RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :

Série :

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ

Mathématiques

OPTION

Algèbre

Par

Bilal SAOUDI

THÈME

Étude de la primalité et de la pseudo-primalité d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}_p$

Soutenu le : ....../....../2013

Devant le Jury :

Président :	D. AZZAM-LAOUIR	Prof.	Université de Jijel
Rapporteur :	T. Zerzaihi	Prof.	Université de Jijel
Examinateurs :	M. F. YAROU	Prof.	Université de Jijel
	N. TOUAFEK	M.C.A	Université de Jijel

Table des matières

Introduction Générale

Au début du vingtième siècle, le mathématicien allemand, Kurt Hensel (1861-1941) introduit les nombres p-adiques. Ces derniers représentent une extension des nombres rationnels qui sont utilisés en théorie des nombres pour calculer modulo une puissance d'un nombre premier, et ils ont d'autres applications dans d'autres branches comme l'analyse (analyse p-adique) et topologie algébrique ... . On les voit aussi apparaitre dans la physique théorique.

Beaucoup d'études ont été faites sur la distribution de valeurs des fonctions méromorphes complexes. Elles concernent les problèmes de la répartition des zéros et les applications de la théorie de distribution des valeurs dans l'étude du comportement asymptotique des solutions des équations fonctionnelles et différentielles, notamment par : Nevanlinna, G. Gundersen, G. Frank, C.C.Yang, Ping.Li,... ,etc.

Au cours des années 80, A. Boutabaa et Ha Huy Khoai introduisent la théorie de Nevanlinna ultramétrique des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$ qui joue un rôle majeur dans le domaine de distribution des valeurs, et elle possède des relations importantes avec la théorie des nombres. Au début des années 2000, A. Boutabaa et A. Escassaut ont appliqué cette théorie dans un disque ouvert dans $\mathbb{K}$.

Le but de ce mémoire est l'étude de la primalité et de la pseudo-primalité d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}_p$, en utilisant la théorie de distribution des valeurs et la factorisation des fonctions méromorphes.

Ce travail est réparti sur trois chapitres précédés d'une introduction.
Le premier chapitre et composé de quatre parties. Nous commençons par la définition de la valeur absolue ultramétrique. Puis, nous rappelons les propriétés topologiques et nous allons essayer de construire le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, qui est le complété de $\mathbb{Q}$. Comme

$\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos, nous avons besoin de le compléter pour former le corps $\mathbb{C}_p$ qui est complet est algébriquement clos. Après, on présente quelques propriétés analytiques et nous terminerons ce chapitre par la présentation des fonctions analytiques et les fonctions méromorphes sur un corps ultramétrique.

Le deuxième chapitre est réparti sur cinq parties. Dans la première partie, nous présentons les zéros des fonctions analytiques. Ensuite, nous donnons le polygone de valuation qui joue un rôle important dans l'étude de la distribution des valeurs. Puis, on définit quatre fonctions ; $Z(r, f)$ - *la fonction qui compte les zéros des fonctions méromorphes avec leurs multiplicités*, $N(r, f)$ - *la fonction qui compte les pôles des fonctions méromorphes avec leurs multiplicités*, $m(r, f)$ - *la fonction de compensation*, $T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$ - *la fonction caractéristique de Nevanlinna qui est positive* . Ces fonctions sont utilisées pour donner une version ultramétrique de la formule de Jensen et plus tard le premier théorème fondamental de Nevanlinna ultramétrique qui est seulement une autre forme de la formule de Jensen. A la fin de ce chapitre nous donnerons le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna, qui montre qu'en général $m(r, f)$ est petit par rapport à $T(r, f)$ et donc $N(r, f)$ est proche de $T(r, f)$.

Le troisième chapitre est composé de trois parties. Nous commençons par donner la définition de la factorisation des fonctions méromorphes pour l'utiliser dans la définition de la primalité et la pseudo-primalité. Puis, on utilise la théorie de distribution des valeurs dans l'étude de la primalité et la pseudo-primalité des fonctions méromorphes p-adiques. On termine ce travail par l'introduction d'une technique qui nous permet de construire une fonction entière p-adique pseudo-première. Cette technique est basée sur certaines propriétés que doit vérifier les coefficients du développement de cette fonction en série entière. Un autre avantage de cette technique c'est qu'elle nous permet d'avoir une idée sur la répartition des zéros de la fonction étudiée.

Chapitre 1

Propriétés élémentaires des corps ultramétriques

Nous introduisons dans ce chapitre la définition de la valuation ultramétrique, et nous donnons les propriétés topologiques et algébriques d'un corps ultramétrique et les propriétés analytiques des nombres p-adiques. En fin, nous définissons les fonctions analytiques et méromorphes sur ce corps.

1.1 Valuation ultramétrique

Définition 1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

a) $\forall x \in \mathbb{K}, |x| \geq 0.$

b) $\forall x \in \mathbb{K}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

c) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |xy| = |x||y|.$

d) $\forall x, y \in \mathbb{K}, |x + y| \leq \max(|x|, |y|).$

La propriété d) est connue comme l'inégalité triangulaire forte.

Cette valeur absolue définie une norme qui s'appelle norme non-archimédienne.

Exemple

Tout corps est muni d'au moins une valeur absolue ultramétrique (la valeur absolue triviale) à savoir l'application $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par : $|x| = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ 1, & sinon. \end{cases}$

Définition 1.2. Soit p un nombre premier. On appelle valuation p-adique l'application $v_p :\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ définie comme suit :

- $v_p(0) = +\infty$.
- Si n est un entier non nul, $v_p(n) = k$ si p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.
- Si $n = \dfrac{a}{b}$ avec a et b des entiers non nuls, alors $v_p(n) = v_p(\dfrac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.

Proposition 1.3. *Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors la valuation v_p satisfait*

1) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

2) $v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Exemple

la valuation p-adique de la suite $a_n = n!$ est

$$v_p(n!) = \frac{n}{p-1}\,, quand\ n \to \infty. \tag{1.1}$$

En effet, on a

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1} = \sum_{k\geq 1} [\frac{n}{p^k}],$$

où $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p et $[x]$ est la partie entière du réel x. Donc

$$\begin{aligned} v_p(n!) &\leq \frac{n}{p} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p^k} \\ &\leq \frac{n}{p} . \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{n}{p-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}. \tag{1.2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} v_p(n!) & \geq \sum_{k\geq 0}^{m} \frac{n}{p^k} - m \\ & \geq \frac{n}{p}.\frac{1-(\frac{1}{p})^m}{1-(\frac{1}{p})} - m \\ & \geq \frac{n}{p-1} - \frac{np^{-m}}{p-1} - m. \end{aligned}$$

On prend m tel que $p^m \leq n \leq p^{m+1}$, et d'après (1.2) on a

$$\begin{aligned} |\frac{v_p(n!)}{n} - \frac{1}{p-1}| & \leq \frac{p^{-m}}{p-1} + \frac{m}{n} \\ & \leq p^{-m}(\frac{1}{p-1} + m) \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ m \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Or quand $n \longrightarrow +\infty$, $m \longrightarrow +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_p(n!)}{n} = \frac{1}{p-1},$$

ce qui donne

$$v_p(n!) = \frac{n}{p-1} \ \ , \ \ quand \ \ n \longrightarrow +\infty.$$

Proposition 1.4. *On définit l'application* $|.|_p$ *de* $\mathbb{Q}$ *dans* $[0, +\infty[$ *par*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, \ \ si \ x \neq 0, \\ 0, \ \ si \ x = 0. \end{cases}$$

Cette application est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$*, appelée valeur absolue p-adique. La distance sur* $\mathbb{Q}$ *induite par la norme p-adique* $|.|_p$ *notée* d_p *(la distance p-adique) est définie par*

$$\begin{aligned} d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto d_p(x, y) = |x - y|_p. \end{aligned}$$

Exemples

1) Si $a = 84 = 2^2 \times 3 \times 7$,

on a $|a|_2 = \frac{1}{4}$, $|a|_3 = \frac{1}{3}$, $|a|_7 = \frac{1}{7}$, et pour tout autre nombre premier $|a|_p = 1$.

2) Si $x = \frac{112}{1140} = 2^2 \times 3^{-1} \times 5^{-1} \times 7 \times 19^{-1}$,

on a $|x|_2 = \frac{1}{4}$, $|x|_3 = 3$, $|x|_5 = 5$, $|x|_7 = \frac{1}{7}$, $|x|_{19} = 19$ et pour tout autre nombre premier

$|a|_p = 1$.

3) Pour la distance usuelle dans $\mathbb{Q}$, la distance de 104 à 4 est $d(104, 4) = |104 - 4| = 100$. Pour mesurer la distance 5-adique de 104 à 4, que note $d_5(104, 4)$, on écrit

$$104 - 4 = 100 = 4.5^2,$$

alors

$$d_5(104, 4) = |100|_5 = \frac{1}{5^2},$$

de même pour

$$d_7(104, 4) = 1.$$

Théorème 1.5. *Pour tout nombre rationnel $a \in \mathbb{Q}$, on a*

$$|a|_\infty . \prod_p |a|_p = 1.$$

Démonstration. Voir [21]

Théorème 1.6. *(Théorème d'Ostrowski)*

Toute valeur absolue non triviale $|.|$ sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à la valeur absolue archimédienne $|.|_\infty$ ou à une certaine valeur absolue p-adique $|.|_p$.

Corollaire 1.7. *Deux valeurs absolues $|.|_{p_1}$ et $|.|_{p_2}$ sont équivalentes si et seulement si $p_1 = p_2$.*

1.2 Propriétés topologiques et algébriques des corps ultramétriques

1.2.1 Propriétés topologiques

Dans la suite, on note $(\mathbb{K}, |.|)$ un corps non-archimédien.

Théorème 1.8. [1] *(caractéristique du corps ultramétrique)*

Soit $|.|$ une valeur absolue ultramétrique sur le corps $\mathbb{K}$, on a

$$|.| \ \ v.a.ultramétrique \Leftrightarrow |n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, $\mathbb{N}$ *est borné selon* $|.|$.

Démonstration .

Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |n| \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{K}, |(x+y)^n| &= |\sum_{k=0}^{n} c_n^k x^k . y^{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} c_n^k |x^k| . |y^{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} c_n^k |x|^k . |y|^{n-k}, avec \ c_n^k \leq 1 \\ |(x+y)^n| &\leq \sum_{k=0}^{n} |x|^k . |y|^{n-k}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |x| &\leq \max(|x|, |y|) \\ |y| &\leq \max(|x|, |y|). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall k = \overline{0, n} = \begin{cases} |x|^k & \leq [\max(|x|, |y|)]^k \\ |y|^{n-k} & \leq [\max(|x|, |y|)]^{n-k}. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq k \leq n : |x|^k . |y|^{n-k} &\leq [\max(|x|, |y|)]^k . [\max(|x|, |y|)]^{n-k} \\ &\leq [\max(|x|, |y|)]^n. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{K} : |(x+y)^n| &\leq \sum_{k=0}^{n} [\max(|x|, |y|)]^n \\ &\leq (n+1).[\max(|x|, |y|)]^n \\ \Rightarrow |(x+y)| &\leq (n+1)^{\frac{1}{n}}.[\max(|x|, |y|)], \forall n \geq 1 \\ pour \quad n \to \infty, |(x+y)| &\leq \max(|x|, |y|). \end{aligned}$$

Alors $|.|$ est une valeur absolue ultramétrique . $\square$

Proposition 1.9. *[9] Soient a et b deux éléments d'un corps ultramétrique* $(\mathbb{K}, |.|)$*, on a*

$$|a-b| < |b| \Rightarrow |a| = |b|.$$

Démonstration.

soient $a, b \in \mathbb{K}$, on a $|a - b| < |b|$:

$|a| = |a - b + b| \leq \max\{|a - b|, |b|\} = |b|$

$|b| = |a - a + b| \leq \max\{|a - b|, |a|\}$.

Si $\max\{|a-b|, |a|\} = |a|$ on a le résultat. L'autre variante contredit l'hypothèse.

Conséquence (Interprétation Géométrique) :

Dans un espace ultramétrique tous les triangles sont isocèles

$$|x - y| \neq |y - z| \Rightarrow |x - z| = \max\{|x - y|, |y - z|\}, \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Proposition 1.10. *[21] [16] Dans un espace ultramétrique on a*

a) Le cercle est un ensemble ouvert.

b) Un disque $D(a, r)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.

c) Tout point b de $D(a, r)$ est un centre de $D(a, r)$ (Tout point d'un disque est un centre de ce disque).

d) Soient $D(a, r)$ et $D(b, r)$ deux disques de $\mathbb{K}$, alors ils sont disjoints ou l'un est inclus dans l'autre.

Démonstration.

a) Soit $a \in \mathbb{K}$ et $r \in]0, +\infty[$. Pour montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert, on prend $x \in C(a, r)$, $\rho < r$, alors par la proposition 1.8 on a

$$y \in D(x, \rho) \Rightarrow |x - y| < \rho < r = |x - a|$$

$$|y - a| = |x - a| = r,$$

donc $y \in D(a, r)$. Ce qui montrer que $C(a, r)$ est un ensemble ouvert.

b)-1- Tout disque ouvert $D^{-}(a, r)$ est ouvert dans un espace métrique. D'autre part pour démontrer que $D^{-}(a, r)$ est fermé dans $\mathbb{K}$, on montre que

$$C_{\mathbb{K}}^{D^{-}(a,r)} = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \geq r\}$$

est un ensemble ouvert.

On a $C_{\mathbb{K}}^{D^{-}(a,r)} = C(a, r) \cup M$, où $M = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| > r\}$.

L'ensemble M est ouvert puisque $M = C_{\mathbb{K}}^{D^+(a,r)}$ et $C(a,r)$ est ouvert, d'après a). Alors l'union de deux ensembles ouverts est ouverte.

-2- Tout disque fermé $D^+(a,r)$ est un ensemble fermé dans tout espace métrique. D'autre part, on a

$$D^+(a,r) = D^-(a,r) \cup C(a,r)$$

et l'union de deux ensembles ouverts est ouverte, alors $D^+(a,r)$ est ouvert.

c) Soit $x \in D^-(a,r)$, on montre que $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

Pour tout $y \in D^-(a,r) \Rightarrow |y-a| < r$, mais

$$|y-x| = |y-a+a-x| \leq \max\{|y-a|, |a-x|\} < r$$

d'où $y \in D^-(x,r)$, donc $D^-(a,r) \subset D^-(x,r)$.

De la même façon, on montre que $D^-(x,r) = D^-(a,r)$.

Donc $D^-(a,r) = D^-(x,r)$.

De la même façon, on montre que $D^+(a,r) = D^+(x,r), \forall x \in D^+(a,r)$.

d) Soient $D(a,r)$ et $D(b,\rho)$ deux disques de $\mathbb{K}$. on montre que

$$D(a,r) \cap D(b,\rho) \neq \emptyset \Longrightarrow D(a,r) \subset D(b,\rho) \ \ ou \ \ D(b,\rho) \subset D(a,r).$$

Soit $r < \rho$ et pour $x \in D(a,r) \cap D(b,\rho)$ par c). On a $D(a,r) = D(x,r)$ et $D(b,\rho) = D(x,\rho)$ mais $D(x,r) \subset D(x,\rho)$, d'où $D(a,r) \subset D(b,\rho)$.

Lorsque on suppose que $\rho < r$, on trouve que $D(b,\rho) \subset D(a,r)$. □

1.2.2 Nombres p-adiques

Proposition 1.11. $(\mathbb{Q}, |.|_p)$ *est un corps ultramétrique qui n'est pas complet.*

Démonstration.

Soit $(x_n)_n$ une suite tel que $x_n = x_{n-1} + a_n 5^n$ et $x_0 = a_0 = 2$. On détermine $a_n \in \{1,,2,3,4\}$, et par congruence $x_n^2 + 1 \equiv 0[5]$.

$(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{5^n} \longrightarrow 0.$$

Cependant, elle ne peut converger vers $x \in \mathbb{Q}$, puisque si elle avait une limite $x \in \mathbb{Q}$, on aurait $x^2 + 1 = 0$. $\square$

Définition 1.12. Pour tout p premier, le corps des nombres p-adiques $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est défini comme la complétion de l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d_p)$.

Proposition 1.13. $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ *est un corps ultramétrique complet, donc c'est un espace de Banach p-adique.*

Démonstration.

1) $\mathbb{Q}_p$ est un corps ?

Il est claire que $(\mathbb{Q}_p, +, .)$ est un anneau commutatif. Il nous reste à démontrer que tout $x \in \mathbb{Q}_p$ non nul admet un inverse dans $\mathbb{Q}_p$.

Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}_p$ une suite de limite x. Alors $|x_n|_p$ converge vers $|x|_p$ qui est non nul, donc $|x_n|_p$ est aussi non nul pour n assez grand, et donc la suite $v_p(x_n)$ est une suite convergente dans $\mathbb{R}$. Comme il s'agit d'une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$, elle est constante à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.

On définit une suite (y_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ par

$$y_n = \begin{cases} 0, n < N \\ \dfrac{1}{x_n}, n \geq N. \end{cases}$$

Pour tout couple (n, m) avec $n, m \geq N$, on a

$$|y_n - y_m|_p = \frac{|x_n - x_m|_p}{|x_n|_p^2}$$

de sorte que (y_n) soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, donc elle converge vers $y \in \mathbb{Q}_p$. Comme $x_n.y_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $x.y = 1$.

2) Soit $(x_n) = ([(x_{1n})], [(x_{2n})], ...)$ une suite de classes d'équivalences des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et $(x_{1n}), (x_{2n}), ...$ des représentants des suites de Cauchy.

Supposons que (x_n) est une suite de Cauchy pour la valeur absolue p-adique $|.|_p$, comme chaque suite $(x_{1n}), (x_{2n}), ...$ est de Cauchy, alors pour chaque (x_{in}) on peut prendre N_i tel que

$$|x_{im} - x_{in}|_p < p^{-i}, \forall m, n \geq N_i.$$

Soit $(y_n) = ((x_{1N_1}), (x_{2N_2}), ...)$. Alors $(y_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (et comme $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$), alors $(|y_n|_p)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc supposons que $y = \lim(|y_n|_p) \in \mathbb{Q}_p$.

Soit $(y'_n) = ([(x_{1N_1})], [(x_{2N_2})], ...)$ une suite des classes d'équivalences des suites constantes x_{jN_j}. Alors

$$\lim_n (y'_n) = \lim_n |y_n|_p = y \in \mathbb{Q}_p$$

et

$$|x_i - y'_i| < p^{-i} \longrightarrow 0$$

donc

$$\lim_n (x_n) = y \in \mathbb{Q}_p$$

alors toutes les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, admet une limite dans $\mathbb{Q}_p$, de plus $|.|_p$ est une norme ultramétrique sur $\mathbb{Q}_p$. Alors $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est un corps complet ultramétrique. □

Définition 1.14. ***(décomposition canonique de Hensel)***

Soit p un nombre premier. Tout élément non nul x de $\mathbb{Q}_p$ (et en particulier tout élément de $\mathbb{Q}$) s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n \geq k} a_n p^n,$$

où a_n sont des nombres entiers compris entre 0 et $p-1$. Cette écriture est la décomposition canonique de x comme nombre p-adique.

Cette série est convergente. On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}_p$ tels que $k \geq 0$ et on l'appelle ensemble des entiers p-adiques.

Théorème 1.15. *[21] [16] L'ensemble des entiers p-adiques*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1\},$$

$\mathbb{Z}_p$ représente le disque unité de $\mathbb{Q}_p$ de rayon 1 et de centre 0.

Théorème 1.16. *[21] L'ensemble des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est défini par l'ensemble des sériés formelles avec des puissances de p*

$$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n\geq k} a_n p^n, k \in \mathbb{Z}, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n < p\}.$$

Proposition 1.17. ***(Corps archimédien)*** *Une valeur absolue $|.|$ sur un corps $\mathbb{K}$ est dite archimédienne si*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists n \in \mathbb{N} : |nx| > |y|.$$

Autrement dit,

$$\sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty,$$

i,e $\mathbb{Z}$ est non borné, et le corps muni de cette valeur absolue est un corps archimédien .

1.2.3 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Proposition 1.18. *Si $\mathbb{K}$ est complet et séparable alors la complétion de sa clôture algébrique n'est pas sphériquement complet.*

Démonstration. voir[21]

Définition 1.19. On dit qu'un espace ultramétrique $\mathbb{K}$ est sphériquement complet si pour toute suite de disques emboités, l'intersection est non vide.

Définition 1.20. On dit qu'un espace ultramétrique $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[X]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$.
Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.21. *[23]Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos pour tout p-premier.*

Démonstration.

On considère le polynôme $P(x) = x^2 - p \in \mathbb{Q}_p[x]$. Supposons que $P(x)$ admet des racines dans $\mathbb{Q}_p$, donc

$$P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = p,$$

alors

$$\begin{aligned} |x^2|_p &= |x|_p^2 \\ \textit{et } |x^2|_p &= |p|_p = p^{-1} \\ &\Rightarrow |x|_p^2 = p^{-1} \\ &\Rightarrow |x|_p = p^{\frac{-1}{2}} \\ &\Rightarrow v_p(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

contradiction, car $v_p(a) \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Q}_p$. Donc $P(x)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}_p$. Ce qui nous prouve que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos. $\square$

Remarque

Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos. Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note en général $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et qui n'est pas complète. Nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet et algébriquement clos noté $\mathbb{C}_p$.

On peut montrer que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède donc une valeur absolue ultramétrique, que l'on note toujours $|.|_p$.

Définition 1.22. Le corps des nombres p-adiques complexes noté $\mathbb{C}_p$ est définie comme le complété de corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ par rapport à la norme p-adique $|.|_p$. La complétion se fait de la même façon lorsqu'on a construit $\mathbb{Q}_p$ en complétant $\mathbb{Q}$.

On prolonge la norme p-adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ à $\mathbb{C}_p$, en posant pour tout $x \in \mathbb{C}_p$:

$$|x|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

où $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui est dans la classe d'équivalence de x.

1.3 Propriétés Analytiques des nombres p-adiques

Théorème 1.23. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{Q}_p$. Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

Remarque

Soit la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k, a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ converge si seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. La série converge absolument dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\sum\limits_{k\geq 0} |a_k|_p$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.24. *[21] Soit la série* $\sum\limits_{k\geq 1} |a_k|_p, a_k \in \mathbb{Q}_p$, *on a*

$$\sum_{k\geq 1} |a_k|_p \textit{ converge dans } \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k \textit{ converge dans} \mathbb{Q}_p.$$

Proposition 1.25. *[21] Soit* $(a_n)_n$ *est une suite dans* $\mathbb{Q}_p$, *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *dans* $\mathbb{Q}_p$, *on a*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p = 0. \\ \textit{ou bien} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n|_p = |a|_p(\textit{ la suite } (|a_n|_p)_n \textit{ est stationnaire à partir d'un rang } n_0). \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{Q}_p$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Donc $(a_n)_n$ est une suite convergente dans $\mathbb{Q}_p$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n|_p < \varepsilon,$$

d'autre part, on a

$$||a_m|_p - |a_n|_p| \leq |a_m - a_n| < \varepsilon,$$

donc $|(a_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, ce qui donne $|(a_n|_p)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et soit l sa limite.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = l = |a|_p,$$

si

$$|a|_p \neq 0 \Rightarrow |a|_p > 0,$$

alors

$$\forall \varepsilon = \frac{l}{2} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |a_n|_p > \frac{l}{2},$$

en effet, on a

$$||a_n|_p - l| < \frac{l}{2} \Longrightarrow \frac{l}{2} < |a_n|_p < \frac{l}{2} + l.$$

De même, comme $(a_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\forall \varepsilon = \frac{l}{2} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N_2 \Rightarrow |a_m - a_n|_p < \frac{l}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_3 = \max(N_1, N_2) \Longrightarrow |a_m| &= |a_m - a_n + a_n|_p \\ &= \max(|a_m - a_n|_p, |a_n|_p) \\ &= |a_n|_p, \forall n \geq N_3, \end{aligned}$$

pour $m \longrightarrow \infty$, alors

$$|a|_p = |a_n|_p.$$

Notations Topologiques

Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et $R > 0$, Nous posons

$D^+(a, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p \leq R\}$: Le disque fermé de centre a et rayon R.

$D^-(a, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p < R\}$: Le disque ouvert de centre a et rayon R.

$D(0, R)$: L'un ou l'autre de ces deux disques.

$C(0, R) = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x - a|_p = R\}$: Le cercle dans $\mathbb{Q}_p$ de centre a et rayon R.

Proposition 1.26. *Le corps $\mathbb{Q}_p$ possède les propriétés suivantes*

i) $\mathbb{Q}_p$ complet et séparable.

ii) $\mathbb{Q}_p$ localement compact.

iii) $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos.

iv) $\mathbb{Q}_p$ n'est pas sphériquement complet.

Proposition 1.27. *Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes*

i) $\mathbb{C}_p$ algébriquement clos .

ii) $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact et n'est pas sphériquement complet .

iii) l'ensemble des valeurs p-adiques de $\mathbb{C}_p$ est égale à $p^q, q \in \mathbb{Q}$.

iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \overline{\mathbb{Q}_p} \subset \mathbb{C}_p$.

1.4 fonctions Analytiques et fonctions méromorphes sur un corps ultramétrique

Définition 1.28. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est entière si elle est de la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, a_n \in \mathbb{K}$$

où x et a sont des nombres de $\mathbb{K}$.

Définition 1.29. Dans tons les cas, on note $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Formule d'Hadamard), le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, si $R < +\infty$. Sinon on pose $R = +\infty$.

Définition 1.30. On dira qu'une fonction $f : D^+(0,R) \to \mathbb{K}$ est analytique sur $D^+(0,R)$ pour tout $r, 0 < r < R$, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, telle que $|a_n|r^n \to 0$, et pour tout $x \in D^+(0,R)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

Définition 1.31. Pour qu'une fonction $f : D^-(0,R) \to \mathbb{K}$ est analytique sur $D^-(0,R)$ il faut et il suffit qu'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ satisfaisant $|a_n|r^n \longrightarrow 0$ pour r, $0 < r < R$, et telle que pour $x \in D^-(0,R)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

Théorème 1.32. *[21] Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. Alors f est bornée dans $D^-(0,R)$ si et seulement si la suit $(|a_n|R^n)_{n\geq 0}$ et aussi bornée, c'est-a-dire si $\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|R^n < +\infty$. De plus, si f est bornée, alors $||f||_{D^-(0,R)} = \sup\limits_{n\geq 0} |a_n|R^n$.*

Théorème 1.33. *[23] (Dérivées des fonctions analytiques)*

1) L'ensemble des fonctions analytiques sur $D^+(0,R)$(resp. $D^-(0,R)$) noté $A(D^+(0,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2) $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$(resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) est continue et dérivable sur $D(0,R)$

alors sa dérivé f' appartient aussi à $\mathcal{A}(D^+(0,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) tel que $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Plus généralement, si $R > 0$, la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de f, et on a $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n\geq k} C_n^k a_n x^{n-k}$.

3) Le rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

Démonstration.

1) et *3)* il est facile de vérifier que $\mathcal{A}(D^+(0,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) pour tout $0 < r < R$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$, et la rayon de convergence de f' est égal au rayon de convergence de f.

2) *i)* Soit x un élément fixé de $D^+(0,R)$, et soit $h \in \mathbb{C}_p$ tel que $x+h \in D^+(0,R)$ on a

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n[(x+h)^n - x^n] \\ &= h\sum_{n\geq 0} a_n(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... \\ &+ (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \end{aligned}$$

la somme de droite est majorée en valeur absolue par $\max\limits_{n\geq 1} |a_n|R^{n-1}$ qui fini car $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|R^{n-1} = 0$, on a donc

$|f(x+h)-f(x)| \leq |h| \max\limits_{n\geq 1} |a_n|R^{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x+h)-f(x)|_p = 0$.

D'où la continuité de f sur $D^+(0,R)$.

Maintenant, posons $g(x) = \sum\limits_{n>0} na_nx^{n-1}$, $g \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$ car pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq |na_n|r^{n-1} \leq |na_n|R^{n-1} \longrightarrow 0$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$ mais

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... \\ &+ (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \\ &= h(\textit{somme majorée en valeur absolue par } \max_{n\geq 2} |a_n|R^{n-2}) \end{aligned}$$

donc $f'(x) = g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} na_nx^{n-1}$ et $f \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$.

ii) Soit $x \in D^-(0,R)$ et $R > 0$ tel que $x \in D^+(0,R)$, f étant analytique sur $D^+(0,R)$, elle est d'après *i)* continue et dérivable sur $D^+(0,R)$ et donc continue et dérivable en x et on a $f'(x) = g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} na_nx^{n-1}$. Donc f est continue et dérivable sur $D^-(0,R)$ et sa dérivée f' est un élément de $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ car $f' \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$ pour $R > 0$.

On montre par récurrence l'égalité $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n\geq k} C_n^k a_n x^{n-k}$. □

Proposition 1.34. *Les fonction analytique sur un disque fermé de $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{C}_p)$ forment un anneau commutatif, intègre, stable par dérivation (ce qui n'est pas la cas dans $\mathbb{C}$).*

Définition 1.35. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est méromorphes si on peut écrire $f = \dfrac{h}{g}$ tel que $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs.

Notations

$\mathcal{A}(\mathbb{K})$ est l'anneau des fonctions entières dans $\mathbb{K}$ et on note $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ l'ensemble des fonctions analytiques dans $D^-(0,R)$.

De même, on note $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp.$\mathcal{M}(D^-(0,R))$) le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D^-(0,R)$), c'est-à-dire le corps de fraction de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D^-(0,R))$).

Chapitre 2

La théorie de distribution des valeurs sur un corps ultramétrique

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques définitions sur les zéros des fonctions analytiques, les propriétés de *polygone de valuation* et *la théorie de Nevanlinna ultramétrique.*

2.1 Les zéros des fonctions analytiques

Définition 2.1. Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ une fonction non nulle. Pour chaque $x \in D^-(0,R)$ on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. De plus, si $f(\alpha) = 0$, α est un zéro de f et il existe $\beta \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $f(x) = (x-\alpha)^\beta g(x)$, $\forall x \in D^-(0,R)$, où $g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ et $g(\alpha) \neq 0$.

Proposition 2.2. *[23] Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.*

Définition 2.3. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ $(\alpha \in D^-(a,R))$. Soit $r \in [0,+\infty[$ tel que $D(\alpha,r) \subset \mathbb{C}_p$ $\Big($resp. soit $r \in]0,R[$ tel que $D^+(\alpha,r) \subset D^-(0,R)\Big)$ et $f(x) = \sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n(x-\alpha)^n, \forall x \in D(\alpha,r)$ et $b_q \neq 0,\ q > 0$. On dit dans ce cas, que α est un zéro de f d'ordre de multiplicité q

Si f admet α comme zéro d'ordre q, on posera $w_\alpha(f) = q$. Si $f(\alpha) \neq 0$, on posera simplement $w_\alpha(f) = 0$.

2.2 Polygone de Valuation

Proposition 2.4. *[8] Soient* $0 < r < R$ *et* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$ *telles que* $|a_n| r^n \longrightarrow 0$. *L'application*

$$f \longmapsto |f|(r) = \sup_{n\geq 0} |a_n|_p r^n \quad \textit{\textbf{(module maximun)}}$$

est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(0,R))$ *et on a*

$$\sup_{x\in D^+(0,r)} |f(x)|_p = |f|(r).$$

Proposition 2.5. *[16] On suppose que* $f \in \mathcal{A}(D^+(0,R))$, $0 < r < R$ *non nulle, alors*

1) La fonction $|f|(r)$ *est croissante.*

2) Si la fonction f *a un zéro* b *dans le disque* $D^+(0,R)$, *la fonction* $|f|(r)$ *est strictement croissante si* $r > |b|$.

3) La fonction $|f|(r)$ *est continue.*

Remarque

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, on pose $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$ quand $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$.

Théorème 2.6. *[8] [19] Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *pour tout* $r \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}.$$

Démonstration

Si l'on écrit $f = \dfrac{g}{h}$ avec $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ sans zéros communs, pour $r \in]0, +\infty[$, on a

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'h - gh'}{gh}$$

$$\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) = \Big|\frac{g'h - gh'}{gh}\Big|(r) = \frac{|g'h - gh'|(r)}{|gh|(r)}.$$

Et comme $\quad |g'h - gh'|(r) \leq \max\left\{|g'h|(r), |gh'|(r)\right\}$,

ce qui entraine que

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\left\{\frac{|g'|(r)|h|(r)}{|g|(r)|h|(r)}, \frac{|g|(r)|h'|(r)}{|g|(r)|h|(r)}\right\} \leq \max\left\{\frac{|g'|(r)}{|g|(r)}, \frac{|h'|(r)}{|h|(r)}\right\}.$$

On sait que $\dfrac{|g'|(r)}{|g|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \dfrac{1}{r}$. D'où l'inégalité. □

Théorème 2.7. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, pour tout $r \in]0, +\infty[$, on a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Démonstration.

Il suffit de démontrer que pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$

$$\log\left|\frac{f'}{f}\right|(r) \leq -\log r, \quad \forall r \in]0, +\infty[.$$

En effet.

Si $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$, d'où

$$\begin{aligned} |f'|(r) = \max_{n\geq 0}|n||a_n|r^{n-1} \quad &= \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|n||a_n|r^n, \quad \forall r \in]0, +\infty[\\ &\leq \frac{1}{r}\max_{n\geq 0}|a_n|r^n = \frac{1}{r}|f|(r), \quad \forall r \in]0, +\infty[\end{aligned}$$

d'où

$$\log\left|\frac{f'}{f}\right|(r) \leq -\log r, \quad \forall r \in]0, +\infty[.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Théorème 2.8. *[8] Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$, et N le plus petit indice tel que $|f|(r) = |a_N|r^N$ et $|a_j|r^j < |a_N|r^N$ pour $j > N$ on a*

1) Si $N \geq 1$, alors la fonction f a exactement N zéros dans $D^+(0, R)$ compte les multiplicités.

2) La fonction f n'a aucun zéro dans $D^+(0, R)$ si et seulement si $N = 0$ et sa valeur absolue est constante dans ce disque.

Soit n le plus petit indice tel que $|f|(r) = |a_n|r^n$ et $|a_j|r^j < |a_n|r^n$ pour $j < n$ alors

a) *n le nombre des zéros de f dans $D^-(O, R)$.*

b) *$N - n$ le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0, R)$.*

Définition 2.9. Soit f une fonction analytique dans $D^+(0, r)$, $0 < r < R$ tel que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n, a_0 \neq 0$. Le graph du fonction

$$\begin{aligned} \varphi_f : I =]-\infty, \log R[\ &\to \mathbb{R} \\ \log r \ &\to \varphi(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\} \end{aligned}$$

est appelée *polygone de valuation de f*.

Proposition 2.10. *La fonction φ_f vérifie les propriétés suivantes*

1) C'est une fonction croissante continue affine par morceaux, elle est convexe.

2) Si f a un zéro b dans $D^-(0, R)$, φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log|b|$.

3) φ_f admet des dérivées à droite $\dfrac{d^+\varphi_f}{d(\log r)}$ et a gauche $\dfrac{d^-\varphi_f}{d(\log r)}$ en tout point $\log r \in I$ et on a

$\dfrac{d^+\varphi_f}{d(\log r)} = N$ *plus grande entier t,q :*$\varphi(\log r) = \log|a_N| + N\log r$
où N est le nombre des zéros de f dans le disque fermé $D^+(0, R)$.
$\dfrac{d^-\varphi_f}{d(\log r)} = n$ *plus petit entier t,q :*$\varphi(\log r) = \log|a_n| + n\log r$
où n est le nombre des zéros de f dans le disque ouvert $D^-(0, R)$.

Donc $N - n$ est le nombre des zéros de f sur le cercle $C(0, R)$.

Exemple

1) Soit $P(x) = (p^4 + 2p^6) + (p^2 + p^3)x + (p + 2p^3)x^2 + px^3$.

Calcul : $|P|(r)$

$\star$ pour $r = 1$ on a

$$\begin{aligned} |P|(1) &= \max\{|p^4 + 2p^6|, |p^2 + p^3| \times 1, |p + 2p^3| \times 1^2, |p| \times 1^3\} \\ &= \max\{\frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p}, \frac{1}{p}\} \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Donc $N = 3$ et $n = 2$, d'où $N - n = 1$. Donc le nombre des zéros de P sur le cercle $C(0, 1)$ est égal 1, et le nombre des zéros dans $D^+(0, 1)$ est égal 3.

$\star$ pour $r = \dfrac{1}{p}$ on a

$$\begin{aligned}|P|(\frac{1}{p}) &= \max\{|p^4+2p^6|, |p^2+p^3|\times\frac{1}{p}, |p+2p^3|\times(\frac{1}{p})^2, |p|\times(\frac{1}{p})^3\}\\ &= \max\{\frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}\}\\ &= \frac{1}{p^3}.\end{aligned}$$

Donc $N = 2$ et $n = 1$, d'où $N - n = 1$. Donc le nombre des zéros de P sur le cercle $C(0, 1)$ est égal 1, et le nombre des zéros dans $D^+(0, 1)$ est égal 2.

$\star$ pour $r = \frac{1}{p^2}$ on a

$$\begin{aligned}|P|(\frac{1}{p^2}) &= \max\{|p^4+2p^6|, |p^2+p^3|\times\frac{1}{p^2}, |p+2p^3|\times(\frac{1}{p^2})^2, |p|\times(\frac{1}{p^2})^3\}\\ &= \max\{\frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^5}, \frac{1}{p^9}\}\\ &= \frac{1}{p^4}.\end{aligned}$$

Donc $N = 1$ et $n = 0$, d'où $N - n = 1$, donc le nombre des zéros de P sur le cercle $C(0, 1)$ est égal 1, et le nombre des zéros dans $D^+(0, 1)$ est égal 1.

2.3 Formule de Jensen p-adique

Pour $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_P)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, pour $r \in]0, +\infty[$ et $\alpha \in D^-(0, R)$, on note $z(r, f)$ - le nombre de zéros de f sur le cercle $|x| = r$ et $p(r, f)$ - le nombre de pôles de f sur le cercle $|x| = r$.

Théorème 2.11. *[5] [3] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, telle que $f(0) \neq 0, \infty$ et pour $r \in]0, +\infty[$, on a*

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{0<\rho=|\alpha|\leq r} \Big\{z(\rho, f) - z(\rho, \frac{1}{f})\Big\} \log\frac{r}{|\alpha|}. \tag{2.1}$$

Démonstration

La démonstration de cette formule est facile, elle est conséquence des propriétés de *Polygone de valuation.*

1) Le point de départ ici est le fait que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$, telle que $f(0) \neq 0$, *le Polygone de*

valuation de f donne pour $r \in]0, +\infty[$

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha|\leq r} w_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}$$

où $w_\alpha(f)$ est l'ordre de multiplicité de α, en tant que zéro de f. Pour montrer l'égalité (2.1),

Soient$0 < r_1 < r_2 < ... < r_k < ... < r$ et$0 = n_0 < n_1 < n_2 < ... < n_k < ... < n$.

On pose $\log|f|(r) = \max\limits_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\}$, telles que

$$\begin{array}{rrcl}
0 < r_1 : & \log|f|(r_1) & = & \log|f(0)| = \log|a_0| \\
r_1 < r_2 : & \log|f|(r_2) & = & \log|a_{n_1}| + n_1 \log r \\
 & & \vdots & \\
 & & \vdots & \\
r_{k-1} < r_k : & \log|f|(r_k) & = & \log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1}\log r \\
r_k < r : & \log|f|(r) & = & \log|a_{n_k}| + n_k \log r.
\end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
\log|f|(r) & = & \Big[\log|f|(r) - \log|f|(r_k)\Big] + \Big[\log|f|(r_k) - \log|f|(r_{k-1})\Big] + ... + \Big[\log|f|(r_2) \\
& - & \log|f|(r_1)\Big] + \log|f|(r_1) \\
& = & \Big[\log|a_{n_k}| + n_k\log r - \log|a_{n_k}| - n_k \log r_k\Big] + \Big[\log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1}\log r_k \\
& - & \log|a_{n_{k-1}}| - n_{k-1}\log r_{k-1}\Big] + ... + \Big[\log|a_{n_1}| + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}| \\
& - & n_1 \log r_1\Big] + \log|f(0)| \\
& = & n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + ... + n_1 \log\frac{r_2}{r_1} + \log|f(0)| \\
& = & n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}(\log\frac{r}{r_{k-1}} - \log\frac{r}{r_k}) + ... + n_1(\log\frac{r}{r_1} - \log\frac{r}{r_2}) + \log|f(0)| \\
& = & (n_k - n_{k-1})\log\frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}} + ... + (n_2 - n_1)\log\frac{r}{r_2} \\
& + & (n_1 - n_0)\log\frac{r}{r_1} + \log|f(0)| \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i} + + \log|f(0)|.
\end{array}$$

Où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros de f sur le cercle $|x| = r_i$,

donc $\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum\limits_{0<|\alpha|\leq r} w_\alpha(f)\log\dfrac{r}{|\alpha|}$.

2) Le cas général

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $f(0) \neq 0, \infty$. Soit α(resp. β)un zéro (resp. un pôle) de f et on pose $f = \dfrac{h}{g}$

telle que $h, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log\left|\frac{h}{g}\right|(r) \\
&= \log|h|(r) - \log|g|(r) \\
&= \log|h(0)| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} w_\alpha(h)\log\frac{r}{|\alpha|} - \log|g(0)| + \sum_{0<|\beta|\leq r} w_\beta(f)\log\frac{r}{|\beta|} \\
&= \log\left|\frac{h(0)}{g(0)}\right|(r) + \sum_{0<|\alpha|\leq r} w_\alpha(h)\log\frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0<|\beta|\leq r} w_\beta(f)\log\frac{r}{|\beta|} \\
&= \log|f(0)| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} w_\alpha(f)\log\frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0<|\beta|\leq r} w_\beta(f)\log\frac{r}{|\beta|}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Premier théorème Fondamental de Nevanlinna ultramétrique

Pour toute $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ non nulle et pour $r \in]0, +\infty[$, on a

$$Z(r, f) = \sum_{0<\rho=|\alpha|\leq r} z(r, f)\ \log\frac{r}{|\alpha|}.$$

Est la *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0, r)$ avec *ordre de multiplicité.*

$$\overline{Z}(r, f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \log\frac{r}{|\alpha|}.$$

Est la *fonction de comptage des zéros* de f dans $D^+(0, r)$ *sans prendre en compte les multiplicités.*

$$N(r, f) = Z(r, \frac{1}{f}).$$

Est la *fonction de comptage des pôles* de f dans $D^+(0, r)$ avec *ordre de multiplicité.*

Par les notations précédentes, on définit une autre version ultramétrique plus simple de la *formule de Jensen* qui déjà bien connue dans le théorème 2.11.

Proposition 2.12. *[3] **(Une autre version du Formule de Jensen)***
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log|f|(r) = Z(r, f) - N(r, f) + \log|f(0)|, \quad \forall r \in]0, +\infty[\tag{2.2}$$

Remarque

Pour $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $f(0) \neq 0$, on a

$$\log |f|(r) = Z(r, f) + \log |f(0)|, \quad \forall r \in]0, +\infty[.$$

2.4.1 Fonction Caractéristique de Nevanlinna

Puisque la fonction $r \longrightarrow \log |f|(r)$ quand f est méromorphe n'est plus positive et peut même tendre vers $-\infty$ quand $r \to +\infty$.
Donc le problème est de construire une fonction $r \longrightarrow T(r, f)$ (*Fonction caractéristique de Nevanlinna*) qui soit positive et prolonge $\log |f|(r)$, quand f est analytique.

Pour $x > 0$, on pose $\log^+(x) = \max\{0, \log x\}$, la fonction

$$m(r, f) = \log^+ |f|(r) = \max\big\{0, \log |f|(r)\big\}$$

appelle La *fonction de compensation.* On a aussi

$$\log |f|(r) = \log^+ |f|(r) - \log^+ \left|\frac{1}{f}\right|(r) = m(r, f) - m\Big(r, \frac{1}{f}\Big).$$

Enfin, on définit la *fonction de Nevanlinna* (appelée aussi la *fonction caractéristique*) de f, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Remarque

Remarquons que les fonctions $m(r, f), N(r, f)$ et $T(r, f)$ ne changent pas à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions précédentes.

Tout au long de ce travail, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $m(r, f), N(r, f)$ et $T(r, f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.

On va essayer de donner une forme plus simple que la formule de Jensen (2.1).

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= N\big(r,f\big) - Z\big(r,f\big) + \log|f|(r), \quad \forall r \in]0,+\infty[\\
&= N\big(r,f\big) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + m\big(r,f\big) - m\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[\\
&= T\big(r,f\big) - T\Big(r,\frac{1}{f}\Big), \ \forall r \in]0,+\infty[.
\end{aligned}$$

Donc la formule (2.1) devient

$$T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) = T\big(r,f\big) - \log|f(0)|, \ \forall r \in]0,+\infty[. \tag{2.3}$$

Avant de donner quelques propriétés liées à la *Théorie de Nevanlinna*, on introduit les notations suivantes.

Notations. Soit ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]0,+\infty[$ et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \leq \psi(r) + c\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \leq \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$.

Si $\lim\limits_{r\to+\infty} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.

Proposition 2.13. *[5] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ n'ayant ni zéros ni pôles en 0. Il est facile de vérifier que*

$$0 \leq Z(r,f) \leq T(r,f) \ \ et \ \ 0 \leq N(r,f) \leq T(r,f), \ \ \forall r \in]0,+\infty[.$$

Théorème 2.14. *[3] [7] Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ non identiquement nulles et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors*

1. $i)\, m(r, f+g) \leq \max\{m(r,f), m(r,g)\} + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[$

   $ii)\, m(r, f-a) = m(r,f) + O(1),\ \forall a \in \mathbb{C}_p,\ \forall r \in]0, +\infty[$

   $iii)\, m(r, fg) \leq m(r,f) + m(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[$

   $iv)\, m(r, af) = m(r,f) + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[.$

2. $i)\, N(r, f+g) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1)\ \ \forall r \in]0, +\infty[$

   $ii)\, N(r, fg) \leq N(r,f) + N(r,g) + O(1)\ \ \forall r \in]0, +\infty[.$

3. $i)\, T(r, fg) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[$

   $ii)\, T(r, f+g) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[$

De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$

$T(r, f+g) \leq \max\Big\{T(r,f), T(r,g)\Big\} + O(1),\ \forall r \in]0, +\infty[.$

Corollaire 2.15. *[8] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On a*

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1),\ \ \forall r \in]0, +\infty[$$

et si $a \in \mathbb{C}_p,\ a \neq 0$ et $f(0) \neq a$. On a

$$T(r, af) = T(r,f) + O(1),\ \ \forall r \in]0, +\infty[$$

$$\text{et}\ \ T(r, f-a) = T(r,f) + O(1),\ \ \forall r \in]0, +\infty[.$$

Corollaire 2.16. *[1] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}_p^*$ tels que $ad - bc \neq 0$. Soit $\tau(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, on suppose que $\tau(0) \neq 0, \infty$. Alors*

$$T(r, \tau \circ f) = T(r,f) + O(1),\ \ \forall r \in]0, +\infty[.$$

Question. Quelle est la taille de l'ensemble des points $x \in \mathbb{C}_p$ où la fonction f prend la valeur $a \in \mathbb{C}_p$ ou des valeurs proches de a ?

On répond à cette question a travers le théorème suivant.

Théorème 2.17. *[7]* ***(Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna)***

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ tels que $f(0) \neq 0, \infty$. On a pour tout $a \in \mathbb{C}_p$ et $f(0) \neq a$, on a

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T\big(r, f\big) + O(1),\ \ \forall r \in]0, +\infty[. \tag{2.4}$$

Notation

Pour tout nombre fini $a \in \mathbb{C}_p,\ a \neq 0$ et $f(0) \neq a$.On note $m(r,a)$, $N(r,a)$ et $T(r,a)$ au lieu de $m\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$, $N\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ et$T\Big(r, \dfrac{1}{f-a}\Big)$ respectivement.
Suite à cette notation, la proposition 2.17 de Nevanlinna écrit sous forme plus simple

$$T(r,a) = T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[.$$

Proposition 2.18. *[7] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $f(0) \neq 0, \infty$. On a les équivalences suivantes*

i) f est une constante $\Leftrightarrow T(r,f) = o(log\, r), \quad r \to +\infty$.

ii) $f \in \mathbb{K}(x) \Leftrightarrow T(r,f) = O(log\, r), \quad r \to +\infty$.

iii) f est non constante $\Leftrightarrow \exists c \in R, \exists A > 0$ t.q

$$T(r,f) \geq log\, r + c, \quad \forall r > A.$$

Théorème 2.19. *[11] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $f(0) \neq 0, \infty$. Alors*

$$T(r,f) = \max\big\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\big\}, \quad \forall r \in]0,+\infty[.$$

Corollaire 2.20. *[8] [11] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ non nulle en 0. Alors*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[.$$

De plus, $\exists \rho \in]0,+\infty[$ tel que $a \in \mathbb{C}_p$ et $f(0) \neq a$, on a

$$Z(r,f) = Z(r,f-a), \quad \forall r \in]\rho,+\infty[.$$

Lemme 2.21. *[8] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, tels que $f(0) \neq 0, \infty$. Soit$\varepsilon > 0$. Il existe $h, l \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifiant*

$$Z(r,h) \leq Z(r,f) + \varepsilon \ \ et \ \ Z(r,l) \leq N(r,f) + \varepsilon, \quad \forall r \in]0,R[.$$

Corollaire 2.22. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $f(0) \neq 0, \infty$. Il exits $h, l \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ telles que $f = \dfrac{h}{l}$ vérifiant*

$$\max\big\{T(r,h), T(r,l)\big\} \leq T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[\ \ \big(resp.\ \forall r \in]0,R[\big).$$

2.4.2 Propriétés de la Théorie de Nevanlinna ultramétrique liées aux fonctions méromorphes et leurs dérivées

Théorème 2.23. *[2] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors*

i) $N(r, f^{(k)}) = N(r, f) + k\overline{N}(r, f) - \log r + O(1)$

ii) $Z(r, f^{(k)}) \leq Z(r, f) + k\overline{N}(r, f) + O(1)$

iii) $T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f) + k\overline{N}(r, f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r, f) - \log r + O(1)$.

Nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 2.24. *[7] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'ont pas de zéro commun. Posons $H_0 = h$ et $H_n = gH'_{n-1} - ng'H_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On a*

i) $f^{(n)} = \dfrac{H_n}{g^{n+1}}$

ii) Tout zéro d'ordre $m(m \geq 1)$ de g est un zéro d'ordre $n(m-1)$ de H_n et un pôle d'ordre $m+n$ de $f^{(n)}$.

la démonstration se fait par récurrence sur n .

Corollaire 2.25. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $f(0) \neq 0, \infty$. On a*

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = 0, \quad \forall r \in]1, +\infty[$$

$$m\Big(r, \frac{f}{f'}\Big) \geq \log r, \quad \forall r \in]0, +\infty[.$$

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. On a

$$m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = \log^+ \Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r)\Big\} = 0, \quad \forall r \in]0, +\infty[.$$

Par les résultats classiques pour les fonctions méromorphes, il est bien connu que pour chaque $r \in]0 + \infty[$

$$\log\Big|\frac{f'}{f}\Big|(r) \leq -\log r$$

d'où $\quad m\Big(r, \dfrac{f}{f'}\Big) = \log^+ \Big|\dfrac{f}{f'}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\dfrac{f'}{f}\Big|(r)\Big\} \geq \log r.$ $\square$

Démonstration du Théorème 2.23

$i)$ Pour obtenir la première inégalité il suffit voir que chaque pôle α de f d'ordre s est un pôle de $f^{(k)}$ d'ordre $s+k$.

$ii)$ Montrons maintenant la deuxième inégalité. Soit $r \in]0, +\infty[$. Par la formule (2.1), on

$$Z(r, f') - N(r, f') + \log|f'(0)| = \log|f'|(r) Z(r, f) - N(r, f) + \log|f(0)| = \log|f|(r).$$

Mais, d'après le théorème 2.7, on a $|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r)$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient

$$\log|f'|(r) \leq \log|f|(r) - \log r$$

par conséquent

$$\begin{aligned} Z(r, f') &= \log|f'|(r) + N(r, f') - \log|f'(0)| \\ &\leq \log|f|(r) + N(r, f') - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r, f) + N(r, f') - N(r, f) + \log|f(0)| - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r, f) + N(r, f') - N(r, f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais, d'après la première inégalité $i)$, on a

$$N(r, f') - N(r, f) = \overline{N}(r, f) - \log r + O(1) Z(r, f') \leq Z(r, f) + \overline{N}(r, f) - \log r + O(1).$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence.Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq n$.Alors

$$Z(r, f^{(n+1)}) = Z(r, (f^{(n)})') \leq Z(r, f^{(n)}) + \overline{N}(r, f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

et donc

$$Z(r, f^{(n+1)}) \leq Z(r, f) + n\overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, f^{(n)}) - \log r + O(1)$$

puisque $\overline{N}(r, f^{(n)}) = \overline{N}(r, f)$, on a

$$Z(r, f^{(n+1)}) \leq Z(r, f) + (n+1)\overline{N}(r, f) - \log r + O(1).$$

Pour montrer la troisième inégalité, on a

$$\begin{aligned}
T(r,f^{(k)}) &= N(r,f^{(k)}) + m(r,f^{(k)})\\
&= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m(r,f^{(k)}) - \log r + O(1)\\
&= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\Big(r,\tfrac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\ldots\tfrac{f'}{f}f\Big) - \log r + O(1)\\
&\leq N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\Big(r,\tfrac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\Big) + \ldots + m\Big(r,\tfrac{f'}{f}\Big) + m(r,f) - \log r + O(1)\\
&= T(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1).
\end{aligned}$$

Puisque $\overline{N}(r,f) \leq N(r,f) \leq T(r,f) + O(1), \quad \forall r \in]0,+\infty[$, on a

$$T(r,f^{(k)}) \leq (k+1)T(r,f) - \log r + O(1) \leq (k+1)T(r,f) + O(1). \qquad \square$$

2.5 Deuxième théorème Fondamental de Nevanlinna ultramétrique

Théorème 2.26. *[7] **(Inégalité Fondamentale)***

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, f non constante. Soient $a_1,\ldots,a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{C}_p$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $|a_i - a_j| \geq \delta$ pour $1 \leq i \neq j \leq q$. On suppose que $f(0) \neq 0,\infty$ et $f(0) \neq a_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$. Alors

$$m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \leq 2T(r,f) - N_1(r) - \log r + S(r), \quad \forall r \in]0,+\infty[\qquad (2.5)$$

où $N_1(r)$ est une fonction positive et

$$N_1(r) = N(r,f) + N(r,\frac{1}{f'}) - \overline{N}(r,f)$$

$$S(r) = m(r,\frac{f'}{f}) + m\Big\{r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\Big\} + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1)$$

avec $\log^+\dfrac{1}{\delta} = \max\big\{0,\log\dfrac{1}{\delta}\big\}$.

Démonstration.

On considère $g = \sum\limits_{i=1}^{q}\dfrac{1}{f-a_i}$. Montrons que

$$m(r,g) \geq \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+\frac{1}{\delta}, \quad \forall r \in]0,+\infty[. \qquad (2.6)$$

Nous distinguons deux cas

1- Si $|f - a_j|(r) < \delta$, pour un certain j, alors on a pour $i \neq j$ et pour tout $r \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}\log|g|(r) &= \log\Big|\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &= \log\max_{i=1,q}\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) = \log\Big|\frac{1}{f-a_j}\Big|(r)\end{aligned}$$

et on a aussi que

$$\begin{aligned}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) &= \max\Big\{0, \log\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\Big\}\\ &= \begin{cases}\log\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) \leq \log\frac{1}{\delta}, & \text{si } \log\frac{1}{\delta} > 0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) \leq \log^+\frac{1}{\delta}$$

pour $i \neq j$, il suit que

$$\begin{aligned}\log^+|g|(r) &= \log^+\Big|\frac{1}{f-a_j}\Big|(r)\\ &= \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{q}\log^+\frac{1}{\delta}\\ &= \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - (q-1)\log^+\frac{1}{\delta}\\ &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - q\log^+\frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

alors $\quad m(r,g) \geq \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+\frac{1}{\delta}.$

2- Si $|f - a_i|(r) \geq \delta$ pour $i \in \{1...q\}$ et pour tout $r \in]0, +\infty[$. On a

$$\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) = \max\Big\{0, \log\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\Big\} \leq \max\Big\{0, \log\frac{1}{\delta}\Big\} = \log^+\frac{1}{\delta}$$

pour tout $1 \leq i \leq q$, on a

$$\begin{aligned}\log^+|g|(r) \geq 0 \Leftrightarrow \log^+|g|(r) &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r)\\ &\geq \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - \sum_{i=1}^{q}\log^+\tfrac{1}{\delta}\\ &= \sum_{i=1}^{q}\log^+\Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - q\log^+\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

D'où

$$m(r,g) = \log^+ |g|(r) \geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \Big|\frac{1}{f-a_i}\Big|(r) - q\log^+ \frac{1}{\delta} = \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+ \frac{1}{\delta}.$$

La relation (2.6) est donc démontrée.

D'autre part, on a pour tout $r \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} m(r,g) &= m\Big(r, \frac{1}{f}\,\frac{f}{f'}\,f'\,g\Big) \\ &\leq m\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + m\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + m(r,f'g) \\ &= T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + T\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + m(r,f'g) + O(1). \end{aligned}$$

La relation (2.6) nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,g) + q\log^+\frac{1}{\delta} \\ m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,f) + m(r,g) + q\log^+\frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,f) + T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + T\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) \\ &\quad + m(r,f'g) + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1) \\ &\leq 2T(r,f) - N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - N(r,f) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) + N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + \\ &\quad m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + m(r,f'g) + q\log^+\frac{1}{\delta} + O(1). \end{aligned}$$

Le résultat demande découle , alors du fait que

$$N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) = N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - N(r,f) + N(r,f') - N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big) + O(1) \tag{2.7}$$

On sait que

$$N(r,f') - N(r,f) = \overline{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

La formule (2.7) devient

$$N\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{f}{f'}\Big) = \overline{N}(r,f) + N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) - N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big) - \log r + O(1)$$

alors

$$\begin{aligned} m(r,f) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq 2T(r,f) + \Big\{N(r,f) + N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big) - \overline{N}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)\Big\} \\ &\quad + m\Big(r,\frac{f'}{f}\Big) + m\Big\{r, \sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\Big\} + q\log^+\frac{1}{\delta} - \log r + O(1). \end{aligned}$$

D'ou l'inégalité fondamentale . □

Maintenant, nous avons besoins d'estimer $S(r)$.

Corollaire 2.27. *[7] **(estimation de** $S(r)$**)** la quantité $S(r)$ du théorème vérifie*

$$S(r) = O(1), \quad \textit{quand } r \to +\infty.$$

Démonstration.

Pour tout $r \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} S(r) &= m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m\Big\{r, \sum_{i=1}^{q} \frac{f'}{f - a_i}\Big\} + q \log^+ \frac{1}{\delta} - \log r + O(1) \\ &= m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) + m\Big(r, \frac{F'}{F}\Big) + O(1) \end{aligned}$$

avec $F = \prod_{i=1}^{q}(f - a_i)$, et en utilisant le corollaire 2.25

$$m\Big(r, \frac{F'}{F}\Big) = m\Big(r, \frac{f'}{f}\Big) = 0, \quad \text{quand } r \to +\infty.$$

Alors $\quad S(r) = O(1), \quad$ quand $r \to +\infty$. □

Remarque

La formule (2.5) devient sous la forme

$$m(r, f) + \sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) \leq 2T(r, f) - N_1(r) - \log r + O(1), \quad \forall r \in]0, +\infty[\tag{2.8}$$

Théorème 2.28. *[7] **(Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna)***

Soient $a_1, ..., a_q$ $(q \geq 2)$, et $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0 et telle que f' et $f - a_i$ ne sont pas nulles en 0. Alors

$$(q-1)T(r, f) \leq \sum_{i=1}^{q} N(r, a_i) + \overline{N}(r, f) - N_0\Big(r, \frac{1}{f'}\Big) - \log r + O(1), \ \forall r \in]0, +\infty[\tag{2.9}$$

où $N_0\Big(r, \frac{1}{f'}\Big)$ est obtenu à partir de $N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big)$ en omettant les termes correspondant aux zéros de f qui sont des zéros de $f - a_i$ pour $1 \leq i \leq q$.

Démonstration.

En ajoutant $N(r,f)+\sum\limits_{i=1}^{q} N(r,a_i)$ aux deux membres de l'inégalité (2.8), on a pour tout $r\in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} N(r,f)+m(r,f)+\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+\sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \quad &\leq N(r,f)+\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+2T(r,f) \\ &-N_1(r)-\log r+O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(r,f)+\sum_{i=1}^{q} T(r,a_i) \quad &\leq \quad N(r,f)+\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+2T(r,f) \\ &\quad -N_1(r)-\log r+O(1) \\ T(r,f)+\sum_{i=1}^{q} T(r,f) \quad &\leq \quad N(r,f)+\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+2T(r,f) \\ &\quad -N_1(r)-\log r+O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q+1)T(r,f) \quad &\leq \quad N(r,f)+\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+2T(r,f)-N_1(r)-\log r+O(1) \\ (q-1)T(r,f) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)-N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)+\overline{N}(r,f)-\log r+O(1). \end{aligned}$$

En remarquant que tout zéro de $f-a_i$ d'ordre m est un zéro de f' d'ordre $m-1$, on déduit que

$$\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)-N(r,\frac{1}{f'})=\sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i)-N_0\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)$$

où $N_0(r,\frac{1}{f'})$ est obtenu à partir de $N\Big(r,\frac{1}{f'}\Big)$ en omettant les termes correspondant aux zéros de f qui sont des zéros de $f-a_i$ pour $1\leq i\leq q$, il résulte que

$$(q-1)T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i)+\overline{N}(r,f)-N_0\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-\log r+O(1).$$

Comme $\overline{N}(r,a_i)\leq N(r,a_i)$ pour tout $1\leq i\leq q$, on a

$$(q-1)T(r,f)\leq\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)+\overline{N}(r,f)-N_0\Big(r,\frac{1}{f}\Big)-\log r+O(1).$$

D'où l'inégalité. □

Chapitre 3

La primalité et la pseudo-primalité des fonctions méromorphes p-adiques

3.1 Factorisation des fonctions méromorphes

On a besoin de rappeler quelques définitions et propriétés de la factorisation sur $\mathbb{C}_p$.

Définition 3.1. Soit $f; f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $f = f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_n$.
On dit dans ce cas, qu'on a une factorisation de f et que $f_1, ..., f_n$ sont des facteurs de f.

Définition 3.2. Deux factorisations de $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$:
$h = f_1 \circ ... \circ f_n = g_1 \circ ... \circ g_n$ sont dites équivalentes s'il existe des fractions rationnelles de degré un, $L_1; L_2; ...; L_{n_1}$ telles que :

$$f_1 = g_1 \circ L_1; f_2 = L_1^{-1} \circ g_2 \circ L_2; ...; f_{n-1} = L_{n-2}^{-1} \circ g_{n-1} \circ L_{n-1}; f_n = L_{n-1}^{-1} \circ g_n. \tag{3.1}$$

Proposition 3.3. *[4] Soit F, G, H trois fonctions méromorphes. Si $F = H \circ G$ et H n'est pas une fraction rationnelle, alors G est entière.*

Démonstration.

Posons $H = \dfrac{A}{B}$ avec A et B des fonctions entières sans zéros communs. Dire que H est non rationnelle entraine qu'il existe au plus une valeur $\omega_0 \in \mathbb{C}_p$ telle $A - \omega_0 B$ soit un polynôme. Soit ω différent de cette valeur éventuelle. Alors la fonction entière $A(x) - \omega B((x)$

est transcendante et a donc une infinité de zéros, que nous notons $c_k, k \in \mathbb{N}$.

Supposons que G ait un pôle x_0. On pose $G(x) = \dfrac{W(x)}{(x-x_0)^l}$ ou l est un entier ≥ 1 et $W(x)$ une fonction analytique qui ne s'annule en aucun point d'un disque ouvert de centre x_0 et de rayon R. Pour tout k posons $T_k(x) = W(x) - c_k(x - x_0)$.

Pour l'un de ces k choisissant $\rho \in]0, R[$ tel que $|c_k|\rho^l = |W(x_0)|$.

Donc on a $\begin{cases} |c_k|r^l < |W(x_0)| \quad si \quad 0 < r < \rho \\ |c_k|r^l > |W(x_0)| \quad si \quad \rho < r < R. \end{cases}$

D'autre part le fait que W n'ait pas de zéros dans $D^-(x_0, R)$ entraine que

$$|W|(r) = |W(x_0)| \quad \forall r \quad 0 < r < R.$$

Donc on a

$$|T_k|(r) = \begin{cases} |W(x_0)| \quad si \quad 0 < r < \rho \\ |c_k|r^l \quad si \quad \rho < r < R. \end{cases}$$

Donc la fonction $T_k(x)$ admet au moins un zéro x_k sur le cercle $|x - x_0| = \rho$. On a donc $G(x_k) = c_k$; D'où $F(x_k) = \omega$. Par suite comme les x_k sont en nombre infini, la fonction $F(x) - \omega$ admet une infinité de zéros dans le disque $|x - x_0| < R$. Ce qui est absurde. Donc G n'a aucun pôle et est donc entière.

3.2 L'étude de la primalité et de la pseudo-primalité sur $\mathbb{C}_P$

Dans cette section nous allons étudier quelques théorèmes qui vont nous aider à monter la primalité et la pseudo-primalité des fonctions méromorphes p-adiques. Et nous utiliserons dans cette étude le polygone de valuation et la théorie de Nevanlinna ultramétrique, et la factorisation des fonctions méromorphes p-adiques.

Définition 3.4. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ est dite première si, dans toute factorisation de f, tous les facteurs, sauf au plus un, sont des fractions rationnelles de degré un.

Définition 3.5. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ est dite pseudo-première si, dans toute factorisation de f, tous les facteurs, sauf au plus un, sont des fractions rationnelles.

Remarque

La proposition 3.3 justifie le fait que, dans la suite, dans toute factorisation d'une fonction méromorphe f sous la forme $f = h \circ g$, on suppose h méromorphe et g entière ou bien $h \in \mathbb{C}_p(X)$ et g méromorphe.

Le résultat suivant nous permettra de montrer l'existence de fonctions méromorphes premières ou pseudo-premières transcendantes.

Proposition 3.6. *[4] Soit H et G deux fonctions entières non constantes. Soit ρ_0 un réel positif telle que la fonction $|G|(r)$ strictement croissante pour $r > \rho_0$ posons $F = H \circ G$. On a alors pour tout $\rho > \rho_0$*

1) $m(F, \rho) = m(H, |G|(\rho))m(G, \rho)$.

2) $M(F, \rho) = M(H, |G|(\rho))M(G, \rho)$.

3) $A(F, \rho) = A(H, |G|(\rho))M(G, \rho) + m(H, |G|(\rho))A(G, \rho)$.

Avec $m(f, \rho)$ c'est le nombre de zéros de f dans le disque ouvert $D^-(0, \rho)$, $M(f, \rho)$ c'est le nombre de zéros de f dans le disque fermé $D^+(0, \rho)$, et $A(f, \rho)$ c'est le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0, \rho)$, chacun de ces zéros compté avec sa multiplicité.

Démonstration.

On a $F = H \circ G$; d'où on déduit que pour tout r , on a : $|F|(r) = |H|(|G|(r))$. Comme la fonction $|G|(r)$ est strictement croissant pour $r > \rho_0$ on déduit que

$$\varphi_F^-(u) = \varphi_H^-(\varphi_G(u)).\varphi_G^-(u)$$

et

$$\varphi_F^+(u) = \varphi_H^+(\varphi_G(u)).\varphi_G^+(u)$$

pour $u > \log \rho_0$.

D'après la proposition 2.10, on a là les relation 1) et 2). La relation 3) s'obtient en faisant la différence entre 2) te 1).

Théorème 3.7. *[4] Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[x]$ et λ un entier positif fixe, on suppose que sur une infinité de cercles de centre 0 de $\mathbb{C}_p$, F a un nombre des zéros compris ente 1 et λ.*

Alors toute factorisation de F sous la forme $F = H \circ G$ avec $H, G \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que H ou G est un polynôme de degré compris entre 1et λ.

Démonstration.

Si aucune des fonction H et G n' est pas un polynôme de degré compris entre 1 et λ, on aurait pour ρ assez grand :

$$M(G,\rho) \geq \lambda + 1 \quad et \quad M(H, |G|(\rho)) \geq \lambda + 1.$$

D'autre par l'hypothèse du théorème et la formule 3) de la proposition 3.6 montre que pour une infinité de ρ arbitrairement grand, on a $A(H, |G|(\rho) \neq 0$ ou $A(G,\rho) \neq 0$. Pour un tel ρ on aurait alors $A(F,\rho) \geq \lambda + 1$. Ce qui contredit l'hypothèse. Donc H ou G est nécessairement un polynôme de degré compris entre 1 et λ.

Corollaire 3.8. *Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p) \smallsetminus \mathbb{C}_p(x)$ et $\lambda \geq 1$.*

On suppose que sur une infinité de cercles de centre 0, F a un nombre des zéros compris entre 1 et λ et que sur une infinité de cercles de centre 0, F a un nombre des pôles compris entre 1 et λ.

Alors toute factorisation de F sous la forme $F = H \circ G$ avec $H \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $G \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ entraine que :

a) ou bien G est un polynôme de degré compris entre 1 et λ,

b) ou bien H est une fraction rationnelle de degré compris entre 1 et λ.

Démonstration.

On écrit $H = \dfrac{H_1}{H_2}$ où $H_1, H_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'ont pas de zéros communs. D'où

$$F = H \circ G = \frac{H_1 \circ G}{H_2 \circ G}.$$

On applique ensuite le théorème 3.7 à chacune des des fonctions $H_1 \circ G$ et $H_2 \circ G$.

Corollaire 3.9. *Une fonction F remplissant les conditions du théorème 3.7 (respectivement celles du corolaire 3.8) est*

1) Première dans $\mathcal{A}(\mathbb{K}_p)$ (respectivement dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$) si $\lambda = 1$.

2) Pseudo-première dans $\mathcal{A}(\mathbb{K}_p)$ (respectivement dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$) si $\lambda \geq 1$.

Proposition 3.10. *[4] Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ possédant la propriété d'avoir dans une infinité de disques de centre 0 et de rayon arbitraire un nombre premier de zéros et dans une infinité de disques de centre 0 et de rayon arbitraire un nombre premier de pôles. Alors F est première dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. En particulier si $P(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ et $Q(x) \in \mathbb{C}_p[x]$ ont degré des nombres premiers, la fraction rationnelles $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est première.*

Corollaire 3.11. *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[x]$. On suppose que dans une infinité de disques de centre 0 et de rayon arbitraire grand, F admet un nombre de zéros égal au produit de deux nombre premiers (non nécessairement distincts).*
Alors ou bien F est première, ou bien elle se factorise sous la forme de deux facteurs premiers.

Corollaire 3.12. *Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $\lambda \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que dans une infinité de disques de centre 0, F admet un nombre de zéros égal au produit de λ nombres premiers. Alors F se factorise en au plus λ facteurs premiers.*

Pour la démonstration, on procède par induction en utilisant le corolaire 3.11.

Théorème 3.13. *Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(X)$ Une fonction qui admet une seule valeur exceptionnelle (attain ou moins une fois), alors F est pseudo-première .*

Démonstration.

On peut supposer que la valeur exceptionnelle de F et ∞, posons
$F = f \circ g, f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}), g \in A(\mathbb{K})$.

Donc F a au moins un pôle et par suite f a au moins un pôle α ie $f(\alpha) = \infty$, si g est transcendante il existe une infinité ω tell que $g(\omega) = \alpha$.

Alors pour tout ω on a $F(\omega) = f \circ g(\omega) = \alpha$
i,e , ω est un pôle de F (contradiction) .

Remarque

Étant donnée une fonction méromorphe, il n'est pas facile de savoir si elle est première ou non, l'exemple suivant montre qu'une fonction factorisable en facteurs premiers peut avoir des factorisations non équivalentes (au sens de la définition 3.2).

Exemple

Soit q un nombre premier et l un entier naturel non divisible par q.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'élément de $\mathbb{C}_p^\star$ tel que

$$|a_n| < |a_{n+1}| \ et \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty.$$

On considère les fonctions entières suivantes

$$F(x) = x^l \prod_{n\geqslant 0}(1 - \frac{x^q}{a_n});\ G(x) = x^l \prod_{n\geqslant 0}(1 - \frac{x}{a_n})^l;\ H(x) = x^{ql} \prod_{n\geqslant 0}(1 - \frac{x^q}{a_n})^q$$

et $\varphi(x) = x^q$.

Posons $r_n = |a_n|$. Dans le disque de centre 0 et de rayon r_n, les fonctions F et G admettent chacune $nq + l$ zéros. D'autre part le théorème de Dirichlet nous assure que parmi les termes de la suite $(nq + l)_{n\geqslant 0}$ il y a une infinité de nombres premiers. Donc les fonctions F et G vérifient les conditions de la proposition 3.10, et sont donc premières, φ est évidemment une fonction première et on a

$$H = \varphi \circ F = G \circ \varphi.$$

Ces deux décompositions n'étant évidemment pas équivalentes.

Théorème 3.14. *Soit $F \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$. On suppose que $F = G \circ H$ avec $H, G \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$. Alors il existe $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ tel que $F = g \circ h$. De plus, ces deux factorisations sont équivalentes.*

Démonstration.

1) Si $G \notin \mathbb{C}_p(x)$, on a alors H doit être entière. D'où $F = \dfrac{G_1(H)}{G_2(H)}$ ou $G_1, G_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ sont sous zéros communs. On peut supposer H non constante. Alors $G_2(x)$ n'a pas de zéro car si x_0 en est un, il existe $x_1 \in \mathbb{C}_p$ tel que $H(x_1) = x_0$.

D'où $G_1(H(x_1)) = G_1(x_0) \neq 0$ et $G_2(H(x_1)) = G_2(x_0) = 0$ et F aurait un pôle. Contradiction.

Donc G_2 n'a pas de zéro et est donc égale à une constante non nulle α. D'où $F = \dfrac{G_1}{\alpha} \circ H$. Cette factorisation est évidement équivalente à $F = G \circ H$.

2) Si $G(x) \in \mathbb{C}_p(x)$, il existe $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}_p(x)$ premiers entre eux tels que $G(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. D'où $F = \dfrac{P(H)}{Q(H)}$, H étant méromorphe non constante elle atteint toute valeurs

de $\mathbb{C}_p$ sauf au plus une. Ceci entraine que $Q(x)$ a au plus un zéro.

• Si Q n'a pas de zéro on a terminé .

• Si Q a un zéro α la fonction $H(x) - \alpha = \dfrac{H_1(x)}{H_2(x)} - \alpha$ n'a aucun zéro .

Donc

$$H_1(x) - H_2(x) = \beta \neq 0.$$

D'où

$$F = (\frac{P}{Q} \circ \frac{\alpha x + \beta}{x}) \circ H_2$$

et on a $T = \dfrac{P}{Q} \circ \dfrac{\alpha x + \beta}{x}$ doit être un polynôme car sinon F aurait un pôle.

D'où $F = T \circ H_2$ et $T = \dfrac{P}{Q} \circ L$ et $H_2 = L^{-1} \circ H$ où $L = \dfrac{\alpha x + \beta}{x} etL^{-1} = \dfrac{\beta}{x - \alpha}$.

Corollaire 3.15. *Une fonction entière F est première (resp pseudo-première) dans $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ si et seulement si F est première (resp pseudo-première) dans $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.*

Théorème 3.16. *Toute fonction entière p-adique F tell que pour tout $\beta \in \mathbb{C}_p$, $F - \beta$ n'a qu'un nombre fini de zéros multiples est pseudo première.*

Démonstration.

Soient $f; g \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{C}_p[X]$ tell que $F = f \circ g$. Alors f' admet au moins un zero $\alpha \in \mathbb{C}_p$:

$$f'(\alpha) = 0.$$

Alors l'équation $g(x) - \alpha = 0$ admet une infinité de solution i ;e

l'ensemble $g^{-1}(\alpha)$ est infini.

Soit $\beta = f(\alpha) \in \mathbb{C}_p$, pour tout $\omega \in g^{-1}(\alpha)$ on a :

$$\begin{cases} (F - \beta)(\omega) = F(\omega) - \beta = f \circ g(\omega) - \beta = f(\alpha) - \beta = 0 \\ F'(\omega) = f'(g(\omega)) \times g'(\omega) = f'(\alpha) \times g'(\omega) = 0. \end{cases}$$

Donc tous les éléments de $g^{-1}(\alpha)$ sont des zéros multiples de $F - \beta$. Ce qui contredit l'hypothèse .

3.3 Construction des fonctions pseudo-premières

Proposition 3.17. *Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p^*$*

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| < |\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}| \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = +\infty. \tag{3.2}$$

Alors $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$. Les zéros de f peuvent être rangés en une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ tq : $|\alpha_n| = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$.

Démonstration.

1)Montrons que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0\ tq : n \geq n_0 \Rightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \varepsilon$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$.

Soit $n \geq n_0$, on a $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times ... \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \times a_{n_0} \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}} |a_{n_0}|^{\frac{1}{n}}$.

D'où $\forall\varepsilon > 0,\ \limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon$.

Donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ et f est entière.

2)On a $|f|(r) = \sup\limits_{k\geq 0} |a_k| r^k$.

Posons $r_n = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$ et montrons que $|f|(r_n) = |a_k| r_n^k$ pour les seules valeurs $k = n-1$ et $k = n$.

On a $\frac{|a_n| r_n^n}{|a_{n-1}| r_n^{n-1}} = |\frac{a_n}{a_{n-1}}| r_n$. D'où $|a_n| r_n^n = |a_{n-1}| r_n^{n-1}$.

$*$ Si $0 \leq k \leq n-1$. $\frac{|a_k| r_n^k}{|a_n| r_n^n} = |\frac{a_k}{a_{n+1}}| \frac{1}{r_n^{n-k}} = \underbrace{|\frac{a_k}{a_{n+1}}| \times ... \times |\frac{a_{n-1}}{a_n}|} \times \frac{1}{r_n^{n-k}} < 1$

$$\Rightarrow |a_k| r_n^k < |a_n| r_n^n.$$

$*$ Si $k > n$. $\frac{|a_n| r_n^k}{|a_{n-1}| r_n^{n-1}} = |\frac{a_k}{a_{n-1}}| r_n^{k+1-n} < |\frac{a_k}{a_{n-1}}| \times |\frac{a_{n-1}}{a_n}| \times |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \times ... \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}| = 1$

$$\Rightarrow |a_k| r_n^k < |a_{n-1}| r_n^{n-1}.$$

Donc dans le cercle $C(0, r_n)$ contient un seul zéro α_n de f avec $|\alpha_n| = r_n = |\frac{a_{n-1}}{a_n}|$.

3) Pour montrer que f n'a pas d'autre zero que les α_n, on va montré que si $r_n < r < r_{n+1}$ alors $|f|(r) = \sup\limits_{k\geq 0} |a_n| r^k$ est atteint pour la seule valeur $k = n$.

En effet :

- Si $0 \leq k < n \Rightarrow |a_k| r^k = |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \times |\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}| \times ... \times |\frac{a_{n-1}}{n}| \times |a_n| r^k$

$$\Rightarrow |a_k| r^k < |a_n| r_n^{n-k} \times r^k < |a_n| r^n.$$

• Si $k > n \Rightarrow \dfrac{|a_k|r^k}{|a_n|r^n} = |\dfrac{a_k}{a_n}|r^{k-n} < |\dfrac{a_k}{a_n}|r_{n+1}^{k-n} =$

$$\Rightarrow ... < |\frac{a_k}{a_n}||\frac{a_n}{n+1}|^{k-n} < |\frac{a_k}{a_n}| \times |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \times |\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}| \times ... \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}|.$$

D'où : $\dfrac{|a_k|r^k}{|a_n|r^n} < 1$ i,e ; $|a_k|r^k < |a_n|r^n$.

Proposition 3.18. *Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p^*$ tq*

$$|\frac{a_1}{a_2}| < |\frac{a_2}{a_3}| < ... < |\frac{a_{m-1}}{a_m}| = |\frac{a_m}{a_{m+1}}| < ... < ... \ et \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = +\infty.$$

Alors : 1) $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$.

2) Les zéros de f peuvent être rangés en une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $|\alpha_n| = |\dfrac{a_{n-1}}{a_n}|$ et on a dans le cercle $C(0, |\alpha_m|)$ deux zéros.

Démonstration.

1) Même démonstration de proposition 3.17.

2) On a $|f|(r) = \sup_{k\geq 0} |a_k|r^k$.

Posons $r_n = |\dfrac{a_{n-1}}{a_n}|$, donc $r_m = r_{m+1}$.

• Les cas $r_n < r_m$ et $r_n > r_{m+1}$, les zéros son simple (d'arpète la proposition 3.17).

• Le cas $r_n = r_m = r_{m+1}$, nous montrons que $|f|(r_m) = \sup_{k\geq o} |a_k|r_m^k$ atteint pour les valeur $k = m-1, m, m+1$.

On a : $|\dfrac{a_m}{a_{m-1}}|r_n = 1$, donc $|a_m|r_m^m = |a_{m-1}|r_m^{m-1}$ et

$|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}|r_{m+1} = 1$, donc $|a_m|r_{m+1}^{m+1} = |a_m|r_{m+1}^m$.

Alors :

$$|a_{m-1}|r_m^{m-1} = |a_m|r_m^m = |a_{m+1}|r_m^{m+1}.$$

• Si $0 \leq k < m-1$;

$$\frac{|a_k|r_m^k}{|a_m|r_m^m} = |\frac{a_k}{a_m}|\frac{1}{r_m^{m-k}} = |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \times ... \times |\frac{a_{m-1}}{a_m}| \times \frac{1}{r_m^{m-k}} < 1.$$

• Si $k > m+1$;

$$\frac{|a_k|r_m^k}{|a_m|r_m^m} = |\frac{a_k}{a_m}|r_m^{k-m} < |\frac{a_k}{a_m}| \times |\frac{a_m}{a_{m+1}}| \times ... \times |\frac{a_{k-1}}{a_k}| = 1.$$

Donc le max est atteint trois fois (quant $k = m-1, m, m+1$ et on a $N_{r_m} = m+1, n_{r_m} = m-1$). par suite $N_{r_m} - n_{r_m} = 2$ (le nombre de zéros sur le cercle $C(0, r_m)$).

Pour montré que les seules zéros de f sont les α_n, on utilise la même méthode de proposition 3.17.

Lemme 3.19. *Les fonctions construites dans les propositions* 3.17 *et* 3.18 *vérifient la propriété* $\forall \beta \in \mathbb{C}_p,\ f(x) - \beta$ *n'a qu'un nombre fini de zéros multiples.*

Démonstration : $\exists r_0 > 0$ tel que

$$r \geq r_0 \Longrightarrow |f - \beta|(r) = |f|(r)$$

Donc les éventuels zéros multiples appartiennent à $D(0, r_0)$ d'où leur nombre est fini.

Bibliographie

[1] **A.Boutabaa and A. Escassut**, *Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations.* Annales de l'Institut Fourier, T.50(3),p751-766. (2000).

[2] **A.Boutabaa and A.Escassut**, *Uniqueness of p-adic meromorphic functions.* Académie des Sciences/ Elsevier, Paris,(1997).

[3] **A.Boutabaa and A. Escassut**, *Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc.* Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44, 485-504(2001).

[4] **A.Boutabaa and J.P. Bézivin**, *Decomposition of p-adic meromorphic functions.* Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1(1995) pp51-60.

[5] **A.Boutabaa**, *Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique*, Collectanea Mathematica 42,1 p. 75-93,(1991).

[6] **A.Boutabaa**, *Sur les courbes holomorphes p-adiques.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouses Vol. V, no 1(1996), pp29-52.

[7] **A.Boutabaa**, *Théorie de Nevanlinna p-adique.* Manuscripta Math.67, 251-269(1990).

[8] **A.Escassut**, *Analytic Elements in p-adic Analysis.* Word Scientific Publishing (1995).

[9] **A.J. Baker**, *An introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis.* Departement of Mathématics, University of Glasgow, G128QW, Scotland (2004).

[10] **A. Khrennikov**, *Non-Archimedean Analysis.* Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997.

[11] **A.O.F. Jacqueline**, *Distribution de valeurs des fonctions meromorphes ultrametriques, application de la theorie de Nevanlinna.* These de Doctorat, Université Blaise Pascal.

[12] **A.Robert**, *A course in p-adic Analysis.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198(2000).

[13] **B. Diarra**, *Analyse p-adique.* Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.

[14] **C.C. Rodrigâñez**, *P-adic Numbers and non-archimedean Valuation.* URL :http :// www.sunall.mat.Ucm.es.

[15] **H.H. Khoai**, *Sur la theorie de Nevanlinna p-adique*, Groupe de travail d'analyse ultramétrique, towe 15(1987-1988),P. 35-40.

[16] **J.P. Bézévin** , *Dynamique des fractions rationnelles p-adiques.* Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.

[17] **L. Ping and C.C. Yang**, *On the unique range set of meromorphic functions.* American Mathematical Society,(1996).

[18] **Lazard.M**, *Les zéros des fonctions analytiques sur un corps valué complet, IHES, publications mathématiques n.14,p.47-75(1962).*

[19] **N. Koblitz**, *P-adic Analysis and Zeta Functions*, Springer-verlag (1984).

[20] **R. Nevanlinna**, *Le théoreme de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris, 1929.

[21] **S. Katok**, *Real and p-adic analysis.* Cours notes for Math 497 C,Mass program, Fall 2000 (2001).

[22] **W.H. Schikhof**, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis.* Combridge University Press (1984).

[23] **Y. Amice**, *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaire de France (1975).

ملخّص

في هذه المذكرة، نهتم بأولية و بسودو أولية توابع ميرومورفية في حقل أولترا متري. و نؤكد أن هاتين الخاصيتين مرتبطتين مع أصفار (مع أقطاب) التابع المتسائل عنه .

أداتنا في العمل على هذا المشكل هي نظرية توزيع القيم للتوابع الميرومورفية في حقل أولترا متري . توزيع الأصفار (والأقطاب) من طبيعة المعاملات في النشر على شكل سلسلة لوران لهذه التوابع أي

$$f(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^i, k \in \mathbb{Z}.$$

Résumé

On s'intéresse, dans ce mémoire à la primalité et à la pseudo-primalité des fonctions méromorphes p-adiques. Il s'avéra que ces propriétés sont liées aux zéros (et aux pôles) de la fonction en question.

Notre outil de travail dans cette problématique est la théorie de distribution des valeurs des fonctions méromorphes p-adiques, la répartition de ces zéros (et pôles) est la nature des coefficients du développement de cette fonction en série de Laurent i,e $f(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^i, k \in \mathbb{Z}$.

Abstract

We are interested in this memory to primality and pseudo-primality of p-adic meromorphic functions. It appears that these properties are related to the zeros (and poles) of the function in question.

Our tool working in this problem is the valu-distribution theory of p-adic meromorphic functions, the distribution of zeros (and poles) is the nature of the coefficients of this function in development Laurent i,e $f(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je remercie vivement Mr.T. Zerzaihi, professeur à l'université de Jijel d'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Mme. D. Azzam-Laouir, professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire, j'en suis honoré .

Mes remerciements vont également à Mr. M. Yarou professeur à l'université de Jijel, à N. Touafek, Maître de conférences à l'université de Jijel, pour avoir bien voulu accepter d'évaluer ce travail.

Tous mes remerciements à mes parents, mes frères, mes sœurs, et mes collègues.