RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :
N° de série :

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Magistère en Mathématiques
Option : Algèbre

Par : ZITOUNI Aïda

Thème

Etude du comportement de la solution méromorphe de certaines équations fonctionnelles

Soutenu le 03-07-2013 .

Devant le jury composé de

Président :	**M.F. Yarou**	**Prof .**	**Université de Jijel**
Rapporteur :	**T. Zerzaihi**	**Prof .**	**Université de Jijel**
Examinateurs:	**D. Azzam-Laouir**	**Prof .**	**Université de Jijel**
	N. Touafek	**M.C.A.**	**Université de Jijel**

2012-2013

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Allah qui m'a apporté son aide et qui a contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie les personnes qui ont partagé ces années avec moi tant professionnellement que personnellement.

Je remercie principalement Monsieur Zerzaihi Tahar, en tant que directeur du mémoire.

Je tiens aussi à remercier énormément les membres du jury Monsieur M.F. Yarou Prof à l'université de Jijel, Mme D. Azzam-Laouir Prof à l'université de Jijel, et Monsieur N. Touafek maitre de conférences à l'université de Jijel, d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et d'avoir accepté de le juger.
Mes plus vifs remerciements vont à A. Boutabaa maitre de conférences à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand.
J'exprime mes sincères remerciements à ma famille et surtout à mes parents, pour leur contribution pour chaque travail que j'ai effectué.

Je remercie l'ensemble de l'équipe de notre laboratoire pour la bonne ambiance qu'elle sait apporter et pour son aide scientifique.

Je remercie enfin tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réussite de ce travail et qui n'ont pas pu être cités ici.

Merci..

Notations

Nous utilisons les notations suivantes tout au long de ce travail

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: Les nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels, complexes.

p : Un nombre premier fixé.

$\mathbb{Z}_p$: Anneau des entiers p-adiques.

$\mathbb{Q}_P$: Corps des nombres p-adiques.

$\deg P$: Le degré du polynôme P.

$\mathcal{V}_p(x)$, $|x|_p$: La valuation et la valeur absolue p-adique.

$B^-(a,r)$, $B^+(a,r)$: Les boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r.

$\overline{\mathbb{K}}$: La clôture algébrique de K.

$\mathbb{C}_p$: Le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

$p \mid n$: p divise n.

$p \nmid n$: p ne divise pas n.

$\mathcal{A}(\mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions entières dans $\mathbb{K}$.

$\mathcal{M}(\mathbb{K})$: L'ensemble des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}(x)$: Anneau des polynômes.

$\mathbb{K}[x]$: Corps des fractions rationnelles.

$D^+(0,r)$, $D^-(0,r)$: Un disque fermé, ouvert.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction Générale

Ce mémoire est consacré à décrire le comportement de la solution méromorphe des équations fonctionnelles linéaires aux q-différences suivantes :

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\ f(q^i x) = B(x)$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$

Nous étudions ces équations dans le cas complexe p-adique. On est souvent guidée par l'analogie avec des résultats trouvés dans l'analyse complexe que nous appellerons "classique", et, comme pour celles-ci, un outil important est la théorie de Nevanlinna p-adique, que nous allons rappeler aussi.

L'origine de la théorie de distribution des valeurs des fonctions méromorphes revient aux théorèmes classiques de Sokhotskii-Casorati (1868), Weierstrass (1876), Picard (1879). Dans la dernière décennie du XIX-e siècle et les deux premières décennies du XX-ème siècle, ces théorèmes ont été developpés grâce à des recherches sur la répartition des zéros des fonctions entières effectués principalement par l'école française (Hadamard, Borel, Valiron et autres). Les travaux liés aux fonctions méromorphes ont été construits dans les années 20-s du XX-ème siècle par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna. Suite à ces travaux, la théorie de distribution des valeurs prend, en quelque sorte, une forme complète.

Récemment, la théorie de Nevanlinna a été étendue au cas p-adique (Boutabaa. A, Cherry. W, Khoai. H. H, Corrales-Rodriganez. C, Ye. Z) pour des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$. Il existe deux théorèmes fondamentaux qui occupent une place importante dans la théorie de Nevanlinna. Le premier théorème fondamental de Nevanlinna est juste une reformulation de la formule de Poisson-Jensen pour des fonctions méromorphes. Le deuxième théorème fondamental, toutefois, est un élégant théorème qui joue un grand rôle dans la théorie de Nevanlinna. En raison de ce théorème, la théorie de Nevanlinna devient une riche théorie.

La répartition de ce travail se fait comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les corps ultramétriques, et traitons quelques propriétés de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$. Dans une seconde partie, nous allons introduire les notions et les propriétés nécessaires liées aux fonctions analytiques et méromorphes, ensuite nous parlerons de quelques applications utiles du polygone de valuation.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la théorie de distribution des valeurs sur un corps non-archimédien, en particuler on s'intéresse à la théorie de Nevanlinna p-adique qui est devenue l'une des champs mathématiques les plus interessants. Pour cela on a besoin de définir des notions classiques de cette théorie ; la fonction de comptage des zéros de f avec multiplicités $Z(r,f)$, la fonction de comptage des pôles de f avec multiplicités $N(r,f)$, la fonction de compensation $m(r,f)$, et enfin la fonction caractéristique $T(r,f)$. On va citer aussi quelques propriétés élémentaires liées à la théorie de Nevanlinna qui sont assez semblables à celles connues dans $\mathbb{C}$. On va donner aussi la version ultramétrique de la Formule de Jensen qu'on utilisera assez fréquemment au long de ce chapitre. En plus, on va présenter ces deux théorème : le premier théorème fondamental de Nevanlinna qui est tout court une reformulation de la formule de Poisson-Jensen et le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna.

Dans le troisième chapitre, on va traiter les équations fonctionnelles. Plus précisément, nous nous intéressons aux équations linéaires aux q-différences pour lesquelles nous montrons d'une part que si les coefficients sont constants alors la solution est une fraction rationnelle, et nous donnons d'autre part des estimations de croissance des solutions méromorphes transcendantes de telles équations.

Chapitre 1

Notions fondamentales

Le but de ce chapitre est de donner quelques résultats fondamentaux sur les nombres p-adiques et sur l'analyse p-adiques qui sont utilisés dans la théorie de Nevanlinna p-adique pour p un nombre premier fixé. Ce chapitre se compose de deux parties. Les deux premières sections sont consacrées à la construction de $\mathbb{C}_p$ qui est non seulement complet, mais également algébriquement clos. Dans la troisième section de ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse sur $\mathbb{C}_p$ et en particulier, on va donner plusieurs théorèmes importants sur les zéros de fonctions sur $\mathbb{C}_p$ définies par des séries.

1.1 Valeurs absolues sur un corps

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On va définir une valeur absolue sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.
une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est une fonction à valeurs réelles $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *;*

2) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |xy| = |x||y|$ *;*

3) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |x + y| \leq |x| + |y|$.

On dit qu'une valeur absolue est non-archimédienne ou ultramétrique si au plus de ces *trois condition, elle vérifie l'inégalité forte suivante :*

4) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Sinon la valeur absolue est dite archimédienne.

On dit que $|.|$ est une valeur absolue triviale si $|0| = 0$ et $|x| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{K}^*$.

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que la valeur absolue $|.|$ est non triviale. L'exemple le plus évident d'une valeur absolue archimédienne est la valeur absolue usuelle définie sur $\mathbb{Q}$ notée par $|.|_\infty$, cette valeur ne vérifie pas la quatrième condition.

Maintenant, on va introduire un exemple d'une valeur absolue non-archimédienne. Soit p un nombre premier fixé.

Définition 1.2. *La valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ est une fonction $\mathcal{V}_p : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ définit comme suit :*

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathcal{V}_p(n)$ est l'unique entier positif qui satisfait $n = p^{\mathcal{V}_p(n)}.n'$ avec $p \nmid n'$.
On étend $\mathcal{V}_p$ vers le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ comme suit :
Si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, alors $\mathcal{V}_p(x) = \mathcal{V}_p(a) - \mathcal{V}_p(b)$ avec la convention de $\mathcal{V}_p(0) = \infty$.

Exemple 1.1. • *Si $n \in \mathbb{N}$, on a*
$*$ $\mathcal{V}_2(n) = 0$ *si et seulement si n est impair;*
$*$ $\mathcal{V}_2(n) \geq 1$ *si et seulement si n est pair;*
$*$ $\mathcal{V}_2(n) \geq 2$ *si et seulement si n est multiple de 4, etc.*
• *Pour x rationnel, $\mathcal{V}_2(x) \geq 0$ signifie exactement que le dénominateur réduit de x est impair. Pour $x = \frac{35}{88}$, on a*
$\mathcal{V}_2(x) = -3$, $\mathcal{V}_5(x) = 1$, $\mathcal{V}_7(x) = 1$, $\mathcal{V}_{11}(x) = -1$, *et* $\mathcal{V}_p(x) = 0$ *pour tout* $p \neq \{2, 5, 7, 11\}$.

La propriété fondamentale de la valation p-adique est :

Lemme 1.1. *Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, alors*

1) $\mathcal{V}_p(xy) = \mathcal{V}_p(x) + \mathcal{V}_p(y)$.
2) $\mathcal{V}_p(x+y) \geq \min\{\mathcal{V}_p(x), \mathcal{V}_p(y)\}$.

Démonstration. 1) $xy = p^{\alpha+\beta}(n_1 n_2)$ tel que $x = p^{\alpha}n_1$, $y = p^{\beta}n_2$ et $p \nmid n_1 n_2$ d'où $\mathcal{V}_p(xy) = \mathcal{V}_p(x) + \mathcal{V}_p(y)$.

2) On suppose que $\alpha < \beta$: $x+y = p^{\alpha}(n_1+p^{\beta-\alpha}n_2)$ d'où $\mathcal{V}_p(x+y) \geq \min\{\mathcal{V}_p(x), \mathcal{V}_p(y)\}$. □

Définition 1.3. *Pour $x \in \mathbb{Q}$, la valeur absolue p-adique de x est définie par :*

$$|x|_p = p^{-\mathcal{V}_p(x)},$$

avec $|0|_p = 0$.

Proposition 1.1. *La fonction $|.|_p$ est une valeur absolue non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Immédiate à partir des propriétés de $\mathcal{V}_p$. □

Théorème 1.1. ([*1*], [*18*]) *Soit $A \subset \mathbb{K}$ une image de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$. Une valeur absolue est non-archimédienne si et seulement si $|a| \leq 1$ pour tout $a \in A$. En particulier, une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est non-archimédienne si et seulement si $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. La première partie est facile : nous avons toujours $|\pm 1| = 1$, donc, si $|\ |$ est non-archimédienne, on obtient que

$$|a \pm 1| \leq \max\{|a|, 1\}.$$

Par récurrence, il s'ensuit que $|a| \leq 1$ pour tout $a \in A$.
Réciproquement, supposons que $|a| \leq 1$ pour tout $a \in A$. Nous voulons prouver que pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathbb{K}$, nous avons $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$. Si $y = 0$, c'est évident. Sinon, nous pouvons diviser $|x + y|$ par $|y|$, et nous voyons que cela équivaut à l'inégalité

$$\left|\frac{x}{y} + 1\right| \leq \max\{\left|\frac{x}{y}\right|, 1\}.$$

Cela signifie que nous devons prouver l'inégalité dans le cas où le second terme de la somme égal 1. Autrement dit, nous voulons prouver que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$|x \pm 1| \leq \max\{|x|, 1\}.$$

Soit m un entier positif, alors

$$\begin{aligned} |x+1|^m &= \left|\sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^k\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} \left|\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\right| |x^k|. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ est un entier, on a $\left|\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\right| \leq 1$.
Donc

$$\begin{aligned} |x+1|^m &\leq \sum_{k=0}^{m} \left|\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\right| |x^k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m} |x^k| \\ &\leq (m+1)\max\{1, |x|^m\}. \end{aligned}$$

(Pour la dernière étape, notons que la plus grande valeur de $|x|^k$ pour $k = 0, 1, 2, \dots m$ est égal à $|x|^m$ si $|x| > 1$ et est égale à 1 sinon).
Prenant la m-ième racine sur les deux côtés

$$|x+1| \leq (\sqrt[m]{m+1})\max\{1, |x|\}$$

Or, cette inégalité forte est valable pour tout entier positif m, et puisque

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m+1} = 1.$$

D'où

$$|x+1| \leq \max\{1, |x|\}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 1.2. [2] *Soit* $|.|$ *Une valeur absolue non-archimédienne sur* $\mathbb{K}$.
Si $x, y \in \mathbb{K}$ *et* $|x| \neq |y|$ *alors :* $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Démonstration. On remarque d'abord que pour toute valeur absolue $|-1| = 1$: en effet $|-1|^2 = 1$ et $|-1| \geq 0$.

Soient x, y tels que, par exemple, $|x| < |y|$, alors :
$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$ et $|y| \leq \max(|-x|, |x+y|)$ entraînent :

$$\max(|-x|, |x+y|) = |x+y| = |y|.$$

$\square$

Corollaire 1.1. *Dans un espace ultramétrique, tous les "triangles" sont isocèles.*

Maintenant, on va considérer un espace métrique $(\mathbb{K}, d)$ muni d'une distance $d(x, y)$ définie par $d(x, y) = |x - y|$, on a :

$$d(a, c) \leq \max(d(a, b), d(b, c)), \ \ \forall a, b, c \in \mathbb{K}.$$

Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Définissons une boule ouverte et une boule fermée de rayon r et de centre $a \in \mathbb{K}$ par :

$$B^-(a, r) = \{x \in \mathbb{K},\, d(x, a) < r\}$$

et

$$B^+(a, r) = \{x \in \mathbb{K},\, d(x, a) \leq r\}$$

La notation $B(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces ensembles. Les boules ouvertes sont les prototypes des ensembles ouverts, et les boules fermées des ensembles fermés. Pour la valeur absolue non-archimedienne, on a les résultats suivants.

Proposition 1.3. ([*1*], [*18*], [*3*]) *Soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne.*

i) *si $b \in B(a, r)$, alors on a $B(b, r) = B(a, r)$ (tout point d'une boule est un centre de cette boule).*

ii) *une boule $B(a, r)$ est un ensemble ouvert et fermé.*

iii) *soient $B(a, r)$, et $B(\rho, r)$ deux boules, alors ils sont ou disjointes, ou l'une est incluse dans l'autre.*

Démonstration.

i) Par définition, $b \in B(a,r)$ si et seulement si $|b-a| < r$. Maintenant, posons x tel que $|x-a| < r$, la propriété non-archimédienne nous dit que

$$|x-b| < \max\{|x-a|, |b-a|\} < r,$$

de telle sorte que $x \in B(b,r)$, ce qui montre que $B(a,r) \subset B(b,r)$. En permutant a et b, nous obtenons l'inclusion inverse, d'où les deux boules sont égales.

ii) la boule ouverte $B^{-}(a,r)$ est toujours un ensemble ouvert dans un espace métrique. Ce que nous devons montrer, c'est que dans notre cas non-archimédien, la boule ouverte est également fermée. Alors, prenons un point x sur la frontière de $B^{-}(a,r)$, ce qui signifie que toute boule ouverte centrée en x doit contenir des points qui sont dans $B^{-}(a,r)$. Choisissons un rayon $s < r$. Maintenant, puisque x est un point de la frontière de $B^{-}(a,r)$, $B^{-}(a,r) \cap B^{-}(x,s) \neq \emptyset$, il existe un élément $y \in B^{-}(a,r) \cap B^{-}(x,s)$. Cela signifie que $|y-a| < r$ et $|y-x| < s < r$. Appliquant l'inégalité non-archimédienne, nous obtenons

$$|x-a| < \max\{|x-y|, |y-a|\} < \max\{s,r\} < r,$$

d'où $x \in B^{-}(a,r)$. Cela montre que tout point sur la frontière de $B^{-}(a,r)$ appartient à $B^{-}(a,r)$, ce qui veut dire que $B^{-}(a,r)$ est un ensemble fermé.

iii) Nous pouvons supposer que $r < s$. Si l'intersection n'est pas vide, il existe $c \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Ensuite, nous savons, à partir de (*i*), que $B(a,r) = B(c,r)$ et $B(b,s) = B(c,s)$.
Par conséquent,

$$B(a,r) = B(c,r) \subset B(c,s) = B(b,s).$$

□

Proposition 1.4. ([*1*], [*18*]) *Soit $\mathbb{K}$ un corps non-archimédien. L'ensemble $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{K}; |x| \leq 1\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$.*
Le sous ensemble $\mathfrak{B} = \{x \in \mathbb{K}; |x| < 1\}$ est le seul idéal maximal dans $\mathcal{O}$.

Définition 1.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps défini comme dans la proposition précédente. Le sous-anneau $\mathcal{O}$ est dit anneau de valuation .*
Le quotient $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{B}$ est appelé corps des restes ou corps résiduel.

Exemple 1.2. ([*1*], [*18*]) *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$*, et soit* $|.| = |.|_p$ *la valeur absolue p-adique. Alors :*

(i) *l'anneau de valuation associée est* $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q}; p \nmid b\}$ *;*

(ii) *son idéal* $\mathfrak{B} = p\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q}; p \nmid b \text{ et } p \mid a\}$ *;*

(iii) *le corps résiduel est* $\kappa = \mathbb{F}_p$ *(le corps à p éléments)*

Définition 1.5. *On dit que deux valeurs absolues sur* $\mathbb{K}$ *sont équivalentes si elles définissent la même topologie sur* $\mathbb{K}$*. (Si chaque ensemble qui est ouvert par rapport à l'une est également ouvert par rapport à l'autre).*

Lemme 1.2. *Soit* $|.|_1$ *et* $|.|_2$ *deux valeurs absolues sur* $\mathbb{K}$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $|.|_1$ *et* $|.|_2$ *sont équivalentes ;*

ii) pour tout $x \in \mathbb{K}$ *on a* $|x|_1 < 1$ *si et seulement* $|x|_2 < 1$ *;*

iii) il existe un entier positif réel α *tel que pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *on a*

$$|x|_1 = |x|_2^{\alpha}.$$

Théorème 1.2 (Ostrowski). *Toute valeur absolue non triviale* $|.|$ *sur* $\mathbb{Q}$ *est équivalente soit à* $|.|_p$ *pour un nombre premier p, soit à la valeur absolue usuelle notée* $|.|_\infty$*.*

Proposition 1.5 (Formule du produit). ([*1*], [*18*]) *Pour tout* $x \in \mathbb{Q}^*$*, on a :*

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1$$

où $p \leq \infty$ *signifie que nous prenons le produit sur l'ensemble des nombres premiers de* $\mathbb{Q}$*, y compris "l'infini."*

Démonstration. Il est facile de voir que nous avons seulement besoin de prouver la formule lorsque x est un entier positif, et que le cas général s'ensuit directement. Donc, soit x un entier positif, que nous pouvons le factoriser comme suit $x = p_1^{\alpha_1}.\, p_2^{\alpha_2} \ \ldots \ p_k^{\alpha_k}$.

$$\begin{cases} |x|_q = 1 & \text{si } q \neq p_i \\ |x|_p i = p_i^{-\alpha_i} & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k \\ |x|_\infty = p_1^{\alpha_1}.\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \end{cases}$$

d'où le résultat. □

1.2 Nombres p-adiques

1.2.1 Entiers p-adiques

Définition 1.6. *Un entier p-adique est une série formelle* $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ *avec les* a_i *des coefficients entiers tels que* $0 \leq a_i \leq p-1$.
En particulier si $a = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$ *et* $b = \sum_{i\geq 0} b_i p^i$ *(avec* $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *alors*

$$a = b \;\; \Leftrightarrow \;\; a_i = b_i \text{ pour tout } i \geq 0$$

.

Addition des entiers p-adiques

Voici comment on définit la somme de deux entiers p-adiques a et b. La première composante de la somme est $a_0 + b_0$ si elle est plus petite ou égale à $p-1$, sinon $a_0 + b_0 - p$. Dans le deuxième cas on retient 1 que l'on va additionner à la composante de p et on continue l'addition ainsi, composante par composante. À la fin on obtient une somme dont toutes les composantes sont dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Exemple 1.3. *Soit*

$$a = 1 = 1 + 0p + 0p^2 + \ldots,$$

$$b = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots.$$

La première composante vaut $(1 + p - 1) - p = 0$, *on retient un qu'on additionne à la deuxième qui s'annule également, on retient de nouveau un et ainsi de suite. A la fin toutes les composantes vaudront* 0 *et on obtient* $1 + b = 0$, *autrement dit* b *est l'inverse additif de* $a = 1$ *dans l'ensemble des entiers p-adiques, raison pour laquelle on écrira désormais* b = *-1.*

On appellera désormais $\mathbb{Z}_p$ le groupe des entiers p-adiques.

L'anneau des entiers p-adiques

De manière similaire à l'addition, on définit la multiplication des entiers p-adiques. Cette multiplication n'est rien d'autre que l'extension de la multiplication usuelle des entiers naturels (écrits en base p), en continuant tout simplement l'algorithme de multiplication jusqu'à l'infini. Comme

$$p \,.\sum_{i\geq 0} a_i p^i = a_0 p + a_1 p^2 + \cdots \neq 1 + 0p + 0p^2 + \ldots,$$

le nombre premier p n'a pas d'inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}_p$.

Muni de l'addition et de la multiplication définies comme ci-dessus, $\mathbb{Z}_p$ est un anneau commutatif.

Corollaire 1.2. [*2*] *$\mathbb{Z}_p$ est intègre.*

Démonstration. En effet, si x et y sont non nuls :

$$\mathcal{V}_p(xy) = \mathcal{V}_p(x) + \mathcal{V}_p(y) \neq +\infty \quad \text{donc } xy \neq 0.$$

□

1.2.2 Le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques

Nous avons déjà vu que l'anneau des entiers p-adiques est intègre. Cela nous permet de définir le corps des nombres p-adiques comme le corps de fractions de $\mathbb{Z}_p$.

$$\mathbb{Q}_p = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p).$$

Pour construire un corps contenant $\mathbb{Q}$ qui est complet par rapport à la norme p-adique nous allons passer par les suites de Cauchy. Deux suites de Cauchy $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont équivalentes si $\lim |a_i - b_i|_p = 0$.

On appelle $\mathbb{Q}_p$ l'ensemble de ces classes d'équivalence, muni d'une addition et d'une multiplication par :

$$\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\},$$

$$\{a_i\}.\{b_i\} = \{a_i.b_i\},$$

où $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ sont des représentants de deux classes $a, b \in \mathbb{Q}_p$. On note 0 la classe des suites qui convergent vers 0.

Proposition 1.6. *$\mathbb{Q}_p$ muni des opérations ci-dessus est un corps.*

L'ensemble de valeurs de $\mathbb{Q}$ est le même ensemble de valeurs de $\mathbb{Q}_p$; les deux ensembles

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p \text{ pour certain } \lambda \in \mathbb{Q}\},$$

et

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p \text{ pour certain } \lambda \in \mathbb{Q}_p\}$$

sont égaux à $\{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ l'ensemble des puissances de p.

Lemme 1.3. [*18*] *Pour chaque $x \in \mathbb{Q}_p,\ x \neq 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x|_p = p^{-n}$.*

Considérons une autre façon d'exprimer ce lemme. Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $|x|_p = p^{-\mathcal{V}_p(x)}$, donc on a

Lemme 1.4. [*18*] *Pour chaque $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, il existe un entier $\mathcal{V}_p(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $|x|_p = p^{-\mathcal{V}_p(x)}$. Autrement dit, la valuation $\mathcal{V}_p(x)$ s'étend à $\mathbb{Q}_p$.*

Il est facile de voir que

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}.$$

Corollaire 1.3. [*18*] *$\mathbb{Z}_p$ est compact et $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

1.2.3 Le corps $\mathbb{C}_p$

Définition 1.7. *Soit $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. D'après la théorie générale, $\mathcal{V}_p$ se prolonge de manière unique en une valuation sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Malheureusement, cette clôture algébrique n'est pas complète. On note $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour $\mathcal{V}_p$, qui cette fois-ci est à la fois complet et algébriquement clos.*

On note $\mathfrak{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de valeur absolue inférieure ou égale à un. i.e.;

$$\mathfrak{D} = \{x \in \mathbb{C}_p; |x| \leq 1\},$$

c'est un anneau commutatif unitaire, qui contient $\mathbb{Z}_p$, que l'on appelle l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$.

L'ensemble de ses éléments inversibles est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de module 1, qu'on note par $\mathfrak{B}$. i.e.;

$$\mathfrak{B} = \{x \in \mathbb{C}_p; |x| = 1\}.$$

Proposition 1.7. [*1*] *Si $x \in \mathbb{C}_p$, $x \neq 0$, alors il existe un nombre rationnel ν tel que $|x| = p^{-\nu}$.*

Proposition 1.8. *$\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.*

1.3 Analyse élémentaire sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette section, on va donner certains résultats élémentaires des fonctions données sous forme des séries entières. Commençons par étudier les propriétés de convergence des suites et des séries entières.

1.3.1 Suites et séries entières

Lemme 1.5. ([*1*], [*18*]) *Soit $\{a_n\}$ une suite dans $\mathbb{C}_p$, on a : $\{a_n\}$ est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.*

Démonstration. Si $\{a_n\}$ est de Cauchy, alors on a
$|a_{n+m} - a_n|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0, \forall m \geq 0$, d'où quand $m = 1$, on a : $|a_{n+1} - a_n|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Inversement, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n|_p &= |a_{n+m} - a_{n+m-1} + a_{n+m} - a_{n+m-1} + ... + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max(|a_{n+m} - a_{n+m-1}|_p, |a_{n+m} - a_{n+m-1}|_p, ..., |a_{n+1} - a_n|_p) \end{aligned}$$

$|a_{n+m} - a_n|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où $\{a_n\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}_p$. □

Lemme 1.6. ([*1*], [*18*]) *Soit $\{a_n\}$ une suite convergente dans $\mathbb{C}_p$ et qui ne tend pas vers zéro. Alors il existe un entier positif N tel que $|a_n| = |a_N|$ pour $n \geq N$.*

Lemme 1.7. ([*1*], [*18*]) *Une série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, (a_n \in \mathbb{C}_p)$ est convergente si et seulement si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Considérons maintenant une série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Soit $x \in \mathbb{C}_p$, nous savons que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0$.

Proposition 1.9. [*26*] *Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série de puissance non nulle, son ordre est un entier $w = w(f) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ c'est le premier indice non nul des coefficients de $f(x)$.*
Par convention, on pose $w(0) = \infty$.

La relation suivante est évidente

$$w(f + g) \geq \min(w(f) + w(g))$$

avec égalité si les ordres sont différents.

Définition 1.8. [*26*] *Le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est :*

$$r_f = \sup\{r; |a_n| r^n \to 0\}.$$

Sinon, on peut considérer les valeurs de $r \geq 0$ pour lequel $\{|a_n|r^n\}$ soit bornée :

$$\sup\{r \geq 0; |a_n|r^n \to 0\} \leq \sup\{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ bornée}\},$$

et inversement

$$(|a_n|r^n) \text{ bornée } \Rightarrow |a_n|S^n \to 0\,(S < r)$$

montre la deuxisième inégalité, et donc

$$r_f = \sup\{r \geq 0; (|a_n|r^n) \text{ bornée}\}.$$

On peut calculer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ par la formule d'Hadamard comme dans le cas complexe :

Proposition 1.10. ([*1*], [*18*]) *Le rayon de convergence de* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est :*

$$r_f = \frac{1}{\overline{\lim}|a_n|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

(i) Si $r_f = 0$, alors $f(x)$ converge seulement si $x = 0$;

(ii) Si $r_f = +\infty$, alors $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{C}_p$;

(iii) Si $0 < r_f < +\infty$ et $|a_n|r_f^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors $f(x)$ converge si et seulement si $|x| \leq r_f$;

(iv) Si $0 < r_f < +\infty$ et $|a_n|r_f^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, alors $f(x)$ converge si et seulement si $|x| < r_f$.

Proposition 1.11. *Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière et soit $Df(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ sa dérivée. Le rayon de convergence de $f(x)$ et de $Df(x)$ sont égales :*

$$r_f = r_{Df}.$$

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $|n|_p \leq 1$. Alors,

$$r_{Df}^{-1} = \lim\sup_{n\to\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n-1}} = \lim\sup_{n\to\infty} |na_n|_p^{\frac{1}{n}} = \lim\sup_{n\to\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}} = r_f^{-1}.$$

□

Maintenant, on va considérer les zéros d'une fonction définie par une série entière.

1.3.2 Zéros des séries entières

Théorème 1.3 (Strassman). ([1], [18]) *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$ *une série entière non-nulle. Supposons que* $f(x)$ *converge pour tout* $x \in \mathfrak{D}$*. Soit* N *un entier défini par :*

1) $|a_N|_p = \max |a_n|_p,$
2) $|a_n|_p < |a_N|_p$ *pour* $n > N$.
   Alors, la fonction $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{C}_p$ *a au plus* N *zéros.*

Démonstration**.** La démonstration se fait par récurrence.

– Pour $N = 0$ et d'après cette assertion $|a_0|_p > |a_n|_p$ pour tout $n > 0$, nous devrons démontrer que f n'a aucun zéro dans $\mathbb{Z}_p$.
  Si $0 = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ on a $|a_0|_p = |a_0 + a_1 x + \ldots|_p \leq \max_{n\geq 1} |a_n|_p < |a_0|_p$ contradiction

– Supposons

$$|a_N|_p = \max_n |a_n|_p \text{ et } |a_n| < |a_N|_p \text{ pour } n > N,$$

et soit $f(\alpha) = 0$ pour certain $\alpha \in \mathfrak{D}$. Choisissons $x \in \mathfrak{D}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n - \alpha^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n x^j \alpha^{n-1-j} \\ &= (x-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n x^j \alpha^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Posons : $k = n - 1 - j$ donc $n = k + 1 + j$, on obtient,

$$f(x) = (x-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = (x-\alpha) g_1(x), \text{ où } b_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1+k} \alpha^k.$$

Maintenant, notons que

$$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0} |a_{j+1+k}|_p \leq |a_N|_p \text{ pour tout } j \geq 0.$$

De plus,

$$|b_{N-1}|_p = |a_N + a_{N+1}\alpha + a_{N+2}\alpha^2 + \ldots|_p = |a_N|_p,$$

et si $j \geq N$,

$$|b_j|_p \leq \max_{k\geq 0} |a_{j+1+k}|_p \leq \max_{j\geq N+1} |a_j|_p < |a_N|_p.$$

Donc b_{N-1} possède la norme maximale. Par récurrence, g_1 a au plus $N-1$ zéros, d'où f a au plus N zéros.

$\square$

Corollaire 1.4. ([1], [18]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *une série entière à coefficient dans* $\mathbb{C}_p$ *et soient* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *des racines de* $f(x) = 0$ *dans* $\mathfrak{D}$*, alors il existe une série entière* $g(x)$ *qui converge sur* $\mathfrak{D}$ *et qui n'admet aucun zéro sur* $\mathfrak{D}$ *tel que :*

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m) g(x).$$

Démonstration. Comme dans le théorème précédent, on peut écrire $f(x) = (x - \alpha_1) g_1(x)$, où $g_1(x)$ converge dans $\mathbb{Z}_p$ et a au plus $(m-1)$ zéro. Répétant cette procédure jusqu'à obtenir $g_m(x) = g(x)$. $\square$

Corollaire 1.5. ([1], [18]) *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *convergente sur* $P^m\mathfrak{D}$ *pour certain* $m \in \mathbb{Z}$*. Alors* $f(x)$ *a un nombre fini de zéro dans* $P^m\mathfrak{D}$*.*

Corollaire 1.6. ([1], [18]) *Soient* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *deux séries entières convergentes dans un certain disque* $P^m\mathfrak{D}$*. S'il existe une infinité de zéros* $\alpha \in P^m\mathfrak{D}$ *tels que* $f(\alpha) = g(\alpha)$*, alors* $a_n = b_n$, $\forall n \geq 0$*.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent pour $f(x) = g(x)$ $\square$

Corollaire 1.7. *(*[1], [18] *)Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *convergente dans un certain disque* $P^m\mathfrak{D}$*. Si la fonction* $f : P^m\mathfrak{D} \to \mathbb{C}_p$ *est périodique, i.e., il existe un constant* $\tau \in P^m\mathfrak{D}$ *tel que* $f(x + \tau) = f(x)$, $\forall x \in P^m\mathfrak{D}$*, alors* $f(x)$ *est constante.*

Démonstration. La série $f(x) - f(0)$ possède des zéros au points $n\tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\tau \in P^m\mathfrak{D}$ implique $n\tau \in P^m\mathfrak{D}$, ce qui donne une infinité de zéros, et par conséquent la série doit être identiquement nulle, i.e., $f(x)$ est constante. $\square$

1.3.3 Théorème de préparation de Weierstrass et fonctions analytiques

Le but de cette section est de donner un théorème connu sous le « Théorème de préparation de Weierstrass p-adique ». Ceci est une version p-adique d'un théorème classique dû à Weierstrass qui traite des séries à plusieurs variables complexes et constitue un outil important dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. La version p-adique donne des informations fondamentales sur les fonctions p-adiques définies par des séries entières.

Définition 1.9. [3] *On dira qu'une fonction $f(x)$ est analytique sur le disque $B(a,r)$ si cette fonction est sur ce disque la somme d'une série entière en puissances de $(x-a)$, donc de rayon de convergence au moins r.*

Définition 1.10. [14] *On note $\mathcal{A}[R]$ $\big($resp. $\mathcal{A}(R)\big)$ l'anneau des fonctions analytiques sur $B^+(0,R)$ $\big($resp. $B^-(0,R)\big)$ définie par :*

$$\mathcal{A}[R] = \{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{n\to\infty} |a_n| R^n = 0\}$$

$$\Big(\textit{resp. } \mathcal{A}(R) = \{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{n\to\infty} |a_n| R^n = 0, \ \textit{pour tout } r < R\}\Big).$$

Tout cela s'étend facilement aux séries convergentes de Laurent. Plus précisement, on peut considérer divers types de couronnes ; ouverte, fermée et semi-fermée :

$$C(r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{C}_p : r_1 < |x| < r_2\}, \ C[r_1,r_2] = \{x \in \mathbb{C}_p : r_1 \leq |x| \leq r_2\},$$

$$C(r_1,r_2] = \{x \in \mathbb{C}_p : r_1 < |x| \leq r_2\}, \ C[r_1,r_2) = \{x \in \mathbb{C}_p : r_1 \leq |x| < r_2\},$$

et les divers anneaux des fonctions analytiques sur ces espaces

$$\mathcal{A}(r_1,r_2) = \{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{|n|\to\infty} |a_n| r^n = 0 \text{ pour tout } r_1 < r < r_2\},$$

$$\mathcal{A}[r_1,r_2] = \{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{|n|\to\infty} |a_n| r^n = 0 \text{ pour tout } r_1 \leq r \leq r_2\},$$

$$\mathcal{A}[r_1,r_2) = \{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{|n|\to\infty} |a_n| r^n = 0 \text{ pour tout } r_1 \leq r < r_2\},$$

$$\mathcal{A}(r_1,r_2] = \{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n : \lim_{|n|\to\infty} |a_n| r^n = 0 \text{ pour tout } r_1 < r \leq r_2\}.$$

Définition 1.11. *On note* $\mathcal{M}[R]$ $\big($*resp.* $\mathcal{M}(R)$, $\mathcal{M}([r_1, r_2])$, $\mathcal{M}(]r_1, r_2[)\big)$ *le corps des quotients de* $\mathcal{A}[R]\big($*resp.* $\mathcal{A}(R)$, $\mathcal{A}[r_1, r_2]$, $\mathcal{A}]r_1, r_2[\big)$, *ses éléments sont appelés fonctions méromorphes.*

Définition 1.12. ([13], [14]) *Soit* $r_1 \leq r_2$ *et considérons l'anneau* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ *des fonctions analytiques sur une couronne fermée* $C[r_1, r_2]$.

1. *On définit la r-norme de Gauss sur l'anneau* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ *par :*

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n|_r = \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| r^n$$

2. *Si* $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ *est une fonction non-nulle de* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$, *on notera* $k(f, r)$ $\big($*resp.* $K(f, r)\big)$ *le plus petit* $\big($*resp. le plus grand*$\big)$ *entier* s *rendant le nombre* $|a_n| r^n$ *maximum* $\big($*c'est à dire égal à* $|f|_r\big)$. *En particulier, on a* $k(f, r) \leq K(f, r)$.
   Si $r = 0$, $f(0) = 0$, *on définit :* $k(f, 0) = 0$ *et* $K(f, 0) = \inf\{n,\ a_n \neq 0\}$.
3. *Un rayon* r *tel que* $K(f, r) > k(f, r)$ *est dit rayon critique.*

La r-norme de Gauss est en fait une valeur absolue.

Si $r_1 = 0$, la fonction f est la somme d'une série entière en puissances positives.

Proposition 1.12. [14] *Soit* f *et* g *deux fonctions non-nulles de* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$. *On a :*

$$|fg|_r = |f|_r |g|_r \ \big(\textit{la norme est multiplicative}\big)\ ,$$

$$K(fg, r) = K(f, r) + K(g, r),\ \text{ et } k(fg, r) = k(f, r) + k(g, r).$$

Démonstration. Posons $f = \sum a_s x^s$, $g = \sum b_s x^s$ et $fg = \sum c_s x^s$. On constate que

$$|fg|_r = \max_{i,j\in\mathbb{Z}} |c_s| r^s \leq \max_{i,j\in\mathbb{Z}} |a_i b_j| r^i + j = |f|_r |g|_r.$$

Maintenant, par définition, pour i (resp. j), on a

$$|a_i| r^i \leq a_{K(f,r)} r^{K(f,r)} = |f|_r \ \ (\textit{resp.}\ \ |b_j| r^j \leq b_{K(g,r)} r^{K(g,r)} = |g|_r);$$

et, pour $i > K(f, r)$ (resp. $j > K(g, r)$), on a

$$|a_i| r^i < a_{K(f,r)} r^{K(f,r)} \ \big(\textit{resp.}\ \ |b_j| r^j < b_{K(g,r)} r^{K(g,r)}\big);$$

si bien que, dans la somme

$$|c_{K(f,r)+K(g,r)}| = |\sum_{i+j=K(f,r)+K(g,r)} a_i b_j| \leq r^{-K(f,r)-K(g,r)} \max_{i+j=K(f,r)+K(g,r)} |a_i| r^i |b_j| r^j$$

le terme $a_{K(f,r)}b_{K(g,r)}$ a une valeur absolue strictement supérieure à celle des autres termes. On en déduit que

$$|fg|_r \geq |c_{K(f,r)+K(g,r)}|r^{K(f,r)+K(g,r)} = |a_{K(f,r)}b_{K(g,r)}|r^{K(f,r)+K(g,r)} = |f|_r|g|_r.$$

En particulier, on a $|fg|_r = |c_{K(f,r)+K(g,r)}|r^{K(f,r)+K(g,r)}$.
Pour $s > K(f,r) + K(g,r)$, un calcul analogue montre que $|c_s|r^s < |f|_r|g|_r$. Donc $K(fg,r) = K(f,r) + K(g,r)$.
On montrerait de même que $|fg|_r = |c_{k(f,r)+k(g,r)}|r^{k(f,r)+k(g,r)}$ et que, pour $s < k(f,r) + k(g,r)$, on a $|c_s|r^s < |f|_r|g|_r$ ce qui achève la démonstration du lemme. □

Corollaire 1.8. *La r-norme de Gauss est une valeur absolue ultramétrique sur l'anneau $\mathcal{A}[r_1, r_2]$ et se prolonge en une valeur absolue du corps $\mathcal{M}([r_1, r_2])$.*

La formule $|f/g|_r = |f|_r/|g|_r$ permet maintenant de prolonger la r-norme de Gauss au corps $\mathcal{M}([r_1, r_2])$.

Dans la partie suivante, nous rappelons des résultats connus sur la factorisation des fonctions analytiques p-adiques. Pour une fonction analytique $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ sur le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $\mathcal{A}(r)$, on pose $|f|_r = \max(|a(n)|r^n)$, qu'on note aussi $|f|(r)$. On a le résultat suivant :

Lemme 1.8. *[3] Soit $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$, un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. On suppose que $|b_s|r^s = \max\{|b_j|r^j\} = |Q|_r$. On dit alors que le polynôme est distingué. Alors le polynôme Q a toutes ses racines dans le disque $B^+(0,r)$ de $\mathbb{C}_p$.*

Démonstration. Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{C}_p$ dans le disque $B^+(0,r)$. On factorise $Q(x)$: $Q(x) = b_s(x-\alpha_1)...(x-\alpha_s)$, où les α_i sont dans $\mathbb{C}_p$, et pas forcément distincts. La norme de $x-\alpha_i$ sur le disque $B^+(0,r)$ est $\max\{r, |\alpha_i|\}$. Par suite $|Q|_r = |b_s|r^s = |b_s|\Pi \max\{r, |\alpha_i|\}$; comme $\max\{r, |\alpha_i|\} \geq r$ pour tout i, et que le produit est égal à r^s, on a $\max\{r, |\alpha_i|\} = r$ pour tout i, et on en conclut que $|\alpha_i| \leq r$ pour tout i. On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $B^+(0,r)$, que r soit dans le groupe des valeurs ou non. □

Nous énonçons maintenant le Théorème de préparation p-adique.

Théorème 1.4 (Théorème de Préparation de Weierstrass). [3]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, convergente dans le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $\mathcal{A}(r)$, et s un indice tel que l'on ait $|a(s)|r^s = |f|_r$, et $|a(j)|r^j < |a(s)|r^s$ pour $j > s$. Il existe alors un couple (Q,H), Q étant un polynôme de $\mathbb{C}_p[x]$, $Q(x) = b_0 + \cdots + b_s x^s$, avec $|b_s|r^s = |Q|_r = |f|_r$ et $H(x)$ une série entière appartenant à $\mathcal{A}(r)$, telle que $|H-1|_r < 1$, vérifiant $f(x) = Q(x)H(x)$.

Corollaire 1.9. [3] *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, convergente dans le disque $B^+(0,r)$, appartenant à $\mathcal{A}(r)$, et s un indice tel que l'on ait $|a(s)|r^s = |f|_r$, et $|a(j)|r^j < |a(s)|r^s$ pour $j > s$. Alors :*

a) Si $s \geq 1$, alors la fonction f à exactement s zéros dans le disque $B^+(0,r)$, compte tenu des multiplicités ;

b) La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $B^+(0,r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue est alors constante dans ce disque.

Lemme 1.9. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'a aucun zéro dans $\mathbb{C}_p$. Alors f est une constante.*

Démonstration. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On sait que le nombre de zéros de f dans un disque $B(0,r)$ est égal à le plus grand entier tel que $|a_l|r^l = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|r^j$. Par conséquent, si f ne s'annule pas dans $\mathbb{K}$ (n'a aucun zéro dans $\mathbb{K}$), évidemment $a_n = 0, \forall n > 0$. $\square$

Proposition 1.13. [3] *Soit $f(x)$ une fonction entière $\big($donc une série entière de rayon de convergence infini$\big)$, que l'on suppose non polynômiale. Alors l'ensemble des zéros non nuls de f forme une suite infinie, que l'on range par ordre de module croissant et que l'on note $\{a_n\}$. La suite tend vers l'infini, et on peut écrire f sous forme d'un produit infini :*

$$f(x) = cx^k \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{a_n})$$

où c est une constante, et $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de $x = 0$ comme zéro de f.

Démonstration. On montre tout d'abord que f a une infinité de zéros formant une suite de limite l'infini. Dans tout disque fermé, f a un nombre fini de zéros. On peut donc les ranger comme indiqué dans la proposition. Montrons que si la suite $\{a_n\}$ est finie, alors f est un polynôme.

Soit R assez grand, de manière que tous les zéros de f soient dans le disque fermé de centre zéro et de rayon R. On peut écrire $f = P_R H_R$, où P_R est un polynôme, de la forme

$$x^k \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{x}{a_n}),$$

où N est indépendant de R, puisque f n'a pas d'autres zéros. Donc $P_R = P$ est constant, et il en est de même pour la fonction H_R, de sorte qu'il existe une fonction H, entière, sans zéros dans $\mathbb{C}_p$, telle que $f = PH$.

D'après le lemme précédent, une fonction entière sans zéros est constante ; or la proposition précédente montre que si $H = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$, alors $|h_0| = \max\{|h_n|R^n\}$, pour tout R.

On en déduit que $|h_n|R^n \leq |h_0|$ pour tout R, et donc $h_n = 0$ si $n > 0$.

Considérons maintenant le produit infini

$$F(x) = x^k \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{x}{a_n}).$$

Nous allons montrer qu'il est convergent, dans tout disque fermé de centre zéro, rayon r, et définit donc une fonction analytique entière. Pour cela, on considère la suite des polynômes

$$P_n(x) = x^k \prod (1 - \frac{x}{a_n}),$$

et nous allons montrer que cette suite est de Cauchy dans $\mathcal{A}[r]$. Il nous suffit de montrer que, si on note $\|.\|$ la norme dans cet espace, on a $\|P_{n+1} - P_n\|$ qui tend vers 0.

En utilisant la multiplicativité de la norme :

$$\|P_{n+1} - P_n\| = \|x^k\| \prod_{n=0}^{\infty} \|1 - \frac{x}{a_n}\| \times \| - \frac{x}{a_{n+1}}\| = \frac{r^{k+1}}{|a_{n+1}|} \prod_{k=0}^{n} (\max\{1, \frac{r}{|a_k|}\})$$

Comme la suite $|a_n|$ tend vers l'infini, le produit infini (dans $\mathbb{R}$) $\prod_{k=0}^{n} (\max\{1, \frac{r}{|a_k|}\})$ converge vers une quantité que l'on appelle M, et qui est un majorant de cette suite.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{r^{k+1}}{|a_n|} < \epsilon$.

On a donc finalement si $n \geq N$, $\|P_{n+1} - P_n\| \leq M\epsilon$, ce qui démontre le résultat.

On montre en utilisant la factorisation prouvée auparavant dans un disque de centre zéro et de rayon R, que $g = f/F$ est entière, sans zéros dans $\mathbb{C}_p$, et ceci termine la démonstration. □

Lemme 1.10. *Soit $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ une fonction méromorphe non constante . Alors h prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}_p$, sauf au plus une.*

Démonstration. Supposons que h ne prendre que deux valeurs distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On note $h = \frac{f}{g}$, où f et g sont deux fonctions entières sans zéros communs, de sorte que la fonctions méromorphe $H = \frac{f-\alpha g}{f-\beta g}$ n'a pas de zéros et de pôles.
Par conséquent, d'après le lemme précédent, H est égal à une constante $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et nous avons donc $h = \frac{\alpha-\beta\gamma}{1-\gamma}$, qui est une contradiction. $\square$

1.4 Polygone de Newton - Polygone de valuation

En pratique, le plus important outil permettant de détermier l'emplacement des zéros des séries entières est les techniques du polygone de valuation ou polygone de Newton, il s'agit d'une technique puissante disponible seulement dans l'analyse non-archimédienne. La maîtrise de ces techniques est essentielle pour le développement de l'analyse non-archimédienne. Ces techniques peuvent généralement être utilisées à la place de la formule intégrale de Cauchy dans l'analyse complexe classique et donnent souvent des résultats plus solides.

1.4.1 Polygone de Newton

Une des meilleures façons de comprendre la théorie des polynômes et de séries entières à coefficients dans un corps p-adique complet $\mathbb{K}$ est d'introduire le concept du polygone de Newton d'un polynôme (aussi d'une série entière). Ceci nous donne une image géométrique claire qui présente une grande partie d'informations que sur les zéros de polynômes et séries entière. Nous allons définir le Polygone de Newton d'un polynôme, et nous allons travailler dans $\mathbb{C}_p$.

Définition 1.13. [13] *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ *une fonction de* $\mathcal{A}[r_1, r_2]$. *On appelle polygone de Newton de la fonction* f *l'envellope convexe de l'ensemble des points* $(n, -\log|a_n|)$ *auquels on ajoute éventuellement le point* $(0, \infty)$.

Polygone de Newton d'un polynôme

Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$, un polynôme de degré n. Le polygone de Newton donne la valuation des racines du polynôme de la manière suivante :

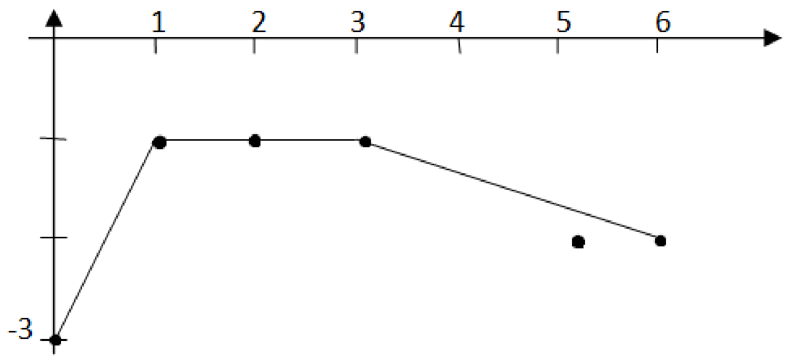
"S'il existe un côté de coefficient d'inclinaison (pente) $-\lambda$ et de longeur (horizontale) m_1, le polynôme possède m_1 racines de valuation p-adique λ. "

C'est à dire, pour connaître les valuations p-adiques des racines d'un polynôme P, il suffit de construire son polygone de Newton. Pour illustration voici l'exemple suivant : Prenons un polynôme (on prend $p = t$) ;

$$P = t^2X^6 + t^2X^5 + (t^3 - 2t^2 + t)X^3 + (7t^4 - t^2 - 2t)X^2 + (8t^3 - 3t) - t^8 + t^3 = 0.$$

Alors, on a $\mathcal{V}_p(a_1) = 3$, $\mathcal{V}_p(a_2) = 1$, $\mathcal{V}_p(a_3) = 1$, $\mathcal{V}_p(a_4) = \infty$, $\mathcal{V}_p(a_5) = 2$, $\mathcal{V}_p(a_6) = 2$.

Le polygone de Newton associé est :



1.4.2 Polygone de valuation

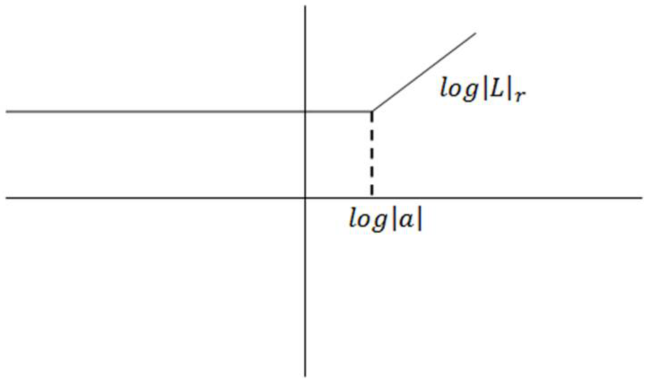
Définition 1.14. [13] *Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ une fonction de $\mathcal{A}[r_1, r_2]$. On appelle polygone de valuation de la fonction f le graphe, en coordonées logarithmiques, de la fonction $r \mapsto |f|_r$.*

Polygone de valuation des polynômes

- Considérons un polynôme unitaire $L(z) = z - a$. Alors $|L|(r) = \max\{r,\ |a|\}$

$$\log|L|(r) = \begin{cases} \log|a| \quad , & \text{si } r \leq |a|\,; \\ \log r \quad , & \text{si } r \geq |a|\,. \end{cases}$$

La figure suivante représente le graphe de $\log|L|(r)$ en fonction de $\log r$.



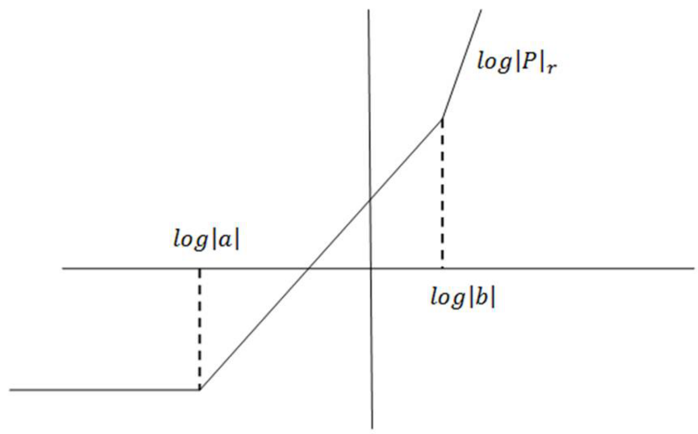
L'angle du graphe indique que $L(z)$ admet un zéro avec $|z| = |a|$.

- Supposons maintenant que $P(z) = (z-a)^n(z-b)^m$ avec $0 < |a| < |b|$, alors

$|P|(r) = |(z-a)^n(z-b)^m|(r) = |(z-a)^n|(r).|(z-b)^m|(r) = (\max\{r,\ |a|\})^n(\max\{r,\ |b|\})^m$

$$\log|P|(r) = \begin{cases} n\log|a| + m\log|b| \quad , & \text{si } r \leq |a|\,; \\ n\log r + m\log|b| \quad , & \text{si } |a| \leq r \leq |b|\,; \\ (n+m)\log r \quad , & \text{si } r \geq |b|\,. \end{cases}$$

Cette fois le graphe de $\log|P|(r)$ en fonction de $\log r$ ressemble à :



Encore une fois, on observe un graphe affine par morçeau dont les angles indique l'emplacement (ou localisation) des zèros de P, aussi que le changement de pente indique le nombre des zéros avec cette valeur absolue, la pente passe de 0 à n en $r = |a|$ et de n à $n+m$ en $r = |b|$. Ce graphe ci-dessus est appelé polygone de valuation. On voit que $K(P, |a|) = n$ et $k(P, |a|) = 0$, que $K(P, |b|) = n+m$ et $k(P, |b|) = n$ et que $K(P, r) = k(P, r)$ pour tout $r \neq |a|, |b|$.

• Soit P un polynôme quelconque, on peut écrire

$$P(z) = cz^{m_0} \prod_j (z - a_j)^{m_j}.$$

On voit que $\log r \mapsto \log |P|(r)$ est une fonction affine par morçeaux, ces angles indique la localisation des zéros de P, et le changement de pentes indique que P admet des zéros à cette valeur absolue comptée avec leurs multiplicités.

Proposition 1.14. [14] *Un polynôme P possède $K(P, r) - k(P, r)$ zéros, en comptant la multiplicité, sur un cercle de rayon r.*

Théorème 1.5. [14] *Soit f une fonction analytique sur $C[r_1, r_2]$. Si $r_1 \leq \rho \leq R \leq r_2$, alors f a $K(f, R) - k(f, \rho)$ zéros dans $C[\rho, R]$, en comptant la multiplicité.*

Corollaire 1.10 (principe d'unicité). [14] *Si $f \not\equiv 0$ est analytique sur $C[r_1, r_2]$, avec $r_2 < \infty$, alors f possède au plus un nombre fini des zéros dans $C[r_1, r_2]$.*

Chapitre 2

Théorie de distribution des valeurs sur un corps non-archimédien

La méthode la plus utilisée parmi les méthodes de distribution des valeurs est *la Théorie de Nevanlinna ultramétrique*, due à *A. Boutabaa*, qui s'applique non seulement à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais aussi aux fonctions méromorphes non bornées dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$.

L'importance de cette théorie provient essentiellement de ses applications riches et multiples.

A partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|.|$.

2.1 La formule de Poisson-Jensen

Définition 2.1. [*14*] *Soit f une fonction analytique sur $C[r_1, r_2]$, non-identiquement nulle. la fonction de comptage $N(f, 0, r)$ des zéros de f est définie par :*

$$N(f,0,r) = \sum_{\substack{0 \neq \alpha \in C[r_1, r] \\ f(\alpha)=0}} \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Si $r_1 = 0$, il est commode d'ajouter le terme $K(f,0)\log r$ à la définition de $N(f,0,r)$.

Théorème 2.1. *[14] Soit f une fonction non constante analytique sur $C[r_1, r_2)$, avec $r_2 \leq \infty$. Soit*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$$

la série de Laurent de f. Alors, pour tout $r \in [r_1, r_2)$,on a

$$N(f, 0, r) + k(f, r_1) \log r + \log |a_{k(f,r_1)}| = \log |f|_r \quad si\ r_1 > 0$$

ou

$$N(f, 0, r) + \log |a_{K(f,0)}| = \log |f|_r \quad si\ r_1 = 0.$$

Remarque 2.1. *[14] Si $r_1 = 0$ ou $r_2 < \infty$, alors le théorème indique que la différence entre $N(f, 0, r)$ et $\log |f|_r$ reste bornée quand $r \to r_2$.*
Si $r_1 > 0$ et $r_2 = \infty$, la différence est bornée par $O(\log r)$ quand $r \to \infty$.

Démonstration du théorème 2.1. Il s'agit essentiellement de comprendre la définition du polygone de valuation.

a) le cas où $r_1 = 0$. Soit r le plus petit point critique positive. f n'a pas de zéros à valeur absolue entre 0 et r'. Donc pour $0 < r \leq r'$.

$$\begin{aligned} N(f, 0, r) = K(f, 0) \log r &= K(f, r) \log r \\ &= \log |f|_r - \log |a_{K(f,r)}| = \log |f|_r - \log |a_{K(f,0)}|, \end{aligned}$$

où on a utilisé $K(f, r) = K(f, 0)$.

b) le cas où $r_1 > 0$. Soit r' le plus petit point critique $> r_1$. Encore une fois, d'après le théorème (1.4), f n'a pas de zéros à valeur absolue entre r_1 et r'.
Par conséquent, pour $r_1 \leq r \leq r'$, en utilisant encore $K(f, r) = K(f, r_1)$, et le fait que

$$\log |a_{k(f,r_1)}| + k(f, r_1) \log r_1 = \log |f|_{r_1} = \log |a_{K(f,r_1)}| + K(f, r_1) \log r_1,$$

on a

$$\begin{aligned}
N(f,0,r) &= \sum_{\substack{|z|=r_1 \\ f(z)=0}} \log \frac{r}{|z|} \\
&= [K(f,r_1) - k(f,r_1)] \log \frac{r}{r_1} \\
&= K(f,r_1)\log r - k(f,r_1)\log r + k(f,r_1)\log r_1 - K(f,r_1)\log r_1 \\
&= K(f,r)\log r - k(f,r_1)\log r + log|a_{K(f,r_1)}| - \log|a_{k(f,r_1)}| \\
&= \log|f|_r - \log|a_{K(f,r)}| - k(f,r_1)\log r + \log|a_{K(f,r_1)}| - \log|a_{k(f,r_1)}| \\
&= \log|f|_r - k(f,r_1)\log r - \log|a_{k(f,r_1)}|.
\end{aligned}$$

Donc dans les deux cas, on voit que la formule désirée est vérifiée pour r entre r_1 et le premier point critique supérieur à r_1. Ensuite, nous allons simplement besoin de vérifier que nous pouvons passer d'un Point critique.

Donc, supposons que r' est un point critique. Supposons que la formule du théorème est vraie pour $r \leq r'$.

Soit r'' le plus petit point critique supérieure à r'. Puisqu'il y a au plus un nombre fini de points critiques entre r_1 et tout point r tel que $r < r_2$, nous avons simplement besoin de montrer que la formule reste valable pour $r' < r \leq r''$, et on obtient la démonstration par récurrence.

En effet, comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
N(f,0,r) - N(f,0,r') &= \sum_{\substack{|z|=r' \\ f(z)=0}} \log \frac{r}{r'} \\
&= [K(f,r') - k(f,r')] \log \frac{r}{r'} \\
&= \log|f|_r - k(f,r')\log r - \log|a_{k(f,r')}| \\
&= \log|f|_r - \log|f|_{r'}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 La fonction caractéristique - Premier Théorème Fondamental De Nevanlinna

Tout au long de ce qui suit, on désigne par $D^+(0,r)$ (resp. $D^-(0,r)$) un disque fermé (resp. ouvert), par $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions entières dans $\mathbb{K}$, par $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$, i.e, l'ensemble de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$, et par $\mathbb{K}(x)$ le corps des fractions rationnels.

D'une manière similaire du paragraphe précédent, on note par $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,r))$ l'ensemble des fonctions analytiques dans $D^+(0,r)$ (resp. $D^-(0,r)$), par $\mathcal{M}(D^+(0,r))$ (resp. $\mathcal{M}(D^-(0,r))$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans $D^+(0,r)$ (resp. $D^-(0,r)$), i.e, l'ensemble de fractions de $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,r))$ pour un disque fermé (resp. ouvert).

Etant donné une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(D^-(0,r))$, un rayon r et $\alpha \in D^-(0,r)$. Si f a un zéro α (resp. un pôle α) d'ordre n, on pose $w_\alpha(f) = n$ (resp. $w_\alpha(f) = -n$). Si $f(\alpha) \neq 0$ et ∞, on pose $w_\alpha(f) = 0$.

Modifiant légèrement la notation de la fonction de comptage, nous poserons que (dans un but de simplicité) la fonction de comptage $Z(r,f)$ des zéros de f dans $D^-(0,r)$ est définie par :

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ w_\alpha(f)>0}} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Ensuite, en ignorant la multiplicité, on pose

$$\overline{Z}(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Nous définissons aussi les fonctions de comptage des pôles de f dans $D^-(0,r)$ par :

$$N(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ w_\alpha(f)<0}} w_\alpha(f) \; \log \frac{r}{|\alpha|} = Z(r, \frac{1}{f}) \; \text{ et } \overline{N}(r,f) = \overline{Z}(r, \frac{1}{f}).$$

On définit la fonction de Nevanlinna (appelé aussi la fonction caractéristique) de f, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r,f) = \max\{Z(r,f) + log|f(0)|, N(r,f)\}.$$

Remarquons que les fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ ne changent pas, à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$.

Tout au long de ce chapitre, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $Z(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$, et n'a ni zéro ni pôles en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$.

Remarque 2.2. *Par définition, nous avons* $\overline{Z}(r,f) \le Z(r,f) \le T(r,f) + O(1)$, $\overline{N}(r,f) \le N(r,f) \le T(r,f) + O(1)$ *dans* $]0,+\infty[$ *lorsque* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp. dans* $]0,r[$ *lorsque* $f \in \mathcal{M}\big(D^-(0,r)\big)\big)$.

Sous ces notations, on peut reécrire le théorème 2.1 de Poisson-Jensen dans un disque sous la forme :

Théorème 2.2. *Soit* $R > 0$*, et soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Alors*

$$\log|f|(r) \quad = \quad Z(r,f) + \log|f(0)|, \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \ \ \forall r \in]0,R[\big). \tag{2.1}$$

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log|f|(r) \quad = \quad Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)|, \ \ \forall r \in]0,+\infty[\ \big(resp. \ \ \forall r \in]0,R[\big). \tag{2.2}$$

Puisqu'on peut écrire $f = \frac{g}{h}$ telle que $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$), et on a

$Z(r,g) = Z(r,f)$ et $Z(r,h) = N(r,f)$ donc

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log|\frac{g}{h}|(r) \\
&= \log|g|(r) - \log|h|(r) \\
&= Z(r,g) + \log|g(0)| - (Z(r,h) + \log|h(0)|) \\
&= \log|\frac{g(0)}{h(0)}| + Z(r,f) - N(r,f) \\
&= \log|f(0)| + Z(r,f) - N(r,f)
\end{aligned}$$

Théorème 2.3 (lemme de la dérivée logarithmique). *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *pour tout* $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a*

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}.$$

Démonstration.
Pour $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $\qquad f'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}, \qquad$ et $|n| < 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
|f'|(r) = \max_{n\geq 0}|n||a_n|r^{n-1} &= \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|n||a_n|r^n, \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\forall r \in]0,R[\big) \\
&\leq \frac{1}{r}|f|(r), \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\forall r \in]0,R[\big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\log\left|\frac{f'}{f}\right|(r) \leq -\log r, \;\; \forall r \in]0,+\infty[\; \big(resp. \forall r \in]0,R[\big).$$

□

Proposition 2.1. *Soient* $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *(resp.* $f,g \in \mathcal{M}(d^-(0,r))$*) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

i) $N(r,f+g) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1) \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\; \forall r \in]0,R[\big)$

ii) $N(r,fg) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1) \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\; \big(resp. \;\; \forall r \in]0,R[\big)$.

Démonstration. Les inégalités *i)* et *ii)* sont vérifiées puisque la multiplicité de pôles de $f+g$ (ou fg) au point z est au plus égal à la somme de multiplicité de pôles de f et g au point z. D'où

$$\begin{aligned} Z(r, \frac{1}{f+g}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}), \\ Z(r, \frac{1}{fg}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(d(0, R^-))\big)$ *telles que* f *et* f' *n'aient ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

$$Z(r, \frac{f'}{f}) \leq N(r, \frac{f'}{f}) - \log r + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\big(\text{ resp. } \forall r \in]0, R[\big).$$

Démonstration. D'après le théorème (2.2), on sait que $\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}$ ce qui entraîne, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, que $\log(\frac{|f'|(r)}{|f|(r)}) \leq -\log r$.
Par conséquent, en appliquant à $\frac{f'}{f}$ le théorème précédent, on obtient l'inégalité désirée.

□

Corollaire 2.2. [*21*] *Soient* $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, R))\big)$ *non nulles en* 0. *Supposons qu'il existe* $\rho \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $\rho \in]0, R[\big)$ *tel que* $|f|(r) = |g|(r) \ \ \forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]\rho, R[\ \big)$, *alors il existe* $\eta \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $Z(r, f) = Z(r, g) + \eta \ \ \forall r \in]\rho, +\infty[$ $\big($*resp.* $\forall r \in]\rho, R[\ \big)$.

Démonstration. Le corollaire est immédiat d'après le Théorème (2.2) puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$ et $\eta = log|\frac{g(0)}{f(0)}|$. □

Définition 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))\big)$ *non identiquement nulle. On note*

$$m(r, f) = \max(\log |f|(r), 0) = \log^+ |f|(r).$$

La fonction $m(r, .)$ *est appelée fonction de compensation.*

Avec cette notation, la formule (2.2) devient :

$$\begin{aligned} \log |f(0)| &= N(r, f) - Z(r, f) + \log |f|(r) \\ &= N(r, f) - Z(r, f) + \log^+ |f|(r) - \log^+ |\frac{1}{f}|(r) \\ &= N(r, f) - Z(r, f) + m(r, f) - m\big(r, \frac{1}{f}\big) \\ &= N(r, f) + m(r, f) - Z(r, f) - m\big(r, \frac{1}{f}\big) \\ &= T(r, f) - T\big(r, \frac{1}{f}\big). \end{aligned}$$

En considérant la définition ci-dessus, on obtient facilement le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soient* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\Big($ *resp.* $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\Big)$. *Alors, quand les quantités intervenant ci-dessous sont bien définies, on a :*

i) $m(r, f+g) \leq \max\big\{m(r,f), m(r,g)\big\} + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$,

ii) $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1),\ \forall a \in \mathbb{C}_p,\ \forall r \in]0,+\infty[\ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$,

iii) $m(r, fg) \leq m(r,f) + m(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$,

iv) $m(r, af) = m(r,f) + O(1),\ \forall r \in]0,+\infty[\ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$,

v) $m(r, \frac{f'}{f}) = 0,\ \forall r \in]1,+\infty[\ \big($*resp.* $\forall r \in]0,R[\big)$.

Démonstration. Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultra-métrique et grâce à la croissance de la fonction logarithmique on enduit sans difficulté $i), iii)$ et $iv)$.
Si $|f|(r) > |a|$, pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

$$|f-a|(r) = \max\big\{|f|(r), |a|\big\} = |f|(r),$$

d'où

$$m(r, f-a) = m(r,f).$$

Alors que, si $|f|(r) \leq |a|$, on a

$$|f-a|(r) \leq \max\big\{|f|(r), |a|\big\} \leq |a|,$$

ce qui entraine

$$|m(r,f-a) - m(r,f)| \leq \max\big\{m(r,f-a), m(r,f)\big\} \leq \log^+|a|,$$

et ainsi $m(r, f-a) = m(r,f) + O(1)$, d'où (iv).
D'aprés le théorème (2.3), on a $\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}$. Par conséquent, pour $r \geq 1$, on a

$$m\big(r, \frac{f'}{f}\big) \leq 0$$

ce qui entraîne (v). □

On donne une autre définition de la *fonction caractéristique de Nevanlinna.*

Théorème 2.5. [*21*] *Soit* $f, \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\Big($ *resp.* $f, \in \mathcal{M}(d^-(0,r))\Big)$ *non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors,*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f), \forall r \in]0,+\infty[(\text{ resp. } \forall r \in]0,R[)$$

Démonstration. D'après le théorème (2.2), on a

$$Z(r,f)+\log|f(0)| = \log|f|(r) + N(r,f) \;\; \forall r\in]0,+\infty[(\text{ resp : } \forall r\in]0,R[).$$

Par conséquent, $\max\{Z(r,f)+\log|f(0)|, N(r,f)\} = \max\{\log|f|(r),0\} + N(r,f)$.
Mais, comme $T(r,f) = \max\{Z(r,f)+\log|f(0)|, N(r,f)\}$, et $m(r;f) = \max\log|f|(r),0\}$, la démonstration est achevée. □

Corollaire 2.3. [*21*] *Soit* $f\in\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big(resp.\ f\in\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *non nulle en* 0. *Alors*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1), \quad \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \ \forall r\in]0,R[\big).$$

De plus, $\exists\rho\in]0,+\infty[$ $\big(resp.\ \rho\in]0,R[\big)$ *tel que pour* $b\neq f(0)$, *on a*

$$Z(r,f) = Z(r,f-b), \quad \forall r\in]\rho,+\infty[\ \big(resp.\ \ \forall r\in]\rho,R[\big).$$

Théorème 2.6. *Soient* $f,g\in\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big(resp.\ \ f,g\in\mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en* 0. *Alors*

i) $T(r,fg)\leq T(r,f)+T(r,g)+O(1),\ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \ \forall r\in]0,R[\big).$

ii) $T(r,f+g)\leq T(r,f)+T(r,g)+O(1),\ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \ \forall r\in]0,R[\big).$

De plus, si $f,g\in\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big(resp.\ \ f,g\in\mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$.

iii) $T(r,f+g)\leq \max\Big\{T(r,f),T(r,g)\Big\}+O(1),\ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \ \forall r\in]0,R[\big)$

iv)

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r\in]0,R[\big). \tag{2.3}$$

v) Si $a\in\mathbb{K}$, $a\neq 0$ *et* $f(0)\neq a$. *On a*

$$T(r,af) = T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r\in]0,R[\big), \tag{2.4}$$

et

$$T(r,f-a) = T(r,f)+O(1),\ \ \forall r\in]0,+\infty[\ \big(resp.\ \forall r\in]0,R[\big). \tag{2.5}$$

Démonstration. *i)* Puisque

$$m(r,f+g)\leq \max\big\{m(r,f),m(r,g)\big\}+O(1),$$

et

$$N(r,f+g)\leq \max N(r,f)+N(r,g)+O(1),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f+g) + N(r, f+g) &\leq \max\{m(r,f), m(r,g)\} + N(r,f) + N(r,g) + O(1) \\ &\leq m(r,f) + m(r,g) + N(r,f) + N(r,g) + O(1). \end{aligned}$$

D'où $\quad T(r, f+g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)$.

ii) De même, on déduit que

$$m(r, fg) + N(r, fg) \leq m(r,f) + m(r,g) + N(r,f) + N(r,g) + O(1).$$

D'où $\quad T(r, fg) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1)$.

iii) Puisque $N(r,f) = N(r,g) = 0$, l'inégalité est immédiate. Soit $\forall r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0, R[\big)$.

iv) D'après la définition de $m(r, .)$, on déduit que

$$m(r,f) - m(r, \frac{1}{f}) = \max\{\log|f|(r), 0\} + \min\{\log|f|(r), 0\},$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} m(r,f) - m(r, \frac{1}{f}) &= \log|f|(r) \\ &= Z(r; f) - N(r,f) + \log|f|(0), \end{aligned}$$

on déduit que $T(r,f) = T(r, \frac{1}{f}) + \log|f|(0)$.

v) Puisque

$$N(r,f) = N(r, af) = N(r, f-a),$$

$$m(r, f-a) = m(r,f) + O(1), \text{ et } \quad m(r, af) = m(r,f) + O(1),$$

alors

$$T(r, af) = T(r,f) + O(1)$$

$$T(r, f-a) = T(r,f) + O(1).$$

□

Comme conséquence immédiate de la proposition pécédente, on a :

Théorème 2.7 (Premier Théorème Fondamental De Nevanlinna). *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *et* $a \in \mathbb{K}$ *tels que* $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$ *et* $f(0) \neq a$. *On a*

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) \;=\; T\big(r,f\big) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\;\;\big(resp.\; \forall r \in]0,R[\big). \qquad (2.6)$$

Démonstration. La démonstration découle des formules (2.3) et (2.5). □

Lemme 2.1. [21] *Soit* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, *telle que* $f(0) \neq 0, \infty$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe* $h, l \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ *telles que* $f = \dfrac{h}{l}$ *vérifiant*

$$Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon \;\text{ et }\; Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon, \quad \forall r \in]0,R[.$$

Corollaire 2.4. [21] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f(0) \neq 0, \infty$. *Il exist* $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($*resp.* $h, l \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *telles que* $f = \dfrac{h}{l}$ *vérifant*

$$\max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\} \leq T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\;\;\big(resp.\; \forall r \in]0,R[\big).$$

Notations 2.1. *Soit* ϕ, φ *et* ψ *trois fonctions réelles définies dans un intervalle* $I =]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $I =]0,R[\big)$ *et soit* $r \in I$.
S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ *telle que* $\phi(r) \leq \psi(r) + c\varphi(r)$, *on écrira simplement* $\phi(r) \leq \psi(r) + O(\varphi(r))$.
Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ *est bornée par une fonction de la forme* $c\varphi(r)$, *on écrira* $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$.
Si $\lim\limits_{r \to +\infty} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$ $\big($*resp.* $\lim\limits_{r \to R} |\phi(r) - \psi(r)| = 0\big)$, *on écrira* $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.

Exemples 2.1. [21]

(i) Soit $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. *Alors* $Z(r,P) = \deg(P)\log r + O(1)$, $\forall r \in]0,+\infty[$

En effet, soit $\big\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\big\}$ *l'ensemble des zéros de* P *où* $t \leq q$, *et soient* $s_1, \ldots, s_t$ *les ordres de multiplicité respectifs. Supposons* $A = \max\limits_{1 \leq j \leq t} |\gamma_j|$. *Si* $r \in]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} Z(r,P) &= \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{r}{|\gamma_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{A}{|\gamma_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{t} s_j(\log r - \log A) + \sum_{j=1}^{t} s_j \log\frac{A}{|\gamma_j|}. \end{aligned}$$

Mais $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j = q$ *et* $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j(\log\dfrac{A}{|\gamma_j|} - \log A) = O(1)$. *Par conséquent*

$$Z(r,P) = q\log r + O(1) = \deg(P)\log r + O(1).$$

(ii) Soient $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ *et* $Q(x) = \sum\limits_{n=1}^{s} b_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ *deux polynômes premiers entre eux. Soit* $\mathcal{G} = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$*. Alors*

$$T(r, \mathcal{G}) = \deg(\mathcal{G}) \log r + O(1) \text{ pour } r \text{ assez grand dans }]0, +\infty[.$$

En effet, soit $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ *et soit* $\{\beta_j\}_{j \in J}$ *l'ensemble des zéros de* P *et* Q *respectivement. Supposons* $B = \sup\limits_{i,j}\{|\gamma_i|, |\beta_j|\}$*. D'après l'exemple précédent, pour* $r \in]B, +\infty[$*, on a* $Z(r, P) = \deg(P) \log r + O(1)$ *et* $Z(r, Q) = \deg(Q) \log r + O(1)$*.*
Par conséquent

$$\begin{aligned} T(r, \mathcal{G}) &= \max\{Z(r, P) + \log|P(0)|, Z(r, Q)\} \\ &= \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \log r + O(1), \end{aligned}$$

où, par définition, $\max\{\deg(P), \deg(Q)\} = \deg(\mathcal{G})$*.*

Théorème 2.8. [*21*] *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Alors* $f \notin \mathbb{K}(x)$ *si et seulement si*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty.$$

Démonstration. *Supposons d'abord que* $f \in \mathbb{K}(x)$*. Donc, d'après l'exemple précédent,* $T(r, f) = \deg(f) \log r + O(1)$ *pour* r *assez grand. Par conséquent*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \deg(f).$$

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$*. Alors,* f *admet ou bien une infinité de zéros ou bien une infinité de pôles et on a donc,* $T(r, f) > \lambda \log r \quad \forall \lambda > 0, \ \forall r \in]0, +\infty[$*.*
Par conséquent

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty.$$

Théorème 2.9. [*21*] *Soient* $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Si* $\limsup\limits_{r \to +\infty} \frac{Z(r,g)}{T(r,f)} > 0$*, alors* g *a une infinité de zéros .*

Proposition 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ *telle que* $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ *n'a ni zéro ni pôle en* 0*. Alors*

$$\begin{aligned} i)\ N(r, f^{(k)}) &= N(r, f) + k\overline{N}(r, f). \\ ii)\ Z(r, f^{(k)}) &\leq Z(r, f) + k\overline{N}(r, f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Nous avons besoins du lemme suivant

Lemme 2.2. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, $f = \dfrac{h}{g}$ *où* $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($*resp.* $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *n'ont pas de zéro commun. Posons* $H_0 = h$ *et* $H_n = gH'_{n-1} - ng'H_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$. *On a*

i) $f^{(n)} = \dfrac{H_n}{g^{n+1}}$.

ii) Tout zéro d'ordre $m (m \geq 1)$ *de* g *est un zéro d'ordre* $n(m-1)$ *de* H_n *et un pôle d'ordre* $m+n$ *de* $f^{(n)}$.

Démonstration de la proposition 2.2. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ les pôles de f dans le disque $|x| \leq r$, et supposons que chaque x_i est d'ordre m_i, $i \in \{1, \dots, q\}$. Donc d'après le lemme précédent, les pôles de f dans le disque $|x| \leq r$ sont $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ et leurs ordres sont respectivement $m_1 + n, m_2 + n, \dots, m_q + n$. D'où :

$$\begin{aligned}
N(r, f^{(k)}) &= (m_1+n)\big[\log r - \log|x_1|\big] + (m_2+n)\big[\log r - \log|x_2|\big] + \dots \\
&\qquad + (m_q+n)\big[\log r - \log|x_q|\big] \\
&= m_1\big[\log r - \log|x_1|\big] + m_2\big[\log r - \log|x_2|\big] + \dots + m_q\big[\log r - \log|x_q|\big] \\
&\qquad + n\big\{[\log r - \log|x_1|] + [\log r - \log|x_2|] + \dots + [\log r - \log|x_q|]\big\} \\
&= N(r, f) + k\overline{N}(r, f).
\end{aligned}$$

La relation (i) est donc démontrée.
Pour la relation (ii), Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. Par la formule (2.3), on a

$$\begin{aligned}
Z(r, f') - N(r, f') + \log|f'(0)| &= \log|f'|(r) \\
Z(r, f) - N(r, f) + \log|f(0)| &= \log|f|(r).
\end{aligned}$$

Mais, d'aprés le théorème de Poisson-Jensen, on a $|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r)$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique,

$$\log|f'|(r) \leq \log|f|(r) - \log r.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
Z(r, f') &= \log|f'|(r) + N(r, f') - \log|f'(0)| \\
&\leq \log|f|(r) + N(r, f') - \log|f'(0)| - \log r \\
&\leq Z(r, f) + N(r, f') - N(r, f) + \log|f(0)| - \log|f'(0)| - \log r \\
&\leq Z(r, f) + N(r, f') - N(r, f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Mais, d'aprés la première inégalité i), on a

$$\begin{aligned} N(r,f') - N(r,f) &= \overline{N}(r,f) \\ Z(r,f') &\leq Z(r,f) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq n$. Alors

$$Z(r,f^{(n+1)}) = Z(r,(f^{(n)})') \leq Z(r,f^{(n)}) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1),$$

et donc

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + n\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1).$$

Puisque $\overline{N}(r,f^{(n)}) = \overline{N}(r,f)$, on a

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + (n+1)\overline{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

$\square$

Corollaire 2.5. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telle que $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors*

$$T(r,f^{(k)}) \;\leq\; T(r,f) + k\overline{N}(r,f) \leq (k+1)T(r,f).$$

En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ telle que $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ n'a pas de zéro en 0. Alors

$$T(r,f^{(k)}) \leq kT(r,f) + O(1) \;\forall r \in]0,+\infty[\;\big(\textit{resp. } r \in]0,R[\big).$$

Démonstration. Pour cette relation, on a :

$$\begin{aligned} T(r,f^{(k)}) &= N(r,f^{(k)}) + m(r,f^{(k)}) \\ &= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m(r,\frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\dots\frac{f'}{f}.f) \\ &\leq N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m(r,f). \end{aligned}$$

D'où $T(r,f^{(k)}) \leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f)$. $\square$

Corollaire 2.6. [21] *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ et soit $\tilde{f}$ une une primitive de f telles que f et $\tilde{f}$ n'ont pas de zéro ni pôle en 0. Alors*

$$T(r,\tilde{f}) \leq T(r,f) + Z(r,f) - Z(r,f) + O(1) \;\;\forall r \in]0,+\infty[\;\big(\textit{resp. } r \in]0,R[\big).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, f et $\tilde{f}$ satisfont $N(r,f) = N(r,\tilde{f}) + \overline{N}(r,\tilde{f})$ et $Z(r,f) \leq Z(r,\tilde{f}) + \overline{N}(r,\tilde{f}) + O(1)$, $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. Par suite

$$\begin{aligned} N(r,\tilde{f}) &\leq N(r,\tilde{f}) + \overline{N}(r,\tilde{f}) + Z(r,\tilde{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1) \\ &= N(r,f) + Z(r,\tilde{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais $N(r,f) \leq T(r,f) + O(1)$ et donc

$$N(r,\tilde{f}) \leq T(r,f) + Z(r,\tilde{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1) \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\big(\text{resp. } r \in]0,R[\big).$$

D'autre part, puisque $Z(r,f) \leq T(r,f) + O(1)$, on a

$$Z(r,\tilde{f}) \leq T(r,f) + Z(r,\tilde{f}) - Z(r,f) - \log r + O(1) \;\; \forall r \in]0,+\infty[\;\big(\text{resp. } r \in]0,R[\big).$$

Par conséquent, en considérant que $T(r,\tilde{f}) = \max\big\{Z(r,\tilde{f}) + \log|\tilde{f}(0)|, N(r,\tilde{f})\big\}$, on obtient l'inégalité désirée. □

2.3 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Notation 2.1. *Pour tout nombre fini $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f(0) \neq a$. On note $m(r,a)$, $N(r,a)$ et $T(r,a)$ au lieu de $m\Big(r,\dfrac{1}{f-a}\Big)$, $N\Big(r,\dfrac{1}{f-a}\Big)$ et $T\Big(r,\dfrac{1}{f-a}\Big)$ respectivement.*

Théorème 2.10. [27]**(Deuxième Théorème Fondamental De Nevanlinna)** *Soit f une fonction méromorphe non constante sur $D^{-}(0,\rho)$ avec $\rho \geq 1$, et soient $a_1,\ldots,a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{C}_p$. Alors pour tout élément réèl $1 \leq r < \rho$, on a*

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,a_j) + m(r,\infty) \leq T(r,f) + O(1).$$

Démonstration. Soit $\delta = \min_{i\neq j}|a_i - a_j|_p$. Par définition,

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,a_j) + m(r,\infty) = \sum_{j=1}^{q} \log^{+} \frac{1}{|f-a_j|_r} + \log^{+}|f|_r.$$

Etant donné un nombre réel $0 < r < \rho$, Nous considérons d'abord le cas où

$$|f-a_j|_r > \frac{1}{2}\delta,$$

pour $1 \leq j \leq q$. Dans ce cas,

$$\sum_{j=1}^{q} m(r,a_j) + m(r,\infty) \leq q\log^{+} 2/\delta + m(r,\infty) \leq T(f,r) + O(1).$$

D'où le résultat. Maintenant, posons i un entier entre $\{1, 2, \dot{;} q\}$ tel que

$$|f - a_i|_r \leq \frac{1}{2}\delta.$$

Notons que ici i dépend de$r$. Pour tout $j \neq i \leq i \leq q$, on a

$$\delta \leq |a_i - a_j|_p \leq |f - a_i|_r + |f - a_j|_r \leq \frac{1}{2}\delta + |f - a_j|_r.$$

Donc

$$|f - a_j|_r \geq \frac{1}{2}\delta.$$

Par conséquent, pour $j \neq i$,

$$m(r, a_j) = \log^+ \frac{1}{|f - a_j|_r} \leq \log^+ \frac{2}{\delta}.$$

D'autre part, puisque $|f - a_i|_r \leq \frac{1}{2}\delta$,

$$|f|_r \leq |f - a_i|_r + |a_i|_p \leq \frac{1}{2}\delta + |a_i|_p.$$

Donc

$$m(r, \infty) \leq \log^+(\frac{1}{2}\delta + |a_i|_p).$$

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, a_j) + m(r, \infty) \leq (q - 1)\log^+ \frac{2}{\delta} + m(r, a_i) + \log^+(\frac{1}{2}\delta + |a_i|_p).$$

D'après le *premier théorème fondamental de Nevanlinna*, $m(r, a_j) \leq T(f, r) + O(1)$. Le théorème est démontré. $\square$

Chapitre 3

Etude du comportement de la solution méromorphe de certaines équations fonctionnelles

Ce chapitre est consacré à étudier le comportement de la solution méromorphe de certaines équations fonctionnelles linéaires aux q-différences en utilisant les notations classiques de la théorie de Nevanlinna présentées dans le chapitre 2. Une équation fonctionnelle linéaire aux q-différences est une équation dont la variable est une fonction, et qui s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\ f(q^i x) = B(x), \tag{3.1}$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clôs, avec $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$, $(s \geq 1)$ des éléments de $\mathbb{K}(x)$, tel que $A_0(x)\ A_s(x) \neq 0$.
On va également remarquer que toutes les solutions méromorphes de telles équations sont des fonctions rationnelles, si les coéficients $A_0(x), ..., A_s(x)$ sont constants et $B(x)$ est un polynôme, on va donner aussi la forme de la solution de (3.1) si $B(x)$ n'admet comme pôle que 0.

Puis, nous nous intéressons à l'étude des estimations de croissance des solutions méromorphes transcendantes de (3.1).

Nous nous proposons à présent de détailler les principaux résultats obtenus.

Lemme 3.1. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *et* $r > 0$*, on a*

1. $|f(qx)|(r) = |f|(|q|r)$.
2. $m(r, f(qx)) = m(|q|r, f)$.
3. $N(r, f(qx)) + = N(|q|r, f)$.
4. $T(r, f(qx)) = T(|q|r, f)$.

Démonstration.

1. On a pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $r > 0$,

$$|f(qx)|(r) = \sup_{n\geq 0}|a_n\, q^n|\, r^n = \sup_{n\geq 0}|a_n|\, (q\, r)^n = |f|(|q|r).$$

Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, il exist $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ tel que $f = \dfrac{g}{h}$, donc

$$|f(qx)|(r) = \frac{|g(qx)|(r)}{|h(qx)|(r)} = \frac{|g|(|q|r)}{|h|(|q|r)} = |f|(|q|r).$$

2. $m(r, f(qx)) = \log^+ |f(qx)|(r) = \log^+ |f|(|q|r) = m(|q|r, f)$.

3. Le nombre de pôles de f dans $D^-(0, |q|r) = \{x,\ |x| < |q|r\}$ est égal à nombre de pôles de $f(qx)$ dans $D^-(0, r) = \{x,\ |x| < r\}$, donc $p(|q|r, f) = p(r, f(qx))$.

En effet.

$$\begin{aligned} p(|q|r, f) = \sum_{|x|=|q|r} \max(0, w_\alpha(\frac{1}{f}(x))) &= \sum_{|\frac{x}{q}|=r} \max(0, w_\alpha(\frac{1}{f}(x))) \\ &= \sum_{|t|=r} \max(0, w_\alpha(\frac{1}{f}(qt))) = p(r, f(qt)). \end{aligned}$$

On remplace t par x, on trouve le résultat.

Donc

$$\begin{aligned} N(r, f(qx)) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(r, f(qx))\ \log\frac{r}{|\alpha|} &= \sum_{|\frac{\alpha}{q}|\leq r} p(|q|r, f)\ \log\frac{r}{|\frac{\alpha}{q}|} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq |q|r} p(|q|r, f)\ \log\frac{|q|r}{|\alpha|} = N(|q|r, f). \end{aligned}$$

4. On a $T(r, f(qx)) = m(r, f(qx)) + N(r, f(qx)) = m(|q|r, f) + N(|q|r, f) = T(|q|r, f)$.

3.1 Solution de l'équation fonctionnelle aux q-différences linéaire à coefficients constants

Considérons dans cette section l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} a_i \, f(q^i x) = B(x), \tag{3.2}$$

telle que les coefficients $a_0, ..., a_s$ sont des éléments constants de $\mathbb{K}$, $a_0 \, a_s \neq 0$.

Théorème 3.1. [4] *Supposons l'équation fonctionnelle* $\sum_{i=0}^{s} a_i \, f(q^i x) = B(x)$ *vérifiant les hypothèse ci-dessus, et* $B(x) \in \mathbb{K}[x]$. *Alors toute solution* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *non constante de l'équation* (3.2), *est une fonction rationnelle ayant au plus un pôle* $\alpha = 0$.

Démonstration.

Supposons que (3.2) possède une solution méromorphe f. Si $\alpha \neq 0$ est un pôle de f, alors en observant l'égalité :

$$f(x) = \frac{1}{a_0} B(x) - \sum_{i=1}^{s} \frac{a_i}{a_0} \, f(q^i x),$$

on voit qu'au moins une des valeurs $f(q^i \, \alpha)$ doit être infini. Soit un indice $j_1 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_1 = q^{j_1} \, \alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de f.

En observant une autre fois à l'égalité :

$$f(q^{j_1} \, \alpha) = \frac{1}{a_0} B(q^{j_1} \, \alpha) - \sum_{i=1}^{s} \frac{a_i}{a_0} \, f(q^{i+j_1} \, \alpha),$$

on voit qu'au moins une des valeurs $f(q^{i+j_1} \, \alpha)$ doit être infini. Soit un indice $j_2 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_2 = q^{j_1+j_2} \, \alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle de f. En répétant cette procédure, on voit qu'il existe une suite $\alpha_1, \alpha_2, ...$ des pôles de f tendant vers 0, ce qui est contradictoire. D'où f n'a pas de pôles différent de 0. On suppose que 0 est un pôle de f tel que $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^l}$, où $l \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, $g(0) \neq 0$.

En remplacant f dans l'équation (3.2) et on montre que g satisfait une équation du même type, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{s} a_i \frac{g(q^i x)}{q^{il} x^l} &= \frac{1}{x^l}\sum_{i=0}^{s} a_i \frac{g(q^i x)}{q^{il}} = B(x),\\ \sum_{i=0}^{s} \frac{a_i}{a_0} \frac{g(q^i x)}{q^{il}} &= \frac{x^l B(x)}{a_0}, \quad a_0 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc sans perte de généralité, on suppose que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, et donc on a :

$$f(x) \;=\; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\, f(q^i x) + \beta(x), \text{ où } \alpha_i = \frac{-a_i}{a_0}, i = 1, ..., s \text{ et } \beta(x) = \frac{B(x)}{a_0}. \tag{3.3}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f(qx)|(|q|^{-k}), ..., |\alpha_s||f(q^s x)|(|q|^{-k})\}.$$

On utilisons le lemme 3.1, on trouve

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f|(|q|^{1-k}), ..., |\alpha_s||f|(|q|^{s-k})\}.$$

Puisque $0 < |q| < 1$, on a $|q|^{1-k} \geq ... \geq |q|^{s-k}$, donc $|f|(|q|^{1-k}) \geq ... \geq |f|(|q|^{s-k})$, on déduit

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), |\alpha_1||f|(|q|^{1-k}), ..., |\alpha_s||f|(|q|^{1-k})\},\\ |f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{1-k})\}, \text{ et } \lambda = \max_{1\leq i\leq s}|\alpha_i|.\end{aligned}$$

On a $|q|^{1-k} \leq |q|^{-k}$, donc $|\beta|(|q|^{1-k}) \leq |\beta|(|q|^{-k})$, on déduit

$$\begin{aligned}|f|(|q|^{1-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{1-k}), \lambda|f|(|q|^{2-k})\},\\ |f|(|q|^{1-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{2-k})\},\end{aligned}$$

d'où

$$|f|(|q|^{-k}) \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^2|f|(|q|^{2-k})\}.$$

De la même façon, on trouve que

$$|f|(|q|^{2-k})r \leq \max\{|\beta|(|q|^{2-k}), \lambda|f|(|q|^{3-k})\} \leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda|f|(|q|^{3-k})\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^3|f|(|q|^{3-k})\} \\ &\vdots \\ |f|(|q|^{-k}) &\leq \max\{|\beta|(|q|^{-k}), \lambda^k|f|(1)\}. \end{aligned}$$

On note $r_k = |q|^{-k}$, donc $k = \dfrac{\log r_k}{\log |q|^{-1}}$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} |f|(r_k) &\leq \max\{|\beta|(r_k), \lambda^k \log |f|(1)\} \\ \log |f|(r_k) &\leq \max\{\log |\beta|(r_k), k \log \lambda + \log |f|(1)\} \\ &= \max\{\log |\beta|(r_k), \frac{\log \lambda}{\log |q|^{-1}} \log r_k + \log |f|(1)\}, \end{aligned}$$

$(r_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$, et $\beta(X) = \dfrac{B(X)}{a_0} \in \mathbb{K}[X]$, donc

$\log |\beta|(r_k) = O(\log r_k)$. D'où $\log |f|(r_k) = O(\log r_k), \ \ k \longrightarrow +\infty$.

On déduit d'aprés l'inégalité (3.3) que $\log |f|(r) = O(\log r), \ r \longrightarrow +\infty$. Donc

$T(r, f) = O(\log r)$, d'où on a $f \in \mathbb{K}[X]$.

Théorème 3.2. *Considérons l'équation fonctionnelle*

$$\sum_{i=0}^{s} a_i \ f(q^i x) = B(x), \tag{3.4}$$

telle que les coefficients $a_0, ..., a_s$ sont des éléments constants de $\mathbb{K}$, et $B(x)$ est de la forme $B(x) = \frac{P_1(z)}{z^l}$, où P est un polynôme de degré d et $l \in \mathbb{N}$. Alors toute solution de cette équation se réduit sous la forme $f(z) = \frac{P_2(z)}{z^p}$, où P_2 est un polynôme et $p \geq l$.

Démonstration. Supposons que (3.4) possède une solution méromorphe f.
Si $z_0 \neq 0$ est un pôle de f, alors il existe un indice $j_0 \in \{1, ..., s\}$ tel que $f(q^{j_0} z_0) = \infty$.

$$f(q^{j_0} z_0) = \frac{1}{a_0} B(q^{j_0} z_0) - \sum_{i=1}^{s} \frac{a_i}{a_0} \ f(q^{j_0+i} z_0),$$

donc, il existe un indice $j_1 \in \{1, ..., s\}$ tel que $f(q^{j_0+j_1} z_0) = \infty$. En répétant ce procédure, on voit qu'il existe une suite de pôles de f et qui tend vers 0, contradiction. D'où f n'a pas de pôles différent de 0. Supposons maintenant que f admet unseul pôle au point 0 d'ordre p. Il s'ensuit que $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^p}$, et $p \geq l$.
Donc $g(x) = x^p\, f(x)$ est une fonction entière et satisfait

$$\sum_{i=0}^{s} \alpha_i \; g(q^j x) = Q(x),$$

telle que $\alpha_i = \frac{a_i}{q^{j\,p}}$ sont des éléments constants de $\mathbb{K}$, et $Q(x) = B(x)\,.x^p = P_1(x)x^{p-l}$ est un polynôme. En utilisant le théorème 3.1, on obtient que $g(x)$ est un polynôme, d'où le résultat. $\square$

3.2 Comportement de la solution méromorphe transcendante de l'équation fonctionnelle linéaire aux q-différences à coefficients non-constants

Dans cette section, on va étudier le comportement de la solution méromorphe transcendante de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x) \; f(q^i x) = B(x),$$

telle que

$q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$, $\quad B(x), A_0(x), ..., A_s(x) \in \mathbb{K}(X)$, $(s \geq 1)$, et $A_0(x)\; A_s(x) \neq 0$.

La première observation est que nous pouvons prendre $B(x) = 0$ sans perde de généralité. En effet, si $B(x) \neq 0$, on a

$$B(x)\sum_{i=0}^{s} A_i(qx) \; f(q^{i+1}x) - B(qx)\sum_{i=0}^{s} A_i(x) \; f(q^i x) = 0.$$

On peut aussi supposer que les A_i sont des polynômes. Donc, à partir de maintenant, on suppose que l'équation (3.1) est de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x) \; f(q^i x) = 0, \tag{3.5}$$

où $A_0(x), ..., A_s(x)$, $(s \geq 1)$, sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, et $A_0(x)\ A_s(x) \neq 0$.

Théorème 3.3. [4] *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$ une solution de l'équation* (3.4)*, alors on a*

$$(\log r)^2 = O(T(r,f)), r \to +\infty.$$

Nous allons avoir besoin d'un certain nombre de lemmes pour démontrer ce théorème.

Lemme 3.2. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[x]$ et $\lambda > 1$. Alors, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f|(r)}{|f|(\lambda r)} = 0.$$

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite des zéros distincts de f rangés de telle façon que : pour tout $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |a_{n+1}|$ et $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons par k_n l'ordre de a_n zéro de f, alors

$$f(x) = A\prod_{n\geq 0}(1 - \frac{x}{a_n})^{k_n}.$$

Pour $r > 0$ assez grand, il existe un unique indice n_r tel que : $|a_{n_r}| < r \leq |a_{n_{r+1}}|$. Alors on aurra

$$|f|(r) = \frac{|A|}{|a_0|^{k_0} \ldots |a_{n_r}|^{k_{n_r}}} r^{k_0+\ldots+k_{n_r}}.$$

D'autre part, et comme $\lambda > 1$, $\lambda r > |a_{n_r}|$ et donc

$$|f|(\lambda r) \geq \frac{|A|}{|a_0|^{k_0} ... |a_{n_r}|^{k_{n_r}}} (\lambda r)^{k_0+...k_{n_r}},$$

il s'ensuit que

$$|f|(\lambda r) \geq \lambda^{k_0+...k_{n_r}} |f|(r),$$

et comme $k_0 \geq 1, k_1 \geq 1, ..., k_{n_r} \geq 1$, il s'ensuit que

$$|f|(\lambda r) \geq \lambda^{n_r+1}|f|(r).$$

D'où

$$\frac{|f|(r)}{|f|(\lambda r)} \geq \frac{1}{\lambda^{n_r+1}} \text{ et } \lim_{r\to+\infty} \frac{|f|(r)}{|f|(\lambda r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\lambda^{n_r+1}} = 0.$$

$\square$

Lemme 3.3. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation* (3.4).
Soit $R > 0$ tel que tous les zéros de $A_0(x)$ sont inclus dans $D^-(0, R)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet au moins un pôle dans $\mathbb{K} \setminus D^-(0, R)$.

(ii) f admet une infinité de pôles.

(iii) Pour tout nombre réel $r \geq R$, f admet au moins un pôle dans $D(0, r|q|^{-s}) \setminus D(0, r)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(ii) \Rightarrow (iii)$.

1) Supposons que α est un pôle de f dans $\mathbb{K} \setminus D^-(0, R)$ et $r \geq R$. Posons $\beta = q^{-s}\alpha$. Donc $\beta, q\beta, q^2\beta, ..., q^s\beta$ se trouvent tous dans $\mathbb{K} \setminus D^-(0, R)$ et $q^s\beta$ est un pôle de f. Il existe alors un indice $j_1 \in \{0, ..., s-1\}$ tel que $\alpha_1 = q^{j_1}\beta = q^{j_1 - s}\alpha$ est un pôle de f. Répétant ce raisonnement pour α_1, on obtient un autre pôle α_2 de f.
En utilisant cette procédure, on peut construire une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ des pôles de f satisfant ; pour tout $n \geq 0$, $|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}| = |q|^{j_{n+1} - s} \geq |q|^{-1} > 1$ et donc (i)$\Rightarrow$(ii).

2) Supposons maintenant que f admet une infinité de pôles. Soit $r \geq R$ et soit α un pôle de f tel que $|\alpha| > r$.
Si $|\alpha| \leq r|q|^{-s}$ on a le résultat.
Sinon, il existe un indice j_1, $1 \leq j_1 \leq s$ tel que $\beta = q^{j_1}\alpha$ est un pôle de f, et on a

$$|\alpha| > |\beta| = |q|^{j_1}|\alpha| > r|q|^{j_1 - s} \geq r,$$

si $|\beta| \leq |q|^{-s}$ on a le résultat.
Sinon, on applique ce raisonnement une autre fois sur β, ceci implique que(ii)$\Rightarrow$(iii).

□

***Démonstration du théorème* (3.2).**
On peut considérer l'équation (3.5)

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x) f(q^i x) = 0,$$

telle que $A_0(x), ..., A_s(x)$sont des polynômes et $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.
Choisissons $R > 0$ tel que tous les zéros de $A_0(x)$ s'appartient à $D^-(0, R)$. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$

une solution de l'équation (3.5).

On va distinguer deux cas :

1) ***f*** **admet une infinité de pôles.** Supposons que f admet une infinité de pôles. Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $r_k = R|q|^{-ks}$ de sorte que nous avons

$$k = \frac{\log r_k - \log r}{\log |q|^{-s}}, \tag{3.6}$$

d'après le lemme (3.3), il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ des pôles de f tels que $r_k < |\alpha_k| \leq r_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} N(r_k, f) \geq \sum_{0\leq i<k} \log \frac{r_k}{|\alpha_i|} & \geq \sum_{0\leq i<k} \log \frac{r_k}{r_{k+1}} = \sum_{0\leq i<k} \log |q|^{(i+1-k)s} \\ & = \log \prod_{0\leq i<k} |q|^{(i+1-k)s} \\ & = \log |q|^{-\frac{k(k-1)}{2}s}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$N(r_k, f) \geq \frac{k(k-1)}{2} \log |q|^{-s}. \tag{3.7}$$

D'après (3.5) et(3.6), on déduit que

$$(\log r_k)^2 = O(N(r_k, f)), k \to +\infty.$$

Comme la suite $(r_k)_{k\geq 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$, on déduit que

$$(\log r)^2 = O(N(r, f)), r \to +\infty.$$

Puisque $N(r, f) \leq T(r, f)$, on trouve

$$(\log r)^2 = O(T(r, f)).$$

2) ***f*** **admet un nombre fini de pôles.** Maintenant supposons que f admet un nombre fini de pôles. Multipliant par une fonction rationnelle qui convient, on peux supposer (sans perte de généralité) que f est transcendante.

On pose $d_i = \deg A_i(x)$, pour $i = 0, ..., s$ tel que $A_i(x) = a_{d_i}x^{di} + ...$, où $a_0, a_1, ..., a_{d_i}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et $a_0 a_s \neq 0$. Soit $d = \max_{0\leq i\leq s} d_i \geq 1$ et soit l le plus petit indice tel que $d_l = d$. Alors, d'après(3.4), on a

$$A_l(x)f(q^l x) = -\sum_{0\leq i\leq s_{i\neq l}} A_i(x)f(q^i x).$$

Donc pour $r > 0$ assez grand, on a

$$|A_l(x)f(q^l x)|(r) \leq \max_{0\leq i\leq s_{i\neq l}} \{|A_i(x)f(q^i x)|(r)\}, \tag{3.8}$$

$$|a_l|r^d|f|(r|q|^l) \leq \max_{0\leq i\leq s_{i\neq l}} \{|a_{d_i}|r^{d_i}|f|(r|q|^i\}. \tag{3.9}$$

Si $j \neq l$ un indie entre $\{0, ..., s\}$ qui vérifie

$$|a_l|r^d|f|(r|q|^l) \leq |a_j|r_j^d|f|(r|q|^j).$$

Alors, on a

$$\frac{|f|(r|q|^l)}{|f|(r|q|^j)}) \leq \frac{|a_j|}{|a_l|} r^{d_j - d}.$$

Puisque $d_j \leq d$, la quantité $\frac{|a_j|}{|a_l|} r^{d_j-d}$ est bornée quand r tend vers$+\infty$. D'après lemme (3.2), on a
$l > j$ et donc $l \geq 1$.
Donc on obtient

$$|f|(r|q^l|) \leq \max_{0\leq i\leq l-1} \{\frac{|a_i|}{|a_l|} r^{d_i - d}|f|(r|q|^i)\}. \tag{3.10}$$

Remplaçant r par $r_k = R|q|^{-ks}$ dans l'inégalité(3.10), on obtient

$$\begin{aligned} |f|(r_{k-1}) \leq |f|(r_k|q|^l) &\leq \max_{0\leq i\leq l-1} \{\frac{|a_i|}{|a_l|} r_k^{d_i-d}|f|(r_k|q|^i)\} \\ &\leq \max_{0\leq i\leq l-1} (\frac{|a_i|}{|a_l|}\frac{|f|(r_k)}{r_k}). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$|f|(r_k) \geq Ar_k|f|(r_{k-1}),\ A \text{ constant positif.}$$

Il s'ensuit que

$$|f|(r_k) \geq A^k(\prod_{j=1}^{k} r_j)|f|(R) = A^k R^k |q|^{-s\frac{k(k+1)}{2}}|f|(R),$$

et donc

$$\log|f|(r_k) \geq \frac{k(k+1)}{2}\log|q|^{-s} + k\log A + k\log R + \log|f|(R). \tag{3.11}$$

On déduit à partir de (3.5) et (3.10) que :$(\log r_k)^2 = O(\log|f|(r_k)), k \to +\infty$.
D'où :$(\log r)^2 = O(\log|f|(r)), r \to +\infty$, ce qui achève la démonstration.

□

L'exemple suivant donne le comportement des solutions méromorphes d'une équation fonctionnelle de premier ordre.

Exemple 3.1. *Soit $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$. On considère la fonction de Tschakaloff suivante*

$$f(x) - xf(qx) = x.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite de nombres positifs $(r_k)_{k\geq 1}$ tel que $r_k = |q|^{(\frac{1}{2}-k)}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$|a_n|r_k = |q|^{\frac{n(n-1)}{2}}|q|^{\frac{n(1-2k)}{2}} = |q|^{\frac{n(n-2k)}{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

on déduit que

$$\begin{aligned} |f|(r_k) = \sup_{n\geq 1}|a_n|\ r_k &= \sup_{n\geq 1}|q|^{\frac{n(n-2k)}{2}} \\ &= \sup_{n\geq 1}|q|^{\frac{n^2-2nk+k^2-k^2}{2}} = \sup_{n\geq 1}|q|^{\frac{(n-k)^2-k^2}{2}} \\ &= |q|^{\frac{-k^2}{2}}\sup_{n\geq 1}|q|^{\frac{(n-k)^2}{2}} = |q|^{\frac{-k^2}{2}}|q|^{\frac{(k-k)^2}{2}} = |q|^{\frac{-k^2}{2}}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} r_k = |q|^{(\frac{1}{2}-k)} &\Leftrightarrow -\log r_k = (\frac{1}{2}-k)\ \log|q|^{-1} \\ &\Leftrightarrow \log r_k = (k-\frac{1}{2})\ \log|q|^{-1} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\log r_k}{\log|q|^{-1}} + \frac{1}{2} = \frac{2\log r_k + \log|q|^{-1}}{2\log|q|^{-1}}. \end{aligned}$$

Donc
$$\log|f|(r_k) = \log|q|^{\frac{-k^2}{2}} = \frac{k^2}{2}\log|q|^{-1}$$
$$= \frac{4(\log r_k)^2 + 4(\log r_k)\log|q|^{-1} + (\log|q|^{-1})^2}{2\times(2\log|q|^{-1})^2}\log|q|^{-1}$$
$$= \frac{4(\log r_k)^2 + 4(\log r_k)\log|q|^{-1} + (\log|q|^{-1})^2}{8\log|q|^{-1}}.$$

On a $T(r_k, f) = O((\log r_k)^2),\ k \to +\infty$ *et* $(\log r_k)^2 = O(T(r_k, f)),\ k \to +\infty.$
En effet
$T(r_k, f) = N(r_k, f) + \log^+|f|(r_k)$, *puisque* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ *et le terme* $N(r_k, f) = 0$.
D'aprés l'estimation de $\log|f|(r_k)$, *on trouve que* $T(r_k, f) = O((\log r_k)^2),\ k \to +\infty$ *et* $(\log r_k)^2 = O(T(r_k, f)),\ k \to +\infty.$
La suite $(r_k)_{k\geq 0}$ *est croissante et tend vers* $+\infty$, *tel que* $\lim_{k\to+\infty} r_k = r$, *on a*
$T(r, f) = O((\log r)^2),\ r \to +\infty$ *et* $(\log r)^2 = O(T(r, f)),\ r \to +\infty.$

Corollaire 3.1. *Considérons l'équation*
$$\sum_{i=0}^{s} A_i(x)\ f(q^i x) = B(x), \tag{3.12}$$
où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ *et* $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$, $(s \geq 1)$ *sont des éléments de* $\mathbb{K}[x]$ *tels que* $A_0(x)A_s(x) \neq 0$.
Supposons que $\deg A_0(x) = \max_{0\leq i\leq s} \deg A_i(x)$. *Alors*
i) Toute solution entière de l'équation (3.12) *est un polynôme.*
ii) Toute solution méromorphe de l'équation (3.12) *est une fraction rationnelle.*

Démonstration. Soit f une solution de l'équation (3.12). Supposons que la solution f est une fonction entière transcendante.
Posons $d_i = \deg A_i(x)$, $i = 0, \ldots, s$ et $d = \max d_i = d_0$.
D'après l'équation, on a
$$A_0(x)f(x) = -\sum_{i=1}^{s} A_i(x)\ f(q^i x).$$
Pour r assez grand, on a
$$|A_0(x)f(q^l x)|(r) \leq \max_{1\leq i\leq s}\{|A_i(x)f(q^i x)|(r)\}, \tag{3.13}$$
$$|a_0|r^d|f|(r) \leq \max_{1\leq i\leq s}\{|a_{d_i}|r^{d_i}|f|(r|q|^i\}. \tag{3.14}$$

Prenons j un indice auquel ce maximum s'atteind,

$$|a_0|r^d|f|(r) \leq |a_j|r_j^d|f|(r|q|^j).$$

Alors, on a

$$\frac{|f|(r)}{|f|(r|q|^j)} \leq \frac{|a_j|}{|a_0|}r^{d_j-d} \not\longrightarrow \infty.$$

Puisque $d_j \leq d$, la quantité $\frac{|a_j|}{|a_0|}r^{d_j-d}$ est bornée quand r tends vers $+\infty$. Donc, la quantité $\frac{|a_0|}{|a_j|}r^{d-d_j}$ ne tend pas vers zéro. D'où

$$\frac{|f|(r|q|^j)}{|f|(r)} = \frac{|f|(r|q|^j)}{|f|(r|q|^j)} \nrightarrow 0,$$

et puisque $|q|^{-j} > 1$, on trouve une contradiction avec le lemme (3.2). $\square$

Exemple 3.2. *Soit $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$. Toute solution entière de l'équation*

$$x^2 f(x) + (x+1)f(qx) = x^3 + 1$$

est un polynôme.

Application

Etant donné une équation fonctionnelle linéaire homogène aux q-différences du premier ordre :

$$A_0(x)f(x) + A_1(x)f(q\,x) = 0, \tag{3.15}$$

où $A_0(x)$, $A_1(x)$ deux polynômes premiers entre eux.

Théorème 3.4. *Toute solution entière de l'équation* (3.15) *est polynômiale.*

Démonstration. Soit α un zéro d'une solution entière f de (3.15), et posons que $A_1(\alpha)$ ne s'annule pas pour tout zéro α de f, (i.e., $\forall\alpha$ zéro de f, $A_1(\alpha) \neq 0$).
D'après l'écriture suivante

$$A_0(\alpha)f(\alpha) = -A_1(\alpha)f(q\alpha),$$

on voit que $f(q\alpha) = 0$, i.e, $q\alpha$ est un zéro de f. Une autre fois, on observe de cette écriture

$$A_0(q\alpha)f(q\alpha) = -A_1(q\alpha)f(q^2\alpha),$$

que $f(q^2\alpha) = 0$. En répétant l'opération, on obtient à la fin une suite de zéros de f qui tend vers zéro, contradiction. D'où l'existence d'un certain entier $j \in \mathbb{N}$ tel que $\beta = q^j\alpha$ est un zéro de A_1. Il en résulte que toute solution entière de f est polynômiale. $\square$

Conclusion

Dans le cas complexe, on utilise la fonction maximum du module $M(r,f) = \max_{z \in D(0,r)} |f(z)|$ pour étudier la taille d'une fonction dans le cas où elle est analytique. Si elle est méromorphe, R. Nevanlinna a introduit au début du XX siècle une fonction qui nous permet d'avoir suffisamment d'informations sur la taille de la fonction en question.

Dans le cas p-adique, A. Boutabaa et H.H. Khoai ont introduit la notion de la théorie de Nevanlinna p-adique qui utilise des techniques comme le polygone de valuation p-adique. Ces techniques nous permet d'étudier la taille des solutions des grandes classes des équations différentielles où des équations fonctionnelles qui est le cas dans ce mémoire.

La complication de cette étude dépend essentiellement de la nature des coefficients de l'équation à étudier.

Bibliographie

[1] **Y. Aihara**, *Introduction to p-adic Analysis.* Research reports of the Nevanlinna theory and its applications, II. Nippon Institute of Technology, 1998.

[2] **Y. Amice**, *Les nombres p-adiques.* Presse Universitaire de France (1975).

[3] **J.P. Bézivin**, *Dynamique des fractions rationnelles p-adiques.* Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.

[4] **N. Boudjerida, A. Boutabaa, S. Medjerab**, *On some ultrametric q-difference equations.* Bulletin des Sciences Mathématiques (2010).

[5] **A. Boutabaa**, *Théorie de Nevanlinna p-adique.* Manuscripta Math. 67, 251-269 (1990).

[6] **A. Boutabaa**, *Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique*, Collectanea Mathematica 42, 1 p. 75-93, (1991).

[7] **A. Boutabaa**, *Sur les courbes holomorphes p-adiques.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouses Vol. V, no 1 (1996), pp 29-52.

[8] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc.* Proc. of the Edinburgh Mathematical Society, 44, 485-504 (2001).

[9] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *On uniquenss of p-adic meromorphic functions.* Proc. Amer. Math. soc. 126 (9), 2557-2568 (1998).

[10] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *Uniqueness of p-adic meromorphic functions.* Académie des Sciences/ Elsevier, Paris, (1997).

[11] **A. Boutabaa and A. Escassut**, *Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations.* Annales de l'Institut Fourier, T. 50 (3), p 751-766. (2000).

[12] **A. Boutabaa and J.P. Bézivin**, *Decomposition of p-adic meromorphic functions.* Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1 (1995) pp 51-60.

[13] **G. Christol**, *Le théorème du Turritin p-adique.* Version du 11/6/2011.

[14] **W. Cherry**, *Lecture on Non-archimedean Function Theory.* Advanced School on p-Adic Analysis and Applications, 2009.

[15] **B. Diarra**, *Analyse p-adique.* Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.

[16] **A. Escassut**, *Analytic Elements in p-adic Analysis.* Word Scientific Publishing (1995).

[17] **A. Escassut, J. Ojedaa, C.C. Yang**, *Functional equations in a p-adic context.* Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[18] **Fernando Q. Gouvêa**, *p-adic Numbers.* An Introduction, Second Edition 1997.

[19] **T.T. Hoai, A. Escassut**, *Meromorphic solutions of equations over non-Archimedean fields.* Published online : 13 March 2008. Springer Science+Business Media, LLC 2008.

[20] **P.C. Hu, C.C. Yang**, *Meromorphic function over non-Archimedean Field.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[21] **A.O.F. Jacqueline**, *Distribution de valeurs des fonctions méromorphes ultramétriques, application de la théorie de Nevanlinna.* Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal.

[22] **S. Katok**, *Real and p-adic analysis.* Course notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000 (2001).

[23] **H.H. Khoai**, *Sur la théorie de Nevanlinna p-adique*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, towe 15 (1987-1988),P. 35-40. Aequationes Math. 60 (200) p. 148-166.

[24] **N. Koblitz**, *P-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-Verlag (1984).

[25] **L. Ping, C.C. Yang**, *On the unique range set of meromorphic functions.* American Mathematical Society, (1996).

[26] **A. Robert**, *A course in p-adic Analysis.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).

[27] **M. Ru**, *A Note on p-Adic Nevanlinna Theory.* American Mathematical Society. Volume 129, Number 5, Pages 1263-1269.

[28] **W.H. Schikhof**, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Cambridge University Press (1984).

[29] **W. Bergweiler, K. Ishizaki, N. Yanagihara**, *Meromorphic solutions of some functional equations.* Aequationes Math. 63 (2002) p. 140-151.

[30] **W. Bergweiler, W.K. Hayman**, *Zeros of Solutions of a Functional Equation.* Computational Methods and Function Theory Vol. 3 No 1 (2003) p. 55-78 .

[31] **J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo, D. Yang**, *Meromorphic solutions of some linear functional equations.* Aequationes Math. 60 (2000) 148-166.

[32] **I. Laine**, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations* . Clarendon Press, Oxford(1964).