entre DE et DM doit être également petit, puisque dans le modèle de concordance la DE est une constante cosmologique, et par définition l'absence d'interaction est un excellent ajustement aux données.

De tous ces possibilités, une interaction DM/DE est la plus intéressante car elle peut résoudre le problème de coïncidence en permettant des solutions avec un rapport DM/DE constant. Enfin la nature de l'interaction entre les composantes du secteur sombre est un problème non résolu et l'existence de l'interaction doit être acceptée par observation.

Ce mémoire de master est organisé comme suit. Dans le deuxième chapitre on va présenter un bref rappel de la ralativité générale et de la cosmologie relativiste. Pour cela, je présenterai le modèle de Friedmann-Lemaître d'un univers homogène et isotrope en expansion avec une constante cosmologique Λ . Nous nous intéresserons ensuite au modèle ΛCDM et aux problèmes qui le plombent, ainsi qu"aux solutions possibles pour les résoudre. Le troisième chapitre est basée sur l'article[11]. Le travail consiste à introduire une description efficace en termes de fluides de l'interaction dans le secteur sombre dans un espace-temps de Friedmann-Robertson-Walker, et on étudie la stabilité des solutions en loi de puissance. Nous détermineront l'equation de la source de la densité énergétique de chaque composante sombre. Nous étudions quelques exemples comme les interactions linéaires et non linéaires qui dépendent des densités de la matière noire et de l'énergie noire, leurs première dérivés, ainsi que sur la densité d'énergie totale avec ses dérivés jusqu'à au second ordre. Nos conclusions sont consignées dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Chapitre 2

Introduction à la cosmologie

2.1 Quelque élements de relativité générale et de cosmologie relativiste

2.1.1 Introduction

La relativité générale est la théorie de la gravitation à la base de la cosmologie[12]. Elle donne des explications aves une propriété géométrique à la force gravitationnelle qui est donné par les valeurs de la métrique $g_{\mu\nu}$ ceci forme la base de la relativité générale et la cosmologie. Ainsi, la relativité générale semble bien compliquée pour peu de choses mais les principe généraux à la base de cette théorie et la richesse de ces implications.

Le long de cette section, nous dennerons quelques éléments d'analyse tensorielle, puis on retrouve les équations d'Einstein, et à partir desquelles nous déduiserons les équations fondamentales de Friedmann qui régissent la cosmologie moderne.

2.1.2 Métrique de l'espace-temps

La relativité restriente considère un espace temps à 4-D de métrique Minkowskienne $\eta_{\mu\nu} = (\pm 1, \mp 1, \mp 1, \mp 1)$. En appliquant le Principe d'Equivalence [13] à un objet en chute libre Il existe localement un système de coordonnées particulier x^μ tel que l'equation de mouvement s'ecrive de la même manière que dans un référentiel non accéléré et sans gravitation comme suit :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad \text{où} \quad d\tau \text{ est le temps propre.} \tag{2.1}$$

L'intervalle infinitésimal dS entre 2 événements s'ecrit sous forme

$$dS^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.2}$$

qui donne la classification suivante :

$$dS^2 = 0 \Rightarrow \text{ genre lumière donc } dS^2 = -d\tau^2$$

et l'equation(2.2) devient

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.3}$$

Cet intervalle est invariant pour les transformations de Lorentz associées aux changements de référentiels.

D'après le principe d'équivalence, l'Eq.(2.3) est aussi valable dans un certain voisinage de l'objet. Il existe donc un autre système de coordonnés plus général x'^μ dans lequel on peut réécrire cette équation. Cherchorons la forme qu'elle prendrait pour ces nouvelles coordonnées x'^μ :

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{d\tau}\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{d^2 x'^\nu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\mu \partial x'^\delta}\frac{\partial x'^\nu}{d\tau}\frac{\partial x'^\delta}{d\tau}. \tag{2.4}$$

On multipliant par $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$, on obtient la nouvelle équation du mouvement dans le système de coordonnées x'^μ :

$$\frac{d^2 x'^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\delta}\frac{\partial x'^\mu}{d\tau}\frac{\partial x'^\delta}{d\tau} = 0. \tag{2.5}$$

Cette équation s'appelle l'équation de la géodésique, et elle définit la trajectoire d'une particule libre soumise au seul effet du champ de la gravitation, où $\Gamma^\lambda_{\nu\delta}$ est le symbole de Christoffel définie par :

$$\Gamma^\lambda_{\nu\delta} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\delta}. \tag{2.6}$$

En plus, le temps prorpre est alors défini par

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \tag{2.7}$$

ce qui permet de définir le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \tag{2.8}$$

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ décrit la géométrie de l'espace-temps dans le nouveau système de coordonnées x'^{μ} et remplace la métrique cartésienne $\eta_{\alpha\beta}$. On peut montrer que $\Gamma^{\lambda}_{\nu\delta}$ peut s'écrire qu'à l'aide d'un seul système de coordonnées et du tenseur métrique,

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\delta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^{\delta}} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x'^{\mu}} \right). \tag{2.9}$$

Le symbole de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\nu\delta}$ intervient par ailleures dans la définition de la dérivée covariante $V^{\nu}_{;\mu}$ d'un vecteur V^{ν} par rapport à la coordonnée x'^{μ} :

$$V^{\nu}_{;\mu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda}. \tag{2.10}$$

Cette définition de la dérivée en Relativité Générale exprime correctement la variation d'un vecteur le long d'une ligne d'univers dans un espace non plat. Elle se transforme de la même manière qu'un vecteur par un changement de coordonnées, contrairement à la dérivée habituelle. Le vecteur variation est donc correctement défini. Pour illustrer toute sa profondeur, voici la définition de la dérivée covariante $\frac{DV^{\mu}}{D\tau}$ non pas par rapport à une coordonnée, mais le long d'une courbe quelconque paramétrée par le temps propre τ (invariant par changement de coordonnées) :

$$\frac{DV^{\mu}}{D\tau} = \frac{dV^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} V^{\nu}. \tag{2.11}$$

L'equation de la géodésique(2.5) s'écrit alors trés simplement sous la forme suivante :

$$\frac{DU^{\mu}}{D\tau} = 0, \tag{2.12}$$

où U^{μ} est le vecteur vitesse $\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$. Cette équation ainsi écrite rappelle fortement l'équation du mouvement en mécanique Newtoniènne(2.1). La notion de dérivée covariante est donc bien appropriée aux calculs en Relativité Générale et remplace bien la dérivée habituelle dans ce cadre.

2.1.3 Tenseur de courbure

On a aussi un tenseur, appelé le tenseur de Riemann, et qui est évidemment un objet central de la relativité générale, défini par :

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}. \tag{2.13}$$

A partir du tenseur de Riemann, nous pouvons définir un nouveau tenseur de second ordre $R_{\mu\nu}$ par contraction sur deux indices qui appelé le tenseur de Ricci

$$R_{\nu\beta} = R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\nu\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

qui en fonction des symbôles de Christofell s'écrit

$$R_{\nu\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}. \tag{2.15}$$

Si nous contractons le tenseur de Ricci, nous obtenons la quantité

$$R = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \tag{2.16}$$

qui est un invariant, qu'on appelle le scalaire de Ricci ou courbure scalaire de l'espace-temps.

2.1.4 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ décrit le contenu en énergie de l'espace-temps[13]. En fait, il décrit en termes covariants l'énergie est l'impultion associés à la matière ou à toute autre forme de champs non gravitationnel, comme le champs électromagnétique.

Pour un fluide parfait en l'absence de gravitation, ce tensuer s'écrit sous la forme :

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho) U^{\mu} U^{\nu} \tag{2.17}$$

où p et ρ sont respectivement la pression et la densité d'énergie du fluide (mesurables par un observateur local dans le référentiel du fluide), et U^{μ} est la valeur locale du quadri-vecteur vitesse$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$.

Pour un fluide statique, la normalisation de la quadri-vitesse est donne par :

$$g_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = -1 \Rightarrow U^{0} = \left(-g^{00}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad U^{i} = 0 \text{ pour } \quad i = 1, 2, 3. \quad \text{donc} \quad U^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \tag{2.18}$$

Le tenseur énergie-impulsion prend alors la forme simple

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pg^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pg^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pg^{33} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

2.1.5 Equations d'Einstein

Les équations d'Einstein relient la géométrie de l'espace-temps à l'énergie et à la matière [14], [15]. La présence de matière ou d'énergie induisent une modification de la géométrie de l'espace-temps. Donc les équations qui relient les éléments géométriques de la métrique au contenu en matière sont celles d'Einstein, ou ce qu'on appelle les équations du champs de gravitation.

En relativité générale l'action est dévisée en deux parties, l'une décrit la gravitation et l'autre décrit la matière, et nous allons utiliser le principe variationnel pour déduire les équations du champs d'Einstein. Donc on écrit :

$$\delta S = \delta \left(S_G + S_M \right) = 0 \tag{2.20}$$

où S_G est l'action intégrale pour la gravitation pure et S_M est l'action associée à la matière.

On peut écrire

$$S_G = \frac{1}{2\sigma} \int \mathcal{L}_G \sqrt{-g} d^4 x \tag{2.21}$$

où σ est une constante $\left(\sigma = \frac{8\pi G}{C^4} \text{ avec } c = 1\right)$ et g le déterminant du tenseur métrique on postule que :

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G \left(g_{\mu\nu} \right) \tag{2.22}$$

$\mathcal{L}$doit être un scalaire pour que l'integrale sur $\mathcal{L}$soit un invariant sous les transformation de Lorentz. La forme la plus générale simple de $\mathcal{L}$est :

$$\mathcal{L}_G \ltimes R$$

Alors

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_G \left(g_{\mu\nu} \right) = \left(R - 2\Lambda \right). \tag{2.23}$$

où R est le scalaire de Ricci (le choix le plus simple pour un scalaire) et Λ une constante qu'on l'appelle la constante cosmologique.

Donc :

$$S_G = \frac{1}{2\sigma} \int \left(R - 2\Lambda \right) \sqrt{-g} d^4 x \tag{2.24}$$

Nous allons varier l'action à l'interieur d'une région infinitésimale, laissant la variation de la métrique et de ses dérivés nulle sur la frontière de cette région. Ensuite, nous calculons la variation des intégrales d'action et en déduire les équation du champs d'Einstein en imposant $\delta S_G = 0$ pour des variations arbitraires de la métrique .

On a :

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

nous ecrivons alors

$$S_G = \frac{1}{2\sigma} \int \left(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 2\Lambda \right) \sqrt{-g} d^4x. \tag{2.26}$$

Ce qui conduit à la variation suivante

$$\begin{aligned}
\delta S_G &= \frac{1}{2\sigma} \int \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta \left[g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \right] - 2\Lambda \delta \sqrt{-g} \right) d^4x, \\
&= \frac{1}{2\sigma} \int \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} - 2\Lambda \delta \sqrt{-g} \right) d^4x
\end{aligned}$$

Aprés quelques étapes de calcul on obtient

$$\delta S_G = \frac{1}{2\sigma} \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{2.27}$$

Les $\delta g^{\mu\nu}$ sont arbitraires et par conséquent on déduit que :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 0. \tag{2.28}$$

Ces équations aux dérivées partielles sont les équations d'Einstein dans le vide avec une constante cosmologiqueΛ, maintenant S_M est l'action intégrale pour la matière et l'energie. Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$S_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x$$

où $\mathcal{L}$est la densité lagrangienne pour la matière et l'energie.

Alors sa variation donne

$$\delta S_M = \int \delta \left(\mathcal{L}_M \sqrt{-g} \right) d^4x \tag{2.29}$$

La variation de l'argument dans l'equation (2.29) est tel que :

$$\delta \left(\mathcal{L}_M \sqrt{-g} \right) = \frac{\partial \left(\mathcal{L}_M \sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \left(\mathcal{L}_M \sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda} \tag{2.30}$$

On introduit le vecteur

$$B^\lambda = \frac{\partial \left(\mathcal{L}_M \sqrt{-g} \right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu},$$

et on calcule sa dérivée

$$B^{\lambda}_{,\lambda} = \partial_{\lambda}\left(\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}\right)}\right)\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda},$$

$$\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda} = B^{\lambda}_{,\lambda} - \partial_{\lambda}\left(\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}\right)}\right)\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.31}$$

Si on remplace(2.31) dans(2.29) on obtient la dérivée totale

$$^{\lambda}_{,\lambda}d^4x = 0 = \int \frac{\partial B^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}d^4x = 0, \tag{2.32}$$

Il reste alors

$$\delta S_M = \int \left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right)_{,\lambda}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x, \tag{2.33}$$

Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ d'un système associe à la densité lagrangienne de matière est un tenseur symétrique de rang 2 défini par :

$$T_{\mu\nu} \ = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial\left(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right)_{,\lambda}\right], \tag{2.34}$$

Cela conduit à la variation

$$\delta S_M = -\frac{1}{2}_{\mu\nu}\ \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d^4x. \tag{2.35}$$

On remplace (2.27) (2.35)dans(2.20)

$$\delta S = \frac{1}{2\sigma}\int\sqrt{-g}\left\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} - \sigma T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0. \tag{2.36}$$

Ce qui finalement donne

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}\ . \tag{2.37}$$

où

$$T_{\mu\nu} \ = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \tag{2.38}$$

Ce sont les équations d'Eintein en présence de matière. Donc le principe variationnel reproduit les équations du champs gravitationnel de la théorie de la relativité générale. C'est l'outil fondamental pour trouver les équations du champ dans les théories de la gravité modifiée.

2.2 Equation fondamentales de la cosmologie relativiste

2.2.1 Inroduction

La cosmologie étudie les propriétes globales de l'univers et son histoire selon la théorie de la relativité générale. Le but de la cosmologie relativiste est de trouver une bonne description de l'espace-temps par sa métrique. Dans la structure de l'univers, on admet que les loi de la relativité générale d'Einstein liant la courbure de l'espace temps à la présence de la matière (contenu énérgitique), sont celles qui peuvent le mieux décrire la dynamique à grande échelle de notre univers.

2.2.2 Equations de Friedmann

Une conséquence mathématique du principe cosmologique est l'existence d'un système de coordonnées comobiles dans lequel la métrique à 4 dimensions de l'espace-temps homogène et isotrope qui décrit un univers en expansion prend la forme obtenue par Friedmann et Robertson-Walker (FRW) [11], qui est basée sur l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'univers, qui est approximativement vraie à grandes échelles.

La métrique FRW est donnée par

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d^2\theta + r^2 \sin^2\theta d^2\phi\right], \tag{2.39}$$

où t, r, θ, ϕ sont les coordonnées par rapport à l'observateur local, $a(t)$ est le facteur d'échelle qui décrit l'expansion de l'univers en fonction du temps. On peut le déterminer par les équations d'Einstein. Enfin, k est la courbure gaussienne de l'espace temps de FRW : si k est positif, l'univers est fermé, et si k est négatif il est ouvert. L'espace-temps est dit plat si $k = 0$. Les différentes observations suggèrent que k est presque nul, ce qui veut dire que l'univers possede des sections spatiales plates.

En coordonnée cartésiennes la métrique(2.39) devient :

$$dS^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\delta_{ij} + k\frac{x^i x^j}{1-kx^i x_i}\right] dx^i dx^j. \tag{2.40}$$

A partire de la relation (2.9)(les symboless de Christoffel), on déduit les symboles non nuls :

$$\begin{cases} \Gamma^t_{ij} = \dot{a}a\delta_{ij} \\ \Gamma^i_{tj} = \Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \end{cases} \tag{2.41}$$

Les composantes du tenseur de Ricci de l'équation (2.15) sont alors donnés par :

$$R_{tt} = 3\frac{\dot{a}}{a} \quad , R_{ti} = 0 \quad , R_{ij} = -\left(2\dot{a}^2 + \ddot{a}a + 2k\right)\delta_{ij}, \tag{2.42}$$

et à partir de (2.41)et(2.42) on trouve le scalaire de courbure :

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{2.43}$$

On introduit maintenant le paramètre de Hubble H :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.44}$$

avec

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \tag{2.45}$$

et l'equation (2.43) devient :

$$R = 6\left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{2.46}$$

Le tenseur énergie-impulsion sur la métrique FRW est donné par :

$$T_{tt} = \rho \quad , T_{ti} = 0 \quad , T_{ij} = pa^2\delta_{ij}, \tag{2.47}$$

En combinant les équations d'Einstein avec la métrique (FRW) de l'équation (2.39), on obtient les équations de Friedmann avec $\Lambda = 0$.

Dans l'equation d'Einstein (2.38) , on remplace les expressions (2.42) et (2.47) dans la composante $(0, 0)$, pour trouver la première équation de Friedmann :

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho. \tag{2.48}$$

Considérons maintenant la composante (i, j) de l'équation (2.38). On trouve la deuxième équation de Friedmann :

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \tag{2.49}$$

Les deux équations de Friedmann décrivent entièrement toute l'évolution de l'univers.

2.2.3 Paramètres cosmologiques

On peut définir quelques paramètres cosmologiques fondamentaux [14]. Parmi ces paramètres il y a :

2.2.3.1 Paramètre de densité

On définit la densité critique ρ_{cr} comme la densité qu'aurait un univers homogène et isotrope en expansion pour que sa courbure spatiale k soit nulle, alors

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2.50}$$

Ainsi, la première équation de Friedmann (2.48) devient

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho^0 - \frac{k}{a_0^2} \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_{cr}^0. \tag{2.51}$$

Ce qui permet de définir la densité critique actuelle ρ_{cr}^0 comme la valeur critique pour laquelle l'univers a des sections spatiale plates ($k = 0$) actuellement.

On peut définir les paramètres cosmologiques qui décrivent le contenu et la structure de l'univers qui sont respectivement la densité d'énergie de matière, de rayonnement et de l'énergie du vide comme suit :

$$\Omega_m = \frac{\rho_m^0}{\rho_{cr}^0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_m^0, \tag{2.52}$$

$$\Omega_r = \frac{\rho_x^0}{\rho_{cr}^0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_r^0, \tag{2.53}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_{cr}^0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_\Lambda^0. \tag{2.54}$$

Les indices 0 indiquent que les valeurs sont prises actuellement, et H_0 est appelé la constante de Hubble.

Si on veut résoudre les équations de Friedmann, il faut se donner une équation d'état pour le fluide cosmique. Pour cela nous postulons une équation d'état reliant la densité et la pression sous sa frome la plus simple :

$$p = \omega\rho. \tag{2.55}$$

avec ω est une constante, le paramètre de l'équation d'état, car l'univers primordial est suffisament homogène. Pour cela on trouve que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \tag{2.56}$$

où pour la matière ($\omega = 0$) on obtient $\rho \propto a^{-3}$, et pour la radiation$\left(\omega = \frac{1}{3}\right)$ on deduit que $\rho \propto a^{-4}$. Alors que pour la constante cosmologique $\omega = -1$.

Par conséquent, les équations précédentes donnent $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ pour un univers dominé par la radiation et $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ pour un univers dominé par la matière.

2.3 Le modèle ΛCDM ou modèle de concordance

2.3.1 Introduction

Aujourd'hui, les modèles de la cosmologie sont particulièrement performants pour décrire notre univers et son histoire. Cependant, le modèle standard de la cosmologie doit pour cela s'accommoder à environ 85% de la matière constitutive de l'univers est sombre ou invisible. De plus, selon le modèle standard de la cosmologie, l'univers contient 4% atomes, 22% de matière noire et 75% d'énergie noire. Ces composantes sont essentielles pour décrire la dynamique de notre univers et des galaxies, en particulier l'accélération de l'expansion de l'univers et l'abondance apparente de matière non-baryonique dans l'univers. En ce qui concerne l'énergie noire, l'interprétation la plus simple est donnée par le modèle de la constante cosmologique.

La constante cosmologique était initialement introduit par Einstein en 1917 pour atteidre un univers statique[16]. Aprés la découverte de l'exponsion par Hubble de l'univers en 1729, il a été abondonné par Einstein comme n'étant plus nécessaire.

Cependant, durant toutes ces années elle ne fut pas totalement oubliée. En effet, pour remédier au problème de la singularité primordiale dans la solution de Friedmann, Lemaître avait développé en 1927 un modèle d'un univers d'origine statique dans lequel le facteur d'échelle est constant. C'est seulement en 1968 que Yakov Borisovich Zel'dovich considéra l'importance de la constante cosmologique en faisant le lien avec l'énergie du vide. Alors la constante cosmologique naturellement se présente comme une densité d'énergie du vide. En outre, l'échelle d'énergie devrait être beaucoup plus grande que celle de la constante du Hubble $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}$, si elle est originaire de la densité d'énergie du vide. C'est le "le problème de la constante cosmologique" et était bien connu pour exister avant la découverte de l'exponsion accélérée de l'univers en 1998.

2.3.2 Introduction de Λ

Le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ doivent satisfaire les identites de Bianchi$\nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0$ et la loi de conservation $\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$. Du moment que la métrique $g^{\mu\nu}$ est constante par rapport aux dériveés covariante ($\nabla_{\nu}g^{\mu\nu} = 0$), il est possible d'ajouter un terme $\Lambda g^{\mu\nu}$ aux équations d'Einstein [17], alors les équations d'Einstein modifièes sont données par :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu.} \tag{2.57}$$

En prenant la trace de cette équation

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= 8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \ , \\ -R &= 8\pi G T - 4\Lambda. \end{aligned} \tag{2.58}$$

et en remplaçant (2.58) dans (2.57) on trouve

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} \ - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) .$$

Donc les équations de Friedmann (2.48) et (2.49) deviennent :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.59}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.60}$$

Ceci démontre clairement que la constante cosmologique contribue négativement au terme de pression et donc présente un effet répulsif. Maintenant, nous considérons un univers statique($a = 0$) en l'absence de Λ. On trouve

$$\rho = \frac{3k}{8\pi G a^2}. \tag{2.61}$$

Et

$$\rho = -3p. \tag{2.62}$$

Alors de (2.61)et(2.62) nous concluons que

$$\rho = -3p = \frac{3k}{8\pi G a^2}. \tag{2.63}$$

L'équation (2.63) montre que soit ρ ou p doit être négatif. Lorsque Einstein éssaya de construire un univers statique, il a estimé que la solution ci-dessus n'est pas physique car la pression négative peut être réalisée par des champs scalaires de l'équation (2.38).

En utilisant les équations (2.59) et (2.60) dans un univers statique dominé par la matière avec ($p = 0$), nous constatons que l'univers statique obtenu par Einstein correspond alors à (par soustraction de (2.59) et (2.60))

$$\rho_\Lambda = \frac{k}{4\pi G a^2} = \frac{\Lambda}{4\pi G}, \quad \text{avec } \Lambda = \frac{k}{a^2}, \tag{2.64}$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \tag{2.65}$$

Puisque $\rho\rangle 0$ nous exigeons que Λ soit positif. Ce qui signifie que l'univers statique est un univers fermé (spherique) ($k = +1$) avec un rayon $a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$. L'equation (2.64) montre que la densité d'énergie ρ est déterminée par Λ, ainsi venait de naître le lien entre la constante cosmologique et l'énergie de vide, ce qui va poser certains problèmes dont je parlerai par la suite. Pour l'instant concentrons-nous sur les solutions des équations en présence du terme Λ.

Ainsi si on définit le paramètre de décélération par :

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \tag{2.66}$$

de l'équation (2.60) on trouve

$$\begin{aligned} q &= \frac{8\pi G}{3H^2 2}\rho\,(1+3\omega) - \frac{\Lambda}{3H^2}, \\ &= \frac{\Omega_T}{2}\,(1+3\omega) - \Omega_\Lambda, \end{aligned} \tag{2.67}$$

où $\Omega_T = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho$ et $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$.

On voit que la présence uniquement de la matière conduit à un univers en expansion décélérée

$$q = \frac{\Omega_m}{2}\rangle 0. \tag{2.68}$$

Alors que la présence d'une constante cosmologique positive conduit à une accélération de expansion l'univers

$$q = -\Omega_\Lambda\langle 0. \tag{2.69}$$

Dans un univers composé de matière et d'énergie noire sous la forme d'une constante cosmologique, alors

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda. \tag{2.70}$$

On voit alors que la présence d'une constante cosmologique peut entraîner une accélération de l'univers.

Alors que cette énergie est constante implique que la constante cosmologique est équivalente à l'énergie du vide, où le calcul des fluctuations du vide donne un tenseur énergie-impulsion de l'énergie du vide sous une forme similaire que celle de la constante cosmologique.

2.3.3 Problème de la constante cosmologique

Nous avons vu le lien entre la constante cosmologique et l'énergie du vide. Si la constante cosmologique provient du vide, la densité d'énergie va alors souffrir d'un réglage fin. Observationellement, nous savons que Λ est de l'ordre de la valeur actuelle du paramètre de Hubble H_0, ç-à-dire aujourd'hui on a $\Omega_\Lambda \sim 1$ qui implique que :

$$\Lambda \approx H_0^2 = \left(2.13h \times 10^{-42} GeV\right)^2 . \tag{2.71}$$

La densité d'énergie correspondante est une constante d'amplitude $\rho_\Lambda = 10^{-47} \left(GeV\right)^4$. La constante cosmologique peut être interprétée comme la densité d'énergie du vide. A l'échelle de Planck la contribution à l'état de vide quantique de tous les champs de matière connus est $\rho_{vid} = 10^{74} \left(GeV\right)^4$, soit 121 ordres de grandeur plus grande. Par conséquent les conditions initiales nécessitent d'abaisser la valeur de ρ_Λ de plusieurs de grandeurs.

2.3.4 Les problèmes du modèle ΛCDM

Bien que le modèle ΛCDM correspond assez bien à toutes les données disponibles, il souffre de beaucoup de problèmes. En plus du problème majeure de la constante cosmologique, il y a d'autres problèmes.

2.3.4.1 Problème de coïncidence

Le modèle ΛCDM souffre également d'un grave problème de réglage fin appelé le problème de coïncidence. Alors la densité d'énergie associée à la constante cosmologique ρ_Λ qui est une constante dans le temps, alors que la densité de matière varie comme $\rho_m \propto a\left(t\right)^{-3}$. La température aujourd'hui d'un corps noir est $T_0 = 2.5 \times 10^{-4} eV$, et les échelles étant donnés par $T = \frac{T_0}{a(t)}$. On peut ainsi relier le rapport actuel de la matière à la densité d'énergie de la constante cosmologique à sa valeur à l'échelle de Planck avec

$T_{Planck} = 10^{19} GeV$:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_m\left(t_{Planck}\right)} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{m,0}}\left(\frac{T_{Planck}}{T_0}\right)^{-3} \simeq 10^{-95}. \tag{2.72}$$

Cette expression montre que les valeurs initiales des densités d'energie associeés à la matière noire et la constante cosmologique ne serait probablement pas fixée par des processus aléatoires. A l'époque de Planck, les conditions initiales sont fortement règlées sur 95 ordres de grandeur. Ce qui constitue un problème vu le jeune age de l'univers.

Le problème de coïncidence peut être exprimé avec les termes simples suivants : Si la variation temporelle de la matière noire et l'énergie noire sont trés différentes. Pourquoi leurs valeurs actuelles sont -elles si semblable ?

2.3.4.2 Problème de la platitude

Aujourd'hui, on mesure que notre espace-temps est plat. Regardons l'impact de ce constat sur l'évolution de la densité d'énergie totale au cours de l'histoire de l'univers avec la première équation de Friedmann :

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_{tot}}{3} - \frac{k}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\Omega_{tot}} - 1\right)\rho_{tot}a^2 = \frac{-3k}{8\pi G} = \rho_k^0 \approx 0. \tag{2.73}$$

Le nombre à droite de l'équation est constant dans le temps et mesuré aujourd'hui. Or dans le passé le terme $\rho_{tot}a^2$ était 10^{60} fois plus grand.

Par conséquent, pour compenser on doit avoir $\Omega_{tot} = 1$ dans le passé avec une précision d'environs de 10^{-60} , ce qui implique des condition initiales trés finement ajustées, donc non naturelles.

2.3.4.3 Problème de l'horizon

Le diamètre de l'univers observable est de

$$d\left(\infty\right) = \int_0^\infty \frac{cdz}{H\left(z\right)} = \frac{2c}{H_0} = 2 \times 13.8 \text{ milliards d'années-lumière} \tag{2.74}$$

dans un espace plat. Cela correspond à peu près au diamètre de la sphère d'émission du rayonnement fossille. Or sur cette sphère, chaque point de l'espace n'a vécu que 380000 ans, donc n'a pu interagir qu'avec d'autres points situés au maximum à 380000 années-lumière. Par conséquent, deux points d'émission du rayonnement de fond diffus cosmologique diamétralement opposés n'ont pu interagir, or ils ont la même température à 10^{-5} degrés près. A sa naissance, l'univers est-il né avec une température strictement égale en tout point de l'espace. Ceci est peu naturel, ou a a-t-il eu un mécanisme dans les tous premiers instants qui a permis d'homogénéiser cette température ?

Chapitre 3

L'interaction matière noire-énergie noire

3.1 Introduction

Aux grandes échelles, il existe de fortes évidances pour un univers plat et en accélération transitant d'un scénario dominé par la matière accumulée par effets purement attractifs (effets gravitationnels) à une composante d'énergie noire dispersée par la force répulsive et caractérisé par une pression négative[11]. Ce comportement a duré jusqu'à présent et probablement continuera dans le futur. Les causes et les détails de quand cette transition s'est produite, ne sont pas encore compris.

Nous introduisons une description efficace pour un fluide du secteur sombre en interaction dans un environnement spatialement plat, le modèle de Friedmann-Robertson-Walker et étudieront la stabilité des solutions en loi de puissance. Nous déterminerons l'équation source de la densité énergétique totale et la densitéé de chaque composante sombre . Pour cela nous étudierons les intéractions linéaires et non linéaires qui dépendent de la matière noire et la densités d'énergie noire et leurs premiers dérivés. Nous résolverons les équations d'évolution des composants sombres pour les deux interactions, et nous trouverons qu'une interaction linéaire qui donne le modèle ΛCDM et l'autre interaction non linéaire donne lieu au modèle du gaz de Chaplygin.

3.2 Evolution du secteur sombre

3.2.1 Description efficace en un fluide

La dynamique de l'univers est décrite par les équations d'Einstein qui sont en générale des équations non linéaires compliquiées :

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

Le tenseur énergie-impulsion $T^{\alpha\beta}$décrit le contenu en matière de l'espace-temps. Pour un fluide parfait en l'absence de gravitation, ce tenseur s'écrit sous la forme suivante :

$$T_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta} + (p+\rho) U_\alpha U_\beta. \tag{3.2}$$

où p et ρ sont respectivement la pression et la densité d'énergie du fluide (mesurables par un observateur local dans le référentiel du fluide), et U_α est la valeur locale du quadri-vecteur vitesse $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$.

Pour un fluide statique, la normalisation de la quadri-vitesse donne :

$$g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = -1 \Rightarrow U^0 = \left(-g^{00}\right)^{\frac{1}{2}}, U^i = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Le tenseur énergie-impulsion prend alors la forme suivant :

$$T_{\alpha\beta} = diag\left(-\rho, p, p, p\right). \tag{3.3}$$

La solution de l'équation (3.1) consiste à en trouver une metrique solution, comptenu de la réparation en matière supposée dans $T_{\alpha\beta}$. Supposer les principes d'omogénéité et d'isotropie pour ce tensur, impose que la métrique devra aussi respecter ces propiétés. Une solution de l'équation d'Einstein respectant ces condition est la métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FLRW), utilisant le jeu de coordonnées sphériques usuel (ct, r, θ, ϕ) :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)\, r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)\, r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

et la métrique en coordonnée cartésiennes s'écrit sous la forme suivante :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[d\vec{x}^2 + k. \frac{(\vec{x}.d\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2} \right]. \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{00} = -1 \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = a^2 \left(\delta_{ij} + k \frac{x^i x^j}{1 - k x^i x_i} \right) \end{cases}$$

où $a(t)$ est une fonction inconnue du temps appelée paramètre d'échelle, k une constante qui par un choix particulier d'unités pour r peut prendre les valeurs +1,0 et -1. Suivant les valeurs de k, on a trois espaces de dimension 3 possibles :

$$k = \begin{cases} +1 & \text{3-sphère} \\ 0 & \text{espace plat} \\ -1 & \text{3-hyperbolique} \end{cases}.$$

Pour un univers sphérique, le facteur d'échelle $a(t)$ est le rayon de courbure. Un univers sphérique dynamique correspond donc à un univers possédant un rayon de la courbure variable dans le temps, un espace plat ne possède pas d'échelle caractéristique, la valeur de $a(t)$ n'a donc pas de sens physique. La quantité ayant un sens physique pour un tel univers est le paramètre de Hubble H qui quantifie la vitesse de variation du facteur d'échelle, en utilisons la métrique FLRW pour calculer le symbole de christoffel à partir de sa définition :

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu} \right). \tag{3.6}$$

On prend $\lambda, \beta = 1$ et $\alpha = 0$ alors (3.6) devient :

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{1\mu} \left(g_{1\mu,0} + g_{0\mu,1} - g_{01,\mu} \right), \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,t} + g_{01,r} - 0 \right) \text{ car } \forall_\mu \neq 1, g^{1r} = 0, \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - kr^2}{a^2} \left(\frac{2\dot{a}a}{1 - kr^2} + 0 \right), \\ &= \frac{\dot{a}}{a} = H. \end{aligned} \tag{3.7}$$

où le point"$\cdot$" exprime une dérivée par rapport au temps t.

De la même manière, on obtient les autres symboles affines, puis les tenseurs de Riemann et Ricci. Au finale, le tenseur d'Einstein est diagonal et vaut :

$$G_{00} = -3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right),$$

$$G_{ij} = \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} g_{ij} \quad \text{pour } i = j \neq 0,$$

A partir de l'équation d'Einstein (3.1) et du tenseur énergie-impulsion (3.3), on obtient pour la coordonnée 00 et pour les coordonnées spatiales ij :

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta},$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 00 : 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G\rho \\ ij : \frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} = \; -8\pi G p, \end{cases} \tag{3.8}$$

ce sont les équations d'Einstein. On les appellera équations d'Einstein(00) et l'équation d'Einstein (ij) par la suite. Elles sont plus connues sous le nom d'équation de Friedmann lorsqu'elles sont exprimées en fonction du paramètre de Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$:

$$\begin{cases} 00 : H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \\ ij : 2\dot{H} + 3H^2 = \; -8\pi G p + \frac{k}{a^2}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Nous considérons un univers élargie modélisé par un mélange d'interaction entre la matière noire et l'énergie noire avec des densités énergétiques ρ_c,$\rho_x$et des pressions $p_c$et p_x respectivement[18].

La première équation de Friedmann relie explicitement du facteur d'échelle $a(t)$ au contenue énergétique de l'Univers. Alors pour un espace plat $k = 0$ et en posant $8\pi G = 1$, donc l'équation (3.9) devient :

$$3H^2 = \rho \tag{3.10}$$

où

$$\rho = \rho_c + \rho_x. \tag{3.11}$$

En soustrayant les deux équations de Friedmann et en combinant le résultat avec la dérivée temporelle de la première, on peut obtenir l'équation de conservation de l'énergie que l'on obtiendrait aussi directement en calculant $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ dans la métrique de FLRW.

A partir de l'équation du tenseur énergie-impulsion (3.2) on a :

$$T^{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} 00: \quad T^{00} = \rho, \\ 0i: \quad T^{0i} = 0, \\ ij: \quad T^{ij} = pa^{-2}\tilde{g}^{ij} \text{ pour } k = 0 \Rightarrow \tilde{g}^{ij} = \delta^{ij}, \\ T^{ij} = pa^{-2}\delta^{ij}, \end{cases} \tag{3.12}$$

On a

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \tag{3.13}$$

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = T^{0\beta}_{,\beta} + \Gamma^{0}_{\beta\lambda}T^{\beta\lambda} + \Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}T^{0\lambda}, \tag{3.14}$$

$$= T^{00}_{,0} + \Gamma^{0}_{ij}T^{ij} + \Gamma^{i}_{0i}T^{00}, \tag{3.15}$$

Les symbôles de Christoffel sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}\right) = 0, \\
\Gamma^{0}_{0i} &= \Gamma^{i}_{00} = 0, \\
\Gamma^{0}_{ij} &= \frac{1}{2}g^{00}\left(g_{i0,j} + g_{j0,i} - g_{ij,0}\right), \\
&= \frac{-1}{2}2a\dot{a}\tilde{g}_{ij}. \\
\Gamma^{i}_{0j} &= \frac{1}{2}g^{ii}g_{ij,0}, \\
&= \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}. \\
\Gamma^{i}_{0j} &= k\tilde{g}_{ij}x^{i}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On remplace (3.16) dans (3.15) :

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + a\dot{a}\delta_{ij}a^{-2}p\delta^{ij} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho,$$

$$= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(p + \rho\right). \tag{3.17}$$

L'équation de conservation $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ conduit à :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(p + \rho\right) = 0. \tag{3.18}$$

Alors on déduit que :

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho} + 3H\left(p+\rho\right) = 0, \\
\dot{\rho}_c + \dot{\rho}_x + 3H\left(p_c + p_x + \rho_c + \rho_x\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Pour les deux composantes noires, nous assumons l'équation d'état ω telle que :

$$
\omega = \frac{p}{\rho}. \tag{3.20}
$$

- La matière non relativiste n'exerce pas de pression sur son milieu extérieur d'où $p_{nr} = 0$ donc $\omega_{nr} = 0$.

- La matière relativiste exerce quand à elle une pression sur son milieu de valaur $p_r = \frac{\rho_r}{3}$d'où $\omega_r = \frac{1}{3}$.

- pour la constante cosmologique $\omega_r = -1$.

Dans notre cas, on prend pour la matière noire -l'énergie noire les notations suivantes :

$$
\begin{cases}
\omega_c = (\gamma_c - 1) \;\Rightarrow\; p_c = (\gamma_c - 1)\;\rho_c, \\
\omega_x = (\gamma_x - 1) \Rightarrow\; p_x = (\gamma_x - 1)\;\rho_x,
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

avec γ_c et γ_x les indices barotropiques de la matière noire-énergie noire, respectivement, et se sont des constantes. Par la soustraction des deux équations (3.9) l on trouve :

$$
3\left(H^2 + \dot{H}\right) = -4\pi G\left(\rho + 3p\right), \tag{3.22}
$$

avec

$$
H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{3.23}
$$

$$
\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2,
$$

$$
\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2, \tag{3.24}
$$

l'équation (3.65) devient :

$$
3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -4\pi G\left(\rho + 3p\right). \tag{3.25}
$$

On extrait de cette équation la condition pour avoir une phase d'expansion accélérée dominée par l'énergie noire ($\rho_c \lesssim 0$), c'est à dire que

$$\begin{aligned}
&\rho_x + 3p_x \langle 0, \\
&\rho_x \left(3\gamma_x - 2\right) \langle 0 \text{ on sait que } \rho_x \rangle 0 \text{ donc} \left(3\gamma_x - 2\right) \langle 0, \\
&\gamma_x \langle \frac{2}{3} \langle \gamma_c. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

On dérive l'équation de la densité d'énergie totale ρ par rapport à la variable η :

$$\prime = \frac{d}{d\eta} = \frac{d}{3Hdt} = \frac{d}{d\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3}. \qquad (3.27)$$

avec a_0 est une valeur de référence pour le facteur d'échelle.

A partir de l'équation de conservation d'énergie(3.19) et l'équation(3.21) :

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_c + \dot{\rho}_x &= 3H\left(-\gamma_c\rho_c - \gamma_x\rho_x\right), \\
\rho'_c + \rho'_x &= \left(-\gamma_c\rho_c - \gamma_x\rho_x\right), \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\rho' = -\gamma_c\rho_c - \gamma_x\rho_x. \qquad (3.29)$$

On résoud le système d'équation (3.11) et (3.29) pour obtenir ρ_x et ρ_c en fonction de ρ et sa dérivée ρ' :

Multiplions (3.11) par γ_x puis par γ_c :

$$\gamma_x\rho = \gamma_x\rho_c + \gamma_x\rho_x, \qquad (3.30)$$

$$\gamma_c\rho = \gamma_c\rho_c + \gamma_c\rho_x, \qquad (3.31)$$

Par sommation (3.30) et (3.29) on trouve :

$$\rho_c = -\frac{\gamma_x\rho + \rho'}{\Delta}. \qquad (3.32)$$

$$\rho_x = \frac{\gamma_c\rho + \rho'}{\Delta}. \qquad (3.33)$$

avec $\Delta = (\gamma_c - \gamma_x)\rangle 0$.

A partir de l'équation de conservation de l'impulsion-énergie $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, nous introduisons un transfert d'énergie entre les deux fluides par un terme d'interaction Q . A ce moment, en séparant les deux fluides.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{DM} = -Q^\nu, \tag{3.34}$$
$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{DE} = Q^\nu, \tag{3.35}$$

on trouve :

$$\rho_c' + \gamma_c \rho_c = -Q. \tag{3.36}$$
$$\rho_x' + \gamma_x \rho_x = Q. \tag{3.37}$$

Par différenciation de l'une de l'équations(3.33) et en combinant avec l'equation (3.37) nous obtenons une équation différentielle de $2^{\text{ème}}$ordre pour la densité d'énergie que nous appelons "l'équation source" :

$$\rho^{''} + (\gamma_c + \gamma_x)\,\rho' + \gamma_x\gamma_c\rho = \Delta Q. \tag{3.38}$$

Le modèle de deux fluides intéragissant a été reduit à modèle effectif avec un seul fluide ayant une densité d'énérgie totale ρ et une pression totale p :

$$p = p_c + p_x. \tag{3.39}$$

On remplace (3.21) dans l'équation de la pression totale :

$$p\,(\rho, \rho') = -\rho - \rho', \tag{3.40}$$

cela nous permet d'utiliser une discription effective à l'aide d'une équation d'état

$$\begin{cases} p = (\gamma - 1)\,\rho \\ p = -\rho - \rho' \end{cases} \Rightarrow \text{par une sommation} \quad \rho' + \gamma\rho = 0 \tag{3.41}$$

On remplace (3.29) dans (3.41) pour déduire l'indice barotropique effectif γ :

$$\gamma = \frac{\gamma_c\rho_c + \gamma_x\rho_x}{\rho} \quad , \quad \text{avec} \quad \gamma_x \langle \gamma \langle \gamma_c \tag{3.42}$$

La densité d'énergie totale ρ est déterminée en résolvant l'équation source (3.38) sans interaction c-à-d $Q = 0$:

$$\rho^{''} + (\gamma_c + \gamma_x)\,\rho' + \gamma_x\gamma_c\rho = 0, \tag{3.43}$$

Pour résoudre cette équation, on pose

$$\rho = e^{r\eta} \ , \tag{3.44}$$

on remplace (3.44) dans (3.43) :

$$r^2 + (\gamma_c + \gamma_x)\, r + \gamma_x \gamma_c = 0 \ \ , \ \Rightarrow r_1 = -\gamma_c et r_2 = -\gamma_x$$

alors :

$$\rho = ca^{-3\gamma_c} + ba^{-3\gamma_x}.$$

Pour toute valeur des constantes c et b , et $\gamma_c \approx 1$ alors $\rho \to ba^{-3\gamma_x}$, donc le facteur d'échelle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\rho \sim ba^{-3\gamma_x} \Rightarrow H \sim \rho^{\frac{1}{2}} \sim a^{-\frac{3}{2}\gamma_x} \\
&\frac{\dot{a}}{a} \sim a^{-\frac{3}{2}\gamma_x} \Rightarrow a^{-\left(\frac{-3}{2}\gamma_x + 1\right)} da \sim dt \\
&a \sim t^{\frac{2}{3\gamma_x}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Et la solution suit la loi en puissance $t^{\frac{2}{3\gamma_x}}$ qui est un attracteur.

3.2.2 La stabilité asymptotique

Le modèle des deux fluides en interaction est trés utile car, ses solutions-attracteurs déterminent le comportement asymptotique de l'indice barotropique effective γ. A partir de (3.42) et (3.41) on a :

$$\begin{aligned}
&\gamma = \frac{-\rho'}{\rho} \quad , \text{et comme} \left\{ \begin{array}{c} 3H^2 = \rho \\ \rho' = \frac{d}{d\eta}\rho = \frac{d}{3Hdt} 3H^2 = 2\dot{H} \end{array} \right. , \\
&\gamma = \frac{-2\dot{H}}{3H^2} = \gamma_s.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

L'existence d'une solution attracteur γ_s, (γ tend à la valeur constante asymptotique γ_s), permet de déduire

$$\gamma_s = \gamma = \frac{\gamma_c \rho_c + \gamma_x \rho_x}{\rho} \Rightarrow \gamma_s = \frac{\gamma_c \rho_{cs} + \gamma_x \rho_{xs}}{\rho_{cs} + \rho_{xs}}, \tag{3.47}$$

$$\gamma_s = \frac{\gamma_c r_s + \gamma_x}{r_s + 1} \ . \text{ avec } \ r_s = \frac{\rho_{cs}}{\rho_{xs}}. \tag{3.48}$$

Nous concluons que le rapport $r = \frac{\rho_c}{\rho_x}$ devient asymptotiquement constant $r_s = \frac{\rho_{cs}}{\rho_{xs}}$. Dans le cas de $\gamma_s = 0$ on a

$$H = cte \ \text{ et } r_s = -\frac{\gamma_x}{\gamma_c}.$$

Pour étudier la stabilité de la solution asymptotique, nous utilisons l'équation(3.41) et sa $2^{ème}$ dérivée :

$$\begin{cases} \rho' = -\gamma\rho, \\ \rho" = \left(\gamma^2 - \gamma'\right)\rho, \end{cases} \tag{3.49}$$

On remplace dans (3.38) :

$$\gamma' - (\gamma - \gamma_x)(\gamma - \gamma_c) = -\frac{\Delta Q}{\rho}. \tag{3.50}$$

En supposant qu'une solution attracteur existe, $\gamma = \gamma_s$ dans (3.50), nous imposerons la condition de stabilité pour que les γ_s soient stables, lorsque

$$\gamma = \gamma_s = cte \Rightarrow \gamma' = \gamma_s' = 0.$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= (\gamma_s - \gamma_x)(\gamma_s - \gamma_c)\rho, \\ Q(\gamma_s) &= \Delta^{-1}(\gamma_s - \gamma_x)(\gamma_s - \gamma_c)\rho \quad . \text{ avec } \ Q(\gamma_s) < 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

$Q(\gamma_s) < 0$ indique que le transfert d'énergie se fait de l'énergie noire à la matière noire .

L'analyse de stabilité peut aussi se faire quand l'interaction Q devient une fonction de plusieures variables $Q = Q(\rho_c, \rho_x, \rho_c', \rho_x', \rho, \rho', \rho")$. Pour simplifier les calculs nous adoptons l'exemple suivant $Q = Q(\gamma, \gamma', \rho)$ et on suppose que Q est séparable :

$$Q(\gamma, \gamma', \rho) = \Delta^{-1}(\gamma - \gamma_x)(\gamma - \gamma_c)F(\gamma, \gamma')\rho \quad . \tag{3.52}$$

$$\text{avec} \quad F(\gamma, \gamma') = \left(\frac{\gamma'}{(\gamma - \gamma_x)(\gamma - \gamma_c)} - 1\right).$$

où F est une fonction qui depent de γ et γ', voir par exemple [19], [20]. D'autre types d'interactions ont été explorés dans la référence [21].

En combinant les équations (3.50) et (3.52) nous trouvons l'équation d'évolution de l'indice barotropique effective γ :

$$\gamma' = -(\gamma - \gamma_x)(\gamma - \gamma_c)\left[F(\gamma, \gamma') - 1\right]. \tag{3.53}$$

Supposons que la fonction F remplit la condition

$$F\left(\gamma=\gamma_s=cte,\gamma'=0\right)=1, \tag{3.54}$$

on dérive l'équation (3.53) par rapport a $\partial\gamma$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma} &= \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[-\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)\left(F\left(\gamma,\gamma'\right)-1\right)\right], \\ &= -\left\{\frac{\partial\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)}{\partial\gamma}\left(F\left(\gamma,\gamma'\right)-1\right)+\frac{\partial\left(F\left(\gamma,\gamma'\right)-1\right)}{\partial\gamma}\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)\right\},\end{aligned} \tag{3.55}$$

avec

$$\partial_\gamma F=\frac{\partial F}{\partial\gamma'}\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma}+\frac{\partial F}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma} \quad \text{et } F_{\gamma'}=\frac{\partial F}{\partial\gamma'}\ , \quad F_\gamma=\ \frac{\partial F}{\partial\gamma},$$

Donc

$$\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma}\right)_{(\gamma_s,0)}=-\left[F_{\gamma'}\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma}\right)_{(\gamma_s,0)}\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)+F_\gamma\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)\right]\ ,$$

On a

$$\left[\ \frac{\partial\left(\gamma-\gamma_x\right)\left(\gamma-\gamma_c\right)}{\partial\gamma}\left(F\left(\gamma,\gamma'\right)-1\right)\right]\quad=0,\quad \text{de l'equation (3.54)}$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial\gamma}\right)_{(\gamma_s,0)}=-\frac{\left(\gamma_s-\gamma_x\right)\left(\gamma_s-\gamma_c\right)F_\gamma\left(\gamma_s,0\right)}{1+\left(\gamma_s-\gamma_x\right)\left(\gamma_s-\gamma_c\right)F_{\gamma'}\left(\gamma_s,0\right)}<0. \tag{3.56}$$

Donc, γ_s est une solution stable ou un attracteur. En d'autres termes lorsque la condition (3.54) est satisfaite, γ_s devient une constante et (3.53) est stable chaque fois que la condition (3.56)est remplie.

3.3 Interaction linéaire

Nous allons proceder à l'étude du cas de l'interaction linéaire Q_L. La forme proposée est la suivante :

$$Q_L=c_1\rho_c+c_2\rho_x+c_3\rho_c'+c_4\rho_x'+c_5\rho+c_6\rho'+c_6\rho\text{''}. \tag{3.57}$$

de manière à vérifier les conditions (3.56) et (3.54) l'interaction Q_L est également motivée par le fait que l'équation (3.38) devient de second ordre. Nous allons donc analyser en détail cette interaction Q_L. Les cas particuliers $Q_L=c_1\rho_c+c_2\rho_x$ ont déja été étudier dans les références [22], [20], avec $Q_L=c_5\rho$ dans les références [23], [24], $Q_L=c_1\rho_c$ dans [25] et

$Q_L = c_2\rho_x$ dans [19], [26].

En utilisant les équations (3.32) et (3.33) dans l'Eq.(3.57), pour écrire Q_L sous forme d'une combinaison linéaire de ρ ,ρ' et ρ". Avant ça on dérive les deux équations (3.32) et (3.33) :

$$\begin{cases} \rho_c' = -\Delta^{-1}\left(\gamma_x\rho' + \rho"\right) \\ \rho_x' = \Delta^{-1}\left(\gamma_c\rho' + \rho"\right) \end{cases} . \tag{3.58}$$

et on remplace (3.58) dans (3.57)

$$Q_L = b_1\rho + b_2\rho' + b_3\rho". \tag{3.59}$$

$$\text{avec} \qquad \left.\begin{aligned} b_1 &= \Delta^{-1}\left(-c_1\gamma_x + c_2\gamma_c + \Delta c_5\right), \\ b_2 &= \Delta^{-1}\left(-c_1 + c_2 - \gamma_x c_3 + c_4\gamma_c + \Delta c_6\right), \\ b_3 &= \Delta^{-1}\left(-c_3 + c_4 + \Delta c_7\right). \end{aligned}\right\} \text{ce sont des coefficient} \tag{3.60}$$

puis on remplace (3.49) dans (3.59)

$$Q_L\left(\gamma, \gamma', \rho\right) = \left[b_1 - \gamma b_2 + b_3\left(\gamma^2 - \gamma'\right)\right]\rho, \tag{3.61}$$

En équilibre l'équation (3.52) avec (3.61)

$$F\left(\gamma, \gamma'\right) = \frac{\Delta}{\left(\gamma - \gamma_x\right)\left(\gamma - \gamma_c\right)}\left[b_1 - \gamma b_2 + b_3\left(\gamma^2 - \gamma'\right)\right], \tag{3.62}$$

d'après (3.54)

$$1 = \frac{\Delta}{\left(\gamma_s - \gamma_x\right)\left(\gamma_s - \gamma_c\right)}\left[b_1 - \gamma_s b_2 + b_3\gamma_s^2\right], \tag{3.63}$$

Cette equation nous permet d'éxtraire b_2 en fonction des paramètres physiques

$$b_2 = \gamma_s^{-1}\left[b_1 + b_3\gamma_s^2 - \Delta^{-1}\left(\gamma_s - \gamma_x\right)\left(\gamma_s - \gamma_c\right)\right],$$

En remplace b_2 dans (3.59) , on obtient la formule finale de Q_L :

$$Q_L = b_1\rho + \gamma_s^{-1}\left[b_1 + b_3\gamma_s^2 - \Delta^{-1}\left(\gamma_s - \gamma_x\right)\left(\gamma_s - \gamma_c\right)\right]\rho' + b_3\rho", \tag{3.64}$$

En insérant Q_L dans (3.50) on obtient :

$$d_1\gamma' + d_2\gamma^2 + d_3\gamma + d_4 = 0. \tag{3.65}$$

$$\text{avec} \begin{cases} d_1 = (1 - \Delta b_3) \\ d_2 = -(1 + \Delta b_3) \\ d_3 = \left[\gamma_x + \gamma_c + \gamma_s^{-1}(\gamma_s - \gamma_c)(\gamma_s - \gamma_x) - \Delta\gamma_s^{-1} b_1\right] \\ d_4 = \left(-\gamma_x\gamma_c + \Delta b_1 - \Delta\gamma_s^{-1} - b_3\gamma_s^2\right) \end{cases}$$

On résoud l'équation (3.65), qui donne deux solutions constantes :

$$\gamma^- = \gamma_s, \quad \gamma^+ = \frac{\gamma_x\gamma_c - b_1\Delta}{\gamma_s(1 - b_3\Delta)} \tag{3.66}$$

La solution constante γ_s est asymptotiquement stable à condition que $\gamma_s < \gamma^+$, avec $\gamma_x < \gamma_s < \gamma^+ < \gamma_c$. Alors la solution ρ_L de l'équation source (3.43) pour Q_L est :

$$\begin{aligned} \rho_L &= c e^{\left(-\gamma^- \eta\right)} + b e^{\left(-\gamma^+ \eta\right)}, \\ &= c a^{-3\gamma_s} + b a^{-3\gamma^+}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

A partir de (3.67) et sa dérivé

$$\rho_L' = -\gamma_s c a^{-3\gamma_s} - \gamma^+ b a^{-3\gamma^+} \tag{3.68}$$

on obtient l'équation d'état effective p_L (3.39)

$$\begin{aligned} p_L &= -\rho_L - \left(-\gamma_s c a^{-3\gamma_s} - \gamma^+ b a^{-3\ \gamma^+}\right), \\ &= (\gamma_s - 1)\rho_L + \left(\gamma^+ - \gamma_s\right) b a^{-3\gamma^+}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Des équations (3.32) et (3.33) avec $\rho \to \rho_L$ on obtient :

$$\left\{ \rho_c = \frac{(\gamma_s - \gamma_x) c a^{-3\gamma_s} + \left(\gamma^+ - \gamma_x\right) b a^{-3\ \gamma^+}}{\Delta}. \right. \tag{3.70}$$

$$\left\{ \rho_x = \frac{(\gamma_c - \gamma_s) c a^{-3\gamma_s} + \left(\gamma_c - \gamma^+\right) b a^{-3\ \gamma^+}}{\Delta}. \right. \tag{3.71}$$

Le couplage entre les deux composantes sombres modifie les caractéristique de ρ_c et ρ_x. En fait l'univers commence par un mélange de matière noire-énergie noire représentée approximativement par ρ_c et ρ_x en fonction de γ^+, aprés cela l'instabilité de la solution constante γ^+ incite l'univers à évoluer à partir de cette ère instable caractérisée par $r_+ = \frac{\gamma^+ - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma^+}$ à l'aire stable finale où les densités d'énergies dominées par l'instabilité de la solution constante γ_s avec un rapport asymptotique stable $r_s = \frac{\gamma_s - \gamma_x}{\gamma_c - \gamma_s}$.

3.3.1 Exemple d'interaction linéaire

Nous étudierons des exemples où les composantes sombres interagissant avec les autres en considerant séparement les termes ρ_c, ρ_x, ρ, ρ'de Q_L et passer en revue certains des modèles étudiés avec des couplages particuliers. Alors nous écrivons les 4- fonctions de $F(\gamma)$ de sorte que la condition (3.54) soit satisfaite.

3.3.1.1 Cas1 : $c_1 \neq 0$:

$$Q = c_1 \rho_c, \qquad \text{avec} \qquad c_1 = (\gamma_s - \gamma_c), \qquad \text{et} \;\; F = \frac{(\gamma_s - \gamma_c)}{(\gamma - \gamma_c)}, \tag{3.72}$$

On remplace Q dans l'equations (3.36) et (3.37) et on trouve :

$$\rho_c = c a^{-3\gamma_s}. \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} \rho_x &= c \frac{(\gamma_s - \gamma_c)}{(\gamma_s - \gamma_x)} \left(a^{-3\gamma_x} - a^{-3\gamma_s} \right) + b a^{-3\gamma_x}, \\ &= C \left(a^{-3\gamma_x} - a^{-3\gamma_s} \right) + b a^{-3\gamma_x}. \text{ avec } C = c \frac{(\gamma_s - \gamma_c)}{(\gamma_s - \gamma_x)}. \end{aligned}$$

On calcule maintenant la somme de $\rho = \rho_c + \rho_x$. Alors :

$$\rho = (c - C) a^{-3\gamma_s} + (C + b) a^{-3\gamma_x}.$$

Ensuite, on calcule le facteur d'échelle a a partir de l'équation (3.10)

$$\frac{da}{adt} = \sqrt{\frac{(C+b)}{3}} a^{-\frac{3}{2}\gamma_x} \left(\omega^2 a^{-3(\gamma_s - \gamma_x)} + 1 \right)^{1/2},$$

avec

$$\omega^2 = \frac{(c - C)}{(C + b)} = cte, \tag{3.74}$$

on pose

$$\sinh(\tau) = \omega a^{-\frac{3}{2}(\gamma_s - \gamma_x)}, \tag{3.75}$$

$$a_L = \left[\omega^{-1} \sinh \tau \right]^{\frac{2}{3(\gamma_x - \gamma_s)}}. \tag{3.76}$$

l'équation (**??**) devient :

$$\frac{da}{adt} = \sqrt{\frac{(C+b)}{3}} a^{-\frac{3}{2}\ \gamma_x} \cosh \tau, \tag{3.77}$$

on dérive l'équation (3.75) :

$$\begin{aligned} \cosh \tau d\tau &= \frac{3}{2} \left(\gamma_x - \gamma_s\right) \omega a^{-1} a^{-\frac{3}{2}(\gamma_s - \gamma_x)} da, \\ da &= \frac{2}{3} \frac{\cosh \tau d\tau a a^{\frac{3}{2}(\gamma_s - \gamma_x)}}{\omega \left(\gamma_x - \gamma_s\right)}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

on remplace da dans l'équation (3.77) pour obtenir

$$t = \frac{2}{\sqrt{3\left(C+b\right)}\left(\gamma_x - \gamma_s\right)\omega} \int \left[\omega^{-1} \sinh \tau\right]^{\frac{\gamma_s}{(\gamma_x - \gamma_s)}} d\tau.$$

Pour trouver la fonction de Hubble H on calcule d'abord $\dot{a}$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \tag{3.79}$$

avec

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{\sqrt{3\left(C+b\right)}\left(\gamma_x - \gamma_s\right)\omega} \left[\omega^{-1} \sinh \tau\right]^{\frac{\gamma_s}{(\gamma_x - \gamma_s)}}, \tag{3.80}$$

alors

$$\dot{a} = \frac{\sqrt{3\left(C+b\right)}}{3} \omega \left(\coth \tau\right) \left[\omega^{-1} \sinh \tau\right]^{\frac{2-3\gamma_s}{3(\gamma_x - \gamma_s)}}, \tag{3.81}$$

on remplace (3.81) dans l'équation (3.23) on trouve

$$H = \frac{\sqrt{3\left(C+b\right)}}{3} \omega \left(\coth \tau\right) \left[\omega^{-1} \sinh \tau\right]^{\frac{-\gamma_s}{(\gamma_x - \gamma_s)}}. \tag{3.82}$$

on pose maintenent $a = a_0 = 1$ (lorsque $t = t_0$)

$$\begin{aligned} \rho_0 &= (c - C) + (C + b), \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned} \tag{3.83}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = (c - C) \\ \beta = (C + b) \\ \omega^2 = \frac{\alpha}{\beta} \end{array} \right. \tag{3.84}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\beta = \frac{\rho_0}{(1+\omega^2)}, \tag{3.85}$$

$$\alpha = \rho_0 \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)}, \tag{3.86}$$

et

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \rho_0. \\ \alpha - \beta = -3H_0^2. \end{cases} \tag{3.87}$$

alors

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\rho_0 + 3H_0^2}{2}. \\ \beta = -\frac{\rho_0 - 3H_0^2}{2}. \end{cases} \tag{3.88}$$

Ce qui donne :

$$\rho = \left(\frac{\rho_0 + 3H_0^2}{2}\right) a^{-3\gamma_s} + \left(\frac{\rho_0 - 3H_0^2}{2}\right) a^{-3\gamma_x}. \tag{3.89}$$

et

$$H = \frac{\sqrt{\rho_0 - 3H_0^2}}{\sqrt{6}} \left(\frac{\rho_0 + 3H_0^2}{\rho_0 - 3H_0^2}\right) \coth\tau \left[\left(\frac{\rho_0 - 3H_0^2}{\rho_0 + 3H_0^2}\right) \sinh\tau\right]^{\frac{-\gamma_s}{(\gamma_x - \gamma_s)}}. \tag{3.90}$$

3.3.1.2 Cas 2 : $c_2 \neq 0$:

D'aprés (3.57) on pose

$$Q = c_2 \rho_x, \qquad \text{avec} \qquad c_2 = -(\gamma_s - \gamma_x), \qquad \text{et} \quad F = \frac{(\gamma_s - \gamma_x)}{(\gamma - \gamma_x)}, \tag{3.91}$$

avec$Q < 0$. Cette interaction a été examinée dans plusieurs papiers [19], [26]. On remplace Q dans les équations (3.36)et(3.37) :

$$\rho_x = b a^{-3\gamma_s}. \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned} \rho_c &= b \frac{(\gamma_s - \gamma_x)}{(\gamma_s - \gamma_c)} \left(a^{-3\gamma_c} - a^{-3\gamma_s}\right) + c a^{-3\gamma_c}, \\ &= B\left(a^{-3\gamma_c} - a^{-3\gamma_s}\right) + c a^{-3\gamma_c}. \text{ avec } B = b \frac{(\gamma_s - \gamma_x)}{(\gamma_s - \gamma_c)} \end{aligned} \tag{3.93}$$

Finalement la densité d'énergie totale est donnée par :

$$\begin{aligned}\rho &= ba^{-3\gamma_s} + B\left(a^{-3\gamma_c} - a^{-3\gamma_s}\right) + ca^{-3\gamma_c},\\ &= (b-B)\,a^{-3\gamma_s} + (B+c)\,a^{-3\gamma_c}\end{aligned} \tag{3.94}$$

3.3.1.3 Cas 3 : $c_5 \neq 0$:

$$Q = c_5\rho, \qquad \text{avec} \qquad c_5 = \frac{(\gamma_s-\gamma_x)(\gamma_s-\gamma_c)}{\Delta}, \qquad \text{et} \;\; F = \frac{(\gamma_s-\gamma_x)(\gamma_s-\gamma_c)}{(\gamma-\gamma_x)(\gamma-\gamma_c)}, \tag{3.95}$$

On remplace Q dans l'equations (3.36) et (3.37) :

$$\rho_c = \frac{1}{\Delta}\left[Ea^{-3\gamma_s} + Fa^{-3(\gamma_c+\gamma_x-\gamma_s)}\right],$$

$$\rho_x = \frac{1}{\Delta}\left[Ga^{-3\gamma_s} + Ha^{-3(\gamma_c+\gamma_x-\gamma_s)}\right],$$

avec E,F,G et H des constantes données par :

$$\begin{cases} E = \frac{b\gamma_c\gamma_s-(c+b)\gamma_s^2+\gamma_s\gamma_x(2c+b)-c\gamma_x^2}{(\gamma_x+\gamma_c-2\gamma_s)} \\ F = \frac{(c+b)\gamma_s^2+c\gamma_c^2+b\gamma_c\gamma_x-\gamma_s\gamma_c(2c+b)+b\gamma_x\gamma_c}{(\gamma_x+\gamma_c-2\gamma_s)} \\ G = \frac{b\gamma_c^2-\gamma_s^2(c+b)-c\gamma_s\gamma_x-\gamma_c\gamma_s(c+2b)+c\gamma_c\gamma_x}{(\gamma_x+\gamma_c-2\gamma_s)} \\ H = \frac{\gamma_x\gamma_s(c+2b)-\gamma_s^2(c+b)-b\gamma_x^2+c\gamma_s\gamma_c-c\gamma_x\gamma_c}{(\gamma_x+\gamma_c-2\gamma_s)} \end{cases} \tag{3.96}$$

On calcule maintenant la somme $\rho = \rho_c + \rho_x$:

$$\rho = \left(\frac{E+F}{\Delta}\right)a^{-3\gamma_s} + \left(\frac{F+H}{\Delta}\right)a^{-3(\gamma_c+\gamma_x-\gamma_s)}.$$

3.3.1.4 Cas 4 : $c_6 \neq 0$:

$$Q = c_6\rho', \qquad avec \qquad c_6 = \frac{(\gamma_c-\gamma_s)(\gamma_s-\gamma_x)}{\gamma_s\Delta}, \qquad et \;\; F = \frac{(\gamma_s-\gamma_c)(\gamma_s-\gamma_x)\gamma}{(\gamma-\gamma_c)(\gamma-\gamma_x)\gamma_s}, \tag{3.97}$$

On remplace Q dans l'equations (3.36) et (3.37) :

$$\rho_c = \frac{1}{\Delta}\left[Oa^{-3\gamma_s} + Ma^{-3\frac{\gamma_c\gamma_x}{\gamma_s}}\right],$$

$$\rho_x = \frac{1}{\Delta}\left[Ka^{-3\gamma_s} + Wa^{-3\frac{\gamma_c\gamma_x}{\gamma_s}}\right],$$

avec O,M,K et W sont des constantes

$$\left\{\begin{array}{l} O = \frac{b\gamma_x^2\gamma_s - b\gamma_s^2\gamma_x - c\gamma_c\gamma_s^2 - \gamma_c\gamma_x\gamma_s(b+2c) + \gamma_c\gamma_x^2(c+b)}{(\gamma_c\gamma_x - \gamma_s^2)}, \\ M = \frac{c\gamma_c^2\gamma_x + \gamma_s^2\gamma_x(c+b) - b\gamma_s\gamma_x^2 + \gamma_c\gamma_x\gamma_s\left(2c+b-b\gamma_c\gamma_x^2\right)}{(\gamma_c\gamma_x - \gamma_s^2)}, \\ K = \frac{b\gamma_s^2\gamma_x - c\gamma_s\gamma_c^2 + \gamma_c^2\gamma_x(c+b) - c\gamma_s\gamma_c + \gamma_c\gamma_x\gamma_s(c+2b)}{(\gamma_c\gamma_x - \gamma_s^2)}, \\ W = \frac{c\gamma_c^2\gamma_s - c\gamma_c^2\gamma_x + \gamma_c\gamma_s^2(c+b) - b\gamma_c\gamma_x^2 - \gamma_c\gamma_x\gamma_s(c+2b)}{(\gamma_c\gamma_x - \gamma_s^2)}. \end{array}\right. \tag{3.98}$$

La somme $\rho = \rho_c + \rho_x$ est alors :

$$\rho = \left(\frac{O+K}{\Delta}\right)a^{-3\gamma_s} + \left(\frac{M+W}{\Delta}\right)a^{-3\frac{\gamma_c\gamma_x}{\gamma_s}}.$$

Enfin, en résolvant l'équation de Friedmann pour l'équation source (3.67) on obtient :

$$\frac{da}{adt} = \sqrt{\frac{b}{3}}a^{-\frac{3}{2}\ \gamma^+}\left(\omega^2 a^{-3\left(\gamma_s - \gamma^+\right)} + 1\right)^{1/2},$$

avec $\omega^2 = \frac{c}{b}$.

On pose

$$\sinh\tau = \omega a^{-\frac{3}{2}\left(\gamma_s - \gamma^+\right)}, \tag{3.99}$$

$$a_L = \left[\omega^{-1}\sinh\tau\right]^{\frac{2}{3(\gamma^+ - \gamma_s)}}. \tag{3.100}$$

l'équation (**??**) devient :

$$\frac{da}{adt} = \sqrt{\frac{b}{3}}a^{-\frac{3}{2}\ \gamma^+}\cosh\tau, \tag{3.101}$$

on dérive l'équation (3.99) :

$$\cosh\tau d\tau = \frac{3}{2}\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)\omega a^{-1}a^{-\frac{3}{2}\left(\gamma_s - \gamma^+\right)}da,$$

$$da = \frac{2}{3}\frac{\cosh\tau d\left(\tau\right)aa^{\frac{3}{2}\left(\gamma_s - \gamma^+\right)}}{\omega\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)}, \tag{3.102}$$

on remplace (3.102) dans (3.101) :

$$\frac{2}{3}\frac{\cosh\left(\tau\right)d\left(\tau\right)aa^{\frac{3}{2}\left(\gamma_s - \gamma^+\right)}}{a\omega\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)} = \sqrt{\frac{b}{3}}a^{-\frac{3}{2}\ \gamma^+}\cosh\left(\tau\right)dt,$$

$$dt = \frac{2a^{\frac{3}{2}\gamma_s}}{\sqrt{3b}\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)\omega} d\left(\tau\right) \quad \text{avec} \quad a \to a_L, \tag{3.103}$$

on remplace (3.100)dans(3.103) :

$$t = \frac{2}{\sqrt{3b}\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)\omega} \int \left[\omega^{-1}\sinh\tau\right]^{\frac{\gamma_s}{(\gamma^+ - \gamma_s)}} d\left(\tau\right).$$

Nous avons utiliser les mêmes constantes α et β dans tous les calculs, mais dans chaque cas elles prennent des valeurs numériques différentes.

La dernière equation montre que les variables t et τ ont le même comportement asymptotique. En suite, on utilise τ au lieu de t pour analyser le facteur d'échelle et l'indice barotropique effectif.

D'aprés l'equation de conservation totale $\rho' = -\gamma\rho$:

$$\rho'_L = -\gamma_L \rho_L. \tag{3.104}$$

et l'équation de Friedmann (3.10) :

$$\begin{cases} \rho_L = 3H^2 \Rightarrow \rho'_L = 2\dot{H}, \\ H = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \quad ,\dot{H} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right], \end{cases} \tag{3.105}$$

on remplace (3.105) dans (3.104) :

$$\begin{aligned} 2\dot{H} &= -3\gamma_L H^2, \\ 2\left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] &= -3\gamma_L\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \\ \gamma_L &= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}\right). \end{aligned} \tag{3.106}$$

On dérive l'équation (3.100) une fois et $2^{ème}$ fois par rapport le temps :

$$\dot{a}_L = \frac{da_L}{dt} = \frac{da_L}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \qquad \text{avec } \alpha = \tau, \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_L &= \frac{d\dot{a}_L}{dt} = \frac{d\dot{a}_L}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}, \\ &= \frac{b\omega^2\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)}{2}\left(\omega^{-1}\sinh\alpha\right)^{\frac{2-6\gamma_s}{3(\gamma^+ - \gamma_s)}}\left[\left(\frac{2-3\gamma^+}{3\left(\gamma^+ - \gamma_s\right)}\right)\coth^2\alpha - 1 - \coth^2\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3.108}$$

on remplace dans l'equation (3.106), mais avant ça on calcule d'abord $\frac{a_L}{\dot{a}_L}$ puis $\ddot{a}_L\left(\frac{a_L}{\dot{a}_L}\right)$:

$$\frac{a_L}{\dot{a}_L^2}=\frac{3}{b\omega^2}\frac{\left(\omega^{-1}\sinh\alpha\right)^{\frac{6\gamma_s-2}{3(\gamma^+-\gamma_s)}}}{\coth^2\alpha}. \tag{3.109}$$

$$\ddot{a}_L\left(\frac{a_L}{\dot{a}_L^2}\right)=\frac{3\left(\gamma^+-\gamma_s\right)}{2}\left[\left(\frac{2-3\gamma^+}{3\left(\gamma^+-\gamma_s\right)}\right)\coth^2\alpha-1-\coth^2\alpha\right]. \tag{3.110}$$

l'équation(3.106)devient :

$$\gamma_L=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\left(\gamma^+-\gamma_s\right)}{2}\left[\left(\frac{2-3\gamma^+}{3\left(\gamma^+-\gamma_s\right)}-1\right)\coth^2\alpha-1\right]\right). \tag{3.111}$$

Ce qui nous permet d'exprimer la densité d'énergie totale (3.67) la matière noire et l'energie noire (3.32) , (3.33) et le rapport r_L et la pression effective (3.39) comme une fonction de τ dans les deux régimes asymptotiques.

3.3.2 Interaction linéaire et le modèle ΛCDM

Nous complétons le sujet de l'interaction linèaire en ajoutant une constante. Donc nous introduisons l'interaction linèaire générale Q_{gL}.

On pose

$$Q_{gL}=\frac{Q_0}{\Delta}+Q_L. \tag{3.112}$$

où la contrainte (3.63) est valable pour les canstantes de Q_{gL}. Un type particulier de combinaison linéaire générale, $Q=C_0+C_1\rho_c+C_2\rho_x$ a été analysé dans [28]. En plus une interaction linéaire générale peut être construite comprenant le couplage $f(\eta)$ à Q_{gL} [29]. Un cas particulier où l'interaction $Q_{gL}\propto f(\eta)$ a été examiné dans[30].

Pour le cas particulier où $Q_{gL}\propto f(\eta)$ l'equation (3.38) devient :

$$\rho^{''}+\left(\gamma_c+\gamma_x\right)\rho'+\gamma_x\gamma_c\rho=\Delta Q_{gL},$$

$$\left(1-\Delta b_3\right)\rho^{''}+\gamma_s^{-1}\left[\gamma_s^2+\gamma_x\gamma_c-\left(b_1+b_3\gamma_s^2\right)\Delta\right]\rho'+\left(\gamma_x\gamma_c-\Delta b_1\right)\rho=Q_0. \tag{3.113}$$

la solution générale de cette équation est :

$$\begin{aligned}\rho_{gL}&=ca^{-3\left(\frac{\gamma_x\gamma_c-b_1\Delta}{\gamma_s(1-b_3\Delta)}\right)}+ba^{-3\gamma_s}+\frac{Q_0}{\gamma_x\gamma_c-b_1\Delta},\\&=\Lambda_{eff}+ca^{-3\gamma^+}+ba^{-3\gamma_s}.\end{aligned} \tag{3.114}$$

de l'equation(3.66) on a :

$$\gamma^{+} = \frac{\gamma_x \gamma_c - b_1 \Delta}{\gamma_s \left(1 - b_3 \Delta\right)},$$

avec

$$\Lambda_{eff} = cte = \frac{Q_0}{\left(\gamma_x \gamma_c - \Delta b_1\right)}, \tag{3.115}$$

C'est la constante cosmologique effective induite par le terme constant $\frac{Q_0}{\Delta}$ dans l'intéraction générale linèaire Q_{gL}. Lorsque $\rho_{gL} \rightarrow \Lambda_{eff}$ et l'equation d'état effective (3.39)devient $p \approx -\Lambda_{eff}$. Ainsi le modèle effectif à un fluide peut être associé à un modèle unifié du secteur sombre.

De l'équation de Friedmann (3.10) :

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho_{gL}, \\ 3H^2 &= \Lambda_{eff}, \\ H = H_0 &= \sqrt{\frac{\Lambda_{eff}}{3}}. \quad , \quad H_0 \text{ est un attracteur} \end{aligned} \tag{3.116}$$

On remplace l'equation (3.114) dans les équations (3.32) et (3.33) , alors les densites d'énergies noires sont :

$$\rho_{cgL} = -\frac{\gamma_x \rho_{gL} + \rho'_{gL}}{\Delta} \quad , \quad \rho'_{gL} = -\gamma_s c a^{-3\gamma_s} - \gamma^{+} b a^{-3\gamma^{+}},$$

$$\rho_{cgL} = \frac{-\gamma_x \Lambda_{eff}}{\Delta} + \frac{\left(\gamma_s - \gamma_x\right) c a^{-3\gamma_s} + \left(\gamma_s - \gamma_c\right) b a^{-3\gamma^{+}}}{\Delta},$$

de l'equation (3.70) on remarque que

$$\rho_c = \frac{\left(\gamma_s - \gamma_x\right) c a^{-3\gamma_s} + \left(\gamma_s - \gamma_c\right) b a^{-3\gamma^{+}}}{\Delta},$$

alors

$$\rho_{cgL} = \frac{-\gamma_x \Lambda_{eff}}{\Delta} + \rho_c. \tag{3.117}$$

et

$$\begin{aligned} \rho_{xgL} &= \frac{\gamma_c \left(\Lambda_{eff} + c a^{-3\gamma_s} + b a^{-3\gamma^{+}}\right)}{\Delta} - \frac{\gamma_s c a^{-3\gamma_s} - \gamma^{+} b a^{-3\gamma^{+}}}{\Delta}, \\ &= \frac{\gamma_c \Lambda_{eff}}{\Delta} + \frac{\left(\gamma_c - \gamma_s\right) c a^{-3\gamma_s} + \left(\gamma_c - \gamma^{+}\right) b a^{-3\gamma^{+}}}{\Delta}, \end{aligned}$$

de l'equation(3.71)on remarque que :

$$\rho_x = \frac{(\gamma_c - \gamma_s)\, ca^{-3\gamma_s} + (\gamma_c - \gamma^+)\, ba^{-3\gamma^+}}{\Delta},$$

alors

$$\rho_{xgL} = \frac{\gamma_c \Lambda_{eff}}{\Delta} + \rho_x. \tag{3.118}$$

Lorsque $\rho_{gL} \to \Lambda_{eff}$ pour $a \to \infty$, la limite finale de la densité d'énergie de matière noire est négative :

$$\rho_{cgL} \to \frac{-\gamma_x \Lambda_{eff}}{\Delta} \langle 0 \quad \text{car } \gamma_x \rangle 0, \Lambda_{eff} \rangle 0 \text{et} \Delta \rangle 0.$$

Pour résoudre ce problème on suppose une équation de l'énergie noire fontôme. Alors à partir de l'équation d'état $\omega = \frac{p}{\rho}$ et $\omega\langle -1$ avec $\gamma_x \langle 0$, les densites d'énergies deviennent positives. Et le rapport r_{gL} égal a :

$$\begin{aligned} r_{gL} &= \frac{\rho_{cgL},}{\rho_{xgL}} \quad \text{avec } \rho_{cgL} \to \frac{-\gamma_x \Lambda_{eff}}{\Delta} \text{et} \rho_{xgL} \to \ \frac{\gamma_c \Lambda_{eff}}{\Delta} \\ r_{gL} &= -\frac{\gamma_x}{\gamma_c} \rangle 0. \end{aligned} \tag{3.119}$$

3.4 Interaction DM-DE non lineaire

Supposons que le transfert d'energie entre la matière noire et l'energies noire est produit par une fonction d'interaction non lineaire donnée par :

$$Q_{nL} = \frac{j_1 \rho_c^2 + j_2 \rho_c \rho_x + j_3 \rho_x^2}{\rho} + Q_L + \frac{f(\eta)\, \rho^\nu}{\Delta}. \tag{3.120}$$

où le Q_L est donné par l'equation (3.59), et $f(\eta)\, \rho^\nu$ est un terme non linéaire proportionnel à une fonction bien définie $f(\eta)$ qui depend du facteur d'échelle $\eta = \ln a^3$ avec γ une constante. Par utilisation des equations (3.33),(3.32) et (3.59), l'équation (3.120) devient :

$$\begin{aligned} Q_{nL} &= \frac{j_1 \left(-\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta}\right)^2 + j_2 \left(-\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta}\right)\left(\frac{\gamma_c \rho + \rho'}{\Delta}\right) + j_3 \left(\frac{\gamma_c \rho + \rho'}{\Delta}\right)^2}{\rho} + b_1 \rho + b_2 \rho' + b_3 \rho" + \frac{f(\eta)\, \rho^\nu}{\Delta}, \\ &= \frac{K_1 \rho'^2 + \rho\left[K_2 \rho + K_3 \rho' + K_4 \rho"\right] + f(\eta)\, \rho^{\nu+1}}{\Delta \rho}. \end{aligned} \tag{3.121}$$

avec K_1, K_2, K_3 et K_4 sont les constantes

$$\left\{\begin{array}{c} K_1 = \left(\frac{j_1}{\Delta} - \frac{j_2}{\Delta} + \frac{j_3}{\Delta}\right), \\ K_2 = \left(\frac{j_1\gamma_x^2}{\Delta} - \frac{j_2}{\Delta}\gamma_x\gamma_c + \frac{j_3\gamma_c^2}{\Delta} + \Delta b_1\right), \\ K_3 = \left(\frac{2j_1\gamma_x}{\Delta} - \frac{j_2}{\Delta}\gamma_x - \frac{j_2}{\Delta}\gamma_c + \frac{2j_3\gamma_c}{\Delta} + \Delta b_2\right), \\ K_4 = \Delta b_3. \end{array}\right. \tag{3.122}$$

On voit que les trois termes du numerateur de la partie non linéaire de l'équation (3.120) est une combinaison linéaire de ρ'^2, ρ, ρ'etρ". Des équations (3.38) et (3.121), on obtient l'équation différentielle pour ρ

$$\rho^{''} + (\gamma_c + \gamma_x)\,\rho' + \gamma_x\gamma_c\rho = \Delta Q_{nL},$$

$$\rho\rho^{''} + \frac{(\gamma_c + \gamma_x - K_3)}{(1 - K_4)}\rho\rho' - \frac{K_1}{(1 - K_4)}\rho'^2 + \frac{(\gamma_x\gamma_c - K_2)}{(1 - K_4)}\rho^2 = \frac{f\,(\eta)\,\rho^{\nu+1}}{(1 - K_4)}, \tag{3.123}$$

On renomme les quatre constantes de l'équation(3.123)de n_1, n_2, n_3,et n_4 respectivement, et en changeant la variable $x = \rho^{(1+n_2)}$ avec $n_2 \neq -1$où $K_1 + K_4 \neq 1$, l'équation(3.123) se transforme comme :

$$\rho\rho^{''} + n_1\rho\rho' + n_2\rho'^2 + n_3\rho^2 = n_4 f\,(\eta)\,\rho^{\nu+1}. \tag{3.124}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c} n_1 = \frac{(\gamma_c+\gamma_x-K_3)}{(1-K_4)}, \\ n_2 = -\frac{K_1}{(1-K_4)}, \\ n_3 = \frac{(\gamma_x\gamma_c-K_2)}{(1-K_4)}, \\ n_4 = \frac{1}{(1-K_4)}. \end{array}\right.$$

Alors on obtient à partir de $x = \rho^{(1+n_2)}$:

$$\rho = x^{\frac{1}{1+n_2}}\ , \rho^{\nu+1} = x^{\frac{\nu+1}{1+n_2}}. \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{d}{d\eta}x^{\frac{1}{1+n_2}} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{1+n_2}}\frac{dx}{d\eta}, \\ &= \frac{1}{1+n_2}x^{\frac{-n_2}{1+n_2}}x'. \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned} \rho" &= \frac{1}{1+n_2}\frac{d}{d\eta}\left(x^{\frac{-n_2}{1+n_2}}x'\right), \\ &= \frac{1}{1+n_2}\left[\frac{-n_2}{1+n_2}x^{\frac{-2n_2-1}{1+n_2}}x'^2 + x"x^{\frac{-n_2}{1+n_2}}\right]. \end{aligned} \tag{3.127}$$

on remplace ρ, ρ'etρ" dans(3.124)

$$\frac{-n_2}{1+n_2}x^{\frac{-2n_2-1}{1+n_2}}x'^2+x^{\frac{-n_2}{1+n_2}}x"+n_1x^{\frac{-n_2}{1+n_2}}x'+\frac{n_2}{1+n_2}x^{\frac{-2n_2-1}{1+n_2}}x'^2+(1+n_2)\,n_3x^{\frac{1}{1+n_2}}=(1+n_2)\,n_4f\left(\eta\right)x^{\frac{\nu}{1+n_2}},$$

on pose $\nu = -n_2$

$$x" + n_1x' + (1+n_2)\,n_3x = (1+n_2)\,n_4f\left(\eta\right). \tag{3.128}$$

Si x_{1h}et x_{2h} sont les deux solutions de l'équation l'homogène (3.128), la solution générale de l'équation (3.123) peut être écrit ecomme une superposition non linéaire de ces solutions de base

$$\rho_{nL} = (cx_{1h} + bx_{2h} + x_p)^{\frac{1}{1+n_2}}\,, \tag{3.129}$$

où x_p est une solution particuliere de l'équation (3.128).

3.4.1 Le cas homogène

Dans la cas $f(\eta) = 0$, l'equation (3.128) devient.

$$x" + n_1x' + (1+n_2)\,n_3x = 0, \tag{3.130}$$

Pour résoudre cette équation on pose :

$$x = e^{(\lambda\eta)}, \tag{3.131}$$

et on remplace (3.131) dans (3.130)

$$\lambda^2 + n_1\lambda + (1+n_2)\,n_3 = 0, \tag{3.132}$$

ce qui donne

$$\lambda^{\mp} = \frac{-n_1 \mp \sqrt{(n_1)^2 - 4\,(1+n_2)\,n_3}}{2}.$$

On a deux solutions λ^-et λ^+, et la solution générale est donnée par :

$$x_h = ca^{3\lambda^-} + ba^{3\lambda^+}.$$

De (3.125) on obtient :

$$\rho_h = x_h^{\frac{1}{1+n_2}},$$
$$= \left(ca^{3\lambda^-} + ba^{3\lambda^+}\right)^{\frac{1}{1+n_2}}. \tag{3.133}$$

On calcule maintenant ρ_{ch} et ρ_{xh} à partir des équations (3.33) et (3.32) :

$$\rho_{ch} = -\frac{\gamma_x \rho_h + \rho_h'}{\Delta},$$
$$= -D\left[\left((1+n_2)\gamma_x + \lambda^-\right)\rho + \frac{ba^{3\lambda^+}\Delta\lambda}{\rho^{n_2}}\right]. \quad \text{avec } D = \left[\Delta\left(1+n_2\right)\right]^{-1} \tag{3.134}$$

$$\rho_{xh} = \frac{\gamma_c \rho_h + \rho_h'}{\Delta},$$
$$= D\left[\left((1+n_2)\gamma_c + \lambda^-\right)\rho + \frac{ba^{3\lambda^+}\Delta\lambda}{\rho^{n_2}}\right]. \tag{3.135}$$

de l'equation(3.39) on obtient :

$$p_h = -\rho_h - \rho_h',$$
$$= -\left(1 + \frac{\lambda^-}{1+n_2}\right)\rho_h - \frac{ba^{3\lambda^+}\Delta\lambda}{(1+n_2)\,\rho_h^{n_2}}. \tag{3.136}$$

3.4.2 Exemple

Nous examinons le cas où Q_h prend la forme

$$Q_{h0} = \alpha\gamma_c \frac{\rho_c \rho_x}{\rho}. \tag{3.137}$$

avec α une constante. Des équations $(3.38)\,,(3.33)$ et (3.32), on a :

$$\rho\rho^{''} + n_1\rho\rho' + n_2\rho'^2 + n_3\rho^2 = 0.$$

avec

$$\begin{cases} n_2 = \frac{\alpha\gamma_c}{\Delta}, \\ n_1 = \left(1 + \frac{\alpha\gamma_c}{\Delta}\right)(\gamma_c + \gamma_x), \\ = (1 + n_2)(\gamma_c + \gamma_x), \\ n_3 = \gamma_x\gamma_c\left(1 + \frac{\alpha\gamma_c}{\Delta}\right), \\ = \gamma_x\gamma_c(1 + n_2), \end{cases} \tag{3.138}$$

Ensuite, les racines caractéristique de l'equation (**??**) sont

$$\begin{aligned} \lambda^- &= \frac{-n_1 - \sqrt{(n_1)^2 - 4(1+n_2)n_3}}{2}, \\ &= -\gamma_c(1+n_2). \end{aligned} \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \frac{-n_1 + \sqrt{(n_1)^2 - 4(1+n_2)n_3}}{2}, \\ &= -\gamma_x(1+n_2). \end{aligned} \tag{3.140}$$

Introduisant ces racines dans la solution générale (3.133) et l'equation d'état effective (3.136) :

$$\rho = \left(ca^{-3\gamma_c(1+n_2)} + ba^{-3\gamma_x(1+n_2)}\right)^{\frac{1}{1+n_2}}. \tag{3.141}$$

$$p = (\gamma_c - 1)\rho - \frac{ba^{-3\gamma_x(1+n_2)}\Delta}{\rho^{n_2}}. \tag{3.142}$$

Cette équation d'état effective peut être identifiée avec ceux qui ont été utilisés pour construire des variantes du modèle du gaz de Chaplygin[31], [32].

3.4.2.1 Gaz de Chaplygin modifié

Nous faisons une sélection des paramètres afin que l'interaction (3.137) soit focalisée sur une énergie noire composant décrit par une densité d'energie de vide $\gamma_x = 0$, alors $n_3 = 0, \Delta = \gamma_c = \gamma_0 \approx 1, n_2 = \alpha \neq -1, \lambda^+ = 0$. En supposant que la matiére noire est presque sans pression alors la densité d'energie (3.141)

$$\begin{aligned} \rho &= \left(ca^{-3\gamma_0(1+\alpha)} + b\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ &= \left(ca^{-3\gamma_0(1+\alpha)} + \frac{\gamma_0 b}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ &= \left(\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_0(1+\alpha)} + \frac{B}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.143}$$

avec

$$\begin{cases} c = a_0^{3\gamma_0(1+\alpha)}, \\ B = \gamma_0 b = cte, \end{cases}$$

En remplaçant cette densité d'énergie dans l'equation (3.39), nous obtenons l'equation d'état d'un fluide efficace

$$p = -\rho - \rho'.$$

avec

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{d}{d\eta}\left(a_0^{3\gamma_0(1+\alpha)} \exp -\gamma_0 \left(1+\alpha\right)\eta + \frac{B}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ &= -\gamma_0 \left[\rho^{1+\alpha} - \frac{B}{\gamma_0}\right]\rho^{-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.144}$$

donc

$$\begin{aligned} p &= -\rho + \gamma_0 \left[\rho^{1+\alpha} - \frac{B}{\gamma_0}\right]\rho^{-\alpha}, \\ &= \rho\left(1+\gamma_0\right) - \frac{B}{\rho^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Le gaz de Chaplygin caractérise plusieurs cosmologie unifiés [33], [34].

Maintenant, nous exprimons le gaz de Chaplygin avec l'equation d'état (3.145). Nous insérons l'equation (3.144) dans les équations (3.33) et (3.32) pour trouver la densité d'energie noire et de la matière noire

$$\begin{aligned} \rho_{Chc} &= -\frac{\gamma_x \rho + \rho'}{\Delta}, \\ &= \rho - \frac{B}{\gamma_0 \rho^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned} \rho_{Chx} &= \frac{\gamma_c \rho + \rho'}{\Delta}, \\ &= \frac{B}{\gamma_0 \rho^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.147}$$

De l'equation (3.41)

$$\rho' + \gamma\rho = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{\rho'}{\rho},$$
$$\gamma = \frac{\gamma_0 \left[\rho^{1+\alpha} - \frac{B}{\gamma_0}\right]\rho^{-\alpha}}{\rho},$$
$$= \gamma_0 - \frac{B}{\rho^{1+\alpha}}. \tag{3.148}$$

$$r_{Ch} = \frac{\rho_{cCh}}{\rho_{xCh}},$$
$$= -1 + \frac{\gamma_0}{B}\rho^{\alpha+1}. \tag{3.149}$$

Pour les univers en expansion et $\gamma_0 \left(\rho^{\alpha+1}\right)\rangle 0$ la densité d'energie totale devient$\rho \to \left(\frac{B}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, donc$\rho^{\alpha+1} \to \frac{B}{\gamma_0}$ et r_{Ch} devient :

$$r_{Ch} = -1 + \frac{\gamma_0}{B}\frac{B}{\gamma_0},$$
$$= 0. \tag{3.150}$$

3.4.2.2 Le cas de $\gamma_0 = 0$

Quand $\gamma_0 = 0$, le modèle effectif à un fluide décrit par les expressions(3.143)et(3.145) n'est pas valide, toute fois ce cas peut être étudié à partir du terme d'interaction non linèaire

$$Q_r = \frac{\alpha\left(k_4 - 1\right)\rho^{-1}\rho'^2 + \gamma_c\gamma_x\rho + \left(\gamma_c + \gamma_x\right)\rho' + k_4\rho"}{\Delta}. \tag{3.151}$$

Maintenant, l'equation source (3.128) se réduit à $x" = 0$ et on trouve que la densité d'energie totale $\rho = x^{\frac{1}{1+\alpha}}$. On a

$$x" = 0, x' = d, x = d\eta + c, \tag{3.152}$$

et $x = \rho^{1+\alpha}$ et donc :

$$\rho = \left(d\eta + c\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$
$$= c\left(\frac{d}{c}\eta + 1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

on sait que $\eta = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3$ alors :

$$\rho = c\left(\frac{d}{c}\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + 1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

avec $c = \rho_0$ et $\frac{d}{c} = b$ on obtient :

$$\rho = \rho_0\left(b\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + 1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{3.153}$$

Alors que l'équation d'état du modèle effectif à un fluide est

$$\begin{aligned} p &= \rho - \rho', \\ &= \rho - \frac{\rho_0 b}{1+\alpha}\frac{1}{\rho_0}\rho_0\left(b\eta+1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(b\eta+1\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.154}$$

on a d'après (3.153) :

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1+\alpha} = \left(b\eta+1\right)^{-1}.$$

On remplace dans (3.154) :

$$\begin{aligned} p &= \rho - \frac{\rho_0 b}{1+\alpha}\frac{1}{\rho_0}\rho\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1+\alpha}, \\ &= \rho - \frac{\rho_0 b}{1+\alpha}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Le facteur d'échelle est déterminé par l'équation de Friedmann pour la source (3.153)

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho_0\left(b\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 + 1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$\int\frac{da}{a} = \int\sqrt{\frac{\rho_0}{3}}\left(3b\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)+1\right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}dt,$$

$$a\left(t\right) = a_0\exp\frac{1}{3b}\left(\pm 1 + \left[\frac{b\left(1+2\alpha\right)\sqrt{3\rho_0}+3c}{2\left(1+\alpha\right)}t\right]^{\frac{2(1+\alpha)}{(1+2\alpha)}}\right), \tag{3.156}$$

on pose $c = 0$:

$$a = a_0\exp\frac{1}{3b}\left(\pm 1 + \left[\frac{b\left(1+2\alpha\right)\sqrt{3\rho_0}}{2\left(1+\alpha\right)}t\right]^{\frac{2(1+\alpha)}{(1+2\alpha)}}\right). \tag{3.157}$$

où nous somme fixés $t_0 = 0$. Notons que les quantites (3.153) et (3.157) sont indépendantes de k_4, alors le terme d'interaction ne contribue pas à l'évolution de ce modèle unifié.

Chapitre 4

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié le problème de l'interaction entre les secteurs sombres du modèle cosmologique. Les observations cosmologiques actuelles laissent une place naturelle à l'introduction d'une intercation, qui reste pour le moment inconnue et qu'on ne peut modéliser que de manière phénoménologique. Dans ce mémoire plusieurs formes de cette interaction ont été étudiées. Après une introduction générale au sujet de la comologie moderne dans le chapitre 1, nous avons présenté au chapittre 2 un bref rappel sur la Ralativité Générale d'Einstein suivi des équations fondamentales de la cosmologie relativiste moderne. Nous avons discuté du modèle ΛCDM, de ses problèmes et se ses solutions. Ensuite dans le troisième chapitre, nous avonss étudié les modèles d'interaction entre les composantes du secteur sombre avec transfert d'énergie et introduit une description avec un fluide effectif et un paramètre de l'équation d'état effectif. Nous avons étudiés plusieurs cas et dans chaque cas nous avons déterminé les densités d'énergie, les indices barotropiques, le facteur d'échelle et le paramètre de Hubble. Nous avons aussi montré que l'interaction entre les secteurs sombres est équivalente à l'introduction d'un gaz généralisé de Cheplygin.

Bibliographie

[1] Cyril PITROU, Dynzmique non-linéaire et anistropie primordiale en cosmologie,Université Paris VI 2008.

[2] Liddle A 2004 Mon. Not. Ray.Astron.Soc.

[3] Planck Collaboration XVI.2014 Astron 377274. Astrophys.57116.

[4] Planck.Collaboration I 2015 Overview of preducts and scientic results.Preprint Ar.Xiv :1502.01582.

[5] ZlatevI, Wang.L and Steinhardt PJ 1999 phys.Rev.Lett.82 896.

[6] Caldwell R R ,Dave Rand .Steinhardt PJ 1998 phys.Rev.Lett.80 1582.

[7] Liddle.A and .Scherrer RJ 1998 phys.Rev.D59 023509.

[8] Peebles.PJE and Ratta B Rev .Mod.phys.75 59.

[9] Brax.Pand Martin J 2006.J.Cosmology Astropart.phys.11 008.

[10] Hagiwara.K et al 2002 Phys.Rev. D.66 010001.

[11] Luis P. Chimento, Exactly solved models of interacting dark matter and dark energy,arXiv :1204.5797v2 [gr-qc] 1 Jun 2012.

[12] Jérémy NEVEU,Containtes expérimentales sur des modèles à champs scalaire léger en cosmologie et physique des particules(expérience.SNLS :et CMS),L'université Pierre et M.arie Curie-Paris6,2014.

[13] A.Nicols,R.Rattazzi,et E.Trincherini, Galileon as a local modification of gravity, Physical Review D79,064036(2009), doi :10.1103/Phys Rev D .79.064036,arXiv :0811.2197.

[14] Amina GUEHAM,La cosmologie avec les extra dimensions et énérgie noire, Université de Constantine.

[15] J.A.R. C embranos,a.Dobado,et A.L.Maroto,Brane-skyrmions and wrapped States,Physical .Review.D65,35(2001),doi :10.1103/Phys.Rev D .65.026005,arXiv :0106322[hep-ph].

[16] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa,Dynamics of dark energy,arXiv :hep-th/0603057v3 16 Jun 2006.

[17] N. Dadhich, gr-qc/0405115 ; gr-qc/0407003.

[18] L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, Phys. Rev. D 64,043509 (2001) ; L. Amendola, C. Quercellini, D. Tocchini-Valentini and A. Pasqui, Astrophys. J. 583, L53 (2003) ;G. R. Farrar and P. J. E. Peebles, Astrophys. J. 604,1 (2004) ; G. Huey and B. D. Wandelt, S. Nojiri, S. D.Odintsov, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D 71, 063004(2005) ; S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D 72,023003 (2005) ; R. G. Cai and A. Wang, JCAP 0503, 002(2005) ; D. Pavon andW. Zimdahl, Phys. Lett. B 628,206(2005) ; Phys. Rev. D 74, 023519 (2006) ; J. B. Binderand G. M. Kremer, Gen. Rel. Grav. 38, 857 (2006) ; L.Amendola, M. Gasperini and F. Piazza, Phys. Rev. D 74,127302 (2006) ; G. M. Kremer, Gen. Rel. Grav. 39, 965-972 (2007) ; L. P. Chimento and M. Forte, Phys. Lett.B 205 666 (2008) ; C. G. Bohmer, G. Caldera-Cabral,R. Lazkoz and R. Maartens Phys. Rev. D 78, 023505(2008) ; G. Caldera-Cabral, R. Maartens, B. M. SchaeferJCAP 0907 , 027, (2009).

[19] L. P. Chimento, M. Forte and G. M. Kremer Gen. Rela-tiv. Gravit. 1-13 (2008) DOI 10.1007/s10714-008-0694-5.

[20] J. D. Barrow and T. Clifton Phys. Rev. D 73, 103520(2006).

[21] J. Chen and Y. Wang, arXiv :0904.2808v4 [gr-qc].

[22] H.M. Sadjadi and M. Alimohammadi, Phys. Rev. D 74,103007 (2006).

[23] Zimdahl W., Pav´D. And Chimento L. P. Phys. Lett.B 521, 133 (2001).

[24] K. Karwan, JCAP 0805 (2008) 011, arXiv : 0801.1755[astro-ph]. G. Olivares, F. Atrio-Barandela, and D.Pavon, Phys. Rev. D 77, 103520 (2008).

[25] L. Amendola, Phys. Rev. D 62, 043511 (2000) ; L.Amendola, G.C. Campos, R. Rosenfeld, Phys.Rev.D 75,083506 (2007).

[26] B. M. Jackson, A. Taylor, A. Berera, arXiv :0901.3272v2[astro-ph.CO].

[27] L.P. Chimento, R. Lazkoz, Phys. Lett. B 639, 591 (2006).

[28] C. Quercellini, M. Bruni, A. Balbi and Davide Pietrobon,Phys. Rev. D 78, 063527 (2008).

[29] L.P. Chimento Phys. Rev. D 81, 043525 (2010).

[30] J.C. Fabris, B. Fraga, N. Pinto-Neto and W. Zimdahl,arXiv :0910.3246v1 [astro-ph.CO].

[31] Z.K. Guo and Y.Z. Zhang, Phys. Lett. B 645, 326 (2007).

[32] U. Debnath, Astrophys Space Sci. 312, 295 (2007),DOI 10.1007/s10509-007-9690-6 ; M. Jamil, arXiv :0906.3913v3.

[33] A.Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier,Phys. Lett. B 511 (2001) 265-268.

[34] Josue De-Santiago and Jorge L. Cervantes-CotaPhys.Rev. D 83, 063502, (2011).