

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :

Série :

Mémoire pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : Mathématiques

OPTION : Algèbre

Présenté par

YOUSOUF Akrouf

THÈME

Représentations des groupes de tresses

Soutenu le : 07/12/2013

Devant le Jury :

<i>Président :</i>	L. ZEDAM	Prof.	Université de M'sila
<i>Rapporteur :</i>	N. TOUAFEK	MCA	Université de Jijel
<i>Examineur :</i>	A. GASMI	MCA	Université de M'sila
<i>Invité :</i>	A. BOUCHAIR	MCB	Université de Jijel

Table des matières

1	Définitions et préliminaires	5
1.1	Groupes de tresses	5
1.1.1	Tresses géométriques	5
1.1.2	Diagrammes de tresses	6
1.2	Générateurs et relations	6
1.3	Espaces de configurations	8
1.4	Automorphismes de tresses de groupes libres	8
1.5	Groupe de difféotopies	17
1.5.1	Demi-twist	18
1.5.2	Groupes d'homéomorphismes et les espaces de configurations	22
1.5.3	L'isomorphisme $B_n \cong \mathcal{M}(D, Q_n)$	24
2	Représentations des groupes de tresses	27
2.1	Représentation de Burau	28
2.1.1	Représentation homologique twistée	29
2.1.2	Définition homologique de la représentation de Burau	30
2.2	Représentation de Krammer	32
2.2.1	La forme avide (The greedy form)	33
2.2.2	Fonction longueur de Charney	36
2.2.3	Les fourchettes	38
3	Linéarité de B_4	44
3.1	La Conjecture Principale	44
3.2	Démonstration de la Conjecture Principale pour $n = 4$	49

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de travail, N. TOUA-FEK qui ma fait l'honneur d'être mon promoteur.

Ensuite, je tiens à remercier infiniment A. BOUCHAIR, pour son soutien et ses conseils, pour tout le temps qu'il m'a consacré, ainsi que pour son aide qu'il a patiemment apporté à la réalisation de ce mémoire. Je le remercie, aussi, pour ses encouragements qu'il répète sans cesse.

J'adresse mes vifs remerciements à L. ZEDAM qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie sincèrement A. GASMI pour avoir accepté de faire partie du jury.

Merci mes parents, lesquels grâce à dieu et à eux je suis ici, et merci pour tout ce qu'ils ont fait et entrain de faire pour moi.

Mes remerciements vont aussi à mes frères, mes sœurs, et mes collègues.

Introduction

Le groupe de tresses sur n brins introduit par Emile Artin en 1925 est un outil pour étudier les nœuds et les entrelacs, à cause du théorème d'Alexander qui dit que tout noeud ou entrelacs peut s'obtenir d'une tresse par le biais d'une certaine opération de fermeture. En dehors de la théorie des nœuds, la notion de tresse est apparue dans plusieurs domaines de mathématiques et de physique telles que la géométrie algébrique, les algèbres d'opérateurs en mécanique quantique, robotique, etc ... (voir [BB05] pour plus de détails).

Le groupe de tresses a plusieurs interprétations, par exemple, comme le groupe de tresses géométriques dans \mathbb{R}^3 , comme le groupe fondamental de certain espace de configurations, comme sous groupe d'un groupe d'automorphismes d'un groupe libre, etc

Un groupe est dit linéaire s'il admet une représentation fidèle dans un groupe de matrices. le problème de linéarité des groupes de tresses revient en 1936 quand Burau [Bur36] découvre une représentation de B_n , qui depuis porte son nom. Cette représentation envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. C'est la première représentation non triviale connue du groupe de tresses pour laquelle ont été démontrés des résultats de fidélité, malheureusement elle a l'inconvénient de ne pas être fidèle pour $n \geq 5$. Elle donne lieu au premier des invariants polynomiaux des nœuds, le polynôme d'Alexander.

En 2000, Krammer [Kra00] a défini une nouvelle représentation de groupes de tresses qui envoie B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $m \times m$, où $m = n(n - 1)/2$, dont les coefficients sont dans l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$. La finalité de ce mémoire est de montrer que cette représentation est fidèle pour $n = 4$.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier, nous donnons les différentes définitions équivalentes des groupes de tresses, par générateurs et relations, et trois interprétations géométriques : via les tresses géométriques à n brins, via l'espace de configuration à n points dans le plan, et via le groupe d'homéomorphismes du disque dans \mathbb{R}^2 avec n points distingués. Finalement nous identifions le groupe des tresses avec le groupe de difféotopies. Dans le deuxième chapitre nous citons deux représentations des groupes de tresses, de Burau et de Krammer. Nous étudions la fidélité de la représentation de Burau, ensuite nous allons introduire la représentation de Krammer par une nouvelle interprétation de groupe de tresses. Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la fidélité de la représentation de Krammer pour $n = 4$.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

Ce chapitre regroupe les différentes définitions équivalentes des groupes de tresses, comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre, comme groupe de difféotopies d'un disque épointé, comme groupe fondamental d'un espace de configuration à n points dans le plan. Dans tout ce mémoire I désigne l'intervalle $[0, 1]$, D un disque fermé dans \mathbb{R}^2 .

1.1 Groupes de tresses

1.1.1 Tresses géométriques

Définition 1.1.

On appelle tresse géométrique à n brins b la réunion de n courbes dans $\mathbb{R}^2 \times [0; 1]$ appelées brins de b reliant les points $(1, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$ aux points $(1, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$ et coupant en n points chaque plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ avec $t \in I = [0; 1]$.

Deux tresses géométriques à n brins b et b' sont isotopes s'il existe une suite continue de tresses géométriques à n brins b_s ($s \in I$) tel que $b_0 = b$ et $b_1 = b'$, i.e., s'il existe une application continue $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ tel que pour tout $s \in I$, l'application $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ qui fait correspondre à $p \in b$ l'élément $F(p, s)$ est un plongement, son image est une tresse géométrique à n brins, $F_0 = id$ et $F_1(b) = b'$.

On appelle tresse à n brins une classe d'équivalence de tresses géométriques à n brins vis-à-vis de l'isotopie. Si b est une tresse géométrique, on note par $[b]$ sa classe d'équivalence vis-à-vis de l'isotopie.

Étant donné deux tresses géométriques b et b' . On définit le produit bb' comme étant l'ensemble des points $(p, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$ tels que $(p, 2t) \in b$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $(p, 2t - 1) \in b'$ si

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. D'une autre façon, bb' est la tresse géométrique obtenu en plaçant b' au-dessus de b et en comprimant.

Le groupe de tresse B_n est l'ensemble des tresses à n brins muni du produit donné par $[b][b'] = [bb']$.

1.1.2 Diagrammes de tresses

Un diagramme de tresse à n brins est un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$ qui est la réunion de n courbes appelées les brins de \mathcal{D} qui vérifient les trois conditions suivantes :

1. Chaque brin est homéomorphe à l'image de l'intervalle I par la projection $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$.
2. Chaque point de l'ensemble $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ est l'extrémité d'un unique brin.
3. Chaque point de $\mathbb{R} \times I$ appartient à au plus deux brins. A chaque point d'intersection de deux brins qu'on appelle "point double", ces brins sont transverses. On indique le brin passant sous l'autre par une légère discontinuité du trait.

Chaque diagramme de tresse représente une classe d'isotopie de tresses géométriques. Deux diagrammes de tresses proviennent d'une même tresse si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements, dits de Reidemeister de type *I*, *II* et *III*.

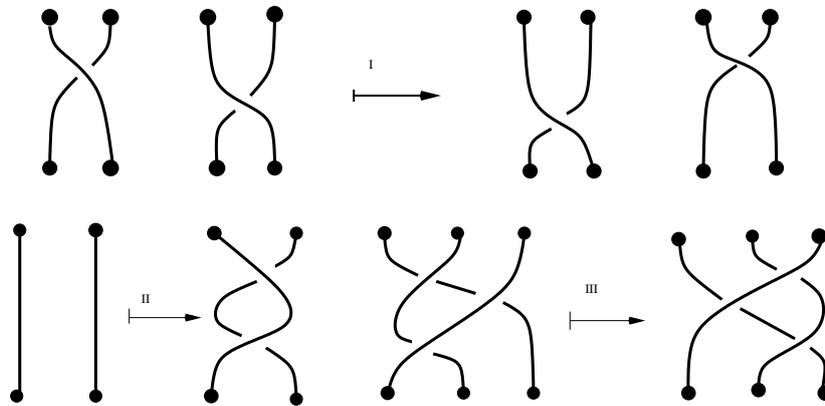


FIGURE 1.1 – Mouvements de Reidemeister

1.2 Générateurs et relations

Le groupe de tresses B_n peut être présenté par générateurs et relations. Les générateurs sont $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, les relations entre les générateurs sont :

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|j - i| \geq 2$.
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n - 2$.

La deuxième relation est appelé relation de tresse.

A chaque générateur on associe une tresse géométrique. On fait correspondre au générateur σ_i la tresse géométrique à extrémités dans $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ dont tous les brins sont verticaux sauf pour les brins i et $i + 1$ qui se croisent, le brin i passant sous le brin $i + 1$.

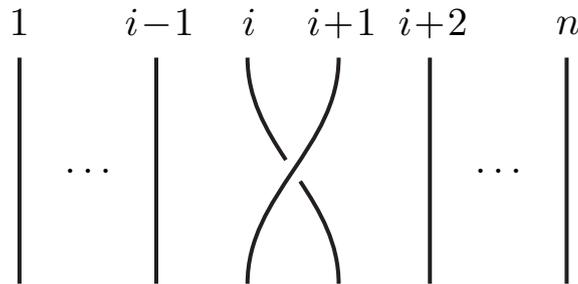


FIGURE 1.2 – Le générateur σ_i

Soit \mathcal{S}_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On associe à chaque générateur σ_i de B_n la transposition s_i , où s_i permute i et $i + 1$ et laissant fixe les autres éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ceci nous permet de définir un homomorphisme de groupes $\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$ appelé projection.

Définition 1.2.

Le noyau de la projection naturelle $\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$ est appelé **groupe de tresses pures** noté par P_n , $P_n = \ker(\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}_n)$.

On appelle tresse positive toute tresse représentée par des mots de tresses qui ne contient pas des lettres de la forme σ_i^{-1} . L'ensemble des tresses positives sera noté B_n^+ .

B_n^+ muni du produit des tresses est un monoïde. En 1969, Garside a montré que la présentation ci-dessus ne définit non seulement le groupe B_n , mais elle définit aussi le monoïde B_n^+ .

1.3 Espaces de configurations

Soit M une variété connexe de $\dim \geq 2$ éventuellement avec bord. L'ensemble

$$\mathcal{F}_n(M) = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in M \times M \times \dots \times M \mid u_i \neq u_j \text{ pour tout } i \neq j\}$$

est appelé l'**espace de configuration** de n -uplets ordonnés de n points distincts de M .

On appelle **groupe de tresses pures** de M à n brins le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$.

On fixe un nombre fini $m \geq 0$ de points $Q_m \subset \overset{\circ}{M} = M - \partial M$, et on note

$$\mathcal{F}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_n(M - Q_m)$$

Il est clair que $\mathcal{F}_{0,n}(M) = \mathcal{F}_n(M)$ et $\mathcal{F}_{m,1}(M) = M - Q_m$. Le groupe symétrique \mathcal{S}_n agit sur $\mathcal{F}_{m,n}(M)$ par permutation des coordonnées. L'espace quotient $\mathcal{C}_{m,n}(M) = \mathcal{F}_{m,n}(M)/\mathcal{S}_n$ est appelé l'espace de configuration de n -uplets non-ordonnés de n points distincts de $M - Q_m$.

On appelle groupe de tresses de $M - Q_m$ à n brins le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C}_{m,n}(M))$.

Théorème 1.1.

- (1) $P_n \cong \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$
- (2) $B_n \cong \pi_1(\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2), q)$ où q est le point de $\mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ représenté par l'ensemble $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Preuve.

(1) L'isomorphisme est obtenu en associant à chaque tresse géométrique pure b le chemin $\beta : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ défini par $\beta(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ tel que le i^{em} brin de b intersecte le plan $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ au point $(u_i(t), t)$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ce chemin a comme origine et extrémité le point $((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0))$.

(2) A chaque tresse géométrique b' on associe le lacet $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}_{0,n}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\alpha(t) = b_t$ tel que $b_t \times \{t\} = b' \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$. □

1.4 Automorphismes de tresses de groupes libres

Nous donnons la définition de groupe de tresses comme groupe d'automorphismes d'un groupe libre sur n générateurs. Soit F_n un groupe libre sur x_1, x_2, \dots, x_n .

Définition 1.3.

On dit qu'un automorphisme φ de F_n est un automorphisme de tresses s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Il existe une permutation μ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $\varphi(x_k)$ et conjugué dans F_n à $x_{\mu(k)}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

On note l'ensemble des automorphismes de tresses de F_n par \tilde{B}_n . Remarquons qu'un automorphisme de F_n est totalement déterminé par son action sur les générateurs x_1, x_2, \dots, x_n . D'après la définition, l'inverse d'un automorphisme de tresses et la composition des automorphismes de tresses sont aussi des automorphismes de tresses. D'où \tilde{B}_n muni de la loi de composition $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$ pour tout $\varphi, \psi \in \tilde{B}_n$ est un groupe.

Exemple 1.4.1.

Les deux automorphismes de F_n suivants définissent deux automorphismes de tresses de F_n mutuellement inverses $\tilde{\sigma}_i$ et $\tilde{\sigma}_i^{-1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\tilde{\sigma}_i(x_k) = \begin{cases} x_{k+1} & \text{si } k = i, \\ x_k^{-1} x_{k-1} x_k & \text{si } k = i+1, \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases} ; \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = \begin{cases} x_k x_{k+1} x_k^{-1} & \text{si } k = i, \\ x_{k-1} & \text{si } k = i+1, \\ x_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

• $k = i$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_k x_{k+1} x_k^{-1}) = \tilde{\sigma}_i(x_k) \tilde{\sigma}_i(x_{k+1}) [\tilde{\sigma}_i(x_k)]^{-1} \\ &= x_{k+1} x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} x_{k+1}^{-1} = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k+1}) = x_k. \end{aligned}$$

• $k = i+1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_{k+1}) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k^{-1} x_{k-1} x_k) = [\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)]^{-1} \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_{k-1}) \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) \\ &= x_{k-1}^{-1} x_{k-1} x_k x_{k-1}^{-1} x_{k-1} = x_k. \end{aligned}$$

• $k \neq i, k \neq i+1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \circ \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) &= \tilde{\sigma}_i(\tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k)) = \tilde{\sigma}_i(x_k) = x_k. \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \circ \tilde{\sigma}_i(x_k) &= \tilde{\sigma}_i^{-1}(\tilde{\sigma}_i(x_k)) = \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = x_k. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.

Soit M une variété connexe de $\dim \geq 2$ éventuellement avec bord. L'application $P : \mathcal{F}_{m,n}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,r}(M)$ défini par $P(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ où $1 \leq r < n$, est un fibré localement trivial de fibre $\mathcal{F}_{m+r, n-1}(M)$.

Preuve.

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \mathcal{F}_{m+r, n-r}(M) & \xrightarrow[\varphi^{-1}]{\text{homéo}} & P^{-1}(U) \subset \mathcal{F}_{m, n}(M) \\
 & \searrow P_1^r & \downarrow P \text{ fibré} \\
 & & U \subset \mathcal{F}_{m, r}(M)
 \end{array}$$

On considère pour un certain point base $u^0 = (u_1^0, \dots, u_r^0)$ dans $\mathcal{F}_{m, r}(M)$ la fibre $P^{-1}(u^0) = \{(u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n) \in \mathcal{F}_{m, n}(M) /$

$$u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n \text{ sont distincts dans } M - Q_m\}.$$

Si on choisit Q_{m+r} égale à $Q_m \cup \{u_1^0, \dots, u_r^0\}$, alors

$$\mathcal{F}_{m+r, n-1}(M) = \{(y_{r+1}, \dots, y_n) / y_{r+1}, \dots, y_n \text{ sont distincts et dans } M - Q_{m+r}\}.$$

Donc il existe un homéomorphisme $h : \mathcal{F}_{m+r, n-r}(M) \longrightarrow P^{-1}(u_1^0, \dots, u_r^0)$ défini par

$$h(y_{r+1}, \dots, y_n) = (u_1^0, \dots, u_r^0, y_{r+1}, \dots, y_n).$$

Nous donnons la preuve de la trivialisaton locale de P seulement dans le cas $r = 1$. Fixons un point $x_0 \in M - Q_m = \mathcal{F}_{m, 1}(M) = \mathcal{F}_{m, r}$. Ajoutons un autre point q_{m+1} à l'ensemble Q_m pour former Q_{m+1} . Prenons un homéomorphisme $f : M \longrightarrow M$ qui fixe Q_m comme ensemble (*i.e.*, $f(Q_m) = Q_m$), tel que $f(q_{m+1}) = x_0$. Soit U un voisinage de x_0 dans $M - Q_m$ homéomorphe à une boule ouverte et soit \bar{U} la fermeture de U . Définissons une application $\theta : U \times \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ avec les propriétés suivantes :

- (i) $\theta_u : \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ définie par $\theta_u(y) = \theta(u, y)$ est un homéomorphisme qui fixe $\partial\bar{U}$.
- (ii) $\theta_u(u) = x_0$.

Selon (i), l'application θ peut être prolonger à $\theta : \bar{U} \times M \longrightarrow M$ en définissant $\theta(u, y) = y$ pour $y \notin U$. L'homéomorphisme cherché et son inverse

$$U \times \mathcal{F}_{m+1, n-1}(M) \xrightleftharpoons[\varphi^{-1}]{\varphi} P^{-1}(U)$$

sont donnés par

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, u_2, \dots, u_n) &= (u, \theta_u^{-1} f(u_2), \dots, \theta_u^{-1} f(u_n)), \\
 \varphi^{-1}(u, u_2, \dots, u_n) &= (u, \theta_u^{-1} f^{-1}(u_2), \dots, \theta_u^{-1} f^{-1}(u_n)).
 \end{aligned}$$

□

Définition 1.4.

On appelle **homomorphisme oubliant** toute application $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$, pour chaque

$n \geq 2$, définie comme suit : a chaque élément de P_n représenté par une tresse géométrique b , où le $i^{\text{ème}}$ brin de b relie $(i, 0, 0)$ à $(i, 0, 1)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, on associe la tresse $f_n(b)$ à $n - 1$ brins obtenue à partir de b en oubliant le $n^{\text{ème}}$ brin.

Il est clair que si b et b' sont isotopes, alors $f_n(b)$ et $f_n(b')$ sont aussi isotopes et donc f_n est une application bien définie.

Remarque 1.4.1.

- f_n est un homomorphisme de groupe (d’après la définition de la multiplication des tresses géométriques).
- $f_n \circ i = id_{P_{n-1}}$ où i est l’inclusion naturelle $i : P_n \rightarrow P_{n-1}$.
- L’homomorphisme f_n est surjectif.

Pour $n \geq 2$, on pose $U_n = \ker(f_n : P_n \rightarrow P_{n-1})$. Notons que puisque f_n a une section, alors P_n est isomorphe au produit semi-direct de P_n par U_n . Chaque tresse pure $\beta \in P_n$ peut être développer uniquement sous la forme $\beta = i(\beta')\beta_n$ avec $\beta' \in P_{n-1}$ et $\beta_n \in U_n$. Ici $\beta' = f_n(\beta)$ et $\beta_n = i(\beta')^{-1}\beta$. En appliquant ce développement inductivement, on conclut que β peut être écrite uniquement sous la forme

$$\beta = \beta_2\beta_3\beta_4\dots\beta_n, \tag{1.1}$$

où $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ pour $j = 2, 3, \dots, n$. L’écriture (1.1) est appelée la forme *normale* de β [Bir01].

Posons, pour $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-1}^{-1}.$$

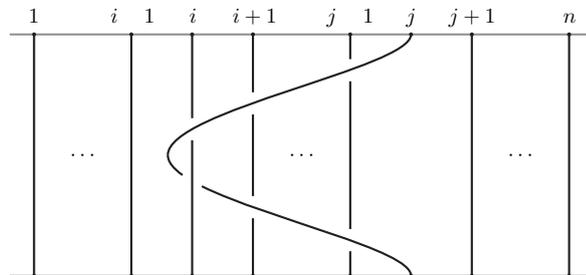


FIGURE 1.3 – Diagramme de tresse de $A_{i,j}$

Il est claire que $A_{i,n} \in U_n$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Rappelons qu'une variété connexe M est *asphérique* si son revêtement universel est contractile, ou de façon équivalente, ses groupes d'homotopies $\pi_i(M)$ s'annulent pour tout $i \geq 2$.

Lemme 1.3.

Pour tout $m \geq 0$; $n \geq 1$ la variété $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)$ est asphérique.

Preuve.

On considère le fibré $\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - Q_m$ de fibre $\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)$ définie ci-dessus. La chaîne d'homotopie de ce fibré donne une chaîne exacte

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) \longrightarrow \dots$$

On observe que $\mathbb{R}^2 - Q_m$ contient le cale de m cercles comme une déformation rétractée. Le cale des cercles est asphérique puisque son revêtement universel est un arbre est par conséquent il est contractile. Donc, $\mathbb{R}^2 - Q_m$ est asphérique de sorte que $\pi_i(\mathbb{R}^2 - Q_m) = 0$ pour $i \geq 2$. On conclut que pour tout $i \geq 2$,

$$\pi_i(\mathcal{F}_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \cong \pi_i(\mathcal{F}_{m+1,n-1}(\mathbb{R}^2)).$$

□

Théorème 1.4.

Pour tout $n \geq 2$, le groupe U_n est libre sur les $(n-1)$ générateurs $\{A_{i,n}\}_{i=1,\dots,n-1}$

Preuve.

En appliquant le [Théorème 1.2](#) sur $M = \mathbb{R}^2$, on obtient le fibré localement trivial $P : \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ de fibre $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$. Ceci donne une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{P_{\#}} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 1 \quad (1.2)$$

où on utilise la trivialisatoin de $\pi_2(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2))$ (d'après le [Lemme 1.3](#)) et la trivialisatoin de $\pi_0(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ (puisque $\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$ est connexe).

Puisque $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) \cong P_n$ et $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \cong P_{n-1}$, alors l'homomorphisme $P_{\#}$ peut être identifier avec l'homomorphisme oubliant $f_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}$. Donc (1.2) prend la forme

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow 1 \quad (1.3)$$

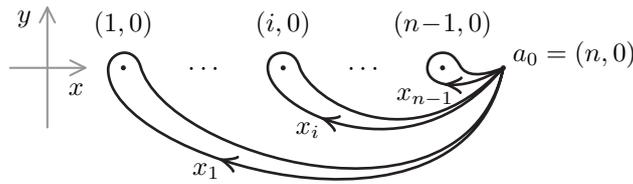


FIGURE 1.4 – Les générateurs x_1, \dots, x_{n-1} de $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$

Pour calculer $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1})$, on prend comme $Q_{n-1} \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n - 1, 0)\}$ et on prend $a_0 = (n, 0)$ comme point base de $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$. Clairement, le groupe $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_{n-1}, a_0)$ est libre de rang $n - 1$ engendré par les générateurs libres x_1, \dots, x_{n-1} indiqué dans la figure suivante

L'homomorphisme $\pi_1(\mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow P_n = \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ dans (1.3) est induit par l'inclusion $\mathbb{R}^2 - Q_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ qui associé au point $a \in \mathbb{R}^2 - Q_{n-1}$ l'uplet de n points $((1, 0), (2, 0), \dots, (n - 1, 0); a)$. En comparant les Figures 1.3 et 1.4, on observe que cet homomorphisme envoie x_i sur $A_{i,n}$ pour tout i . Maintenant, la suite exacte (1.3) nous donne le Théorème 1.4. □

Corollaire 1.5.

Pour $i = 1, 2, \dots, n$, l'enlèvement du $i^{\text{ème}}$ brin définit un homomorphisme de groupes $f_n^i : P_n \longrightarrow P_n$. Le noyau de f_n^i est un groupe libre de rang $n - 1$ avec les générateurs libres $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots, A_{i,n}$.

Preuve.

On pose $\alpha_{i,n} = \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_i$.

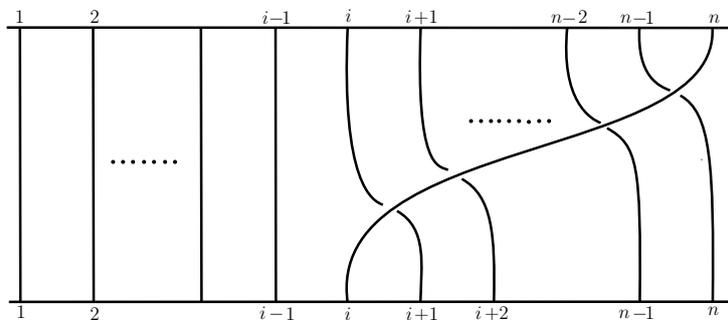


FIGURE 1.5 – Diagramme de tresse de $\alpha_{i,n}$

On remarque que pour chaque $\beta \in B_n$ l'enlèvement du $n^{\text{ème}}$ brin de $\alpha_{i,n}\beta\alpha_{i,n}^{-1}$ produit la tresse

$$1_{n-1}f_n^i(\beta)1_{n-1}.$$

Alors, $f_n^i(\beta) = f_n(\alpha_{i,n}\beta\alpha_{i,n}^{-1})$. D'où $f_n = f_n^n$. Donc $\ker f_n^i = \alpha_{i,n}^{-1}(\ker f_n)\alpha_{i,n} = \alpha_{i,n}^{-1}U_n\alpha_{i,n}$.

En utilisant le [Théorème 1.4](#) et en remarquant que la conjugaison par $\alpha_{i,n}^{-1}$ transforme l'ensemble $\{A_{j,n}\}_{j=1,\dots,n-1}$ à l'ensemble $\{A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots, A_{i,n}\}$, car on a pour tout $1 \leq i < j < k \leq n$,

$$\alpha_{j,k}A_{i,j}\alpha_{j,k}^{-1} = A_{i,k} \quad \text{et} \quad \alpha_{i,k}A_{i,j}\alpha_{i,k}^{-1} = A_{j,k},$$

on obtient le résultat. □

Théorème 1.6.

L'application $\xi : B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$ définie par $\xi(\sigma_i) = \tilde{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$, est un isomorphisme de groupes.

Preuve.

L'image d'une tresse $\beta \in B_n$ par ξ sera notée $\tilde{\beta}$. Dans la preuve de ce théorème il est nécessaire de donner la définition explicite de $\tilde{\beta}$. Les éléments $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1} \in \tilde{B}_n$ vérifient les relations de tresses, donc la formule $\sigma_i \longmapsto \tilde{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$, définit un homomorphisme de groupes $B_n \longrightarrow \tilde{B}_n$. On va donner une autre définition pour cet homomorphisme. Si $\beta \in B_n$ et $u \in U_{n+1} = \ker f_{n+1}$, alors $i(\beta)ui(\beta)^{-1} \in P_{n+1}$ car P_{n+1} est un sous-groupe normal de B_{n+1} . De plus, d'après la définition de f_{n+1} , il découle que $i(\beta)ui(\beta)^{-1} \in U_{n+1}$. Par suite la formule $u \longmapsto i(\beta)ui(\beta)^{-1}$ définit un automorphisme de U_{n+1} . On obtient donc un homomorphisme de groupe ξ de B_n au groupe $\text{Aut}U_{n+1}$.

D'après le [Théorème 1.4](#) on identifie U_{n+1} avec F_n , en posant $x_k = A_{k,n+1} \in U_{n+1}$, pour $k = 1, 2, \dots, n$. Sous cette identification on a $\xi(\beta) = \tilde{\beta}$ pour tout $\beta \in B_n$. En effet, il suffit de vérifier cette égalité pour les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ de B_n . Ceci revient à la vérification des égalités

$$i(\sigma_i)A_{k,n+1}i(\sigma_i)^{-1} = \begin{cases} A_{k+1,n+1} & \text{si } k = i, \\ A_{k,n+1}^{-1}A_{k-1,n+1}A_{k,n+1} & \text{si } k = i + 1, \\ A_{k,n+1} & \text{si non.} \end{cases}$$

Ces égalités sont vérifiées on dessinant leurs diagrammes de tresses et de vérifier que les deux diagrammes des deux côtés représentent des tresses isotopes.

Maintenant, nous allons montrer que l'homomorphisme ξ est injectif. Soit $\beta \in B_n$ telle que $\tilde{\beta} = 1$. En abélianisant $\tilde{\beta}$, on obtient l'automorphisme identique de $U_{n+1}/[U_{n+1}, U_{n+1}]$. Alors, $\pi(\beta) = 1$ et donc $\beta \in P_n \subset B_n$. D'après (1.1), $\beta = \beta_2\beta_3\dots\beta_n$ où $\beta_j \in U_j \subset P_j \subset P_n$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

Supposons que $\beta \neq 1$. Soit $i \leq n$ le plus grand entier tel que $\beta_i \neq 1$. Donc $\beta = \beta_2\beta_3\dots\beta_i$. Puisque $\tilde{\beta} = 1$, on doit avoir $\xi(\beta) = 1$, d'où $i(\beta) \in P_{n+1}$ commute avec tout les éléments de U_{n+1} et en particulier avec $A_{i,n+1}$. On note que $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{i-1}$ sont des tresses sur $i-1$ brins extrêmement gauches, donc ils commutent avec $A_{i,n+1}$. D'après le Corollaire 1.5, les tresses $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, \dots, A_{i,n+1}$ sont des générateurs libres d'un sous-groupe libre de P_{n+1} . D'où β_i commute avec $A_{i,n+1}$ et se trouve dans le groupe $U_i \subset P_i \subset P_{n+1}$ engendré par $A_{1,i}, \dots, A_{i-1,i}$. Mais ceci est possible que si $\beta_i = 1$, ce qui est contradictoire avec le choix de i . Donc $\beta = 1$.

Montrons que ξ est surjectif. Soit φ un automorphisme de tresses de F_n non-trivial. supposons que $\varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$, pour $k = 1, 2, \dots, n$, et A_k est un mot dans l'alphabet $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$. On peut toujours choisir A_k de sorte que le produit $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ est réduit, i.e., ne contient pas des entrées consécutifs $x_r x_r^{-1}$ ou $x_r^{-1} x_r$. D'après la définition de l'automorphisme de tresses on obtient

$$A_1 x_{\mu(1)} A_1^{-1} A_2 x_{\mu(2)} A_2^{-1} \dots A_n x_{\mu(n)} A_n^{-1} = x_1 x_2 \dots x_n. \quad (1.4)$$

On appelle le terme $x_{\mu(k)}$ au milieu de $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ *terme special*. Chaque lettre x_1, x_2, \dots, x_n apparaît comme terme special du côté gauche de (1.4) qu'une seule fois. L'égalité (1.4) implique que le côté gauche de (1.4) va être réduit au côté droit après toute réduction libre possible i.e., annulation des entrées $x_r x_r^{-1} = x_r^{-1} x_r = 1$. On distingue deux cas :

Cas1 : Le terme special $x_{\mu(k)}$ est annulé par la lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ pendant ces réductions. ce $x_{\mu(k)}^{-1}$ ne peut pas être obtenu du mot $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ lequel supposé réduit.

• Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k-1}^{-1} alors, on doit avoir une égalité des mots $A_{k-1}^{-1} = B x_{\mu(k)} A_k^{-1}$ pour un certain mot B , par suite

$$A_{k-1} = A_k x_{\mu(k)} B^{-1}. \quad (1.5)$$

• Si la lettre $x_{\mu(k)}^{-1}$ qui annule le terme special $x_{\mu(k)}$ obtenue du côté droite du terme special $x_{\mu(k+1)}$ alors, on doit avoir $A_{k+1}^{-1} = A_{\mu(k+1)}^{-1} A_{k+1}^{-1} A_k x_{\mu(k)}^{-1} B$ pour un certain mot B , puis $A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$, on pose $A = A_{k+1}^{-1} B^{-1} x_{\mu(k)}$ on aura

$$A_k = A_{k+1} x_{\mu(k+1)} A. \quad (1.6)$$

- De même si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient de A_{k+1} on aura

$$A_{k+1} = A_k x_{\mu(k)}^{-1} A. \quad (1.7)$$

pour un certain mot A .

- Si $x_{\mu(k)}^{-1}$ vient du côté gauche du terme special $x_{\mu(k-1)}^{-1}$, on aura $A_{k-1} = B x_{\mu(k)}^{-1} A_k^{-1} A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1}$, tel que B un mot alors, $A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$, on pose $A = A_{k-1}^{-1} B x_{\mu(k)}^{-1}$ d'où

$$A_k = A_{k-1} x_{\mu(k-1)}^{-1} A. \quad (1.8)$$

Cas 2 : Si les termes spéciaux du côté gauche de (1.4) ne s'annulent pas avec d'autres lettres. Alors on doit avoir $\mu(k) = k$ pour tout k , A_1 et A_n sont des mots vides, et toute paire $A_k^{-1} A_{k+1}$ s'annule de sorte que $A_k = A_{k+1}$ pour tout k . Donc $\varphi = id$ ce qui contrarie le choix de φ .

On affirme qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et un mot A (possible vide) dans $x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}$ qui satisfait l'une des deux conditions suivantes

- (a) On a l'égalité des mots $A_j = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A$.
- (b) On a l'égalité des mots $A_{j+1} = A_j x_{\mu(j)}^{-1} A$.

Pour monter cette affirmation, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} (a) &= (1.5) && \text{pour } j = k-1, \quad A = B^{-1}, \\ (b) &= (1.6) && \text{pour } j = k, \\ (b) &= (1.7) && \text{pour } j = k, \\ (b) &= (1.8) && \text{pour } j = k-1. \end{aligned}$$

L'affirmation ci-dessus implique que φ est dans l'image de ξ . Pour voir cela, définissons la *longueur* de φ comme étant la somme sur $k = 1, 2, \dots, n$ des longueurs des lettres des mots $A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}$.

Si (a) est satisfaite, alors l'homomorphisme $\varphi \tilde{\sigma}_j = \varphi \circ \tilde{\sigma}_j : F_n \longrightarrow F_n$ peut être calculer comme suit

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{\sigma}_j)(x_k) &= \varphi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1} && \text{pour } k \neq j, j+1, \\ \varphi(\tilde{\sigma}_j)(x_j) &= \varphi(x_{j+1}) = A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1}, \\ \text{et } \varphi(\tilde{\sigma}_j)(x_{j+1}) &= \varphi(x_{j+1}^{-1} x_j x_{j+1}) \\ &= A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_j x_{\mu(j)} A_j^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1} \\ &\stackrel{(a)}{=} A_{j+1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} \times A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A x_{\mu(j)} A^{-1} x_{\mu(j+1)}^{-1} A_{j+1}^{-1} A_{j+1} x_{\mu(j+1)} A_{j+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Le mot $A_{j+1}A$ est plus court que $A_j = A_{j+1}x_{\mu(j+1)}A$. Par conséquent, la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j$ est plus courte que celle de φ .

Si (b) est vérifiée, alors la longueur de $\varphi\tilde{\sigma}_j^{-1}$ est plus courte que celle de φ . Ceci implique que φ peut être réduit à l'identité par répétition de composition seulement avec $\tilde{\sigma}_j$ et $\tilde{\sigma}_j^{-1}$. Ainsi φ est un produit de puissances de $\tilde{\sigma}_j$. Par conséquent φ est dans l'image de l'homomorphisme $\beta \mapsto \tilde{\beta}$. \square

Ce théorème donne une solution au problème de mot dans B_n . Pour un groupe défini par générateurs et relations, le problème de mot consiste à trouver un algorithme qui permet de décider si un mot donné dans les générateurs représente l'élément neutre du groupe ou non. D'après ce théorème, une tresse $\beta \in B_n$ est égale à 1 si et seulement si $\tilde{\beta} = id$. Pour vérifier cette dernière condition, il suffit que $\tilde{\beta}(x_k) = x_k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$.

1.5 Groupe de difféotopies

Dans cette section, nous donnons la définition du groupe de difféotopies et nous ferons le lien entre B_n , \tilde{B}_n , et le groupe de difféotopies d'un disque du plan \mathbb{R}^2 privé de n points. Soit M une variété orientée éventuellement à bord, et Q un ensemble fini de points distincts dans $M - \partial M$, appelés points enlevés (ou perforations).

Dans tout ce qui suit, un endo-homéomorphisme de (M, Q) est un homéomorphisme $f : M \rightarrow M$ qui satisfait les conditions suivantes :

- i) $f(Q) = Q$ (i.e., $\forall x \in Q; f(x) \in Q$).
- ii) $\forall x \in \partial M : f(x) = x$ (i.e., $f|_{\partial M} = id_{\partial M}$).

On note $\mathcal{H}(M, Q)$ le groupe des endo-homéomorphismes de (M, Q) muni de loi de composition du groupe, noté multiplicativement, qui est la composition d'homéomorphismes : $f.g = f \circ g$ pour $f, g \in \mathcal{H}(M, Q)$.

Remarquons que chaque endo-homéomorphisme induit une permutation sur Q . Notons que si M est connexe et $\partial M \neq \emptyset$, alors tout homéomorphisme $f : M \rightarrow M$ préserve l'orientation.

Définition 1.5.

On dit que deux endo-homéomorphismes f_0, f_1 de (M, Q) sont isotopes s'il existe une famille

$\{f_t\}_{t \in I}$ d'endo-homéomorphismes de (M, Q) telle que l'application

$$\begin{aligned} M \times I &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto f_t(x). \end{aligned}$$

est continue. La famille $\{f_t\}_{t \in I}$ est appelée une isotopie de f_0 à f_1 .

Il est facile de vérifier que l'isotopie des endo-homéomorphismes de (M, Q) est une relation d'équivalence, et les endo-homéomorphismes qui sont isotopes induisent la même permutation sur Q .

Définition 1.6.

Le **groupe de difféotopies** (mapping class group) de (M, Q) , noté $\mathcal{M}(M, Q)$, est le groupe des classes d'isotopies des endo-homéomorphismes de (M, Q) , muni de la loi de composition, noté multiplicativement, $fg = f \circ g$ pour $f, g \in \mathcal{M}(M, Q)$. On note $\mathcal{M}(M) = \mathcal{M}(M, \emptyset)$.

Exemple 1.5.1.

Soit $D = D^n$ une boule fermée dans \mathbb{R}^n de dimension $n \geq 1$, on a $\mathcal{M}(D) = \{1\}$.

Preuve.

On peut prendre D la boule unité de \mathbb{R}^n . On note la norme Euclidienne du vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ par $|z|$. Pour tout endo-homéomorphisme h de D , la formule suivante :

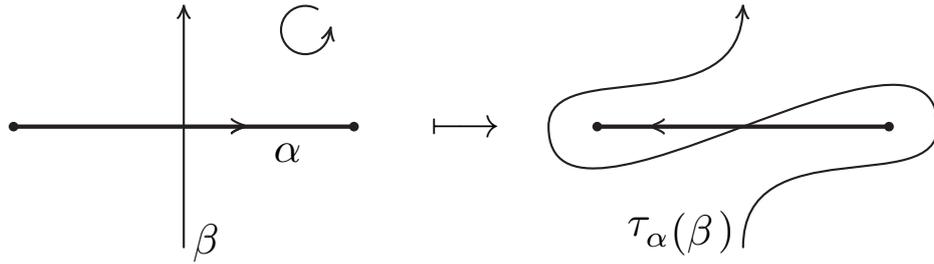
$$h_t(z) = \begin{cases} z & \text{si } t \leq |z| \leq 1, \\ th(z/t) & \text{si } |z| < t. \end{cases}$$

définit une isotopie $\{h_t : D \longrightarrow D\}_{t \in I}$ de $h_0 = id$ à $h_1 = h$, on note que si $h(0) = 0$ alors $h_t(0) = 0$ pour tout $t \in I$.

Par conséquent on obtient $\mathcal{M}(M, \{0\}) = \{1\}$. □

1.5.1 Demi-twist

- On appelle *arc tendu* (spanning arc) dans (M, Q) un sous-ensemble de M à extrémités dans Q , qui est homéomorphe à $I = [0, 1]$ et d'intérieur disjoint de $Q \cup \partial M$.
- Rappelons qu'une courbe dans M est *simple* si elle n'admet pas de point double. Ici on considère que les arcs simples.

FIGURE 1.6 – L'action de τ_α sur une courbe transversale

Étant donné un arc tendu α dans (M, Q) et un voisinage régulier U de α dans M . Le demi twist $\tau_\alpha : (M, Q) \rightarrow (M, Q)$ est obtenu comme résultat d'isotopie de l'application $id : M \rightarrow M$ tournant α dans M autour de son point médian par un angle π à la direction de l'orientation de M . Identifiant U avec le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ dans \mathbb{C} de sorte que $\alpha = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et M est orienté dans le sens positif dans \mathbb{C} . Le demi-twist est (la classe d'isotopie de) l'homéomorphisme $\tau_\alpha : M \rightarrow M$ défini par

$$\tau_\alpha(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in M - U, \\ -z & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ \exp(-2\pi i|z|)z & \text{si } \frac{1}{2} \leq |z| < 1. \end{cases}$$

Clairement, $\tau_\alpha \in \mathcal{M}(M, Q)$ ne dépend pas du choix de U .

Propriétés des demi-twists

- (i). Si $f : (M, Q) \rightarrow (M', Q')$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation des deux paires comme ci-dessus et α est un arc tendu dans (M, Q) , alors $f(\alpha)$ est un arc tendu dans (M', Q') et

$$\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1} \in \mathcal{M}(M', Q').$$

- (ii). Si α et α' sont deux arcs tendus dans (M, Q) isotopes dans la classe des arcs tendus dans (M, Q) , alors $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$ dans $\mathcal{M}(M, Q)$. En fait, si α, α' sont isotopes, alors il existe un endo-homéomorphisme f de (M, Q) lequel est l'identité sur Q , isotope à l'identité, et envoie α sur α' .

Par (i), $\tau_{\alpha'} = \tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1}$. Puisque f est isotope à l'identité, alors $f\tau_\alpha f^{-1} = \tau_\alpha$.

- (iii). Un endo-homéomorphisme de (M, Q) induit un endo-homéomorphisme de M par l'enlèvement de Q . L'homomorphisme de groupe résultant $\mathcal{M}(M, Q) \rightarrow \mathcal{M}$ envoie τ_α

sur 1.

(iv). Si α, β sont des arcs tendus disjoints, alors

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_\beta \tau_\alpha \in \mathcal{M}(M, Q). \quad (1.9)$$

Ceci est obtenu en utilisant des voisinages disjoints de α et β dans la construction de τ_α et τ_β .

(v). Si α, β sont deux arcs tendus dans (M, Q) qui ont une extrémité commune et ils sont disjoints autrement, alors

$$\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha = \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta \in \mathcal{M}(M, Q). \quad (1.10)$$

pour prouver cette formule fondamentale, on commence par l'égalité $\tau_\alpha(\beta) = \tau_\beta^{-1}(\alpha)$ la quelle peut être vérifié en dessinant les arcs $\tau_\alpha(\beta)$ et $\tau_\beta^{-1}(\alpha)$.

Par (ii), on obtient $\tau_{\tau_\alpha(\beta)} = \tau_{\tau_\beta^{-1}(\alpha)}$. D'après (i) ceci implique $\tau_\alpha \tau_\beta \tau_\alpha^{-1} = \tau_\beta^{-1} \tau_\alpha \tau_\beta$, qui est équivalent à (1.10).

Pour $n \geq 1$, soit $Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Soit D un disque fermé dans \mathbb{R}^2 contenant l'ensemble Q_n dans son intérieur. On oriente D dans le sens direct.

Pour tout $i = 1, 2, \dots, n - 1$, on considère l'arc

$$\alpha_i = [i, i + 1] \times \{0\} \subset D.$$

Cet arc intersect Q_n seulement en ses extrémités. Considérons le demi-twist τ_{α_i} dans $\mathcal{M}(D, Q_n)$.

Théorème 1.7.

B_n est homomorphe à $\mathcal{M}(D, Q_n)$.

Preuve.

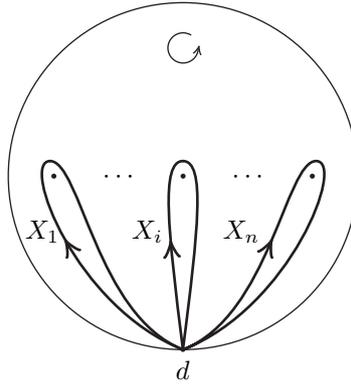
Les formules (1.9), (1.10) impliquent que $\tau_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_2}, \dots, \tau_{\alpha_{n-1}}$ satisfont les relations de tresses. Donc il existe un homomorphisme de groupes $\eta : B_n \longrightarrow \mathcal{M}(D, Q_n)$ tel que $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n - 1$. □

Théorème 1.8.

\tilde{B}_n est homomorphe à $\mathcal{M}(D, Q_n)$.

Preuve.

On va définir un homomorphisme de groupes $\rho : \mathcal{M}(D, Q_n) \longrightarrow \tilde{B}_n$. Sélectionnons un point base $d \in \partial D$ comme dans la [Figure 1.7](#).

FIGURE 1.7 – Les lacets X_1, \dots, X_n dans $D - Q_n$.

Le groupe fondamental $\pi_1(D - Q_n, d)$ est libre de rang n engendré par les générateurs x_1, x_2, \dots, x_n représentés par les lacets X_1, X_2, \dots, X_n comme dans la Figure 1.7. Tout endo-homéomorphisme f de (D, Q_n) peut être restreint à $D - Q_n$ et donne un endo-homéomorphisme de $D - Q_n$. Ce dernier envoie $d \in \partial D$ sur lui-même, et induit un automorphisme de groupes $\rho(f)$ de $F_n = \pi_1(D - Q_n, d)$. Cet automorphisme dépend seulement de la classe d'isotopie de f , i.e., deux endo-homéomorphismes de $D - Q_n$ qui sont isotopes induisent le même automorphisme de F_n .

Vérifions que $\rho(f)$ est un automorphisme de tresses de F_n . Le lacet X_k dans la Figure 1.7 peut être déformé dans $D - Q_n$ en un petit lacet basé en d qui tourne dans le sens direct autour du point $(k, 0)$. L'homéomorphisme f envoie ce dernier lacet sur un petit lacet basé en d qui tourne dans le sens direct autour du point $(\mu(k), 0)$ pour un certain $\mu(k) \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ce petit lacet peut être déformé au lacet $X_{\mu(k)}$ dans $D - Q_n$. Par conséquent, le lacet $f(X_k)$ peut être déformé en $X_{\mu(k)}$ dans $D - Q_n$. (sous la déformation le point base $f(d) = d$ peut se déplacer dans $D - Q_n$). Ceci implique que les classes d'homotopies de ces deux lacets $\rho(f)(x_k)$ et $X_{\mu(k)}$ sont conjugués dans $\pi_1(D - Q_n, d)$. Cela vérifie la première conditions de la définition (1.3). La deuxième condition découle du fait que le produit $x_1 x_2 \dots x_n$ est représenté par le lacet ∂D basé en d . Ce lacet est préservé par f point par point et, de plus, sa classe d'homotopie dans $\pi_1(D - Q_n, d)$ est invariante par $\rho(f)$.

On conclut que la formule $f \mapsto \rho(f)$ définit une application ρ de $\mathcal{M}(D, Q_n)$ dans \tilde{B}_n . Cette application est un homomorphisme de groupes car

$$\rho(fg) = \rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) = \rho(f)\rho(g) \quad \text{pour tout} \quad f, g \in \mathcal{M}(D, Q_n).$$

□

1.5.2 Groupes d'homéomorphismes et les espaces de configurations

On discute les groupes d'homéomorphismes des variétés et leurs relations avec les espaces de configurations, et leurs applications sur les tresses. On munit $\mathcal{H}(M, Q)$ de la topologie *compacte-ouverte* qui a comme sous base la famille

$$\{(K, U) \mid K \text{ compact de } M, U \text{ ouvert de } M\},$$

où

$$(K, U) = \{f \in \mathcal{H}(M, Q) \mid f(K) \subset U\}.$$

Le groupe $\mathcal{H}(M, Q)$ muni de cette topologie a la structure de groupe topologique. Deux endo-homéomorphismes de (M, Q) sont isotopes si et seulement si ils peuvent être reliés par un chemin dans $\mathcal{H}(M, Q)$, i.e., si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{H}(M, Q)$. En conséquence,

$$\mathcal{M}(M, Q) = \pi_0(\mathcal{H}(M, Q)).$$

On pose, $\mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(M, \emptyset)$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$C_n = C_n(\dot{M}) = \mathcal{F}_n(\dot{M})/\mathcal{S}_n.$$

Pour décrire la relation entre $\mathcal{H}(M)$ et C_n , on définit l'application *évaluation* $e = e_Q : \mathcal{H}(M) \rightarrow C_n$ par $e(f) = f(Q)$ tel que $f \in \mathcal{H}(M)$. il est facile de montrer que e est une application continue surjective.

Proposition 1.9.

L'application $e : \mathcal{H}(M) \rightarrow C_n$ est un fibré localement trivial de fibre $\mathcal{H}(M, Q)$

Preuve.

Soit $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\dot{M})$ l'espace de configuration de n points ordonnés de \dot{M} . On peut factoriser e comme composition d'une application $c : \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{F}_n$ et le revêtement $\mathcal{F}_n \rightarrow C_n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(M) & \xrightarrow{c} & \mathcal{F}_n \\ & \searrow e & \downarrow \text{revêtement} \\ & & C_n \end{array}$$

Pour construire c , on fixe un ordre dans l'ensemble Q , et on définit c par $c(f) = f(Q)$ pour tout $f \in \mathcal{H}(M)$, et l'ordre dans $f(Q)$ est induit par celui dans Q . Pour prouver la proposition

il suffit de prouver que c est un fibré localement trivial.

Soit $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \in \mathcal{F}_n$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, prenons un voisinage ouvert $U_i \subset \overset{\circ}{M}$ de u_i^0 tel que sa fermeture \bar{U}_i est une boule fermée d'intérieure U_i . Puisque les points $u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0$ sont distincts, on peut supposé que U_1, U_2, \dots, U_n sont mutuellement disjoints. Donc $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ est un voisinage de u^0 dans \mathcal{F}_n .

On va prouver que la restriction de c à U est un fibré trivial, i.e., s'il existe un homéomorphisme $c^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{H}(M, Q)$. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, il existe une application continue $\theta_i : U_i \times \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}_i$. En posant $\theta_i^u = \theta_i(u, v)$, on obtient un homéomorphisme $\theta_i^u : \bar{U}_i \rightarrow \bar{U}_i$ qui envoie u_i^0 sur u et fixe la sphère $\partial\bar{U}_i$ point par point (voir la preuve du [Théorème 1.2](#)).

Pour $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$, on définit l'homéomorphisme $\theta^u : M \rightarrow M$ par

$$\theta^u(v) = \begin{cases} \theta_i^{u_i}(v) & \text{si } v \in U_i \text{ où } i = 1, \dots, n, \\ v & \text{si } v \in M - \bigcup_i U_i. \end{cases}$$

L'homéomorphisme θ^u envoie les points $u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0$ sur u_1, u_2, \dots, u_n , respectivement. Observons que

$$c^{-1}(u^0) = \{f \in \mathcal{H}(M) \mid f(u_i^0) = u_i^0, \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

est un sous-groupe fermé de $\mathcal{H}(M)$ qui se compose de tout les $f \in \mathcal{H}(M)$ tels que $f(u_i^0) = u_i^0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. La formule $(u, f) \mapsto \theta^u f$ définit un homéomorphisme $U \times c^{-1}(u^0) \rightarrow c^{-1}(U)$ qui commute avec la projection sur U .

L'homéomorphisme inverse envoie tout $g \in c^{-1}(U)$ sur la pair $(c(g), (\theta^{c(g)})^{-1}g) \in U \times c^{-1}(u^0)$. La preuve que la fibre est $\mathcal{H}(M, Q)$ est semblable à celle du [Théorème 1.2](#). \square

Remarque 1.5.1.

- Deux éléments de $\mathcal{H}(M)$ ont la même image par l'application évaluation e si et seulement si ils se situent dans le même facteur gauche de $\mathcal{H}(M, Q)$ dans $\mathcal{H}(M)$.
- L'application e induit un homéomorphisme de l'espace quotient homogène $\mathcal{H}(M)/\mathcal{H}(M, Q)$ dans C_n .

Soient $n \geq 1$ et $D \subset \mathbb{R}^2$ un disque Euclidien fermé contenant l'ensemble

$$Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}.$$

dans son intérieur. Une isotopie $\{f_t : D \rightarrow D\}_{t \in I}$ dans la classe des endo-homéomorphismes de D est dite *normale* si

$$f_0(Q_n) = Q_n \quad \text{et} \quad f_1 = id_D.$$

D'une manière équivalente, une isotopie normale est un chemin dans $\mathcal{H}(D)$ d'origine un point de $\mathcal{H}(D, Q_n)$ et d'extrémité l'homéomorphisme identique $id_D \in \mathcal{H}(D)$.

Si $\{f_t : D \rightarrow D\}_{t \in I}$ est une isotopie normale dans $\mathcal{H}(D)$, alors l'ensemble

$$\bigcup_{t \in I} (f_t(Q_n), t) \subset \mathbb{R}^2 \times I.$$

est une tresse géométrique à n brins. On dit dans ce cas que l'isotopie $\{f_t\}_{t \in I}$ paramètre cette tresse géométrique.

Lemme 1.10.

Pour toute tresse géométrique $b \subset \mathring{D} \times I$ de n brins, il existe une isotopie normale paramétrant b .

Preuve.

Considérons l'application évaluation $e = e_{Q_n} : \mathcal{H}(D) \rightarrow C_n$ qui envoie $f \in \mathcal{H}(D)$ sur $f(Q_n)$. La tresse b donne lieu à un lacet $f^b : I \rightarrow C_n$ envoyant tout $t \in I$ sur un ensemble de n -points b_t de \mathbb{R}^2 tel que $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\}) = b_t \times \{t\}$. Ce lacet a comme début et fin le point $q = e(id_D) \in C_n$ représenté par Q_n .

Par la [Proposition 1.9](#) et la propriété du relèvement d'homotopie des fibrés localement triviaux, le lacet f^b se relève au chemin $\hat{f}^b : I \rightarrow \mathcal{H}(D)$ qui a comme origine un point de la fibre $e^{-1}(q) = \mathcal{H}(D, Q_n)$ et extrémité id_D . Le chemin \hat{f}^b est une isotopie normale, et l'égalité $e\hat{f}^b = f^b$ signifie que cette isotopie paramètre b . \square

1.5.3 L'isomorphisme $B_n \cong \mathcal{M}(D, Q_n)$

Dans cette section, nous allons montrer que B_n est isomorphe au groupe de difféotopies d'un disque épointé du plan \mathbb{R}^2 .

Théorème 1.11.

Pour tout $n \geq 1$, les homomorphismes de groupes η et ρ définis dans le [Théorème 1.7](#) et [Théorème 1.8](#) sont des isomorphismes. De plus, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} B_n & & \\ \downarrow \eta & \searrow \beta \rightarrow \tilde{\beta} & \\ \mathcal{M}(D, Q_n) & \xrightarrow{\rho} & \tilde{B}_n \end{array} \quad . \quad (1.11)$$

Preuve.

La commutativité du diagramme (1.11) signifie que $\tilde{\beta} = \rho(\eta(\beta))$ pour tout $\beta \in B_n$. Puisque ρ, η et $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ sont des homomorphismes de groupes, alors il suffit de vérifier cette égalité pour les générateurs $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. On doit vérifier que $\rho(\tau_{\alpha_i}) = \tilde{\sigma}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. Les formules $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_k) = x_k$ pour $k \neq i, i+1$ et $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_i) = x_{i+1}$ découlent directement de la définition de τ_{α_i} . L'égalité $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1}x_i x_{i+1}$ s'obtient de la formule $\rho(\tau_{\alpha_i})(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

En vue de la commutativité du diagramme (1.11) et le [Théorème 1.6](#), pour prouver ce théorème on a besoin seulement de montrer que η est un isomorphisme.

Soient $C_n = C_n(\mathring{D})$, $e = e_{Q_n} : \mathcal{H}(D) \longrightarrow C_n$, et $q = e(id_D) \in C_n$. Par la [Proposition 1.9](#), e est un fibré localement trivial de fibre $e^{-1}(q) = \mathcal{H}(D, Q_n)$. Cela induit une application

$$\partial : \pi_1(C_n, q) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}(D, Q_n)) = \mathcal{M}(D, Q_n)$$

définit comme suit : Soit $\beta \in \pi_1(C_n, q)$ représenté par un lacet $f : I \longrightarrow C_n$ basé en q . Ce lacet se relève au chemin $\hat{f} : I \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ d'origine $e^{-1}(q) = \mathcal{H}(D, Q_n)$ et d'extrémité id_D . Alors, $\partial(\beta) = [\hat{f}(0)] \in \pi_0(\mathcal{H}(D, Q_n))$ est la classe d'homotopie de $\hat{f}(0)$. $\partial(\beta)$ ne dépend que de β car, si f' est un autre lacet qui représente β alors l'homotopie entre f et f' se relève à une homotopie entre deux relevés arbitraires \hat{f}, \hat{f}' dans $\mathcal{H}(D)$. Cette homotopie induit un chemin dans $\mathcal{H}(D, Q_n)$ reliant $\hat{f}(0)$ à $\hat{f}'(0)$. Alors, $[\hat{f}(0)] = [\hat{f}'(0)]$.

L'application $\partial : \pi_1(C_n, q) \longrightarrow \mathcal{M}(D, Q_n)$ est un homomorphisme de groupes. En effet, soient f, g deux lacets dans C_n basés en q qui représentent $\beta, \gamma \in \pi_1(C_n, q)$, respectivement. Soient $\hat{f}, \hat{g} : I \longrightarrow \mathcal{H}(D)$ leurs relevés d'extrémité id_D . On observe que, pour tout $t \in I$,

$$e(\hat{f}(t)\hat{g}(0)) = \hat{f}(t)\hat{g}(0)(Q_n) = \hat{f}(t)(Q_n) = f(t).$$

Donc le chemin $t \mapsto \hat{f}(t)\hat{g}(0)$ dans $\mathcal{H}(D)$ est le relevé de f et d'extrémité $\hat{f}(1)\hat{g}(0) = \hat{g}(0)$. Le produit de ce chemin avec \hat{g} est le relevé de $fg : I \longrightarrow C_n$ qui a comme extrémité id_D et origine $\hat{f}(0)\hat{g}(0)$. Donc, $\partial(\beta\gamma) = [\hat{f}(0)\hat{g}(0)] = [\hat{f}(0)][\hat{g}(0)] = \partial(\beta)\partial(\gamma)$.

Rappelons que $B_n = \pi_1(C_n, q)$ [\[BB05\]](#). L'homomorphisme $\partial : B_n = \pi_1(C_n, q) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}(D, Q_n)) = \mathcal{M}(D, Q_n)$ est défini comme suit :

Soit $\beta \in B_n$. Soit b une tresse géométrique représentant β , alors il existe une isotopie normale $\{f_t : D \longrightarrow D\}_{t \in I}$ paramétrant b (voir le [Lemme 1.10](#)). Définissons $\partial(\beta) \in \mathcal{M}(D, Q_n)$ comme étant la classe d'isotopie de $f_0 : (D, Q_n) \longrightarrow (D, Q_n)$. On affirme que $\partial = \eta$, où

$\eta : B_n \longrightarrow \mathcal{M}(D, Q_n)$ est l'homomorphisme introduit précédemment. Il suffit de vérifier que ∂ et η coïncident sur les générateurs σ_i , pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Comme $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$, on a besoin seulement de vérifier que $\partial(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i}$.

Soit $\{g_t : D \longrightarrow D\}_{t \in I}$ l'isotopie de l'application identique $g_0 = id : D \longrightarrow D$ à $g_1 = \tau_{\alpha_i}$ obtenue en faisant tourner α_i dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de son point médian. Alors, $\{f_t = g_{1-t} : D \longrightarrow D\}_{t \in I}$ est une isotopie de $f_0 = \tau_{\alpha_i}$ à $f_1 = id$. La tresse géométrique

$$\bigcup_{t \in I} (f_t(Q_n), t) \subset \mathbb{R}^2 \times I.$$

représente le générateur σ_i . Ainsi $\partial(\sigma_i) = [f_0] = \tau_{\alpha_i}$. D'après le théorème d'Alexander-Tietze, chaque point de l'ensemble $\mathcal{H}(D, Q_n) \subset \mathcal{H}(D)$ peut être relié à $id_D \in \mathcal{H}(D)$ par un chemin dans $\mathcal{H}(D)$. Cela implique que l'homomorphisme

$$\eta = \partial : \pi_1(C_n, q) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}(D, Q_n)) = \mathcal{M}(D, Q_n).$$

est surjectif.

Le [Théorème 1.6](#) et la commutativité du diagramme (1.11) impliquent que η est injectif. Par suite η est un isomorphisme. \square

Chapitre 2

Représentations des groupes de tresses

Ce chapitre comporte deux sections. Dans la première nous introduisons la représentation de Burau, et nous donnons une interprétation topologique de cette représentation appelée la définition homologique de la représentation de Burau. Dans la deuxième section nous introduisons la représentation de Krammer. Nous donnons la définition de la fonction longueur de Charney et des fourchettes lesquelles seront d'une grande importance dans la définition de cette représentation.

Une représentation d'un groupe est un homomorphisme du groupe vers le groupe linéaire $GL_n(\Lambda)$, où n est un entier positif et Λ un anneau commutatif. D'une manière équivalente, c'est une action linéaire du groupe sur le Λ -module libre de rang fini. Une représentation est dite fidèle si l'homomorphisme est injectif, un groupe qui admet une représentation fidèle est appelé linéaire.

2.1 Représentation de Burau

L'une des représentations classiques des groupes de tresses est la représentation de Burau qu'on note $\psi_n : B_n \longrightarrow GL_n(\Lambda)$, où $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent, définie comme suit :

$$\sigma_i \longmapsto U_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}.$$

où I_k est la matrice unité de taille $k \times k$.

• Pour $n = 2$ cette représentation est l'homomorphisme $\psi_2 : B_2 \longrightarrow GL_2(\Lambda)$ qui envoie le générateur σ_1 de $B_2 \cong \mathbb{Z}$ sur la matrice U , où

$$U = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par convention la représentation $\psi_1 : B_1 \longrightarrow GL_1(\Lambda)$ est l'homomorphisme trivial du groupe trivial B_1 .

Observons que

$$\det U_i = -t, \quad \text{pour tout } i.$$

Cela implique que pour tout $\beta \in B_n$

$$\det \psi_n(\beta) = (-t)^{\langle \beta \rangle},$$

où $\langle \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ est l'image de β par l'homomorphisme $B_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie chaque générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sur 1.

La représentation de Burau $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ est compatible avec l'inclusion naturelle $i : B_n \hookrightarrow B_{n+1}$, pour tout $n \geq 1$ et $\beta \in B_n$.

$$\psi_{n+1}(i(\beta)) = \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

La représentation de Burau est fidèle pour $n \leq 3$. En effet, si $n = 1$, alors $B_1 = \{1\}$ est le groupe trivial.

Si $n = 2$, alors la matrice $U = U_1 \in GL_2(\Lambda)$ qui est l'image du générateur σ_1 de $B_2 \cong \mathbb{Z}$ par ψ_2 satisfait :

$$(1, -1)U = (-t, t) = (-t)(1, -1) \quad , \quad (1, -1)U^k = (-t, t) = (-t)^k(1, -1) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc U est d'ordre infini dans $GL_2(\Lambda)$, d'où $\ker\psi_2 = \{1\}$.

Pour le cas $n = 3$, voir [Bir01].

Remarque 2.1.1.

Remarquons que $\ker\psi_n \subset \ker\psi_{n+1}$ sous l'inclusion $B_n \subset B_{n+1}$. Par conséquent si $\ker\psi_n \neq \{1\}$, alors on a aussi $\ker\psi_m \neq \{1\}$ pour tout $m \geq n$.

J.Moody a démontré dans [Moo91] que la représentation de Burau n'est pas fidèle pour $n \geq 9$. En suite, D.Long et M.Paton [LP93] étendent l'argument de Moody pour $n \geq 6$. plus tard en 1999, S.Bigelow [Big99] démontre que cette représentation n'est pas fidèle pour $n = 5$. Dans ce dernier article, Bigelow montre que la tresse

$$\beta_5 = [a\sigma_4a^{-1}, \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4],$$

où

$$a = \sigma_4\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-1}\sigma_4^{-5}\sigma_2\sigma_3\sigma_4^3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^{-1} \in B_5$$

est un élément non-trivial de $\ker\psi_5 \subset B_5$. La tresse β_5 est représentée par un mot de longueur 120 dans les générateurs $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \sigma_3^{\pm 1}, \sigma_4^{\pm 1}$.

Dans le même article, Bigelow a obtenu que

$$\beta_6 = [b\sigma_3b^{-1}, \sigma_3],$$

où

$$b = \sigma_4\sigma_5^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_5^{-1}\sigma_4 \in B_6$$

est un élément non-trivial de $\ker\psi_6 \subset B_6$. La tresse β_6 est représentée par un mot de longueur 44, de plus, est la plus simple de celles déjà connus dans le noyau de ψ_6 .

2.1.1 Représentation homologique twistée

Soit Σ une surface connexe éventuellement à bord. Rappelons que $\mathcal{M}(\Sigma)$ est le groupe des classes des endo-homéomorphismes de Σ , voir la Section 1.5.

Tout endo-homéomorphisme de Σ induit un automorphisme de groupes d'homologie $H = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Deux endo-homéomorphismes de Σ qui sont isotopes sont aussi homotopes, donc ils induisent le même automorphisme de H . Cela définit un homomorphisme de groupes $\mathcal{M}(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(H)$ appelé *représentation homologique* de $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Supposons que $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Soit d un point base sur le bord de Σ . Considérons l'homomorphisme surjectif $\varphi : \pi_1(\Sigma, d) \longrightarrow G$, où G est un groupe donné. Soit $\tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ le revêtement associé à $\ker\varphi$. Le groupe des automorphismes de revêtement $\tilde{\Sigma}$ est isomorphe à G .

Choisissons un point $\tilde{d} \in \partial\tilde{\Sigma}$ au-dessus de d , et considérons le groupe d'homologie relatif $\tilde{H} = H_1(\tilde{\Sigma}, G\tilde{d}, \tilde{d})$ où $G\tilde{d}$ est le G -orbite de \tilde{d} , i.e., $G\tilde{d} = \{g\tilde{d} / g \in G\}$. L'action de G sur $\tilde{\Sigma}$ induit une action (à gauche) de G sur \tilde{H} , et donc \tilde{H} devient $\mathbb{Z}[G]$ -module libre de rang $n = \text{rk}H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Cela découle du fait que Σ se rétracte par déformation en une union de n lacets simples de Σ basés en d qui s'intersectent qu'au point base d . Le groupe $\text{Aut}(\tilde{H})$ des automorphismes $\mathbb{Z}[G]$ -linéaires de \tilde{H} est isomorphe à $GL_n(\mathbb{Z}[G])$. Tout endo-homéomorphisme f de Σ fixe $\partial\Sigma$ point par point et, en particulier, fixe d . Donc il induit un automorphisme de groupes $f_{\#} : \pi_1(\Sigma, d) \longrightarrow \pi_1(\Sigma, d)$. Soit $\mathcal{M}_{\varphi}(\Sigma, d)$ le groupe des classes d'isotopies des endo-homéomorphismes de Σ tels que $\varphi \circ f_{\#} = \varphi$. Un endo-homéomorphisme $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ (f représente un élément de $\mathcal{M}_{\varphi}(\Sigma, d)$) se relève d'une manière unique à un homéomorphisme $\tilde{f} : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \tilde{\Sigma}$ qui fixe \tilde{d} . L'égalité $\varphi \circ f_{\#} = \varphi$ assure que \tilde{f} commute avec l'action de G sur $\tilde{\Sigma}$. Donc, \tilde{f} fixe le groupe $G\tilde{d}$ point par point

$$\tilde{f}(g\tilde{d}) = g\tilde{f}(\tilde{d}) = g\tilde{d} \quad \text{pour tout } g \in G.$$

L'homéomorphisme \tilde{f} induit un automorphisme de $\mathbb{Z}[G]$ -module $\tilde{f}_* : \tilde{H} \longrightarrow \tilde{H}$. Puisque \tilde{f} commute avec l'action de G , alors l'automorphisme \tilde{f}_* devient $\mathbb{Z}[G]$ -linéaire. L'application $f \longmapsto \tilde{f}_*$ définit un homomorphisme de groupes $\mathcal{M}_{\varphi}(\Sigma, d) \longrightarrow \text{Aut}\tilde{H}$, appelé *représentation homologique twistée*.

2.1.2 Définition homologique de la représentation de Burau

En utilisant la définition de B_n comme groupe de difféotopies, la représentation de Burau peut s'obtenir en faisant agir B_n sur l'homologie du revêtement infini cyclique d'un disque épointé. Ce point de vue s'appelle la définition homologique de la représentation de Burau. Soient $Q_n = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ et D un disque fermé dans \mathbb{R}^2 et Q_n dans son intérieure. D est orienté positivement comme dans la [Figure 1.7](#). Notons que pour tout point $p \in \mathring{D}$, le groupe

$$H_1(D - \{p\}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

est engendré par la classe d'homologie d'un petit lacet qui tourne dans le sens direct autour de p . Chaque lacet γ dans $D - \{p\}$ représente k fois ce générateur, où k est le nombre de

tours de γ autour de p .

Posons $D_n = D - Q_n$. Soit d un point base sur le bord de D . Considérons l'épimorphisme de groupes $\varphi : \pi_1(D_n, d) \longrightarrow \mathbb{Z} = \{t^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui envoie la classe d'homotopie d'un lacet γ sur $t^{-w(\gamma)}$, où $w(\gamma)$ est le *nombre total de tours* de γ défini comme étant la somme des nombres de tours autour des points $(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)$.

Soit \tilde{D}_n le revêtement régulier associé au noyau de φ . Le groupe d'automorphismes de revêtement de \tilde{D}_n est isomorphe à $\langle t \rangle$. Choisissons un point $\tilde{d} \in \partial \tilde{D}_n$ au-dessus de d . Posons

$$\tilde{H} = H_1(\tilde{D}_n, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}, \mathbb{Z}).$$

Soit $f \in \mathcal{H}(D, Q_n)$. f représente un élément de $\mathcal{M}(D, Q_n)$. Puisque $f(Q_n) = Q_n$, alors f préserve le nombre total de tours des lacets de D_n . En conséquence, la restriction à Σ définit l'homomorphisme de groupes

$$\mathcal{M}(D, Q_n) \longrightarrow \mathcal{M}_\varphi(D_n, d).$$

En composant cet homomorphisme avec la représentation homologique twistée $\mathcal{M}_\varphi(D_n, d) \longrightarrow \text{Aut} \tilde{H}$, définie dans la sous-Section 2.1.1, on obtient l'homomorphisme de groupes

$$\Psi_n : \mathcal{M}(D, Q_n) \longrightarrow \text{Aut} \tilde{H},$$

où l'image de $f \in \mathcal{M}(D, Q_n)$ par Ψ_n est l'automorphisme \tilde{f}_* de \tilde{H} induit par le relevé $\tilde{f} : \tilde{D}_n \longrightarrow \tilde{D}_n$ de $f|_{D_n} : D_n \longrightarrow D_n$ qui fixe \tilde{d} .

Le théorème suivant montre que la représentation Ψ_n est équivalente à la représentation de Burau ψ_n .

Théorème 2.1.

Il existe un isomorphisme de groupes $\mu : GL_n(\Lambda) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{H})$; avec $\tilde{H} = H_1(\tilde{D}_n, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}, \mathbb{Z})$, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{M}(D, Q_n) \\ \psi_n \downarrow & & \downarrow \Psi_n \\ GL_n(\Lambda) & \xrightarrow{\mu} & \text{Aut}(\tilde{H}) \end{array} \quad (2.2)$$

Preuve.

D'abord, on calcule le Λ -module $\tilde{H} = H_1(\tilde{D}_n, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}, \mathbb{Z})$. Notons que D_n se rétracte par déformation au graphe $\Gamma \subset D_n$ formé d'un seul sommet d et n lacets orientés X_1, X_2, \dots, X_n

sur D_n . Voir la [Figure 1.7](#). Les nombres total des tours de ces lacets sont égaux à -1 . L'homomorphisme $\varphi : \pi_1(D_n, d) \longrightarrow \{t^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ envoie les générateurs de $\pi_1(D_n, d)$, représentés par ces lacets, sur t . Le revêtement infini cyclique \tilde{D}_n se rétracte par déformation au graphe infini $\tilde{\Gamma} \subset \tilde{D}_n$ dont les sommets sont $\{t^k \tilde{d}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et les arêtes orientées sont $\{t^k \tilde{X}_i\}_{k \in \mathbb{Z}, i=1, \dots, n}$ où chaque arête $t^k \tilde{X}_i$ va de $t^k \tilde{d}$ vers $t(t^k \tilde{d}) = t^{k+1} \tilde{d}$. Le générateur t agit sur $\tilde{\Gamma}$ en envoyant $t^k \tilde{X}_i$ sur $t^{k+1} \tilde{X}_i$. Le complexe de chaînes cellulaire de $(\tilde{\Gamma}, \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d})$ est 0 sauf dans la dimension 1 où il est égale à $\bigoplus_{i=1}^n \Lambda \tilde{X}_i$. Donc

$$\tilde{H} = H_1(\tilde{D}_n, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}, \mathbb{Z}) = H_1(\tilde{\Gamma}, \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t^k \tilde{d}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^n \Lambda[\tilde{X}_i].$$

est un Λ -module libre de base $[\tilde{X}_1], \dots, [\tilde{X}_n]$. On utilise cette base pour identifier $Aut(\tilde{H})$ avec $GL_n(\Lambda)$. L'action de la matrice $(\lambda_{i,j}) \in GL_n(\Lambda)$ sur \tilde{H} envoie $[\tilde{X}_i]$ sur $\sum_j \lambda_{i,j} [\tilde{X}_j]$.

On définit l'isomorphisme de groupes

$$\mu : GL_n(\Lambda) \longrightarrow GL_n(\Lambda) = Aut(\tilde{H}).$$

comme composition de transposition et inversion d'une matrice $\mu(U) = (U^T)^{-1}$, pour $U \in GL_n(\Lambda)$. Pour vérifier que le diagramme (2.2) est commutatif on a besoin de vérifier que pour tout $\beta \in B_n$,

$$\Psi_n \eta(\beta) = \mu \psi_n(\beta).$$

Puisque les deux côtés sont multiplicatifs en β , il suffit de vérifier cette égalité sur les générateurs de B_n . On le fait pour les générateurs $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$. On choisit $i = 1, \dots, n-1$. L'homéomorphisme $\eta(\sigma_i^{-1}) : D \longrightarrow D$ échange les points $(i, 0), (i+1, 0) \in Q$ par rotation dans le sens indirect de l'arc $[i, i+1] \times \{0\}$ par l'angle π . Cette homéomorphisme garde X_k fixé pour $k \neq i, i+1$, transforme X_i à un lacet homotope au produit $X_i X_{i+1} X_i^{-1}$ et transforme X_{i+1} à X_i . Le relevé de cet homéomorphisme à $\tilde{\Sigma}$ garde \tilde{X}_k fixé pour $k \neq i, i+1$, transforme \tilde{X}_{i+1} à \tilde{X}_i , et tend \tilde{X}_i au chemin $\tilde{X}_i(t\tilde{X}_{i+1})(t\tilde{X}_i)^{-1}$. L'automorphisme induit $\Psi_n \eta(\sigma_i^{-1})$ de \tilde{H} agit par $[\tilde{X}_i] \longmapsto (1-t)[\tilde{X}_i] + t[\tilde{X}_{i+1}]$, $[\tilde{X}_{i+1}] \longmapsto [\tilde{X}_i]$, et $[\tilde{X}_k] \longmapsto [\tilde{X}_k]$ pour $k \neq i, i+1$. La matrice de cet automorphisme dans la base $[\tilde{X}_1], \dots, [\tilde{X}_n]$ est précisément $U_i^T = \mu \psi_n(\sigma_i^{-1})$. \square

2.2 Représentation de Krammer

Dans cette section, on donne la définition d'une représentation de B_n introduite par D.Krammer dans [\[Kra00\]](#).

2.2.1 La forme avide (The greedy form)

Soit \mathbb{Z}/n l'ensemble cycliquement ordonné par $x \mapsto x + 1$ et totalement ordonné par $1 < 2 < \dots < n$, on note les éléments de \mathbb{Z}/n par $1, 2, \dots, n$. Soit \mathcal{S}_n le groupe des permutations de \mathbb{Z}/n .

Définition 2.1.

On appelle fonction longueur l'application $\ell : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ définie par $x \mapsto \ell(x) =$ le plus petit entier naturel k tel qu'il existe des transpositions $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{S}_n$ avec $x = x_1 \dots x_k$.

D'une façon équivalente, $n - \ell(x)$ est le nombre des orbites de x dans \mathbb{Z}/n . Soit c l'élément de \mathcal{S}_n défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \times \mathbb{Z}/n &\longrightarrow \mathbb{Z}/n \\ (c, x) &\longmapsto c(x) = x + 1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{Z}/n. \end{aligned}$$

Donc $\ell(c) = n - 1$. Considérons l'ensemble

$$P = \{x \in \mathcal{S}_n \mid \exists y \in \mathcal{S}_n \text{ avec } xy = c \text{ et } \ell(x) + \ell(y) = \ell(c)\}.$$

Pour $x, y \in P$ on définit

$$x * y = \begin{cases} xy & \text{s'il existe } z \in \mathcal{S}_n, xyz = c, \ell(x) + \ell(y) + \ell(z) = \ell(c), \\ \text{non défini} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $x * y$ est défini si et seulement si $xy \in P$ et $\ell(x) + \ell(y) = \ell(xy)$. On appelle "*" la multiplication partielle sur P .

Soit \mathcal{A} le groupe présenté par générateurs $\{r(x) \mid x \in P\}$ et relations $r(x)r(y) = r(z)$, chaque fois que $x * y = z$. Par définition $r(x) \in P$ pour tout $x \in P$. Le groupe \mathcal{A} est isomorphe au groupe de tresses B_n .

L'application $r : P \longrightarrow B_n$ est injective. On note $r(P) = Q$, et on pose aussi $\delta = r(c)$. Le sous-monoïde de B_n engendré par Q est identifié avec B_n^+ (1 est inclus). On garde le même symbole pour définir la fonction longueur $\ell : B_n^+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ où ℓ est l'unique homomorphisme de monoïdes avec $\ell(r(x)) = \ell(x)$, $\forall x \in P$. Soit Q_k l'ensemble des éléments de Q de longueur k .

On définit un ordre sur B_n^+ par $x \leq y \iff y \in xB_n^+$. La restriction de cet ordre induit un ordre sur Q et ainsi sur P . L'ensemble ordonné P a 1 comme *Min* et c comme *Max*.

L'ensemble ordonné Q a 1 comme *Min* et δ comme *Max*. Pour tout $x \in B_n^+$ l'ensemble $\{y \in Q \mid y \leq x\}$ admet un élément maximum, il sera noté $g_L(x)$.

Définition 2.2.

Une suite $(x_1, \dots, x_k) \in Q^k$ est dite **avide** (de gauche) si $g_L(x_i x_{i+1}) = x_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, k-1$. Une **paire avide** est une suite avide $(x, y) \in Q^2$.

Définition 2.3.

Soit $x \in B_n^+$, on appelle **forme avide** (gauche) de x l'unique suite avide (x_1, \dots, x_k) tels que $x_1 \dots x_k = x$ et $x_k \neq 1$.

On souligne qu'une suite avide n'est pas nécessairement une forme avide pour certain élément de B_n^+ . En fait, elle est si et seulement si $x_k \neq 1$.

On mentionne que

$$g_L(xy) = g_L(xg_L(y)) \quad \text{pour tous } x, y \in B_n^+.$$

Ceci implique que l'application

$$\begin{aligned} B_n^+ \times Q &\longrightarrow Q \\ (x, y) &\longmapsto g_L(xy). \end{aligned}$$

est une action du monoïde B_n^+ sur Q .

La proposition suivante donne une caractérisation des éléments de P .

Proposition 2.2.

Soit $x \in \mathcal{S}_n$, alors $x \in P$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Soit $I \subset \mathbb{Z}/n$ un orbite de x . Soit $c_I : I \rightarrow I$ l'ordre cyclique de I induit par l'ordre cyclique de c sur \mathbb{Z}/n . Ceci veut dire par définition que pour $i \in I$ on met $c_I(i) = c^k i$ où k est le plus petit entier positif tel que $c^k i \in I$. Alors $c_I(i) = x(i)$ pour tout $i \in I$.
- (2) Soient $I, J \subset \mathbb{Z}/n$ deux orbites de x distincts. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $i < j$ pour tous $i \in c^k I, j \in c^k J$.

Le groupe de tresses B_n est définie comme étant le groupe fondamental de l'ensemble $\{X \subset \mathbb{C} \mid |X| = n\}$ des parties de n -éléments de \mathbb{C} munit de la topologie usuelle. Soit $X_0 \in B_n$ un point base tel que les points de X_0 sont comme dans la [Figure 2.1](#). Cette figure décrit un élément de P , elle montre aussi comment interpréter les éléments de P comme

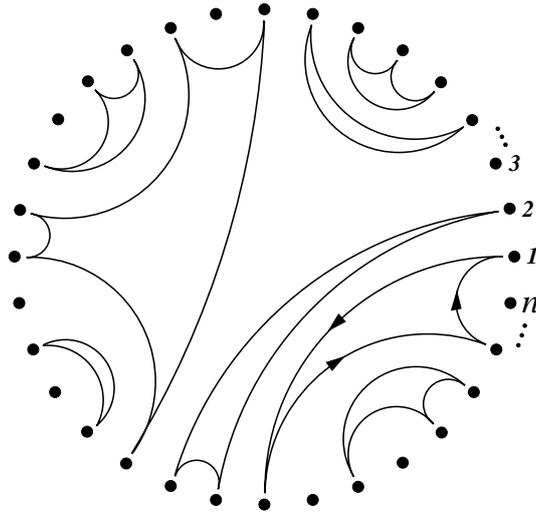


FIGURE 2.1 – Un élément de P

tresses. Cela définit l'application $P \rightarrow B_n$, et la composition $Q \rightarrow P \rightarrow B_n$ ce prolonge à un isomorphisme de \mathcal{A} dans B_n (pour plus de détails voir [BKL98]).

Soit $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}/n$ tels que les a_i sont distincts. Soit $(a_1 \dots a_k)$ la permutation (le cycle) de \mathcal{S}_n définie par :

$$\begin{aligned} a_k &\mapsto a_1, \\ a_i &\mapsto a_{i+1} \quad \text{si} \quad 1 \leq i < k, \\ a_i &\mapsto a_i \quad \text{pour tout} \quad a_i \in (\mathbb{Z}/n) \setminus \{a_1, \dots, a_k\}. \end{aligned}$$

Les suites des éléments de \mathbb{Z}/n seront notées par \langle, \dots, \rangle .

Définition 2.4.

Une suite $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in \mathbb{Z}/n$ est dite **cyclique dans l'ordre correct** s'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $c^\ell a_1 < \dots < c^\ell a_k$.

Il découle de la Proposition 2.2 que la suite $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ est **cyclique dans l'ordre correct** si et seulement si $(a_1 \dots a_k)$ est définie et elle est dans P . Si c'est le cas, l'image dans Q sera notée par $[a_1 \dots a_k]$.

L'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{Z}/n sera de gauche. Ceci est reflété dans les égalités comme $(12)(23) = (123)$ et $[12][23] = [123]$. Naturellement $(32)(21) = (123)$ est aussi correcte mais $[32][21] \notin Q$, et $[321]$ n'est pas défini. Il existe un homomorphisme bien connu $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$ défini par $[ij] \mapsto (ij)$, plus généralement $[a_1, \dots, a_k] \mapsto (a_1, \dots, a_k)$.

Maintenant, nous donnons une présentation de B_n relié à Q .

Les générateurs : $Q_1 = \{[ij] = [ji] \quad / \quad 1 \leq i < j \leq n\}$.

Les relations :

$$[ij][jk] = [jk][ki]. \quad (2.3)$$

chaque fois que $\langle i, j, k \rangle$ est cyclique dans l'ordre correct.

$$[ij][kl] = [kl][ij]. \quad (2.4)$$

chaque fois que $\langle i, j, k, l \rangle$ est cyclique dans l'ordre correct.

Pour $x \in P$, soit \sim_x la relation d'équivalence sur \mathbb{Z}/n définie par :

$$i \sim_x j \iff \{i, j\} \in x\text{-orbite.}$$

Pour $x, y \in P$, si $\sim_x = \sim_y$ alors $x = y$.

Le résultat suivant donne une description concrète de la multiplication partiel "*" sur P.

Proposition 2.3.

*Soient $x, y \in P$. Alors $x * y$ est définie si et seulement si pour tous x -orbite I et y -orbite J , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $i \leq j$ pour tous $i \in c^k I, j \in c^k J$. De plus, si $x * y$ est définie, en posant $x * y = z$, alors \sim_z est la plus petite relation d'équivalence sur \mathbb{Z}/n contenant \sim_x et \sim_y . Inversement, pour tout $x, z \in P$ nous avons*

$$z \in x * P \iff z \in P * x \iff (\sim_x) \subset (\sim_z) \iff x \leq z.$$

Proposition 2.4.

Soient $x, y \in P$. Alors (1), (2) et (3) sont équivalentes.

- (1) $(rx, ry) \in Q \times Q$ est avide.
- (2) Il existe $i, j \in \mathbb{Z}/n$ distincts et $z \in P$ tels que $y = (ij) * z$, et tel que $x * (ij)$ est définie.
- (3) Il existe $i, j \in \mathbb{Z}/n$ distincts et $z \in P$ tels que $\{i, j\}$ est contenu dans un y -orbite dans \mathbb{Z}/n , et tel que tout x -orbite est contenu dans $\{i + 1, i + 2, \dots, j\}$ ou $\{j + 1, j + 2, \dots, i\}$.

2.2.2 Fonction longueur de Charney

La formule de la fonction croissante des tresses positives est donnée par :

$$\sum_{x \in B_n^+} z^{\ell(x)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-z)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right)^{-1}. \quad (2.5)$$

Le centre de B_n est isomorphe à \mathbb{Z} . Si $n \geq 3$, alors il est engendré par δ^n . On a une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (B_n^+ \setminus \delta B_n^+) &\longrightarrow B_n \\ (k, x) &\longmapsto \delta^k x. \end{aligned}$$

Définition 2.5.

Soit $\ell_Q : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ la fonction longueur respectivement à Q , i.e., $\ell_Q(x)$ est le plus petit entier positif k tel qu'il existe $x_1, \dots, x_k \in Q \cup Q^{-1}$ où $x = x_1 \dots x_k$. On appelle ℓ_Q **la fonction longueur de Charney**.

Théorème 2.5.

- (a) Soit (x_1, \dots, x_k) la forme avide d'une tresse positive $x \in B_n^+$, alors $\ell_Q(x) = k$.
- (b) Soit $x \in B_n$. Alors il existe un unique $y = y_x$ et $z = z_x$ dans B_n^+ avec $x = y^{-1}z$ tel qu'il n'existe pas $\omega \in Q_1$ avec $\{y, z\} \subset \omega B_n^+$. Ils satisfont $\ell_Q(x) = \ell_Q(y) + \ell_Q(z)$.
- (c) Soit $x \in B_n \setminus B_n^+$, d'où $y_x \neq 1$. On note les formes avides de y_x et z_x par (y_1, \dots, y_k) et (z_1, \dots, z_ℓ) respectivement. Alors les formes avides de $y_{\delta x}$ et $z_{\delta x}$ sont, respectivement, $(\delta y_1 \delta^{-1}, \dots, \delta y_k \delta^{-1})$ et $(\delta y^{-1}, z_1, \dots, z_\ell)$.
- (d) Soit $x \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+$ avec $\ell_Q(x) = k$. Alors, $\ell_Q(\delta^\ell x) = \max(k + \ell, k, -\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$.
- (e) La fonction croissante

$$\sum_{x \in B_n} z^{\ell_Q(x)} \in \mathbb{Z}[[z]] \tag{2.6}$$

est rationnelle.

D'après le [Théorème 2.5\(b\)](#) la fonction croissante (2.6) est rationnelle, mais il n'existe aucune expression pour elle assez simple comme (2.5).

Définition 2.6.

Un anti-automorphisme d'un monoïde M est une permutation f sur M satisfaisant :

$$f(xy) = f(y)f(x) \text{ pour tous } x, y \in M.$$

L'ensemble des automorphismes et des anti-automorphismes de M muni de la composition des applications forme un groupe. On note ce groupe par $\pm \text{Aut}(M)$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}/n$, l'application $[ij] \mapsto [i+k, j+k]$ définit un automorphisme de B_n^+ . L'application $[ij] \mapsto [k-j, k-i]$ définit un anti-automorphisme de B_n^+ . De plus, ils sont tous les automorphismes et les anti-automorphismes de B_n^+ . Tous les automorphismes et anti-automorphismes de B_n^+ se prolongent d'une façon unique à B_n , et préservent Q , ℓ_Q et ℓ .

Nous avons $\delta[ij]\delta^{-1} = [i+1, j+1]$ pour tous i, j . De plus, la conjugaison dans B_n par δ préserve B_n^+ . Sa restriction à B_n^+ est un automorphisme qui engendre $Aut(B_n^+)$.

L'anti-automorphisme de B_n^+ défini par $[ij] \mapsto [n+1-j, n+1-i]$ sera utile par la suite. On le note par $x \mapsto \bar{x}$. Plus généralement $[a_1, \dots, a_k] \mapsto [n+1-a_k, \dots, n+1-a_1]$.

2.2.3 Les fourchettes

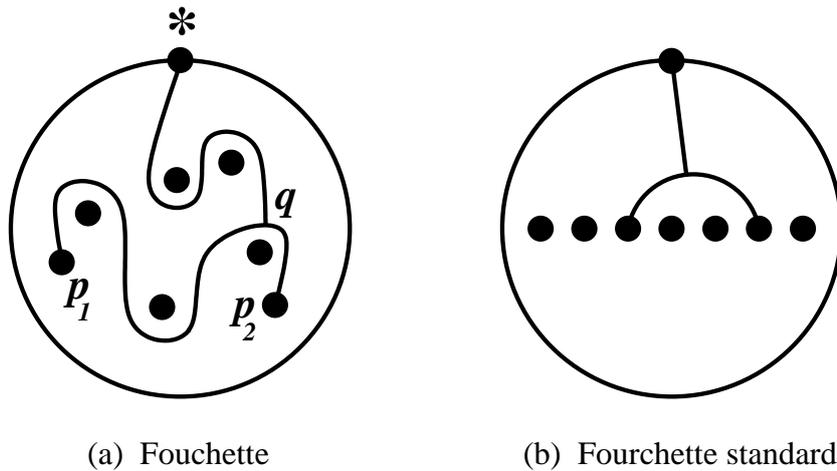


FIGURE 2.2 – Fourchettes

Soit $D^2 = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$. On fixe un ensemble $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset D^2$ de n points distincts dans l'intérieur de D^2 , appelés perforations, et un point base $* \in \partial D^2$. Un arc dans (D^2, \mathcal{P}) est l'image d'un plongement $f : [0, 1] \rightarrow \text{Int}(D^2)$ telle que $f^{-1}(\mathcal{P}) = \{0, 1\}$. Deux arcs a, b sont isotopes s'il existe $h \in H_0$ avec $ha = b$, où H_0 est l'ensemble des endo-homéomorphismes de D^2 qui sont isotopes à l'identité.

Une fourchette dans (D^2, \mathcal{P}) est un arbre $T \subset D^2$ formé de trois arêtes et quatre sommets

$p_1, p_2, q, *$ tels que $T \cap \mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$ et $T \cap \partial D^2 = \{*\}$, et les trois arêtes ont q comme sommet commun, voir Figure 2.2. L'arête $M(T)$ qui joint les deux sommets $*$ et q s'appelle le manche de T . L'union des deux autres arêtes est un arc plongé à extrémités $\{p_1, p_2\}$, appelé l'arc de T .

Deux fourchettes T_1, T_2 sont isotopes s'il existe $h \in H_0$ avec $hT_1 = T_2$.

Supposons que $* = i = \sqrt{-1}$ et $\mathcal{P} \subset D^2 \cap \mathbb{R}$ avec $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Une fourchette (arc) est dite standard si la partie imaginaire de chaque'un de ses points est positive. Voir Figure 2.2. Une transposition standard est une transposition associée à un arc standard. Une fourchette standard, à une isotopie près, est déterminée par l'ensemble des deux points (perforations) impliqués. Ainsi, le nombre des fourchettes standards, à une isotopie près, est $n(n-1)/2$. De même pour les arcs et les transpositions. Notons par T_{ij} une fourchette standard dans (D^2, \mathcal{P}) qui contient $\{p_i, p_j\}$, pour tous i, j avec $1 \leq i < j \leq n$. La transposition standard associée à (l'arc de) T_{ij} peut être identifiée avec $[ij]$.

2.2.3.1 Le module V

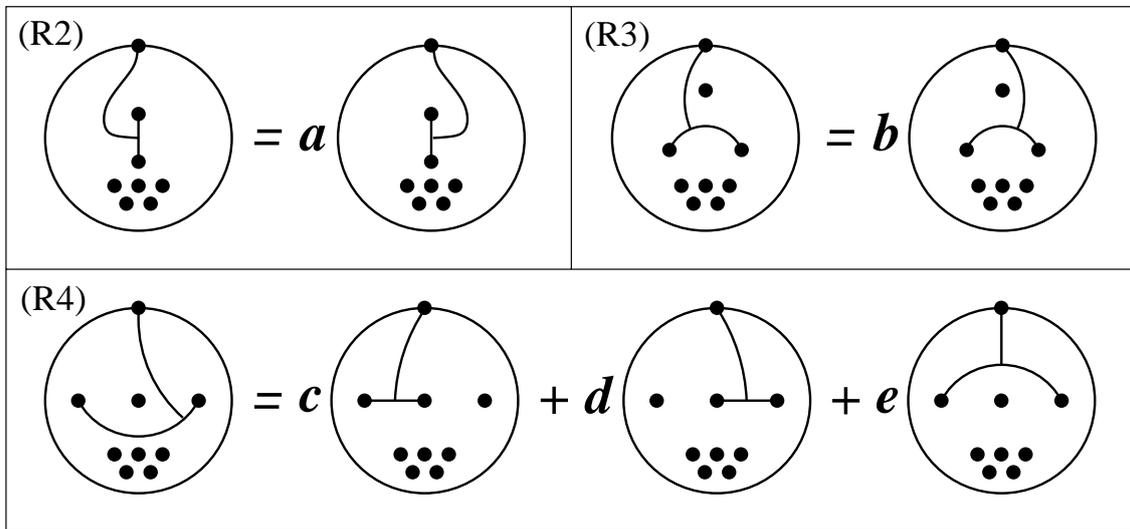


FIGURE 2.3 – Relations entre fourchettes

Soient R un anneau commutatif, et $q, t \in R$ deux éléments inversibles. Posons $a = tq^2$, $b = q^2$, $c = q^{-2} - q^{-1}$, $d = 1 - q^{-1}$, $e = q^{-1}$. On définit un R -module $V = V(R, q, t)$ par générateurs et relations comme suit :

Les générateurs sont $\{v(T)/T \text{ une fourchette}\}$. Les relations entre les générateurs sont données par :

- (R1) On pose $v(T_1) = v(T_2)$ chaque fois que T_1, T_2 sont isotopes.
- (R2) Soient T_1, T_2 deux fourchettes comme dans la [Figure 2.3](#). Alors, $v(T_1) = av(T_2)$. (certainement les cinq perforations en bas peuvent être remplacées par n'importe quel autre nombre. De plus tout endo-homéomorphisme du disque peut être appliqué simultanément sur les perforations impliqués).
- (R3) Voir [Figure 2.3](#) .
- (R4) Voir [Figure 2.3](#) .

Notons que les relations (R2) et (R3) impliquent que $v(T)$ dépend seulement de l'arc de T , jusqu'à la puissance de t et q^2 . Dans ce sens, l'arc d'une fourchette est plus important que son manche.

On écrit $v_{ij} = v_{ji} = v(T_{ij})$. Considérons la définition de B_n comme le groupe de difféotopies de (D^2, \mathcal{P}) . D'après la définition de V , on obtient immédiatement une action $\rho : B_n \rightarrow GL(V)$ de B_n sur V appelée la représentation de Krammer de B_n .

Proposition 2.6.

Le R -module V est libre de base $\{v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Preuve.

Considérons la présentation de B_n , où les générateurs sont Q_1 et les relations (2.3),(2.4). En utilisant les relations (R2), (R3) et (R4), on exprime tout $(\rho[i,j])v_{kl}$ comme combinaison linéaire de la base des vecteurs v_{rs} . Certainement à ce stade, il n'est pas clair que telles expressions sont actuellement uniques. On construit les matrices carrés à partir d'elles, et on montre qu'elles induisent une représentation m -dimensionnelle (de dimension m) $B_n \rightarrow GL(V')$, ($V' = \bigoplus_{ij} Rv'_{ij}$, avec v'_{ij} correspond à v_{ij}), en vérifiant qu'elles respectent les relations (2.3), (2.4).

IL existe une application de B_n -modules $f : V' \rightarrow V$ tel que $f(v'_{ij}) = v_{ij}$. On va définir une application de B_n -modules $g : V \rightarrow V'$. Soit T une fourchette. Choisissons $x \in B_n$ tel que xT est une fourchette standard T_{ij} . Posons $g(v(T)) = x^{-1}v'_{ij}$. La vérification des matrices montre que $g(v(T))$ est indépendant du choix de x (on utilise le fait que le stabilisateur dans B_n de la classe d'isotopie de $T_{n-1,n}$ est engendrée par $[12], [23], \dots, [n-3, n-2]$). De plus,

$g(v(T))$ peut être prolongé à une application linéaire $g : V \longrightarrow V'$. Ceci finit la définition de g . Évidemment, fg et gf sont identiques. \square

On appelle la base $\{v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ de V la *base standard de fourchettes*. Implicitement, on identifie souvent $\rho(x)$ ($x \in B_n$) avec sa matrice par rapport à cette base. On revient maintenant aux entrées de $\rho[ij]$, lesquelles étaient nécessaires dans la preuve ci-dessus. Évidemment, on peut également oublier les fourchettes et prouver directement les formules suivantes pour définir une représentation de B_n , en vérifiant qu'elles respectent les relations (2.3), (2.4). On identifie \mathbb{Z}/n avec $\{1, 2, \dots, n\}$ d'une manière évidente.

- Si $1 \leq i < j \leq n$, alors $(\rho[ij])v_{ij} = tq^2v_{ij}$.
- Si $1 \leq i < j < k \leq n$, alors

$$\begin{aligned} (\rho[ij])v_{jk} &= v_{ik}, \\ (\rho[ij])v_{ik} &= tq(q-1)v_{ij} + (1-q)v_{ik} + qv_{jk}, \\ (\rho[jk])v_{ij} &= t^{-1}v_{jk}, \\ (\rho[ik])v_{jk} &= tqv_{ij} + tq(q-1)v_{ik} + (1-q)v_{jk}, \\ (\rho[jk])v_{ij} &= (1-q)v_{ij} + qv_{ik} + q(q-1)v_{jk}, \\ (\rho[jk])v_{ik} &= v_{ij}. \end{aligned}$$

- Si $1 \leq i < j < k < \ell \leq n$, alors

$$\begin{aligned} (\rho[ij])v_{k\ell} &= v_{k\ell}, \\ (\rho[k\ell])v_{ij} &= v_{ij}, \\ (\rho[i\ell])v_{jk} &= v_{jk}, \\ (\rho[jk])v_{i\ell} &= v_{i\ell}, \\ (\rho[ik])v_{j\ell} &= t(q-1)v_{ij} + t(q-1)^2v_{ik} + (1-q)v_{i\ell} + (1-q)v_{jk} + v_{j\ell} + (q-1)v_{k\ell}, \\ (\rho[j\ell])v_{ik} &= (1-q)v_{ij} + v_{ik} + (q-1)v_{i\ell} + (q-1)v_{jk} + (q-1)^2v_{j\ell} + t^{-1}(1-q)v_{k\ell}. \end{aligned}$$

Soit U le dual de V , et considérons l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times V \longrightarrow R$ donnée par $\langle u, v \rangle = u(v)$.

Soit $\{u_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ la base de U duale à la base $\{v_{ij}\}_{ij}$ de V . Plus précisément,

$$U = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} Ru_{ij} \quad , \quad \langle u_{i,j}, v_{k\ell} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, j = \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

chaque fois que $1 \leq i < j \leq n$ et $1 \leq k < \ell \leq n$. On écrira de temps en temps $v_{ij} = v_{ji}$ et $u_{ij} = u_{ji}$.

Rappelons l'anti-automorphisme $x \mapsto \bar{x}$ de B_n défini par $[ij] \mapsto [n+1-i, n+1-j]$, et qui préserve B_n^+ . Soit $\rho^* : B_n \rightarrow GL(U)$ la représentation définie par $\langle (\rho^*x)u, v \rangle = \langle u, (\rho\bar{x})v \rangle$ pour tous $u \in U, v \in V$. Ceci signifie que la matrice de $\rho^*(x)$ par rapport à la base $\{u_{ij}\}_{ij}$ et la matrice de $\rho\bar{x}$ par rapport à la base $\{v_{ij}\}_{ij}$ chacune est la transposée de l'autre.

La représentation duale ρ^* sera utile par la suite dans la preuve de la linéarité de B_4 . La formule directe de cette représentation est donnée comme suit :

- Si $1 \leq a < b \leq n$ et $1 \leq c < d \leq n$ avec $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, alors

$$(\rho^*[\overline{ab}])u_{cd} = u_{cd}.$$

- Si $1 \leq a < b < c \leq n$, alors

$$\begin{aligned} (\rho^*[\overline{ab}])u_{ac} &= u_{bc} + (1-q) \sum_{a \leq d < b} u_{dc}, \\ (\rho^*[\overline{ab}])u_{bc} &= qu_{ac} + (q-1) \sum_{a < d < b} u_{dc}, \\ (\rho^*[\overline{ac}])u_{ab} &= tq u_{bc} + t(q-1) \sum_{c < d} u_{bd} + (q-1) \sum_{d < a} u_{db}, \\ (\rho^*[\overline{ac}])u_{bc} &= t^{-1}u_{ab} + (1-q) \sum_{c \leq d} u_{bd} + t^{-1}(1-q) \sum_{d < a} u_{db}, \\ (\rho^*[\overline{bc}])u_{ab} &= u_{ac} + (1-q) \sum_{b \leq d < c} u_{ad}, \\ (\rho^*[\overline{bc}])u_{ac} &= qu_{ab} + (q-1) \sum_{b < d < c} u_{ab}. \end{aligned}$$

- Si $1 \leq a < b \leq n$, alors

$$\begin{aligned} (\rho^*[\overline{ab}])u_{ab} &= tq^2u_{ab} + tq(q-1) \sum_{b < c} u_{ac} + tq(q-1) \sum_{a < c < b} u_{cb} + q(q-1) \sum_{c < a} u_{ca}, \\ &+ t(q-1)^2 \sum_{a < c < b < d} u_{cd} + (q-1)^2 \sum_{c < a < d < b} u_{cd}. \end{aligned}$$

2.2.3.2 Le module de Burau W

Dans ce paragraphe on va utiliser le langage des fourchettes pour retrouver la représentation de Burau définie dans la [Section 2.1](#). Rappelons de l'anneau R et l'élément inversible $q \in R^*$ (t n'est pas important à ce moment). Le module W de Burau est le R -module présenté par générateurs $\{w(T) / T \text{ classe d'isotopie des fourchettes}\}$, et les relations indiquées

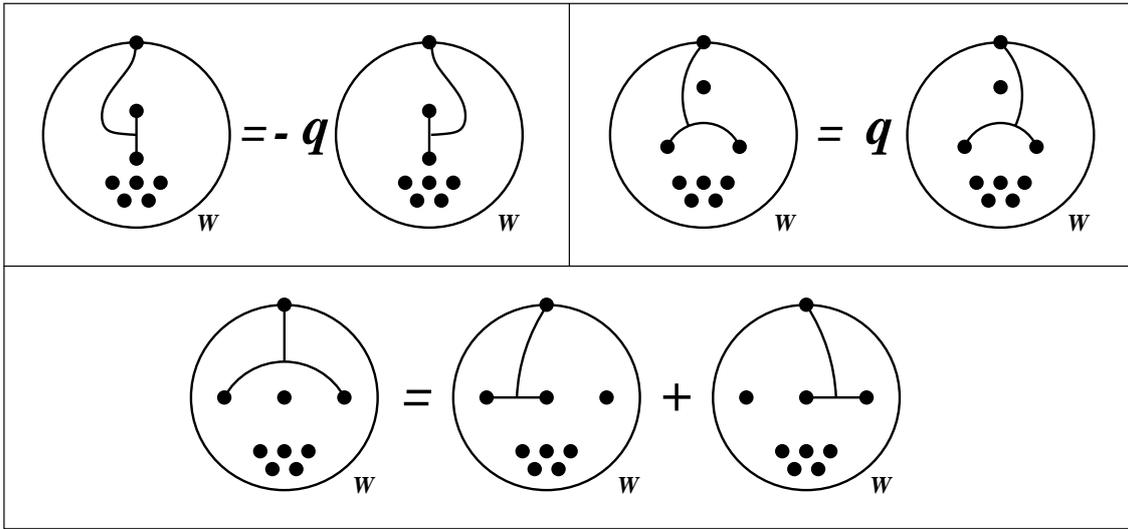


FIGURE 2.4 – Relations entre fourchettes dans le module de Burau

dans la Figure 2.4. Les indices W dans les images indiquent qu'on traite $w(T)$. Comme dans le cas de V (voir sous-Section 2.2.3.1), on obtient immédiatement une action de B_n sur W . On écrit $w_{ij} = w(T_{ij})$. D'une manière analogue à la Proposition 2.6, l'ensemble $\{w_{i,i+1} \mid i = 1, \dots, n - 1\}$ est une base de W . Les matrices concernées sont données par

$$[i, i + 1]w_{j,j+1} = \begin{cases} w_{j-1,j} + w_{j,j+1} & i = j - 1, \\ -qw_{j,j+1} & i = j, \\ w_{j,j+1} + qw_{j+1,j+2} & i = j + 1, \\ w_{j,j+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.7.

Si $t = 1$ et 2 est inversible dans R , alors il existe un isomorphisme de B_n -module $V \rightarrow S^2W$ (carré symétrique de W) donné par $v_{ij} \mapsto w_{ij}^2$ et, plus généralement, $v(T) \mapsto w(T)^2$.

Preuve. une preuve directe basée sur les matrices peut être faite. □

Le polynôme caractéristique de l'action de $[ij]$ sur W égale

$$(x - 1)^{n-2}(x + q),$$

et sur V égale

$$(x - 1)^{\binom{n-1}{2}}(x + q)^{n-2}(x - tq^2).$$

Chapitre 3

Linéarité de B_4

Dans ce chapitre, on expose la linéarité des groupes de tresses. On montre que la représentation de Krammer $\rho : B_n \longrightarrow GL_m(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$ avec $m = n(n-1)/2$ est fidèle pour $n = 4$.

3.1 La Conjecture Principale

Il est difficile d'imaginer une preuve de la linéarité des groupes de tresses sans utiliser quelques solutions de problème de mot. La question qui se pose alors, est comment relier le problème de mot aux représentations. Le résultat suivant essaye de répondre à ça. IL donne une condition suffisante pour que l'action de B_n sur n'importe quel ensemble soit fidèle.

Proposition 3.1.

Soit B_n agit sur un ensemble S . Étant donnés des sous ensembles $D_x = D(x) \subset S$ ($x \in Q$) tels qu'on a :

- (1) D_x est non-vide, $\forall x \in Q$, et sont deux à deux disjoints.
- (2) Pour toute paire averse $(x, y) \in Q \times Q$, on a $x D_y \subset D_x$.

Alors, l'action de B_n sur S est fidèle.

Preuve.

Soit \mathcal{S} dénote le groupe de permutations de S , et soit $\pi : B_n \longrightarrow \mathcal{S}$ l'action de B_n sur \mathcal{S} . On écrit xv au lieu de $(\pi x)v$ ($x \in B_n, v \in S$).

On sait que pour tout $z \in B_n$ il existe $x, y \in B_n^+$ avec $z = xy^{-1}$. Pour démontrer cette

proposition, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in B_n^+$, si $\pi(x) = \pi(y)$ alors $x = y$. On montre ceci par induction sur $\ell(x) + \ell(y)$.

Supposons que $x, y \in B_n^+$ avec $\pi(x) = \pi(y)$. Si $\ell(x) + \ell(y) = 0$, alors $x = 1$ et $y = 1$. Donc $x = y$. Considérons maintenant le cas $\ell(x) + \ell(y) > 0$. Soient (x_1, \dots, x_s) la forme avide de x , et (y_1, \dots, y_t) la forme avide de y . Comme $D(1)$ est non-vide, choisissons un élément quelconque $v \in D(1)$. Puisque $(x_s, 1)$ est une paire avide, alors d'après la supposition (2) de la proposition, on a $x_s v \in x_s D(1) \subset D(x_s)$. Puisque (x_{s-1}, x_s) est une paire avide, alors $x_{s-1} x_s v \in x_{s-1} D(x_s) \subset D(x_{s-1})$. Continuant de cette façon, on trouve que $xv \in D(x_1)$. De même, $yv \in D(y_1)$. Il découle de $\pi(x) = \pi(y)$ que $xv = yv$. En conséquence, $xv \in D(x_1) \cap D(y_1)$. Par la supposition (1) de la proposition, tous les $D(z)$ sont disjoints. Il découle que $x_1 = y_1$. Soient $x', y' \in B_n^+$ tels que $x = x_1 x'$, $y = y_1 y'$. Alors $\pi(x') = \pi(y')$. On a $x_1 \neq 1$ parce que sinon $x = y = 1$, qui est contradiction avec $\ell(x) + \ell(y) > 0$. Donc $\ell(x') + \ell(y') < \ell(x) + \ell(y)$. D'après l'hypothèse d'induction, il vient que $x' = y'$ et donc $x = y$. Ceci prouve la proposition. \square

Afin de formuler la conjecture principale, on a besoin de quelques notations. Rappelons les représentations $\rho : B_n \rightarrow GL(V)$, $\rho^* : B_n \rightarrow GL(U)$ définies dans la Section 2.2, lesquelles dépendent de l'anneau R et les deux variables inversibles $t, q \in R$. On identifie souvent $\rho(x)$ (respectivement, $\rho^*(x)$) avec sa matrice dans la base $\{v_{ij}\}_{ij}$ (respectivement, $\{u_{ij}\}_{ij}$). On observe que pour toute tresse positive x , les entrées de la matrice $\rho(x)$ sont dans $\mathbb{Z}[q, t, t^{-1}]$. En d'autres termes, elles n'ont pas des pôles à $q = 0$. Ceci vient, par exemple, des matrices données dans la Section 2.2. Notons que B_n^+ est engendré par Q_1 . Soit $\rho_0 : B_n^+ \rightarrow \text{End}(V)$ (respectivement, $\rho_0^* : B_n^+ \rightarrow \text{End}(U)$) la représentation obtenue de ρ (respectivement, ρ^*) en fixant $q = 0$ dans leurs matrices. On utilisera la notation xv au lieu de $(\rho_0 x)v$ si $x \in B_n^+$ et $v \in V$. De même, $xu = (\rho_0^* x)u$ si $x \in B_n^+$ et $u \in U$.

Dorénavant, on prend $R = \mathbb{R}[q^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent d'une seule variable comme anneau de base, $t \in \mathbb{R} \subset R$, $0 < t \leq 1$. On pose

$$U_0 := \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R}u_{ij} \subset U \quad , \quad V_0 := \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{R}v_{ij} \subset V$$

Notons que $B_n^+ U_0 \subset U_0$ (abréviation de $(\rho_0^* B_n^+) U_0 \subset U_0$) et de même pour V_0 .

Définition 3.1.

Un sous-ensemble de l'espace vectoriel réel est dit cône convexe ou \mathbb{R}_+^* -module s'il est stable pour l'addition et le produit par des scalaires réels positifs.

Conjecture 3.2. (principale)

Supposons que $0 < t < 1$. Alors ils existent des cônes convexes $C_x = C(x) \subset U_0$ ($x \in Q$) tels qu'on a :

- (1) Les C_x sont non-vides et disjoints.
- (2) Pour toute paire avide $(x, y) \in Q \times Q$, on a $xC_y \subset C_x$.

On établit deux résultats à partir de la conjecture principale, Ils sont vrais même si l'hypothèse de convexité dans la Conjecture 3.2 est ignorée.

On définit $\gamma \in GL(V)$ par $\rho(\delta) = q^2\gamma$, et $\gamma_* \in GL(U)$ par $\rho^*(\delta) = q^2\gamma_*$.

Lemme 3.3. On a :

$$\gamma v_{ij} = \begin{cases} v_{i+1,j+1} & \text{si } j < n, \\ tv_{i+1,j+1} & \text{si } j = n. \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma_* u_{ij} = \begin{cases} u_{i-1,j-1} & \text{si } 1 < i, \\ tu_{i-1,j-1} & \text{si } 1 = i. \end{cases}$$

pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/n$, $1 \leq i < j \leq n$. En particulier γ dépend que de t , et $\gamma V_0 = V_0$, et $\rho_0(\delta) = 0$ et $\rho_0^*(\delta) = 0$.

Preuve.

Pour faire ceci, on multiplie les matrices $\rho[ij]$ suivant la formule $\delta = [12][23]\dots[n-1, n]$. D'après les résultats de la Section 2.2, on a une description figurative de δ . Considérons l'ensemble $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}$, $p_1 < \dots < p_n$, et $*$ = $\sqrt{-1}$. Alors, δ déplace p_i à p_{i+1} le long d'un segment, sauf p_n lequel se déplace à travers le demi plan supérieur à p_1 . Ainsi, si $j < n$ alors (à une isotopie près) δ envoie T_{ij} sur une fourchette qui a le même arc que $T_{i+1,j+1}$ et un tours supplémentaire de son manche autour de p_1 . En utilisant la relation (R3) dans la Figure 2.3, on trouve $(\rho\delta)v_{ij} = q^2v_{i+1,j+1}$. De même, si $j = n$ alors δ prend T_{ij} à une fourchette qui a le même arc que $T_{i+1,j+1}$ mais son manche tourne autour de p_1 avant de rencontrer l'arc en bas. En utilisant la relation (R2), on obtient $(\rho\delta)v_{ij} = tq^2v_{i+1,j+1}$. L'action de δ sur U est obtenue par transposition de la matrice impliquée. En divisant par q^2 , ceci termine la preuve. \square

Théorème 3.4.

On suppose que la Conjecture 3.2 est vraie (pour quelques valeurs de n). Alors on a :

- (a) La représentation $\rho : B_n \longrightarrow GL(V)$ est fidèle.
- (b) Soit $x \in B_n$. Considérons les séries de Laurent de $\rho^*(x)$ respectivement à q :

$$\rho^*(x) = \sum_{i=k}^{\ell} A_i(t)q^i \quad , \quad A_i \in M_m(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \quad , \quad A_k \neq 0, A_\ell \neq 0.$$

Alors,

$$\ell_Q(x) = \frac{1}{2} \max(\ell - k, -k, \ell).$$

Si, de plus, $x \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+$, alors $k = 0$, $\ell = 2\ell_Q(x)$.

Preuve.

La preuve de (a) sera une application de la [Proposition 3.1](#). Posons $S := U$,

$$D_x := C_x + q\mathbb{R}[q]U_0 = \{a + b \mid a \in C_x, b \in q\mathbb{R}[q]U_0\} \subset U.$$

Le terme $q\mathbb{R}[q]U_0$ veut dire qu'on va travailler modulo q . L'action de B_n sur S est évidemment ρ^* . On va avoir la condition (2) de la [Proposition 3.1](#) à partir de (2) de la [Conjecture 3.2](#). En effet, pour toute paire avide $(x, y) \in Q^2$ on a

$$\begin{aligned} (\rho^*x)D_y &= (\rho^*x)C_y + (\rho^*x)q\mathbb{R}[q]U_0 \subset (\rho^*x)C_y + q\mathbb{R}[q]U_0 \\ &= (\rho_0^*x)C_y + q\mathbb{R}[q]U_0 \subset C_x + q\mathbb{R}[q]U_0 = D_x. \end{aligned}$$

Dans la première inclusion, on a utilisé le fait que ρ^*x n'a aucun pôle à $q = 0$. Dans la deuxième égalité, on a utilisé le fait que ρ^* et ρ_0^* coïncident modulo q . Dans la dernière inclusion, on a utilisé $x C_y \subset C_x$. Ceci prouve (2) de la [Proposition 3.1](#). La condition (1) de la [Proposition 3.1](#) s'obtient de la [Conjecture 3.2\(1\)](#). En appliquant la [Proposition 3.1](#) on obtient que l'action de B_n sur U (ou son dual V) est fidèle.

Maintenant, montrons (b). On va prouver que

$$(H_1) \quad \text{pour tout } x \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+ \quad : k = 0,$$

$$(H_2) \quad \text{pour tout } x \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+ \quad : \ell = 2\ell_Q(x),$$

tels que k, ℓ sont définis comme dans (b) du [Théorème 3.4](#). Plus précisément, (H_1) est prouvée pour tout réel t avec les propriétés de la [Conjecture 3.2](#), mais (H_2) est prouvée seulement pour un indéterminé t .

Montrons (H_1) . On écrit $r := \ell_Q(x)$. Si $r = 0$, il n'y a rien à prouver, donc supposons que $r > 0$. Par le [Théorème 2.5\(a\)](#) la forme avide de x est de la forme $(x_1, \dots, x_r) \in Q^r$. D'après la [Conjecture 3.2\(1\)](#), $C(1)$ est non-vidé. Prenons un $v \in C(1)$ quelconque. Comme dans la preuve de la [Proposition 3.1](#), on a $xv \in C(1)$. Puisque $x \notin \delta B_n^+$, alors $x_1 \neq \delta$. De plus, $0 \in C(\delta)$, car $\rho_0^*(\delta) = 0$ par le [Lemme 3.3](#) et $(\delta, 1)$ est avide, d'où $0 = \delta v \in C(\delta)$. Mais tous les $C(y)$ sont disjoints. Donc $0 \notin C(x_1)$. Le fait que $xv \in C(x_1)$, nous donne $xv \neq 0$. D'une manière équivalente, $A_0 v \neq 0$ (où A_i est zéro si $i < k$ ou $i > \ell$). IL découle que $A_0 \neq 0$. Ceci

finit la preuve de (H1).

On revient à la preuve de (H2). On remplace l'anneau de base par l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$. Considérons l'automorphisme de B_n $x \mapsto \bar{x}^{-1}$. on a la formule

$$\rho^*(\bar{x}^{-1}, q, t) = T\rho^*(x, q^{-1}, t^{-1})T. \quad (3.1)$$

où l'involution $T \in GL(U)$ est définie par $Tu_{ij} = u_{n+1-j, n+1-i}$. Il découle que

$$T\left(\sum_{i=0}^{\ell} A_i(t^{-1})q^{-i}\right)T = T\rho^*(x, q^{-1}, t^{-1})T = \rho^*(\bar{x}^{-1}, q, t) = \rho^*(\delta^{-r}, q, t)\rho^*(\delta^r\bar{x}^{-1}, q, t). \quad (3.2)$$

Posons $x' = \delta^r\bar{x}^{-1}$. On a $x' \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+$ et $\ell_Q(x') = r$. En effet, si (y_1, \dots, y_r) est la forme avide de \bar{x} alors la forme avide de x' est (z_r, \dots, z_1) avec $z_i = \delta^i\bar{x}_i^{-1}\delta^{1-i}$. En appliquant (H1) à x' , le côté droit de l'équation (3.2) sera de la forme

$$\gamma_*^{-r} q^{-2r} \sum_{i=0}^{\ell'} A'_i(t)q^i, \quad A'_0 \neq 0.$$

Puisque γ_* ne dépend pas de q , il découle que le petit exposant de q dans cette expression égale $-2r$. En combinant avec (3.2), et en notant que T ne dépend non plus de q , on obtient $\ell = 2r = 2\ell_Q(x)$. Ceci finit la preuve de (H2). De (H1), (H2), et le [Théorème 2.5](#) on obtient (b). \square

Dans le [Théorème 3.4\(b\)](#), les identités sont vraies pour $0 < t < 1$. L'exemple suivant montre que [Théorème 3.4\(b\)](#) est fausse pour $t = 1$, $n = 4$.

Exemple

Considérons l'élément $x \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+$ lequel sa forme avide est

$$([23][14], [24], [12], [14], [34], [23], [12], [13], [23][14]). \quad (3.3)$$

donc $\ell_Q(x) = 9$. Le calcul direct montre que dans la notation de (b) du [Théorème 3.4](#), $k = 2$. Ceci contredit la dernière relation de (b) du [Théorème 3.4](#) laquelle affirme que $k = 0$.

Proposition 3.5.

Considérons les anneaux $I_1 = \mathbb{Z}[q, t, t^{-1}]$, $I_2 = \mathbb{Z}[q]$ et $R_i = I_i[q^{-1}]$, $i = 1, 2$. Pour $i = 1, 2$, posons $V_i = V(R_i, q, t)$ où $t = 1$ si $i = 2$.

Fixons une base quelconque A_i de V_i . Pour $y \in B_n$ et $i \in \{1, 2\}$, soit $k_i(y)$ dénote le plus grand entier k tel que $q^k I_i$ contient tous les entrées de la matrice de l'action de y sur V_i respectivement à A_i . Alors $\{k_1(y) - k_2(y) \mid y \in B_n\}$ est non borné, sauf si les égalités de (b) du [Théorème 3.4](#) sont maintenues.

Preuve.

Un résultat standard montre que être non borné est indépendant du choix des bases. En effet, si A_i et A'_i sont deux bases de V_i alors la différence des fonctions associées $|k_i(y) - k'_i(y)|$ est au plus un constant indépendant de y . Par conséquent, il suffit de faire la preuve pour une base particulière A_i . On va choisir la base standard des fourchettes. Notons que $([23][14], [23][14])$ est une paire avide. La forme avide de x^r ($r \geq 0$) égale la concaténation de r copies de la forme avide de x . En particulier, $x^r \in B_n^+ \setminus \delta B_n^+$ et, d'après le [Théorème 3.4\(b\)](#), $k_1(x^r) = 0$. Mais on a obtenu que $k_2(x) = 2$, d'où $k_2(x^r) \geq 2r$. Il découle que $|k_1(x^r) - k_2(x^r)| \geq 2r$. D'où la preuve de la proposition. \square

3.2 Démonstration de la Conjecture Principale pour $n = 4$

Dans cette section, on va prouver la conjecture principale pour $n = 4$. La première tâche est de définir les cônes C_x lesquels satisfont les conditions de la conjecture principale [3.2](#). Mais d'abord on considère le cas $t = 1$, pour nous donner l'idée de ce qui se passe. L'hypothèse $t = 1$ implique que V est un carré symétrique du module de Burau (voie la [Section 2.2.3.2](#)). Ceci conduit au cône convexe $C \in U_0$, nommé l'ensemble des éléments positifs semi-définis. Examinant la signification des bases $\{u_{ij}\}_{ij}$, on trouve

$$C = \mathbb{R}_+^* - \text{span of } \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 u_{ij} / x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.4)$$

Définition 3.2.

Un espace pseudométrique est une paire (X, d) formée d'un ensemble X et d'une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
- 2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$. (l'inégalité triangulaire).

Remarque 3.2.1.

On appelle un espace pseudométrique fini *Euclidien* s'il admet une application isométrique d'un espace Euclidien. Plus précisément, (X, d) est Euclidien s'il existe des applications $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq |X| - 1$) avec $d(x, y)^2 = \sum_i (f_i(x) - f_i(y))^2$. On peut réécrire C comme

$$C = \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)^2 u_{ij} / d \text{ pseudométrique Euclidien sur } \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (3.5)$$

Dorénavant, on suppose que $0 < t < 1$. Posons $p = t^{\frac{1}{2}}$

Définition 3.3.

On appelle t -pseudométrie sur \mathbb{Z}/n toute application $d : \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les conditions suivantes :

- 1) $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/n$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}/n$.
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}/n$, $x < y < z$.
- 4) $d(x, y) \leq d(x, z) + t^{-\frac{1}{2}}d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}/n$, $x < y < z$.
- 5) $d(y, z) \leq d(x, z) + t^{\frac{1}{2}}d(x, y)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}/n$, $x < y < z$.

Les inégalités 3), 4) et 5) sont appelées t -triangulaires.

On peut maintenant définir les cônes C_x . D'une façon analogue à (3.5), on pose

$$C = \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)^2 u_{ij} / d \text{ est une } t\text{-pseudométrie sur } \mathbb{Z}/n \right\}, \quad (3.6)$$

$$C_x = \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(i, j)^2 u_{ij} \in C / \text{Pour tout } 1 \leq i < j \leq n : d(i, j) = 0 \iff [ij] \leq \bar{x} \right\}, \quad (3.7)$$

où $x \in Q \setminus \{1\}$ et, si $n = 4$

$$C_1 = (u_{12} + u_{13} + pu_{14} + pu_{23} + pu_{24} + p^2u_{34})\mathbb{R}_+^*. \quad (3.8)$$

Il sera plus unifier de définir C_1 de la même façon que les C_x mais cette définition réduit les calculs qui suivent.

Pour formuler le théorème principale de ce chapitre on a besoin de la proposition et les lemmes qui suivent.

Proposition 3.6.

- (a) $\gamma_* C = C$.
- (b) $\gamma_* C_x = C_{\delta_x \delta^{-1}}$ pour tout $x \in Q \setminus \{1\}$.
- (c) si $n = 4$, alors $\gamma_* C_1 = C_1$.

Preuve.

(a) Pour tous $i, j, k \in \mathbb{Z}/n$ avec $1 \leq i < j < k \leq n$ et $\ell \in \{1, 2, 3\}$, on définit $C_\ell(i, j, k)$ comme étant l'ensemble des vecteurs $\sum_{1 \leq r < s \leq n} a_{rs}^2 u_{rs} \in U_0$ avec $a_{rs} \in \mathbb{R}_+$ et

$$\begin{cases} a_{ij} \leq a_{ik} + p^{-1}a_{jk} & \text{si } \ell = 1, \\ a_{ik} \leq a_{ij} + a_{jk} & \text{si } \ell = 2, \\ a_{jk} \leq a_{ik} + pa_{ij} & \text{si } \ell = 3. \end{cases}$$

Puisque C est par définition l'intersection de tous les $C_\ell(i, j, k)$, il suffit de montrer que γ_* permute les $C_\ell(i, j, k)$. Soit $u = \sum a_{ij}^2 u_{ij} \in U_0$ où $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}_+$. Par la première égalité du [Lemme 3.3](#), on a $\gamma_* u = \sum b_{ij}^2 u_{ij}$ où

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} a_{i+1, j+1} & j < n, \\ pa_{i+1, j+1} & j = n, \end{cases}$$

chaque fois que $i, j \in \mathbb{Z}/n$, $1 \leq i < j \leq n$. Si $1 \leq i < j < k < n$ et $\ell \in \{1, 2, 3\}$ alors

$$\gamma_* u \in C_\ell(i, j, k) \iff u \in C_\ell(i+1, j+1, k+1).$$

Il reste le cas $k = n$, i.e., on suppose $1 \leq i < j < k = n$. Alors

$$\begin{aligned} \gamma_* u \in C_1(i, j, k) &\iff b_{ij} \leq b_{ik} + p^{-1}b_{jk} \\ &\iff a_{i+1, j+1} \leq pa_{k+1, i+1} + a_{k+1, j+1} \\ &\iff u \in C_3(k+1, i+1, j+1), \\ \gamma_* u \in C_2(i, j, k) &\iff b_{ik} \leq b_{ij} + b_{jk} \\ &\iff pa_{k+1, i+1} \leq a_{i+1, j+1} + pa_{k+1, j+1} \\ &\iff u \in C_1(k+1, i+1, j+1), \\ \gamma_* u \in C_3(i, j, k) &\iff b_{jk} \leq b_{ik} + pb_{ij} \\ &\iff pa_{k+1, j+1} \leq pa_{k+1, i+1} + pa_{i+1, j+1} \\ &\iff u \in C_2(k+1, i+1, j+1). \end{aligned}$$

Ceci montre que γ_* permute les $C_\ell(i, j, k)$, d'où la preuve de (a).

Maintenant montrons (b). Puisque C_x et $C_{\delta_x \delta^{-1}}$ sont les deux dans C par définition, et γ_* préserve C d'après (a), alors il suffit de montrer que si $u \in C$, alors $u \in C_x$ est équivalent

à $\gamma_* u \in C_{\delta x \delta^{-1}}$. Supposons que $u \in C$. On garde la notation a_{ij} , b_{ij} de (a). On trouve

$$\begin{aligned} \gamma_* u \in C_{\delta x \delta^{-1}} &\iff (b_{ij} = 0 \iff [ij] \leq \delta^{-1} \bar{x} \delta \text{ chaque fois que } 1 \leq i < j \leq n) \\ &\iff (a_{i+1, j+1} = 0 \iff \delta [ij] \delta^{-1} \leq \bar{x} \text{ chaque fois que } 1 \leq i < j \leq n) \\ &\iff (a_{i+1, j+1} = 0 \iff [i+1, j+1] \leq \bar{x} \text{ chaque fois que } 1 \leq i < j \leq n) \\ &\iff (a_{ij} = 0 \iff [ij] \leq \bar{x} \text{ chaque fois que } 1 \leq i < j \leq n) \iff u \in C_x. \end{aligned}$$

Ceci finit la preuve de (b).

La partie (c) est obtenue par le [Lemme 3.3](#) et un calcul direct. \square

Le lemme suivant détermine les t -triangles avec une arête de longueur zero.

Lemme 3.7.

Soit d une t -pseudométrie sur \mathbb{Z}/n , et soit $1 \leq i < j < k \leq n$. Alors on a

- (a) Si $d(i, j) = 0$, alors $d(j, k) = d(i, k)$.
- (b) Si $d(j, k) = 0$, alors $d(i, j) = d(i, k)$.
- (c) Si $d(i, k) = 0$, alors $d(j, k) = pd(i, j)$.

Preuve.

Montrons (c). Par l'hypothèse $d(i, k) = 0$, les inégalités t -triangulaires se réduisent à $d(i, j) \leq p^{-1}d(j, k)$ et $d(j, k) \leq pd(i, j)$. Il découle que $d(j, k) = pd(i, j)$. (a) et (b) se font de la même manière que (c). \square

Dorénavant, on suppose $n = 4$. exposons Q comme la réunion des $Aut(B_n^+)$ -orbites :

$$Q = \{1\} \cup \{[12], [23], [34], [41]\} \cup \{[13], [24]\} \cup \{[123], [234], [341], [412]\} \cup \{[12][34], [23][41]\} \cup \{\delta\}. \quad (3.9)$$

Le lemme suivant donne une description concrète de C_x pour un seul x dans chaque $Aut(B_n^+)$ -orbite dans Q , sauf C_1 qui est toujours défini dans sa forme simple (3.8). Le dual de la base standard de fourchettes de U est ordonné comme suit : $(u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34})$.

Lemme 3.8.

- (a) $C_\delta = \{0\}$.
- (b) $C_{[123]} = (1, 1, 1, 0, 0, 0)\mathbb{R}_+^*$.
- (c) $C_{[12][34]} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)\mathbb{R}_+^*$. En général, pour tout $x \in Q_2$, le conne convexe C_x est engendré par l'unique colonne non nulle dans $\rho_0^*(x)$ (voir les matrices dans la [Figure 3.1](#)).

(d) $C_{[12]}$ est l'ensemble des vecteurs $(x^2, y^2, y^2, z^2, z^2, 0)$ où $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x \leq y + p^{-1}z, \quad (\text{A1})$$

$$y \leq x + z, \quad (\text{A2})$$

$$z \leq px + y. \quad (\text{A3})$$

(e) $C_{[13]}$ est l'ensemble des vecteurs $(x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ tels que $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x \leq py + pz, \quad (\text{B1})$$

$$y \leq px + z, \quad (\text{B2})$$

$$z \leq x + y. \quad (\text{B3})$$

Preuve.

(a) Soit $v = \sum a_{ij}u_{ij} \in C_\delta$. Pour tous i, j on a $[ij] \leq \delta = \bar{\delta}$, d'où $a_{ij} = 0$ par définition de C_δ . Ceci montre que $v = 0$, i.e., $C_\delta \subset \{0\}$. L'inclusion inverse est évidente .

(b) Soit $v = \sum a_{ij}u_{ij} \in C_{[123]}$. D'après la définition de $C_{[123]}$, on a $a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$ et $a_{12}, a_{13}, a_{14} > 0$. D'après le [Lemme 3.7](#), avec $(i, j, k) = (1, 3, 4)$, il découle que $a_{13} = a_{14}$. Similairement, la restriction à $\{1, 2, 3\}$ nous donne $a_{12} = a_{13}$. IL découle que $v = a_{12}(u_{12} + u_{13} + u_{14})$, d'où $v \in (1, 1, 1, 0, 0, 0)\mathbb{R}_+^*$. L'inclusion inverse est claire.

(c) Soit $v = \sum a_{ij}u_{ij} \in C_{[12][34]}$. Par la définition de $C_{[12][34]}$, on a $a_{12} = a_{34} = 0$, les autres quatre coordonnées sont positives. Le [Lemme 3.7](#) appliquée aux indices 1, 2, 3, nous donne $a_{13} = a_{23}$. La restriction à $\{2, 3, 4\}$ donne $a_{23} = a_{24}$. Finalement, La restriction à $\{1, 2, 4\}$ donne $a_{24} = a_{14}$. Par conséquent $v \in (0, 1, 1, 1, 1, 0)\mathbb{R}_+$. L'inclusion inverse est claire.

Pour $a \in Q_2$, soit D_a le conne convexe engendré par l'unique colonne non nulle dans $\rho_0^*(a)$ (voir la [Figure 3.1](#)). Montrons que $C_a = D_a$ pour tout $a \in Q_2$. Notons que (b) indique qu'elle est vraie pour $a = [123]$, et, ci-dessus, on a montré qu'elle est vraie pour $a = [12][34]$. Puisque chaque $\text{Aut}(B_n^+)$ -orbite dans Q_2 contient $[123]$ ou $[12][34]$, il reste à montrer que si $b = \delta a \delta^{-1}$ et $C_a = D_a$, alors $C_b = D_b$. De $b = \delta a \delta^{-1}$, on trouve $\rho^*(b) = \rho^*(\delta)\rho^*(a)\rho^*(\delta)^{-1} = \gamma_*\rho^*(a)\gamma_*^{-1}$. Posons $q = 0$. On trouve $\rho_0^*(b) = \gamma_*\rho_0^*(a)\gamma_*^{-1}$. Puisque chaque ligne et chaque colonne de γ_* contient seulement une seule entrée non-nulle, qui est positive, on déduit que $D_b = \gamma_*D_a = \gamma_*C_a = C_{\delta a \delta^{-1}} = C_b$. Ceci finit la preuve de (c).

(d) Soit $v = \sum a_{ij}u_{ij} \in C_{[12]}$. D'après la la définition de $C_{[12]}$, on a $a_{34} = 0$ et $a_{ij} > 0$ sinon. En appliquant le [Lemme 3.7](#) sur $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$, il découle que v a la forme

$v = (x^2, y^2, y^2, z^2, z^2, 0)$ avec $x, y, z > 0$. Pour $\{1, 2, 3\}$ les inégalités t -triangulaires satisfont (A1), (A2), (A3). Pour $\{1, 2, 4\}$ on obtient précisément les mêmes trois inégalités. Ceci montre l'inclusion de (d), est l'inclusion inverse est aussi claire. Ceci finit la preuve de (d).

(e) soit $v = \sum a_{ij}u_{ij} \in C_{[13]}$. Par la définition de $C_{[13]}$, on a $a_{24} = 0$ et $a_{ij} > 0$ sinon. En appliquant le Lemme 3.7 sur $\{1, 2, 4\}$ et $\{2, 3, 4\}$, il découle que v a la forme $v = (x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ avec $x, y, z > 0$. On va maintenant écrire ci-dessous les 6 inégalités t -triangulaires restantes. Pour $\{1, 2, 3\}$, on a

$$x \leq p^{-1}y + z, \quad (3.10)$$

$$y \leq px + z, \quad (3.11)$$

$$z \leq x + y. \quad (3.12)$$

Pour $\{1, 3, 4\}$, on a

$$x \leq py + z, \quad (3.13)$$

$$py \leq x + pz, \quad (3.14)$$

$$z \leq x + y. \quad (3.15)$$

Notons que (3.12) \iff (3.15), et (3.13) \implies (3.10) (car $0 < p < 1$ et $x, y, z > 0$), et (3.11) \implies (3.14).

En conséquence

$$\begin{aligned} [(3.10), \text{ et } \dots, \text{ et } (3.15)] &\iff [(3.12), (3.13) \text{ et } (3.11)] \\ &\iff [(B1), (B2) \text{ et } (B3)]. \end{aligned}$$

Ceci montre l'inclusion de (e), et l'inclusion inverse est aussi claire. Ceci finit la partie (e). \square

Rappelons des deux définitions équivalentes des formes avides dans la Proposition 2.4. La partie (a) du lemme suivant classe les paires avides $(a, b) \in Q^2$ avec $a \neq \delta$, aux automorphismes près de B_n^+ . La partie (b) explique qu'est ce qu'on attend de la réduction modulo $Aut(B_n^+)$.

Lemme 3.9.

(a) Toute paire avide (a, b) avec $a \neq \delta$ dans la liste suivante se produit selon un automorphisme approprié de B_n^+ (et inversement, toutes les paires dans la liste sont avides) :

$$\begin{aligned} b = 1 & & \text{et } a \in \{1, [12], [13], [123], [12][34]\}, \\ b = [12] & & \text{et } a \in \{[12], [23], [24], [12][34], [23][41], [123], [234], [412]\}, \\ b = [13] & & \text{et } a \in \{[13], [24], [12], [123], [234], [12][34]\}, \\ b = [123] & & \text{et } a \in \{[123], [234], [12][34]\}, \\ b = [23][41] & & \text{et } a \in \{[23][41], [13], [123], [12][34]\}. \end{aligned}$$

(b) Afin de prouver $aC_b \subset C_a$ pour toutes les paires avides (a, b) avec $a \neq \delta$, il suffit de le faire pour un seul représentant de chaque $\text{Aut}(B_n^+)$ -orbite (par exemple, chacun de la liste de (a)).

Preuve.

(a) Rappelons que pour $n = 4$, les éléments de Q sont donnés par (3.9). La liste donnée dans le lemme est obtenue en testant la définition d'avidité (greediness) sur toute paire dans Q^2 , à automorphisme près de B_n^+ . La caractérisation concrète des formes avides donnée dans la Proposition 2.4(3) va être utile. On va donner plusieurs exemples. La seule direction qu'on va faire est qu'aucune paire avide est en dehors de la liste. A titre d'exemple, $([124], [23][41])$ n'est pas avide car $[124][23][41] = [1234][41]$. Dans l'approche de la Proposition 2.4(3), on pose $(ij) = (23)$. La paire $([23][41], [123])$ n'est pas avide car $([23][41], [123]) = [23][41][31][12] = [1234][12]$. Ou on pose $(ij) = (13)$. La paire $([34], [13])$ est avide. Mais elle n'est pas oubliée dans la liste parce que en conjuguant par δ^2 la transforme à $([12], [13])$ laquelle est dans la liste.

(b) Rappelons que la conjugaison dans B_n par δ définit un automorphisme de B_n^+ , lequel engendre $\text{Aut}(B_n^+)$ comme monoïde. De plus, $\text{Aut}(B_n^+)$ préserve l'ensemble des formes avides. Soit (a, b) une forme avide satisfaisant $aC_b \subset C_a$. Montrons que la forme avide $(\delta a \delta^{-1}, \delta b \delta^{-1})$ a la même propriété. On a

$$\rho^*(\delta a \delta^{-1}) = \rho^*(\delta) \rho^*(a) \rho^*(\delta)^{-1} = \gamma_* \rho^*(a) \gamma_*^{-1}.$$

En posant $q = 0$, on trouve $\rho_0^*(\delta a \delta^{-1}) = \gamma_* \rho_0^*(a) \gamma_*^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} \delta a \delta^{-1} C_{\delta b \delta^{-1}} &= \rho_0^*(\delta a \delta^{-1}) \gamma_* C_b = (\gamma_* \rho_0^*(a) \gamma_*^{-1}) \gamma_* C_b \\ &= \gamma_*(\rho_0^*(a) C_b) \subset \gamma_* C_a = C_{\delta a \delta^{-1}}. \end{aligned}$$

La première et la dernière égalité découlent de la [Proposition 3.6](#). Ceci finit la preuve de (b). \square

Théorème 3.10.

Pour $n = 4$ et $0 < t < 1$, les cônes convexes $\{C_x / x \in Q\}$ définis dans (3.6)–(3.8) satisfont la Conjecture Principale 3.2. En particulier (par le [Théorème 3.4](#)) V est un B_4 -module fidèle (i.e., la représentation ρ est fidèle), et la relation avec la longueur de Charney énoncée dans le [Théorème 3.4](#) est satisfaite.

Preuve.

Montrons (1) de la Conjecture Principale 3.2. D'après le [Lemme 3.8](#), la [Proposition 2.3](#) et la [Proposition 3.6](#) le cône C_x est non-vidé, et chaque $x \in Q$ est déterminé par $\{y \in Q_1 : y \leq x\}$. Supposons que $\sum a_{ij}u_{ij} \in C_x \cap C_y$. Alors pour tous i, j avec $1 \leq i < j \leq n$, on a par définition de C_z

$$[ij] \leq \bar{x} \iff a_{ij} = 0 \iff [ij] \leq \bar{y}.$$

D'où $x = y$. Ceci montre que les C_z sont disjoints. La preuve de (1) de la Conjecture Principale 3.2 est terminée.

Maintenant, montrons (2) de la Conjecture Principale 3.2. On doit montrer que $aC_b \subset C_a$ pour toute paire avide $(a, b) \in Q \times Q$. Si $a = \delta$ ceci découle immédiatement de l'égalité $\rho_0^*(\delta) = 0$ (voir le [Lemme 3.3](#)) et $C_\delta = \{0\}$. Le [Lemme 3.9\(b\)](#) réduit le nombre des paires avides. En effet, il suffit de considérer les cas (disjoints) suivants :

- 1^{er} Cas : $a = b$, $a \in \{1, [12], [13], [23][41], [123]\}$,
- 2^e Cas : $b = 1$, $a \in \{[12], [13], [123], [12][34]\}$,
- 3^e Cas : $b = [12]$, $a \in Q_2 \setminus \{[341]\}$,
- 4^e Cas : $b = [13]$, $a \in Q_2 \setminus \{[23][41]\}$,
- 5^e Cas : $b = [123]$, $a \in \{[234], [12][34]\}$,
- 6^e Cas : $b = [23][41]$, $a \in \{[13], [123], [12][34]\}$,
- 7^e Cas : $a = [23]$, $b = [12]$,
- 8^e Cas : $a = [12]$, $b = [13]$,
- 9^e Cas : $a = [24]$, $b = [13]$,
- 10^e Cas : $a = [24]$, $b = [12]$.

On verra que la supposition $t \neq 1$ est utilisé seulement dans le 10^eCas, c'est dans la preuve de (3.24).

Les calculs seront plus faciles si on dispose des matrices de $\rho_0^*(x)$ ($x \in Q \setminus \{1, \delta\}$). Elles peuvent être trouver dans la [Figure 3.1](#).

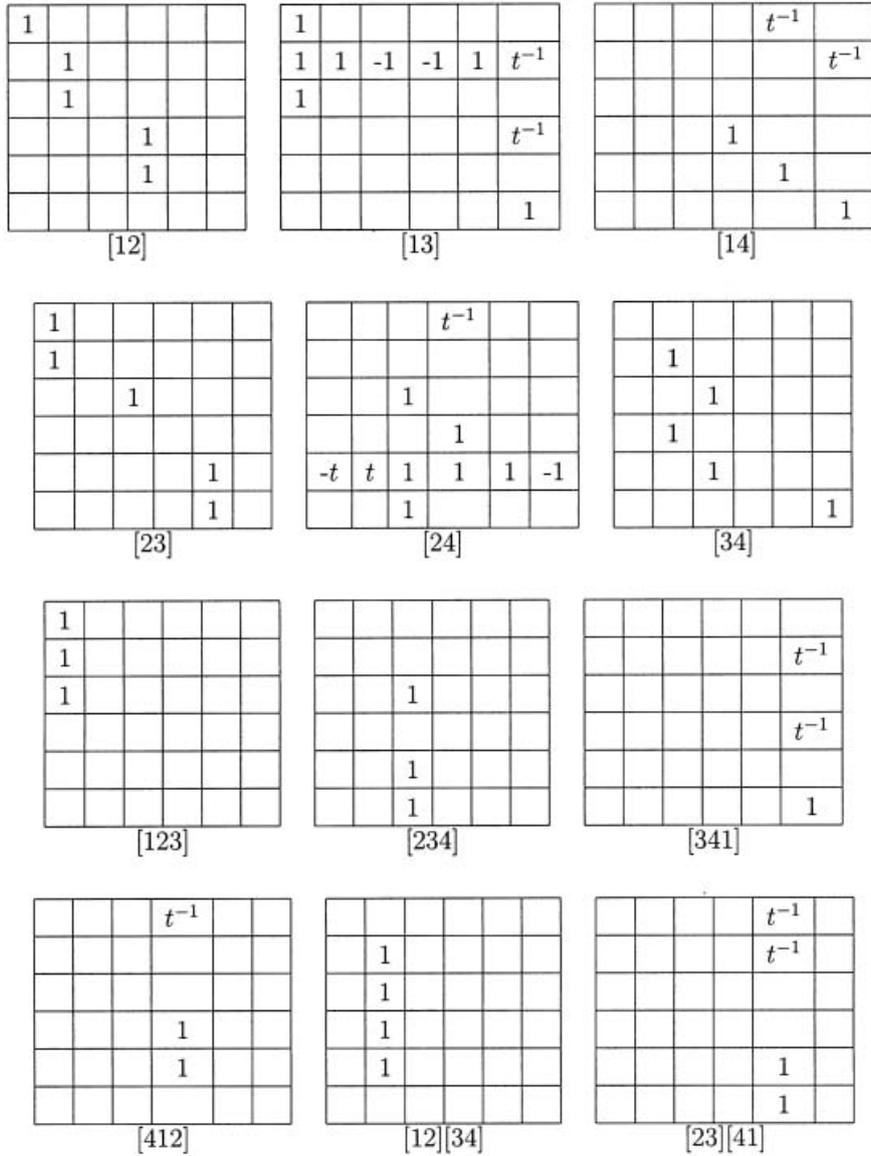


FIGURE 3.1 – Les matrices de $\rho_0^*(x)$ respectivement à $(u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{24}, u_{34})$

1^{er}Cas : $a = b$. Soit $v \in C_a$. En utilisant le [Lemme 3.8](#) et les matrices dans la [Figure 3.1](#), on a $av = v$. Pour tout n et tout $a \in Q$, $v \in C_a$, on a $av = v$. De plus on a la relation $(\rho_0 a)^2 = \rho_0 a$. Il découle que $av \in C_a$ i.e., $aC_a \subset C_a$. Ceci finit le 1^{er}Cas.

2^eCas : $b = 1$ et $a \in \{[12], [13], [123], [12][34]\}$. Rappelons que $C_1 = \mathbb{R}_+^* v$, où $v = (1, 1, p, p, p, p^2)$. On doit montrer que $av \in C_a$. Si $a = [12]$, alors (utilisant les matrices

dans la [Figure 3.1](#)) $av = (1, 1, 1, p, p, 0)$, lequel on voit immédiatement qu'il est dans $C_{[12]}$, d'après le [Lemme 3.8](#).

Si $a = [13]$, alors $av = (1, 3 - p, 1, 1, 0, p^2) = (x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ tel que $x = 1$, $y = 1$, $z = (3 - p)^{\frac{1}{2}}$. On voit immédiatement que ce vecteur est dans $C_{[13]}$, d'après le [Lemme 3.8](#).

Si $a = [123]$, alors $av = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \in C_a$.

Si $a = [12][34]$, alors $av = (0, 1, 1, 1, 1, 0) \in C_a$. Ceci finit le 2^e Cas.

3^e Cas : $b = [12]$ et $a \in Q_2 \setminus \{[341]\}$. Soit $v \in C_b$. Posons $v = \sum c_{ij}u_{ij}$. Alors $c_{34} = 0$ et $c_{ij} > 0$ si $(i, j) \neq (3, 4)$. D'après les matrices dans la [Figure 3.1](#) et l'hypothèse $\ell(a) = 2$, il découle qu'il existe un unique $1 \leq k < \ell \leq n$ avec $au_{k\ell} \neq 0$. Donc $av = c_{k\ell}(au_{k\ell})$. D'après l'hypothèse $a \neq [341]$ il découle que $[k\ell] \neq [34]$, d'où $c_{k\ell} > 0$. D'après le [Lemme 3.8\(c\)](#), C_a égale \mathbb{R}_+^* fois l'unique colonne non-nul de $\rho_0^*(a)$, i.e., $C_a = \mathbb{R}_+^* au_{k\ell}$. Donc $av \in \mathbb{R}_+^* au_{k\ell} = C_a$.

4^e Cas : $b = [13]$ et $a \in Q_2 \setminus \{[23][41]\}$. De la même manière que le 3^e Cas.

5^e Cas : $b = [123]$, $a \in \{[234], [12][34]\}$. Alors par [Lemme 3.8\(b\)](#), on a $C_b = \mathbb{R}_+^* v$ où $v = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$. Si $a = [234]$ alors $av = (0, 0, 1, 0, 1, 1) \in C_a$. Si $a = [12][34]$ alors $av = (0, 1, 1, 1, 1, 0) \in C_a$. Ceci finit le 5^e Cas.

6^e Cas : $b = [23][41]$, $a \in \{[13], [123], [12][34]\}$. Alors d'après le [Lemme 3.8\(c\)](#), on a $C_b = \mathbb{R}_+^* v$ où $v = (1, 1, 0, 0, t, t)$. Si $a = [123]$ alors $av = (1, 1, 1, 0, 0, 0) \in C_a$. Si $a = [12][34]$ alors $av = (0, 1, 1, 1, 1, 0) \in C_a$. Supposons que $a = [13]$. Alors $av = (1, 3 + t, 1, 1, 0, t) = (x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ où $x = y = 1$, $z = (3 + t)^{\frac{1}{2}}$. Par [Lemme 3.8\(e\)](#), on a $av \in C_a$ si et seulement si (B1) : $x \leq py + z$ et (B2) : $y \leq px + z$ et (B3) : $z \leq x + y$. Ces égalités sont vérifiées immédiatement, d'où la preuve de $av \in C_a$. Ceci finit le cas $a = [13]$ et ainsi la preuve du 6^e Cas.

Rappelons que $\gamma_* \in GL(U)$ est défini par $\rho^*(\delta) = q^2 \gamma_*$. IL sera utile d'avoir les matrices de γ_* et de son inverse.

$$\gamma_* = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline t & & & & & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & t & & & & \\ \hline & & t & & & \\ \hline \end{array}, \quad t\gamma_*^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline t & & & & & \\ \hline & t & & & & \\ \hline & & & t & & \\ \hline \end{array}.$$

 FIGURE 3.2 – Les matrices de γ_* et $t\gamma_*^{-1}$

7^eCas : $a = [23]$, $b = [12]$. Soit $v \in C_b$. Alors par [Lemme 3.8\(d\)](#), v est de la forme $(x^2, y^2, y^2, z^2, z^2, 0)$, tel que $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ satisfont les inégalités

$$x \leq y + p^{-1}z, \quad (\text{A1})$$

$$y \leq x + z, \quad (\text{A2})$$

$$z \leq px + y. \quad (\text{A3})$$

On trouve $av = (x^2, x^2, y^2, 0, z^2, z^2)$, $t\gamma_*^{-1}av = (y^2, z^2, z^2, tx^2, tx^2, 0)$. Par la [Proposition 3.6](#) on a $\gamma_*^{-1}C_a = \gamma_*^{-1}C_{[23]} = C_{\delta^{-1}[23]\delta} = C_{[12]}$. Le résultat désiré $av \in C_a$ est donc équivalent à $t\gamma_*^{-1}av \in C_{[12]}$. Par le [Lemme 3.8\(d\)](#), ceci est équivalent à

$$0 < x, y, z,$$

$$y \leq z + x,$$

$$z \leq y + px,$$

$$px \leq py + z,$$

lesquelles donc reste à prouver. En effet, x, y, z son supposés positifs. Les autres trois inégalités sont équivalentes ,respectivement, aux hypothèses (A2),(A3),(A1). Ceci montre que $aC_b \subset C_a$ (et même $aC_b = C_a$).

8^eCas : $a = [12]$, $b = [13]$. Soit $v \in C_b$. Alors par le [Lemme 3.8\(e\)](#), v a la forme $(x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ avec

$$x \leq py + z, \quad (\text{B1})$$

$$y \leq px + z, \quad (\text{B2})$$

$$z \leq x + y, \tag{B3}$$

et $x, y, z > 0$. Alors $av = (x^2, z^2, z^2, y^2, y^2, 0)$. Encore, on sait déjà que x, y, z sont positifs. Par conséquent, par le [Lemme 3.8\(d\)](#), on a $av \in C_a$ si et seulement si

$$x \leq z + p^{-1}y,$$

$$z \leq x + y,$$

$$y \leq px + z.$$

La deuxième inégalité est équivalente à (B3). La troisième inégalité est équivalente à (B2). La première inégalité est une conséquence de (B1) et le fait que $0 < p < 1$ et $y > 0$. Ceci prouve $aC_b \subset C_a$ et finit le 8^eCas.

9^eCas : $a = [24]$, $b = [13]$. Soit $v \in C_b$. Alors v a la forme $(x^2, z^2, x^2, y^2, 0, ty^2)$ avec (B1), (B2), (B3) et $x, y, z > 0$. On trouve $av = (t^{-1}y^2, 0, x^2, y^2, u, x^2)$ où

$$u = (1 - t)(x^2 + y^2) + tz^2. \tag{3.16}$$

On note $\gamma_*C_a = \gamma_*C_{[24]} = C_{[13]}$, de sorte que le résultat désiré $av \in C_a$ est équivalente à $\gamma_*av \in C_{[13]}$. On trouve $\gamma_*av = (y^2, u, y^2, x^2, 0, tx^2)$. Par [Lemme 3.8\(e\)](#), $\gamma_*av \in C_{[13]}$ si et seulement si

$$0 < u, \tag{3.17}$$

$$x \leq py + u^{\frac{1}{2}}, \tag{3.18}$$

$$y \leq px + u^{\frac{1}{2}}, \tag{3.19}$$

$$u^{\frac{1}{2}} \leq x + y. \tag{3.20}$$

L'inégalité (3.17) découle immédiatement de (3.16) et les suppositions $0 < t \leq 1$ et $x, y, z > 0$. Notons que les suppositions (B1), (B2), (B3) et les résultats (3.17)–(3.20) sont symétriques par rapport à x et y , puisque a et b les deux commutent avec δ^2 . Donc, on peut supposer $x \leq y$. Par (B2) on a $0 \leq y - px \leq z$, d'où

$$(y - px)^2 \leq z^2. \tag{3.21}$$

Il découle que

$$\begin{aligned}
u - (y - px)^2 &= (1 - t)(x^2 + y^2) + tz^2 - (y - px)^2 \geq \\
&\geq (1 - t)(x^2 + y^2) + t(y - px)^2 - (y - px)^2 \\
&= (1 - t)((x^2 + y^2) - (y - px)^2) \\
&= (1 - t)((x^2 + y^2) - (y^2 - 2pxy + p^2x^2)) \\
&= (1 - t)((1 - p^2)x^2 + 2pxy) \geq 0.
\end{aligned}$$

où dans la première inégalité on a utilisé (3.21). Il découle que $u^{\frac{1}{2}} \geq y - px$. Ceci prouve (3.19). L'inégalité (3.18) est une conséquence directe de (3.19) et $x \leq y$. De (B3) on trouve $0 \leq z \leq x + y$, d'où

$$z^2 \leq (x + y)^2. \quad (3.22)$$

On trouve

$$\begin{aligned}
u - (x + y)^2 &= (1 - t)(x^2 + y^2) + tz^2 - (x + y)^2 \leq \\
&\leq (1 - t)(x^2 + y^2) + t(x + y)^2 - (x + y)^2 \\
&= (1 - t)(x^2 + y^2 - (x + y)^2) = (1 - t)(-2xy) \leq 0,
\end{aligned}$$

où dans la première inégalité on a utilisé (3.22). Puisque $x + y \geq 0$, il découle que $u^{\frac{1}{2}} \leq (x + y)$, d'où la preuve de (3.20). La preuve du 9^eCas est finie.

10^eCas : $a = [24]$, $b = [12]$. Soit $v \in C_b$. Alors v est de la forme $(x^2, y^2, y^2, z^2, z^2, 0)$, avec

$$x \leq y + p^{-1}z, \quad (A1)$$

$$y \leq x + z, \quad (A2)$$

$$z \leq px + y, \quad (A3)$$

et $x, y, z > 0$.

On trouve $av = (t^{-1}z^2, 0, y^2, z^2, u, y^2)$ où

$$u = -tx^2 + (1 + t)y^2 + 2z^2. \quad (3.23)$$

Puisque $\gamma_*C_a = \gamma_*C_{[24]} = C_{[13]}$ par la Proposition 3.6, le résultat désiré $av \in C_a$ est équivalent à $\gamma_*av \in C_{[13]}$. On a $\gamma_*av = (z^2, u, z^2, y^2, 0, ty^2)$, lequel, par le Lemme 3.8(e), est inclut dans $C_{[13]}$ si et seulement si

$$0 < u, \quad (3.24)$$

$$z \leq py + u^{\frac{1}{2}}, \quad (3.25)$$

$$y \leq pz + u^{\frac{1}{2}}, \quad (3.26)$$

$$u^{\frac{1}{2}} \leq z + y. \quad (3.27)$$

Montrons les inégalités (3.24)–(3.27).

De (A1), on trouve $0 \leq px \leq py + z$, donc

$$tx^2 \leq ty^2 + 2pyz + z^2. \quad (3.28)$$

il découle que

$$\begin{aligned} u - (z - py)^2 &= (-tx^2 + (1+t)y^2 + 2z^2) - (z^2 - 2pyz + ty^2) \\ &= -tx^2 + y^2 + 2pyz + z^2 \geq -tx^2 + ty^2 + 2pyz + z^2 \geq 0, \end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité, on utilisait (3.28). Quelque soit le signe de $z - py$, il découle que $u \geq 0$ et $z - py \leq u^{\frac{1}{2}}$. L'inégalité (3.25) est prouvée.

Preuve de (3.26). On a

$$\begin{aligned} u - (y - pz)^2 &= (-tx^2 + (1+t)y^2 + 2z^2) - (y^2 - 2pyz + tz^2) = \\ &= -tx^2 + ty^2 + 2pyz + z^2 + (1-t)z^2 \geq (1-t)z^2 \geq 0, \end{aligned}$$

où dans la première inégalité, on utilisait (3.28). Quelque soit le signe de $y - pz$, il découle que $y - pz \leq u^{\frac{1}{2}}$. Ceci prouve (3.26).

Preuve de (3.24). Rappelons que nous avons déjà prouvé $u \geq 0$. Combinant (3.25) et (3.26), on obtient $(1-p)(y+z) \leq 2u^{\frac{1}{2}}$. Puisque $0 < p < 1$ et $y, z > 0$, il découle que $u > 0$.

Preuve de (3.27). On a

$$(y+z)^2 - u = (y^2 + 2yz + z^2) - (-tx^2 + (1+t)y^2 + 2z^2) = tx^2 - ty^2 + 2yz - z^2. \quad (3.29)$$

On considère deux cas, $y \leq z$ ou $z \leq y$. Premièrement si $y \leq z$. Alors (A3) implique $0 \leq z - y \leq px$. D'où $(z - y)^2 \leq tx^2$, donc le côté droit de (3.29) est au moins

$$(z - y)^2 - ty^2 + 2yz - z^2 = (1-t)y^2 \geq 0.$$

Combinant avec (3.29), il découle que $(y + z)^2 - u \geq 0$, d'où (3.27).

Supposons que $z \leq y$. Alors (A2) nous donne $0 \leq y - z \leq x$, d'où $(y - z)^2 \leq x^2$. Donc le côté droit de (3.29) est au moins

$$t(y - z)^2 - ty^2 + 2yz - z^2 = (1 - t)(2yz - z^2) = (1 - t)z(y + (y - z)) \geq 0,$$

car $1 - t, z, y, y - z$ sont positifs. L'inégalité (3.27) s'obtient comme ci-dessus. Le 10^e Cas est fini et donc la preuve du théorème. \square

Bibliographie

- [Art25] E. ARTIN : Theorie der zöpfe. *Abh. Math. Sem. Hambourg*, 4:47–72, 1925.
- [BB05] T. E. BRENDLE et J.S. BIRMAN : Braids : a survey, in handbook of knot theory. *Elsevier B. V., Amsterdam*, pages 19–103, 2005.
- [Big99] S. BIGELOW : The burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Top.*, 3:397–404, 1999.
- [Big01] S. BIGELOW : Braid groups are linear. *J. Amer. Math. Sco.*, 14 No. 2:471–486, 2001.
- [Big02] S. BIGELOW : *In representations of braid groups*, volume Vol. II, pages 37–45. Proceeding of the ICM, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [Bir01] J.S. BIRMAN : Braids, links, and mapping class groups. *Ann. Math. Stud.*, 82, Princeton University Press, N.J, 2001.
- [BKL98] J.S. BIRMAN, K.H. KO et S. LEE : A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups. *Adv. Math.* 139, pages 322–353, 1998.
- [Bre93] G.E. BREDON : *Topology and geometry*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, **139**, 1993.
- [Bur36] W. BURAU : Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte verkettungen. *Abh. Math. Sem. Ham.*, II:171–178, 1936.
- [Gas61] B.J. GASSNER : On braid groups. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 25:10–22, 1961.
- [Jon87] V. JONES : Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math.* **126**, pages 335–388, 1987.
- [Kra00] D. KRAMMER : The braid group B_4 is linear. *Invent. Math.*, 142:451–486, 2000.
- [Kra02] D. KRAMMER : The braid groups are linear. *Annal of Math.*, 155:131–156, 2002.

-
- [KT07] C. KASSEL et V. TURAEV : *Braid Groups - Monograph* -. Springer, May 25, 2007.
- [Law90] R. LAWRENCE : Homological representations of the hecke algebra. *Comm. Math. Phys.*, 135 no. 1:141–191, 1990.
- [Lon94] D.D. LONG : Constructing representations of braid groups. *Comm. Math. Anal. Geom.*, 2:217–238, 1994.
- [LP93] D.D. LONG et M. PATON : The burau representation is not faithful for $n \geq 6$. *Topology*, 32 no. 2:439–447, 1993.
- [Moo91] J.A. MOODY : The burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n . *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 25 no. 2:379–384, 1991.

ملخص

هذه المذكرة تعنى بدراسة تمثيل زمرة الضفائر. أقدم تمثيل هو تمثيل بيرو ولكنه غير وافي. كما سنهتم في هذا العمل بتعريف تمثيل كرامر الذي يُحوّل زمرة الضفائر B_n إلى زمرة المصفوفات المربعة $m \times n$ القابلة للقلب وذات معاملات في حلقة كثيرات الحدود للوران ذات متغيرين حيث $m = n(n - 1)/2$ ونبين أنّ هذا التمثيل وافي من أجل $n = 4$.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des représentations des groupes de tresses. La plus classique est la représentation de Burau qui a l'inconvénient de ne pas être fidèle. Dans ce travail, on définit la représentation de Kramer qui envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $m \times n$, où $m = n(n - 1)/2$ dont les coefficients sont des polynômes de Laurent à deux variables, et on montre qu'elle est fidèle pour $n = 4$.

Summary

This memory deals with the study of the representations of the braid groups. The most classical one is the Burau representation which has the disadvantage of not being faithful. In this work, we define the Kramer's representation which sends the group B_n in the group of the invertible matrices of size $m \times m$, where $m = n(n - 1)/2$, and whose coefficients are Laurent polynomials with two variables, and we show the faithfulness of this representation for $n = 4$.