Table des matières

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE JIJEL

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Thèse

présentée pour obtenir le diplôme de

Docteur es-Sciences

Spécialité : Physique

Option : Physique Théorique

par

Ould-Lahoucine Hassan Khaled

THEME
Etude de la dynamique des particules spinorielles

Soutenu le : 20/10/2013

Devant le Jury :

Président :	Kh. Nouicer	Prof.	U. Jijel
Rapporteur :	L.Chetouani	Prof.	U.Constantine I
Examinateurs :	A. Bounames	Prof.	U.Jijel
	M. Merad	Prof.	U.Oum El Bouaghi
	T. Boudjedaa	Prof.	U.Jijel
	T. Z. Boulemzaoued	M.C	U. Versailles (France)

Introduction

Il est remarquable de constater que le spin demeure, parmi toutes les observables connues, celle pour qui, une interprétation physique satisfaisante fait toujours défaut. A l'origine, cette quantité a été introduite pour expliquer, entre autres, l'incohérence d'un magnétisme atomique réduit au seul mouvement orbital des électrons ([1]). Depuis, le spin n'a pas cessé d'occuper une place de plus en plus importante, pas seulement en physique théorique, mais dans tous les domaines où cette quantité intervient. Toutefois, les progrès théoriques considérables ne peuvent occulter les sérieuses difficultés rencontrées, lesquelles, confluent toutes à la nature fondamentale du spin qui reste à élucider.

- En chimie : le fait que les électrons soient des fermions, et obéissent donc au principe de Pauli, constitue un fait crucial qui conditionne toute la chimie. Ainsi, le spin est au centre de notre compréhension des liaisons covalentes. Si l'électron était une particule sans spin, alors, à l'exception de l'ortho-hélium, les autres éléments n'auraient pas existé. Aussi, si l'électron était un boson, des ions avec une charge négative tellement grande auraient existé, de sorte que la matière aurait été thermodynamiquement instable. D'un autre côté, et pour le cas des structures cristallines ou quasi-cristallines, il est notable que, jusqu'à maintenant, elles demeurent mal expliquées dans le cadre de la théorie statistique quantique en équilibre.

- En physique hadronique (QCD) : les quarks étant des fermions de spin 1/2, il n'est pas bien clair comment leurs combinaisons, par l'intermédiaire des gluons, conduisent à la formation d'un proton ou d'un neutron qui sont des particules de spin 1/2.

- Dans la théorie du ferromagnétisme : une théorie expliquant l'apparition de la magnétisation spontanée n'est encore pas bien établie. Le constat est le même aussi pour ce qui concerne l'origine microscopique des interactions spin-spin dans le cas des matériaux magnétiques. Plus généralement, la théorie du magnétisme fondée sur la base de la théorie statistique quantique reste toujours à achever.

A l'analyse des exemples cités plut haut, on constate que, dans le cas des systèmes faisant intervenir plusieurs particules (avec spin), il existe une réelle difficulté à comprendre le comportement émergeant de ces systèmes sur la base d'une théorie fondamentale, celle du spin en l'occurence. Pourtant, dès l'émergence de cette grandeur en physique, les travaux qui s'y rapportent ont été nombreux.

La première formulation lagrangienne pour une particule relativiste avec spin a vu le jour, dès 1926, avec le travail publié par Frenkel ([2]). Plus tard, Bargmann, Michel et Telegdi avaient généralisé au cas relativiste les équations donnant la précession du spin dans un champ extérieur ([3]). Parmi les particules qui ont suscité un nombre important de recherches figure l'électron (spin 1/2). Cette place de choix tient au fait que, ayant une charge électrique et une masse, l'électron interagit avec les champs électromagnétiques et gravitationnels. Einstein avait résumé cette situation en déclarant : "La physique, c'est l'électron !".

Il est incontestable que l'une des plus brillantes contributions de Dirac fut l'équation décrivant la dynamique de l'électron dans un cadre quantique relativiste ([4]). Outre le mérite d'avoir prédit l'existence de l'anti-électron (positron), cette équation fut aussi à l'origine d'une révision majeure en physique, celle de la notion de particule élémentaire. En effet, tout comme l'électron, le proton et le neutron sont des fermions de spin 1/2, pour lesquels, les prévisions accordaient un moment magnétique égal à $\mu_p = g_p \left(\frac{e}{2m_p c}\right)$, avec $g_p \simeq 2$, et $\mu_n = 0$, respectivement. Pourtant, Stern (1933), et plus tard Rabi (1936), avaient constaté un surprenant décalage de trois unités pour g_p, alors que, de leur côté, Alvarez et Bloch (1940) avaient obtenu $g_n = -3,82629$ pour le neutron, où le signe (-) indique que la direction du moment magnétique est opposée à celle du spin. Depuis lors, le qualificatif de "particule élémentaire" pour le proton et le neutron devenait problématique. Ainsi, et bien que la QCD avait réussi à élucider un certain nombre de points sur la structure de confinement des nucléons, il reste qu'à l'échelle des hautes énergies, des expériences ([5]) ont montré, contrairement à ce qui été supposé, que les effets du spin ne sont pas négligeables.

Ces constatations ont amené nombre de physiciens, à l'image de O. Barut ([6]), à se questionner sur la nature même du spin : comment et pourquoi cette étrange structure interne est-elle réalisée, en quoi diffère t-elle d'un objet étendu, et comment en dépendent les interactions.

Pourtant, d'un point de vue résolument mathématique, le spin ne constitue pas une énigme, en ce sens que, ce n'est rien d'autre qu'un nombre qui émerge de la théorie des groupes. Ce fait n'a pas échappé à E. Wigner ([7]) lorsqu'il avait souligné "la déraisonnable efficacité des mathématiques", lesquelles, bien que ne reproduisant pas toujours la réalité des objets qu'elles décrivent, réussissent à rendre, par exemple, les questionnements sur la nature du spin non nécessaires. C'est ainsi que, suite à l'émergence de la pseudo mécanique ([8]), l'emploi des variables de Grassmann a vu le jour, dans le contexte des intégrales fonctionnelles pour les fermions ([9] et [10]). Que ce soit dans le cas des modèles pseudo classiques, ou bien, dans le cas des modèles dits de superparticule, plusieurs travaux ([11], [12], [13], [14], [15] et [16]) ont consacré l'intérêt pour les particules spinorielles. Pour la plupart, ces travaux ont été motivés par les développements en supersymétrie et en supergravité, ainsi que par l'émergence de la théorie des supercordes ([17], [18], [19], [20], [21] et [22]). De façon générale, la classification de ce genre de modèles se fait suivant certains attributs tels que la masse, le caractère algébrique (variables commutantes ou anticommutantes) ainsi que le caractère géométrique des degrés de libertés internes (vecteur, spineur ou twisteur). Par convention, les modèles impliquant uniquement des variables qui commutent sont appelés modèles classiques, alors que, ceux impliquant des variables de Grassmann (anticommutent) sont appelés modèles pseudo classiques.

Historiquement, c'est l'intérêt accordé au principe d'action en physique qui aurait stimulé les recherches projetant de décrire la théorie de Dirac, autrement que par la résolution directe des équations différentielles. Bien que le cadre des intégrales fonctionnelles ([23]) fut déjà bien établi, la difficulté d'y faire place pour le spin était, dès le départ, bien avérée ([24]). En effet, en faisant intervenir des trajectoires continues, le cadre des intégrales fonctionnelles ne pouvait pas, logiquement, prendre en compte une quantité discrète, le spin en l'occurence.

Pourtant, le genre de difficulté souligné plus haut ne fut pas insurmontable. La preuve est donnée par le modèle pseudo classique proposé par Berezin et Marinov ($\mathrm{Re}\,f.16$) et qui est, indéniablement, l'une des plus importantes contributions dans la théorie de Dirac. Bon nombre de succès sont à mettre à l'actif de ce modèle, en particulier, pour ce qui concerne le calcul de la fonction de Green causale, pour les cas d'interactions les plus connus ([25], [26], [27], [28] et [29]), même si, toutefois, une certaine difficulté est relevée lorsqu'il s'agit de généraliser ce même modèle aux dimensions supérieures impaires ([30]). Plus récemment, l'idée de la déformation des particules relativistes a été avancée ([31]), et jusque là, la quantification de ce genre de modèle est toujours sous investigation, tout comme pour le modèle dit k-relativiste ([32] et [33]).

Comme évoqué plus haut, les recherches sur le thème des modèles classiques pour les particules avec spin ont surtout été motivées par les développements en théories des cordes. En effet, l'unification des interactions fondamentales a constitué, depuis toujours, un objectif suprême en physique théorique. Malgré ce qui a été réalisé pour la théorie électrofaible ([34], [35] et [36]) et la QCD, l'idée que le cadre théorique, existant jusque là, nécessiterait une profonde refonte, n'était pas que de la simple spéculation ([37]). Pour cela, il suffit de rappeler que pour ce qui concerne le Modèle Standard, quelques vingt (20) paramètres sont nécessaires pour l'échafaudage de cette théorie sans qu'ils y émergent naturellement. L'exemple le plus simple est celui du rapport de la masse du muon à celle de l'électron. Il est simplement fixé, à la main, à la valeur 207, ce qui confère à cette théorie un caractère optionnel contrastant avec l'élégance de sa formulation mathématique.

La théorie des cordes (String Theory), par contre, est présentée comme la théorie ultime. Le principe d'unification y est intrinsèque, puisque, dans cette théorie, toutes les particules d'interactions ne sont que les différents modes de vibrations d'une seule corde. L'un des travaux les plus importants est celui publié par Green et Schwarz ([38]), où il a été montré que les anomalies qui affectent la théorie de Yang-Mills, couplée à la supergravité, sont susceptibles d'être annulées en dimension dix (D = 10), tandis que, dans la théorie des supercordes de type I, ce processus est automatiquement inclu. Depuis, beaucoup de choses ont été faites, et même si le temps n'est pas encore aux bilans, on peut toutefois relever certains points positifs, tels que l'émergence naturelle de particules sans masse (brisure spontanée de la symétrie non nécessaire), ou bien, l'émergence naturelle des paramètres du Modèle Standard. Cependant, ce qui importe le plus dans tout cela, c'est incontestablement la profonde connexion relevée entre cette théorie et les modèles classiques de spin ([39]). En effet, et à la base, l'action de Numbu-Goto pour une corde relativiste est simplement une fonctionnelle de la trajectoire de la corde. Beaucoup y ont vu, là, une justification pour relancer le travail à propos des modèles classiques de spin puisque, pour le reste, c'est le vecteur mathématique qui se chargera de transposer les résultats. C'est dans ce contexte qu'est venu s'inscrire le modèle classique de l'électron de Dirac proposé par Barut et Zanghi ([40]). En effet, outre le cadre purement classique de ce modèle, il présente aussi la qualité d'avoir clairement exhibé la structure interne de l'électron, en interprétant le spin comme étant le moment angulaire des oscillations du centre de masse, tel que décrit par Schrödinger. Dans le sillage de ce travail, et dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins, ce modèle avait reproduit le propagateur de Dirac ([42]), à savoir $(\gamma.p - m)^{-1}$, ainsi que la plupart des processus d'interactions connus en QED ([43]) dans le cadre de la théorie des perturbations. Cependant, cette dernière n'ayant pas échappé aux critiques ([44]), il est apparu nécessaire pour nombre de théoriciens de valoriser toute alternative pouvant donner un résultat exact.

Dans le sens indiqué plus haut, cette contribution se propose, non pas d'apporter la solution définitive, mais, seulement, de soumettre un modeste élément à la réflexion. Elle constitue l'ébauche d'un point de vue différent, appelé à être exploré encore plus, en vue de dégager un cadre général ainsi que des techniques de calculs fiables. L'idée qui a été retenue consiste à explorer un modèle classique en dehors de la théorie des perturbations. Pour toutes ces considérations, notre choix s'est porté sur le modèle de Barut-Zanghi (Ref.40), ainsi que sur le formalisme des intégrales de chemins, moyennant certaines techniques, connues au demeurant, mais généralisées dans des contextes différents.

En adoptant le formalisme des intégrales de chemins, il est utile de rappeler que seule la configuration de la particule libre est susceptible de donner un résultat exact. Cela revient, pour le cas de l'équation de Dirac, à éliminer le terme de couplage spin-champ, bien entendu, au prix d'un autre terme, moins contraignant. Pour ce faire, et dans notre cas, la solution imaginée est un modèle de Barut-Zanghi modifié, reconstruit autour d'une nouvelle représentation des matrices Gamma de Dirac. Cette dernière est susceptible de ramener le problème étudié, chaque fois que possible, à la configuration de la particule libre. Cette approche a été testée avec succès pour le cas de l'onde plane ([45]). Nous nous proposons ici de montrer qu'elle est suffisante pour décrire la dynamique d'une particule de Dirac en présence de deux ondes planes orthogonales ([46]) ainsi qu'en présence d'un champ gravitationnel faible ([47]).

Outre la présente introduction, le chapitre I contient un bref rappel sur les modèles de particules relativistes avec spin. Au chapitre II, l'accent est mis sur les modèles les plus connus, en intégrales de chemins, pour la particule de Dirac, à savoir, le modèle pseudo classique (Ref.16) ainsi que le modèle de Barut-Zanghi, lequel, est reconstruit au Chapitre III, et adapté pour un cas assez général. Le cas de deux ondes planes orthogonales et celui d'un champ gravitationnel faible sont proposés comme applications au chapitre IV. Au chapitre V, nous montrerons que la nouvelle représentation des matrices Gamma de Dirac induit une transformation canonique dont la fonction génératrice est solution de l'équation Hamilton-Jacobi pour une particule de spin zéro. Enfin, une conclusion discutera de certains points d'importance.

Chapitre 1

Les modèles relativistes pour les particules avec spin

Les modèles relativistes pour les particules avec spin sont, en fait, la généralisation de l'équation donnant la précession du spin dans un champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\right)$ externe, répondant au principe d'invariance des lois physiques dans tout référentiel inertiel. On rappelle que l'équation en question est donnée par :

$$\frac{d\overrightarrow{S}}{dt} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{B}. \tag{1.1}$$

La quantité $\overrightarrow{\mu}$ représente le moment magnétique de l'électron, lequel, est considéré proportionnel au spin $\overrightarrow{S}$, de sorte que :

$$\overrightarrow{\mu} = \left(\frac{ge}{2m}\right)\overrightarrow{S}, \tag{1.2}$$

où g, e et m représentent le facteur gyromagnétique de l'électron, sa charge et sa masse, respectivement. Il est remarquable de souligner qu'il existe deux façons de généraliser la dernière équation, à savoir, moyennant un quadrivecteur axial S_μ, ou bien, un tenseur antisymétrique $S_{\mu\nu}$. Le fait d'attribuer au spin $\overrightarrow{S}$ trois composantes indépendantes revient à considérer, dans le premier cas $S_0 = 0$, ou bien, pour le second cas, $S_{0i} = 0$. En notation covariante, cela revient à écrire, de façons équivalentes, les deux conditions de transversalité ([48], [49], [50] et [51]) suivantes :

$$S_\nu \dot{x}^\nu = 0, \quad S_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0, \tag{1.3}$$

où $\dot{x}^{\nu}$ représente la quadrivitesse. Il est même possible de relier ces deux quantités en écrivant :

$$S^{\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\alpha\beta\sigma}\dot{x}_{\alpha}S_{\beta\sigma}, \quad S_{\beta\sigma} = \varepsilon_{\beta\sigma\alpha\nu}\dot{x}^{\alpha}S^{\nu}. \tag{1.4}$$

Comme souligné dans l'introduction, les différents modèles relativistes pour les particules avec spin sont généralement classés par rapport aux caractères algébriques et géométriques. Dans ce qui va suivre, un bref rappel est donné sur les modèles relativistes les plus connus.

1.1 Les modèles vectoriels

1.1.1 Le modèle de Frenkel

Historiquement, on peut dire que le travail de Frenkel constitue le tout premier modèle classique pour une particule avec spin. A l'origine, Thomas ([52]) avait publié un travail, dans lequel, il expliquait la structure de multiplets du spectre de l'atome d'hydrogène par l'introduction d'un terme d'interaction spin-orbite. Frenkel considérait comme incomplète toute spécification des propriétés magnétiques de l'électron à travers les seules composantes du vecteur moment magnétique. En se basant sur l'outil mathématique de la théorie de la relativité restreinte, il avait introduit un tenseur antisymétrique $S_{\mu\nu}$ à l'image du tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$, c'est à dire, regroupant le moment électrique dipolaire et le moment magnétique intrinsèque. De plus, le moment électrique dipolaire étant induit par le mouvement de translation de l'électron, il lui suffisait alors de choisir un repère fixé à l'électron pour obtenir un tenseur $S_{\mu\nu}$ du genre espace. Ainsi, l'équation relativiste donnant la précession du spin est :

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{d\tau} = \frac{e}{mc}\left[F_{\alpha}^{\ \nu}S_{\nu\beta} + a_{\sigma}\left(\dot{x}_{\alpha}S_{\beta}^{\sigma} - S_{\alpha}^{\sigma}\dot{x}_{\beta}\right)\right], \tag{1.5}$$

avec

$$a_{\sigma} = \frac{m}{ce}\left(\frac{e}{mc}F_{\sigma}^{\ \nu}\dot{x}_{\nu} - \ddot{x}_{\sigma}\right). \tag{1.6}$$

Plus tard, Barut ([53]) avait reformulé cette approche en introduisant les "degrés de liberté internes" $q_{(\alpha)}^{\mu}$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ correspondant au spin, desquels, émergeront les équations du spin, de la même façon que pour les équations de mouvement émergeant de la variation des coordonnées de l'espace temps. Le Lagrangien proposé est de la forme :

$$L = L\left[\dot{x}_{\mu}, q_{(\alpha)}^{\mu}, \dot{q}_{(\alpha)}^{\mu}, A_{\mu}(x), \partial_{\nu}A_{\mu}(x)\right]. \tag{1.7}$$

Le tenseur définissant le spin est donné par

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}_{(\alpha)}} q^{\alpha}_{\nu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\nu}_{(\alpha)}} q^{(\alpha)}_{\mu}. \tag{1.8}$$

Pour le cas de la particule libre, il avait obtenu alors les équations donnant la conservation du quadri-moment ainsi que du moment angulaire total, à savoir,

$$\frac{d}{d\tau} p^{\mu} = 0, \tag{1.9}$$

et

$$\frac{d}{d\tau}\left(S_{\mu\nu} + x_{\mu} p_{\nu} - x_{\nu} p_{\mu}\right) = 0. \tag{1.10}$$

En outre, ayant postulé un Lagrangien ne dépendant pas de l'accélération, la condition dite de Weysenhoff (transversalité) est automatiquement satisfaite, c'est à dire,

$$S_{\mu\nu} \dot{x}_{\nu} = 0. \tag{1.11}$$

1.1.2 Le modèle (toupie) de Hanson et Regge

Suite au travail de Frenkel, une autre approche a été proposée, selon l'idée que la particule est la représentation irréductible du groupe de Poincaré. Dans le modèle de Hanson et Regge (Ref. 13), l'espace de configuration est représenté par le couple $\left(x_{\mu}, \Lambda^{\nu}_{\mu}\right)$ où Λ^{ν}_{μ} est une matrice (élémént du groupe orthochrone de Lorentz), satisfaisant la relation :

$$\Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\sigma\nu} = g^{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

$g^{\mu\nu}$ étant le tenseur métrique de Minkowski. Par suite, et puisque $\dot{\Lambda}^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\sigma\nu} + \Lambda^{\mu}_{\sigma} \dot{\Lambda}^{\sigma\nu} = 0$, il s'ensuit alors la définition du tenseur antisymétrique suivant

$$\Omega^{\mu\nu} = \dot{\Lambda}^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\sigma\nu} = -\Omega^{\nu\mu}. \tag{1.13}$$

Ce dernier, est sensé être la généralisation du vecteur vitesse angulaire.

Pour décrire ce genre de dynamique dans un cadre relativiste, on peut considérer tous les invariants de Poincaré qu'il soit possible de construire, en plus de certaines restrictions garantissant un Lagrangien indépendant de l'accélération. Ainsi, les invariants de Poincaré retenus pour figurer dans le Lagrangien libre $L_0\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ sont :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu = \dot{x}^2, \\
a_2 &= \Omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu} = \Omega.\Omega, \\
a_3 &= \dot{x}_\mu \Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\sigma}\dot{x}^\sigma = \dot{x}.\Omega.\Omega.\dot{x}, \\
a_4 &= \frac{1}{16}\left(\Omega^{\mu\nu}\Omega^*_{\mu\nu}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\Omega.\Omega^*\right)^2,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

avec $\Omega^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\Omega^{\lambda\sigma}$ (tenseur dual). De plus, en supposant que L_0 est une fonction homogène aux dérivées de premier ordre en a_i (i = 1,2,3,4), un théorème attribué à Euler implique alors que :

$$L_0 = 2\left(a_1\frac{\partial L_0}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial L_0}{\partial a_2}\right) + 4\left(a_3\frac{\partial L_0}{\partial a_3} + a_4\frac{\partial L_0}{\partial a_4}\right). \tag{1.15}$$

Par définition aussi, nous avons :

$$p_\mu = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{1.16}$$

et

$$S^{\mu\nu} = -\frac{\partial L_0}{\partial \Omega_{\mu\nu}} = -S^{\nu\mu}. \tag{1.17}$$

Par conséquent, il est possible d'obtenir

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = 0, \tag{1.18}$$

mais aussi

$$\dot{S}^{\mu\nu} + \Omega^{\mu\lambda}S_\lambda^\nu - S^{\mu\lambda}\Omega_\lambda^\nu = 0, \tag{1.19}$$

et ce n'est qu'après plusieurs manipulations, de la dernière équation, qu'il est possible de montrer que le moment angulaire total est constant.

Dans le cas d'une interaction avec un champ extérieur $A_\mu(x)$, un terme de couplage minimal est ajouté de sorte que :

$$L = L_0 - e\dot{x}^\mu A_\mu(x). \tag{1.20}$$

Pour le moment magnétique, un autre terme de couplage est ajouté au Lagrangien, à savoir,

$$-\frac{g}{2}\Omega_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

où le paramètre g représente l'intensité du dipôle du système considéré.

1.1.3 Le modèle de Grassberger

Pour Grassberger (Ref.14), la description de la dynamique d'une particule avec spin est assurée par l'extension de l'espace de Minkowski par deux autres quadrivecteurs représentant les degrés de libertés internes $(x_\mu) \to (x_\mu, a_\mu, b_\mu)$. Le Lagrangien (invariant de Poincaré) est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m\left(1 - \dot{x}^2\right) + \dot{x}_\mu \left(\beta b^\mu - \alpha a^\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{b}^\mu a_\mu - \dot{a}^\mu b_\mu\right). \quad (1.22)$$

Les multiplicateurs de Lagrange α, β et m sont introduits pour assurer les contraintes suivantes :

$$b^\mu \dot{x}_\mu = a^\mu \dot{x}_\mu = 0. \quad (1.23)$$

Ainsi, le spin est représenté par le tenseur suivant :

$$S_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (1.24)$$

Ce dernier vérifie la condition de Frenkel, à savoir, $S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = const$. La nouveauté dans ce modèle, consiste en ce que le couplage avec un champ extérieur implique que le centre de masse de la particule et le centre de charge ne coïncident pas.

D'autres développements ont été enregistrés par Cognola & all ([54]), Souriau ([55]), Zakrzewski ([56]), Duval & all ([57]) et Duval ([58]).

Les modèles évoqués, ici, ont la particularité de mener aux équations BMT (Bargmann, Michael et Telegdi), mais, en même temps, ne mènent pas à la théorie de Dirac, après la première quantification.

1.2 Les modèles spinoriels (particule de spin arbitraire)

Dans certains modèles ([59], [60], [61], [62] et [63]), décrivant les particules avec spin, il est fait usage de spineurs qui commutent. Cependant, ce n'est pas uniquement le spin 1/2 qui en émerge, mais bien tout le spectre des valeurs du spin. Ce fait justifie le qualificatif de "particule de spin arbitraire". Si on considère, par exemple, celui donné en Ref.60, le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}\left(e^{-1}\dot{x}^2 + e{m_0}^2\right) - h\dot{x}^\mu j_\mu + 2\overline{\eta}\dot{\eta}. \quad (1.25)$$

La quantité η est un spineur de Majorana, tandis que, h et m_0 sont deux réels positifs et $j^\mu = \overline{\eta}\gamma^\mu\eta$ (le courant). La conservation du tenseur de moment angulaire est donnée par :

$$M_{\mu\nu} = p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu - \overline{\eta}\gamma_{\mu\nu}\eta, \tag{1.26}$$

avec $p_\mu = e^{-1}\dot{x}_\mu - hj_\mu$. Dans ce cas aussi, il est possible de relever la contribution des degrés de liberté internes de la particule.

1.2.1 Les modèles pseudo classiques

Le qualificatif "pseudo classique" est, généralement, attribué aux modèles faisant intervenir des variables de Grassmann, pour la description des degrés de liberté internes. Deux classes sont relevées dans ce genre de modèles, à savoir, vectorielle et spinorielle. Dans le cas des modèles vectoriels, l'extension de l'espace de Minkowski conduit à ce qui est appelé une super algèbre. D'un autre côté, dans le cas des modèles spinoriels (modèles de superparticules), on parle d'une algèbre super-Poincaré. Aussi, il est à relever que ce genre de modèles est étroitement lié à la supersymétrie.

Les modèles pseudo classiques vectoriels

Les contributions les plus remarquables, dans ce secteur, sont à l'actif de Berezin et Marinov (Ref.16), ainsi que Barducci, Casalbuoni et Lusanna (Ref.15). Les Lagrangiens libres, relatifs aux deux formulations, s'écrivent :

$$L_{BCL} = -m\left[\left(\dot{x}^\mu - \frac{i}{m}\dot{\theta}^\mu\theta_5\right)\cdot\left(\dot{x}_\mu - \frac{i}{m}\dot{\theta}_\mu\theta_5\right)\right]^{1/2} - \frac{i}{2}\theta_\mu\dot{\theta}^\mu - \frac{i}{2}\theta_5\dot{\theta}_5, \tag{1.27}$$

et

$$L_{BM} = -m\sqrt{-\dot{x}^2} + \frac{i}{2}\left[\theta_\mu\dot{\theta}^\mu - \theta_5\dot{\theta}_5 - \lambda\left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}\theta_\mu + \theta_5\right)\right]. \tag{1.28}$$

Pour le cas de ces deux modèles, l'espace de phase est décrit par $(x_\mu, \theta_\mu, \theta_5)$, où θ_μ et θ_5 sont des variables qui anticommutent, alors que x^μ est une variable bosonique.

Après quantification, et moyennant certaines contraintes, ces deux modèles permettent de retrouver l'équation de klein-Gordon (spin zéro) ainsi que celle de Dirac (spin 1/2).

1.2.2 Le modèle classique de Barut-Zanghi

A la lecture des nombreux travaux consacrés par Barut (et ses collaborateurs) à la structure interne de l'électron, le constat est vite fait quant au lien établi entre le degré de liberté de spin et les oscillations du centre de masse. Notament, il s'était inspiré d'un travail de Schrödinger (Ref.41) où l'idée de variables dynamiques "microscopiques" et "macroscopiques" fut avancée, pour proposer un modèle classique de l'électron. Ce dernier devait, d'une part, traduire la théorie de Dirac, et d'autre part, faire émerger la structure interne de l'électron pour expliquer que le mouvement hélicoïdal décrit par Schrödinger (Ref.41) résulte des oscillations rapides de la charge, autour du centre de masse, lorsqu'elles sont superposées au mouvement de translation de ce dernier. Dans cette configuration, le spin représenterait alors le moment angulaire des oscillations du centre de masse. Partant de là, Barut et Zanghi (Ref.40) avaient proposé un modèle pour l'électron, caractérisé par le Lagrangien suivant :

$$L = \left(\frac{i\lambda}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}z - \overline{z}\dot{z}\right) + p_\mu\left(\dot{x}^\mu - \overline{z}\gamma^\mu z\right) + eA_\mu\overline{z}\gamma^\mu z. \tag{1.29}$$

La dynamique interne est simplement représentée par un couple de variables conjuguées $(z, -i\overline{z}) \in \mathbb{C}^4$. Ce sont des spineurs de Dirac, avec $\overline{z} = z^\dagger\gamma^0$. La dynamique externe, quant à elle, est décrite par le couple $(x, p) \in M^4$ de l'espace de phase habituel. L'espace des configurations est alors $M^4 \otimes \mathbb{C}^4$, et les deux couples de variables sont des fonctions d'un même paramètre temps τ, invariant, et représentant le temps propre. Notons aussi que A_μ représente le champ électromagnétique extérieur, et γ^μ les matrices 4×4 de Dirac. Le paramètre λ étant une constante qui a la dimension d'une action, et qui prend les valeurs $(+1)$ et (-1), respectivement pour la particule et l'antiparticule.

Les équations de mouvement sont (pour $\lambda = 1$) :

$$\begin{cases} \dot{z} = i\widehat{\pi}z, \\ \dot{\overline{z}} = -i\,\overline{z}\widehat{\pi}, \\ \dot{x}_\mu = \overline{z}\gamma_\mu z = v_\mu, \\ \dot{\pi}_\mu = eF_{\mu\nu}v^\nu, \end{cases} \tag{1.30}$$

avec $\widehat{\pi} = (p_\mu - eA_\mu)\,\gamma^\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, alors que les points sur les variables représentent les dérivées par rapport à τ.

Les solutions des équations classiques pour z et $\overline{z}$, dans le cas libre $(A = 0)$, sont :

$$\begin{cases} z(\tau) = [\cos m\tau - i\gamma^{\mu}(p_{\mu}/m)\sin m\tau]\, z(0), \\ \overline{z}(\tau) = \overline{z}(0)[\cos m\tau + i\gamma^{\mu}(p_{\mu}/m)\sin m\tau], \end{cases} \tag{1.31}$$

tandis que, pour $\dot{x}$, une solution possible s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}_{\mu} = \frac{p_{\mu}}{m^2}H + \left[\dot{x}_{\mu}(0) - \frac{p_{\mu}}{m^2}H\right]\cos 2m\tau + \frac{\ddot{x}_{\mu}(0)}{2m}\sin 2m\tau\ , \tag{1.32}$$

avec

$$H = \dot{x}_{\mu}p^{\mu} = cte. \tag{1.33}$$

La solution pour $\dot{x}_{\mu}$traduit l'analogue classique du phénomène dit "Zitterbewegung", ou oscillations propres, avec la fréquence caractéristique $\omega = 2m$. D'un autre côté, les solutions pour $\overline{z}(\tau)$ et $z(\tau)$ impliquent que :

$$\overline{z}(\tau)\ z(\tau) = \overline{z}(0)\, z(0), \forall\tau. \tag{1.34}$$

Ce résultat est en accord avec la théorie de Dirac, où le spin est une constante de mouvement, sous toutes les conditions.

Il est commode aussi d'adopter, à la place des variables $\overline{z}$ et z, l'ensemble des variables x_{μ}, π_{μ}, v_{μ} et $S_{\mu\nu}$, avec

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\overline{z}\left[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\right] z. \tag{1.35}$$

La dernière quantité représente le tenseur de spin, rencontré dans la théorie de Dirac. Dans ce cas, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\pi}_{\mu} = eF_{\mu\nu}v^{\nu}, \\ \dot{x}_{\mu} = v_{\mu}, \\ \dot{v}_{\mu} = 4S_{\mu\nu}\ \pi^{\nu}\ , \\ \dot{S}_{\mu\nu} = v_{\mu}\ \pi_{\nu} - v_{\nu}\ \pi_{\mu}. \end{cases} \tag{1.36}$$

La première équation n'est rien d'autre que l'équation de Lorentz, alors que la dernière indique la conservation du moment angulaire total, à savoir que :

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}. \tag{1.37}$$

A ce stade, et si on devait établir une comparaison, on pourra déjà relever que des conditions telles que $\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu} = 1$, $\dot{x}^{\mu}S_{\mu\nu} = 0$, ou bien $S^2 = 1$, imposées dans la plupart des modèles phénoménologiques, ne sont pas nécessaires dans le cas du modèle de Barut-Zanghi.

Il est remarquable de relever que le Lagrangien du modèle de Barut-Zanghi peut bien se réduire au cas d'une particule sans spin (scalaire). En effet, en omettant la quantité $\left(\frac{i\lambda}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}z - \overline{z}\dot{z}\right)$ dans (1.29), d'une part, et considérant la limite $\overline{z}\gamma^{\mu}z \rightarrow (p^{\mu} - eA^{\mu})\,\overline{z}z$, avec $\overline{z}z = \frac{1}{2}$ ($\overline{z}z$ étant toujours une constante), il en résulte alors que :

$$L_{scl} = p.\dot{x} - \frac{1}{2}p^2 + ep.A - \frac{e^2}{2}A^2, \tag{1.38}$$

c'est à dire, le Lagrangien de la théorie scalaire.

Chapitre 2

La particule de Dirac dans le formalisme des intégrales de chemins

2.1 Le formalisme de Fradkin-Gitman

La fonction de Green causale, pour le cas d'une particule avec spin, en interaction avec un champ extérieur, est formulée comme suit :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^c\left(x_1,x_0\right) = \exp\left(i\gamma^n\frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right)\int_0^{\infty}de_0\int d\chi_0\int DxDeDp_eD\chi Dp_\chi D\psi M\left(e\right)\\ \exp\left\{i\int_0^1\left[-\frac{\dot{x}^2}{2e}-\frac{e}{2}m^2-g\dot{x}A\left(x\right)+iegF_{\mu\nu}\left(x\right)\psi^\mu\psi^\nu\right.\right.\\ \left.+i\left(\frac{\dot{x}_\alpha\psi^\alpha}{e}-m\psi^5\right)\chi-i\psi_n\dot{\psi}^n+p_\chi\dot{\chi}+p_e\dot{e}\right]d\tau\\ \left.+\psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)\right\}|_{\theta=0}\,.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dans cette formulation x, e et p_e sont des variables bosoniques (commutent), tandis que, les quantités θ, χ, p_χ et ψ sont des variables de Grassmann (anticommutent). En outre, nous avons les conditions initiales suivantes :

$$x\left(0\right)=x_a, x\left(1\right)=x_b, e\left(0\right)=e_0, \chi\left(0\right)=\chi_0, \psi\left(1\right)+\psi\left(0\right)=\theta.\tag{2.2}$$

En séparant le terme $\int_0^1\left[p_\chi\dot{\chi}+p_e\dot{e}\right]d\tau$ ainsi que $\psi_n\left(1\right)\psi^n\left(0\right)$, l'action est alors donnée par :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{e}{2}m^2 - g\dot{x}A(x) + iegF_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu \right. \\ &\quad \left. + i\left(\frac{\dot{x}_\alpha\psi^\alpha}{e} - m\psi^5\right)\chi - i\psi_n\dot{\psi}^n \right] d\tau. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par conséquent, les équations de mouvement classiques sont :

$$\frac{1}{e^2}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - i\dot{x}_\alpha\psi^\alpha\chi\right) + F_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu - \frac{m^2}{2} = 0, \tag{2.4}$$

$$i\left(\frac{\dot{x}_\mu\psi^\mu}{e} - m\psi^5\right)\chi = 0, \tag{2.5}$$

$$2i\dot{\psi}_\mu + 2iegF_{\mu\nu}(x)\psi^\nu - i\frac{\dot{x}_\mu}{e}\chi = 0, \tag{2.6}$$

$$-2i\psi^5 + im\chi = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_\alpha}{e}\right) + \dot{x}^\mu F_{\mu\alpha}(x) + ieg\frac{d}{dx^\alpha}F_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu = 0. \tag{2.8}$$

2.2 Le formalisme de Barut-Duru

Pendant une longue période, le calcul du propagateur de Dirac, par la technique des intégrales de chemins, a buté sur un problème majeur : l'action classique en l'occurence. Comme l'avait souligné Feynman (Ref.24), la nature purement quantique du spin rend peu crédible toute représentation de cette quantité par des trajectoires continues.

En intégrales de chemins, et dans le cadre de la théorie des perturbations, il a été montré (Ref.43) que le modèle de Barut-Zanghi est suffisant pour décrire la plupart des processus d'interactions connus en QED. Aussi, pour le cas de la particule libre, le propagateur est déductible, par intégrations successives, d'après l'expression (Ref.42)

$$K(x_b, x_a) = -\left(\frac{i}{\lambda}\right)\int_0^\infty d\tau \exp\left(-i\frac{\tau}{\lambda}m\right)K^\tau(x_b, x_a), \tag{2.9}$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
K^{\tau}(x_b, x_a) &= \int Dp\, Dx \int D\overline{z}\, Dz \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}z\right)|_{\tau_a}^{\tau_b}\right] \\
&\exp\left\{i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}\, z - \overline{z}\dot{z}\right)\right.\right. \\
&\left.\left. -\overline{z}\left(\gamma.p\right) z\right]\right\}. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

La discrétisation de l'intervalle $[0, \tau]$ en $(N+1)$ micro-intervalles de longueurs élémentaires ε conduit à l'élement de matrice suivant :

$$
\begin{aligned}
K^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1}, x_0) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \prod_{j=1}^{N+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right) d\overline{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j \int \prod_{j=1}^{N+1}\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\prod_{j=1}^{N} d^4x_j \\
&\exp\sum_{j=1}^{N+1}\left\{ip^{\mu}_j\left(x_j - x_{j-1}\right)_{\mu}\right. \\
&-\left(\frac{\lambda}{2i}\right)\left[\left(\overline{z}^{\beta}_j - \overline{z}^{\beta}_{j-1}\right)\delta_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j - \overline{z}^{\beta}_j\delta_{\beta\alpha}\left(z^{\alpha}_j - z^{\alpha}_{j-1}\right)\right] \\
&\left.- i\varepsilon p_{\mu J}\overline{z}^{\beta}_j\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j\right\}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Notations :

$x_{N+1} = x_b, x_0 = x_a$

$\tau_b - \tau_a = \tau = (N+1)\,\varepsilon.$

L'intégration par rapport aux variables x_j donne :

$$
\begin{aligned}
K^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1}, x_0) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \prod_{j=1}^{N+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right) d\overline{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j \int \prod_{j=1}^{N+1}\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \\
&\delta\left(p_{N+1} - p_N\right)\delta\left(p_N - p_{N-1}\right)...\delta\left(p_2 - p_1\right)\exp\left[i\left(p_{N+1}x_{N+1} - p_1x_0\right)\right] \\
&\exp\sum_{j=1}^{N+1}\left\{-\left(\frac{\lambda}{2i}\right)\left[\left(\overline{z}^{\beta}_j - \overline{z}^{\beta}_{j-1}\right)\delta_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j - \overline{z}^{\beta}_j\delta_{\beta\alpha}\left(z^{\alpha}_j - z^{\alpha}_{j-1}\right)\right]\right. \\
&\left.- i\varepsilon p_{\mu j}\ \overline{z}\ {}^{\beta}_{j}\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j\right\} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

La présence des deltas de Dirac indique la conservation du 4-moment de la particule ; i.e

$$\begin{cases} p_{N+1} = p_N \\ p_N = p_{N-1} \\ . \\ . \\ . \\ p_2 = p_1 = p = const, \end{cases} \tag{2.13}$$

et par suite, l'intégration par rapport aux variables p_j donne :

$$\begin{aligned} K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1}, x_0\right) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \exp\left[ip^{\mu}\left(x_{n+1}-x_0\right)_{\mu}\right] \\ & \int \prod_{j=1}^{N+1} \left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right) d\bar{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j \\ & \exp \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ -\left(\frac{\lambda}{2i}\right) \left[\left(\bar{z}^{\beta}_j - \bar{z}^{\beta}_{j-1}\right) \delta_{\beta\alpha} z^{\alpha}_j - \bar{z}^{\beta}_j \delta_{\beta\alpha} \left(z^{\alpha}_j - z^{\alpha}_{j-1}\right)\right] \right. \\ & \left. - i\varepsilon p_{\mu}\ \bar{z}^{\beta}_j\ \gamma^{\mu}_{\beta\alpha} z^{\alpha}_j \right\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Revenons à la forme compactée de l'expression ci-dessus et écrivons :

$$\dot{\bar{z}}z - \bar{z}\dot{z} = \frac{d\left(\bar{z}z\right)}{d\tau} - 2\bar{z}\dot{z}. \tag{2.15}$$

En l'incorporant dans l'expression généralisée de $K^{\tau}_{\beta\alpha}$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} & K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1}, x_0\right) = \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \exp\left[ip^{\mu}\left(x_{n+1}-x_0\right)_{\mu}\right] \\ & \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \prod_{j=1}^{N+1} \left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\bar{z}^{\beta}\delta_{\beta\alpha}z^{\alpha}\ \Big|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] d\bar{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j \\ & \exp \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \lambda \bar{z}^{\beta}_j \delta_{\beta\alpha}\left(z^{\alpha}_j - z^{\alpha}_{j-1}\right) - i\varepsilon p_{\mu}\ \bar{z}^{\beta}_J\ \gamma^{\mu}_{\beta\alpha} z^{\alpha}_j \right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

D'aprés les équations de mouvement, on a $\bar{z}z = const$. De ce fait, l'expression ci-dessus se rapporte simplement à :

$$\begin{aligned}K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1},x_0\right) &= \int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_{n+1}-x_0\right)_{\mu}\right]\\&\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\prod_{j=1}^{N+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)d\bar{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j\\&\exp\sum_{j=1}^{N+1}\left\{\lambda\bar{z}^{\beta}_j\delta_{\beta\alpha}\left(z^{\alpha}_j-z^{\alpha}_{j-1}\right)-i\varepsilon p_{\mu}\ \bar{z}^{\beta}_j\ \gamma^{\mu}_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j\right\}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

De là, on peut écrire :

$$\begin{aligned}K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1},x_0\right) &= \int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_{n+1}-x_0\right)_{\mu}\right]\\&\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\prod_{j=1}^{N+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)d\bar{z}^{\beta}_j dz^{\alpha}_j\\&\prod\exp\left\{-i\bar{z}^{\beta}_j\left[\left(i\lambda I+\varepsilon p.\gamma\right)_{\beta\alpha}z^{\alpha}_j-i\lambda\delta_{\beta\alpha}z^{\alpha}_{j-1}\right]\right\}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

On intègre, formellement, par rapport aux variables $\bar{z}^{\beta}_j$ et on obtient :

$$\begin{aligned}&K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1},x_0\right)=\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_{n+1}-x_0\right)_{\mu}\right]\\&\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\prod_{j=1}^{N+1}\frac{dz^{\alpha}_j}{\left[I+\frac{\varepsilon}{i\lambda}\gamma.p\right]_{\beta\alpha}}\delta\left\{z^{\alpha}_j-i\lambda\delta_{\beta\alpha}\left[\left(i\lambda I+\varepsilon p.\gamma\right)^{-1}\right]_{\beta\alpha}z^{\alpha}_{j-1}\right\}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

L'intégration par rapport aux z_j en présence des fonctions delta conduit à :

$$\begin{aligned}K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{n+1},x_0\right) &= \int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_b-x_a\right)_{\mu}\right]\\&\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\prod_{j=1}^{N+1}\frac{1}{\left[I+\frac{\varepsilon}{i\lambda}\gamma.p\right]_{\beta\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Le quadri-moment étant constant, à la limite et à l'ordre ε on a :

$$K^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right)=\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_b-x_a\right)_{\mu}\right]\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right)_{\beta\alpha},\tag{2.21}$$

ou bien, simplement

$$K^{\tau}\left(x_b,x_a\right)=\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_b-x_a\right)_{\mu}\right]\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right). \tag{2.22}$$

Finalement, en remplaçant dans(2.9) et en intégrant par rapport au temps total de transition, on obtient :

$$K\left(x_b,x_a\right)=\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip^{\mu}\left(x_b-x_a\right)_{\mu}\right]\frac{1}{\gamma.p-m}. \tag{2.23}$$

C'est exactement le propagateur libre de Dirac pour l'électron.

Il est important de souligner, qu'en présence d'un champ extérieur, le calcul devient vite inextricable. Il devient nécessaire alors de rechercher une formulation qui permet, chaque fois que possible, d'obtenir un résultat exact. Notre démarche, au final, tend à déduire la fonction de Green sur la base de la forme générale des deux expressions (2.9) et (2.10). C'est justement l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Reconstruction du modèle de Barut-Zanghi

Nous avons souligné, dans le chapitre précédent, la difficulté à exploiter le modèle de Barut-Zanghi, en dehors de la technique perturbative. Plus précisément, sachant que le cas libre, seul, admet une solution exacte, c'est manifestement le terme de couplage spin-champ qui constitue l'obstacle majeur. Le présent travail a pour ambition de proposer une solution raisonnable, à ce problème, par l'adaptation de certaines techniques mathématiques, au demeurant, bien connues. En pratique, l'approche proposée n'est rien d'autre que la reconfiguration du problème initial en celui de la particule libre, par le biais d'une transformation, à l'évidence matricielle, agissant sur l'hamiltonien de Dirac. Cependant, l'introduction de cette transformation ne peut objectivement se réaliser que par la reconstruction du modèle de Barut-Zanghi. Si $A(q)$ représente le champ, lequel, de façon très générale, dépend de la variable q, le point de départ sera l'équation de Dirac que doit vérifier la fonction de Green :

$$\left(-i\gamma.\partial_b - e\,\gamma.A\left(q_b\right) - m\right) G\left(x_b, x_a\right) = \delta\left(x_b - x_a\right). \tag{3.1}$$

Le symbole γ représente les matrices de Dirac, e étant la charge électrique et m la masse de la particule. Dans ce qui suit, et pour toutes les applications à venir, on adoptera la métrique $diag\left(-,+,+,+\right)$.

En notant $G\left(x_b, x_a\right) = \left\langle x_b\right| G \left|x_a\right\rangle$, l'équation ci dessus se met alors sous la forme suivante :

$$\left(\gamma.\widehat{p} - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right) - m\right) G = I, \tag{3.2}$$

où le symbole I désigne la matrice unité, tandis que, $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$ sont des opérateurs.

Maintenant, soit T une fonction qui dépend de l'opérateur $\widehat{q}$, telle que :

$$T.T^{-1} = I. \tag{3.3}$$

En outre, la fonction T peut bien dépendre d'un autre opérateur, soit $\widehat{Q}$, lequel, est généralement une fonction de l'opérateur $\widehat{p}$. Cependant, afin d'éviter tout problème d'ordre pour les opérateurs, il est nécessaire d'imposer la condition suivante :

$$\left[\widehat{q}, \widehat{Q}\right] = 0. \tag{3.4}$$

Aussi, la fonction T doit en principe dépendre des matrices gamma de Dirac. Ainsi, la forme générale de la fonction T s'écrit :

$$T = T\left(\widehat{q}, \widehat{Q}, \gamma\right). \tag{3.5}$$

Finalement, il est exigé que, dans le cas de la particule libre, les fonctions T et T^{-1}se réduisent à la matrice unité.

Sous ces conditions, et à partir de la relation (3.2), il est possible d'écrire

$$T\left(\gamma.\widehat{p} - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right) - m\right) T^{-1} T G = T, \tag{3.6}$$

de sorte que

$$G = T^{-1} \frac{I}{T\left(\gamma.\widehat{p} - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right) - m\right) T^{-1}} T. \tag{3.7}$$

Si la particule de Dirac effectue alors une transition entre deux états quelconques, représentés par les coordonnées x_a et x_b de l'espace-temps ($t_b > t_a$), nous aurons :

$$G\left(x_b, x_a\right) = \left\langle x_b\right| T_b^{-1} \frac{I}{T\left(\gamma.\widehat{p} - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right) - m\right) T^{-1}} T_a \left|x_a\right\rangle, \tag{3.8}$$

avec

$$\begin{cases} T_b^{-1} = T^{-1}\left(\widehat{q}_b, \widehat{Q}_b, \gamma\right), \\ T_a = T\left(\widehat{q}_a, \widehat{Q}_a, \gamma\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Par suite, la relation(3.8) peut bien se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} G\left(x_b, x_a\right) = &-\left(\frac{i}{\lambda}\right) \int_0^{\infty} d\tau \exp\left(-i\frac{\tau}{\lambda} m\right) \\ &\times \left\langle x_b\right| T_b^{-1} \exp\left[i\frac{\tau}{\lambda} T\left(-i\gamma.\partial - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right)\right) T^{-1}\right] T_a \left|x_a\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où, le paramètre τ représente le temps total de transition, $\tau = \tau_b - \tau_a$, tandis que λ est un paramètre qui a la dimension d'une action. En terme plus clair, nous pouvons réécrire cette relation sous la forme :

$$G\left(x_b, x_a\right) = -\left(\frac{i}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} d\tau \exp\left(-i\frac{\tau}{\lambda}m\right) G^{\tau}\left(x_b, x_a\right), \tag{3.11}$$

avec

$$G^{\tau}\left(x_b, x_a\right) = \left\langle x_b\right| T_b^{-1} \exp\left[i\frac{\tau}{\lambda}T\left(-i\gamma.\partial - e\,\gamma.A\left(\widehat{q}\right)\right)T^{-1}\right] T_{\,a}\left|x_a\right\rangle. \tag{3.12}$$

La relation (3.11) ressemble bien à (2.9). Elle constitue donc l'ultime étape dans le calcul de la fonction de Green, une fois déterminée l'expression de $G^{\tau}\left(x_b, x_a\right)$, par intégrations successives.

Maintenant, il est clair que $G^{\tau}\left(x_b, x_a\right)$ comprend l'essentiel de l'information sur le système physique étudié, et c'est sur cette partie que nous focalisons notre attention. Commençons d'abord par subdiviser l'intervalle de temps de transition en micro-intervalles, de longueurs infinitésimales, tel que :

$$\tau = \tau_b - \tau_a = (n+1)\,\epsilon, \tag{3.13}$$

où, le paramètre ϵ représente la longueur de chaque intervalle.

Notation :

$$\begin{cases} x_b = x_{n+1}, \\ x_a = x_0. \end{cases}$$

En introduisant la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mid x\rangle\langle x \mid = 1$ dans chaque intervalle, et à l'ordre ϵ, nous obtenons :

$$\begin{aligned} G^{\tau}\left(x_{n+1}, x_0\right) \simeq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \prod_{j=1}^{n}\int d^4x_j \prod_{j=1}^{n+1}\int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \exp\left[ip_j.\left(x_j - x_{j-1}\right)\right] \\ \times\left(T_{n+1}^{-1}\right)\left\{\prod_{j=1}^{n+1}\left[I + i\frac{\varepsilon}{\lambda}\left(T_j\right)\left(\gamma.p_j\ - e\gamma.A\left(q_j\right)\right)\left(T_j^{-1}\right)\right]\right\}\left(T_0\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dans l'intervalle $[x_j, x_{j-1}]$, la fonction delta de Dirac est représentée par :

$$\delta\left(x_j - x_{j-1}\right) = \int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \exp\left[ip_j.\left(x_j - x_{j-1}\right)\right], \tag{3.15}$$

où, le quadrivecteur p est constant.

Etant donné que $G^{\tau}(x_{n+1},x_0)$ est une matrice, considérons alors l'élément $G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1},x_0)$. Evidemment, nous aurons :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1},x_0) &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \prod_{j=1}^{n}\int d^4x_j \prod_{j=1}^{n+1}\int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\exp\left[ip_j.(x_j-x_{j-1})\right] \\ &\times\sum_{\sigma,\rho}\left(T^{-1}_{n+1}\right)_{\beta\sigma}\left\{\prod_{j=1}^{n+1}\left[I+i\frac{\varepsilon}{\lambda}(T)_j\left(\gamma.p_j-e\gamma.A(q_j)\right)\left(T^{-1}\right)_j\right]_{\sigma\rho}\right\}(T_0)_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Maintenant, dans l'expression ci-dessus, focalisons notre attention sur la quantité entre crochets. A l'ordre ϵ, nous pouvons toujours écrire :

$$\left\{\delta_{\sigma\rho}+i\frac{\varepsilon}{\lambda}\left[T_j\left(\gamma.p_j-e\gamma.A_j\right)T_j^{-1}\right]_{\sigma\rho}\right\}=\left\{\delta_{\sigma\rho}-i\frac{\varepsilon}{\lambda}\left[T_j\left(\gamma.p_j-e\gamma.A_j\right)T_j^{-1}\right]_{\sigma\rho}\right\}^{-1}. \tag{3.17}$$

Sous cette forme, nous pouvons exprimer cet élément de matrice par une intégrale, par rapport à de nouvelles variables complexes. En effet, on écrit :

$$\int\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)d\overline{z}^j_{\sigma}dz^j_{\rho}\exp\lambda\left\{\overline{z}^j_{\sigma}\left[\delta_{\sigma\rho}z^j_{\rho}-i\frac{\varepsilon}{\lambda}\left(T_j\left(\gamma.p_j-e\gamma.A_j\right)T_j^{-1}\right)_{\sigma\rho}z^j_{\rho}-\delta_{\sigma\rho}z^{j-1}_{\rho}\right]\right\}. \tag{3.18}$$

Les variables complexes en question, ne sont rien d'autre que des spineurs de Dirac, tels que :

$$\begin{cases} \overline{z}=z^{\dagger}\gamma^0, \\ \left[i\overline{z}_{\sigma},z_{\rho}\right]=\delta_{\sigma\rho}. \end{cases} \tag{3.19}$$

De plus, ces spineurs dépendent uniquement du temps :

$$\begin{cases} \overline{z}=\overline{z}(\tau), \\ z=z(\tau). \end{cases} \tag{3.20}$$

Par conséquent, l'élément de matrice $G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1},x_0)$, dans sa forme discrète, se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1},x_0) &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\prod_{j=1}^{n+1}\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}\int\prod_{j=1}^{n}d^4x_j\sum_{\sigma,\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)d\overline{z}^j_{\sigma}dz^j_{\rho} \\ & \left(T^{-1}_{n+1}\right)_{\beta\sigma}.\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n+1}\left[p_j.(x_j-x_{j-1})\right.\right. \\ & +\frac{\lambda}{i}\,\overline{z}^j_{\sigma}\,\delta_{\sigma\rho}\left(z^j_{\rho}-z^{j-1}_{\rho}\right) \\ & \left.\left.-\varepsilon\,\overline{z}^j_{\sigma}\left(T_j\left(\gamma.p_j-e\gamma.A(q_j)\right)T_j^{-1}\right)_{\sigma\rho}z^j_{\rho}\right]\right\}.(T_0)_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Quant à la forme compacte, cette dernière peut se rapporter à :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) &= \int Dp\, Dx \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_{\sigma}\, Dz_{\rho} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_{\sigma}\delta_{\sigma\rho}z_{\rho}\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\times \left(T_b^{-1}\right)_{\beta\sigma} \exp\left\{i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_{\sigma}\delta_{\sigma\rho}\, z_{\rho} - \overline{z}_{\sigma}\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_{\rho}\right)\right.\right. \\ &\left.\left. -\overline{z}_{\sigma}\left(\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}.p - e\,\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}.A\right)z_{\rho}\right]\right\}\left(T_a\right)_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

De façon plus générale, nous écrivons

$$\begin{aligned} G^{\tau}\left(x_b, x_a\right) &= \int Dp\, Dx \int D\overline{z}\, Dz \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}z\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\times \left(T_b^{-1}\right) \exp\left\{i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}\, z - \overline{z}\dot{z}\right)\right.\right. \\ &\left.\left. -\overline{z}\left(\widetilde{\gamma}.p - e\,\widetilde{\gamma}.A\right)z\right]\right\}\left(T_a\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Il est clair que c'est en associant (3.23) avec (3.11) que le résultat final est déterminé.

Dans la dernière expression, nous avons introduits une nouvelle représentation (notation) pour les matrices gamma de Dirac, telle que :

$$\widetilde{\gamma}^{\mu} = T\,\gamma^{\mu}\,T^{-1}. \tag{3.24}$$

Le Lagrangien du modèle reconstruit est donc :

$$L = p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}\, z - \overline{z}\dot{z}\right) - \overline{z}\left(\widetilde{\gamma}.p - e\,\widetilde{\gamma}.A\right)z. \tag{3.25}$$

Ce dernier présente de grandes similitudes avec celui de Barut-Zanghi. Par ailleurs, puisque dans le cas libre ($A = 0$) nous avons $T = T^{-1} = I$, c'est à dire lorsque $\widetilde{\gamma}^{\mu} \to \gamma^{\mu}$, les équations de mouvement sont :

$$\begin{cases} \dot{p}^{\mu} = 0 \to p = const, \\ \dot{x}^{\mu} = \overline{z}\gamma^{\mu}z, \\ \dot{\overline{z}} = -i\overline{z}\gamma^{\mu}p_{\mu}, \\ \dot{z} = i\gamma^{\mu}p_{\mu}z. \end{cases} \tag{3.26}$$

De plus, si on considère que $H = m$ (particule libre), alors, suivant le modèle de Barut-Zanghi, la solution pour la quadrivitesse se présente sous la forme (1.32), où on reconnaît la description de Schrödinger (Ref..41) à propos du mouvement de l'électron, à savoir, la superposition du mouvement de translation du centre de masse et d'un terme oscillant, lequel, justement, fournit une interprétation du degré de liberté de spin.

La construction qui vient d'être faite, en considérant les conditions imposées, est très générale. Lorsque la transformation T est déterminée (ou connue), les expressions (3.23) et (3.11) sont susceptibles de donner un résultat exact. Dans le chapitre suivant, justement, nous allons aborder quelques applications, pour lesquelles, la détermination de la transformation T ne pose pas un problème majeur.

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous allons aborder certains cas d'interactions, pour lesquels, une solution exacte est possible. Eu égard aux conditions imposées lors de la construction, il a été constaté que le cas d'interaction le plus simple est celui où le champ se présente sous la forme d'ondes planes. A ce titre, nous allons considérer, dans un premier temps, le cas d'une onde plane électromagnétique, puis, le cas de deux ondes planes électromagnétiques dont les vecteurs d'ondes sont orthogonaux, et finalement, le cas d'un champ gravitationnel faible. Pour les autres cas d'interaction, le problème est toujours sous investigation.

4.1 Cas de l'onde plane électromagnétique

La résolution de l'équation de Dirac, pour le cas d'une onde plane électromagnétique, a été réalisée, la première fois, par Volkov ([64]). Depuis, ces solutions ont été très largement utilisées, principalement, dans l'étude des processus de diffusion en présence des champs intenses. Ainsi, les solutions de Volkov ont été utilisées dans l'évaluation des modifications induites par un maser ([65]) dans la diffusion photoélectrique, ou bien, pour l'étude de la diffusion multi photonique relativiste dans le processus inverse du rayonnement de freinage ([66]), ou alors, pour la généralisation du processus de diffusion de Klein-Nishina, pour inclure une dépendance explicite par rapport à l'intensité du champ externe ([67]). Il faut signaler aussi que l'usage des solutions de Volkov demeure controversé. A titre d'exemple, l'existence de l'effet Compton non linéaire est conditionnée par la représentation de l'électron, avant et après l'interaction, par des états libres (voir Ref. 67). Cependant, les solutions de Volkov présentent deux aspects remarquables. Le premier réside dans ce qui a été montré par Volkov lui-même (Ref. 64), à savoir, que la solution pour le cas de la particule de Dirac, implique une solution similaire pour une particule de spin zéro (Klein-Gordon). Le second aspect est celui élucidé par Taub ([68]), à savoir, que les solutions pour le cas de l'onde plane électromagnétique peuvent bien être déduites à partir de la solution libre, moyennant une transformation de Lorentz. Bien plus tard, il a été montré, toujours pour le cas de l'onde plane, que pour les particules de spin ≤ 1, les solutions peuvent toutes se rapporter à la forme ([69])

$$\Psi(x) = ULT\chi(x), \tag{4.1}$$

où $\chi(x)$ représente la solution libre, alors que ULT représente le produit de transformations de jauge locale (U), de Lorentz (L) et de déplacement (T).

C'est ce dernier aspect, surtout, qui a été adapté, pour le cas de la fonction de Green causale sachant que c'est une matrice. Pour rappel, le cas de l'onde plane électromagnétique est caractérisé par la quantité $\phi = k_\mu x^\mu$, k_μ étant le vecteur d'onde et x^μ le quadrivecteur position. Aussi, en attribuant une masse nulle au photon (au repos), il en découle que :

$$k_\mu k^\mu = 0. \tag{4.2}$$

Dans ce cas, la jauge de Lorentz s'écrit

$$\partial_\mu A^\mu (k.x) = \frac{dk.A}{k.x} = 0. \tag{4.3}$$

Cette condition implique que $k.A = Cte$. Par soucis de simplicité, nous choisirons cette constante nulle. Par conséquent, et pour ce qui va suivre, nous aurons toujours

$$k.A = 0. \tag{4.4}$$

Maintenant, sachant que dans le cas de l'onde plane nous avons :

$$\widehat{q} = k.\widehat{x}, \tag{4.5}$$

alors, exploitant la condition (3.4), nous choisissons :

$$\widehat{Q} = k.\widehat{p}. \tag{4.6}$$

C'est à dire, que nous avons bien

$$[k.\widehat{p}, k.\widehat{x}] = 0. \tag{4.7}$$

La forme générale de la transformation T est donc :

$$T = T\left(k.\widehat{x}, k.\widehat{p}, \gamma\right). \tag{4.8}$$

Comme indiqué plus haut, le rôle essentiel de la transformation T consiste en la reconfiguration du problème initial en celui de la particule libre. En pratique, cela revient à éliminer la quantité $\not{A} = \gamma.A$. Le résultat recherché se présente, en principe, sous la forme suivante :

$$T\left(\not{p} - e\not{A}\right)T^{-1} \rightarrow \not{p} + terme$$

De façon générale, les quantités en présence sont $\not{p}$, $\not{A}$ et $\not{k}$, en plus de leurs combinaisons. A l'analyse, il est raisonnable de chercher une solution du genre

$$T\left(\not{p} - e\not{A}\right)T^{-1} = \not{p} + \theta\left(k.x, k.p\right)\not{k}, \tag{4.9}$$

où, la quantité $\theta\left(k.x, k.p\right)$ est sans matrice de Dirac. Le choix exprimé ci-dessus est justifié par le fait que, le vecteur d'onde k^{μ} étant constant, il est possible de redéfinir la quantité $p^{\mu} + \theta k^{\mu}$ en p^{μ}. Cela s'appelle un "Shift".

Il n'est pas difficile de remarquer que :

$$\left[\not{k}\not{A}, \not{p}\right] = 2p.A\not{k} - 2k.p\not{A}, \tag{4.10}$$

et,

$$\left[\not{k}\not{A}, \not{A}\right] = 2A^2\not{k}, \tag{4.11}$$

où, dans les deux cas, la propriété suivante a été utilisé :

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2ab. \tag{4.12}$$

Par conséquent, en rappelant que dans le cas libre la transformation T se réduit à la matrice unité, il n'est pas difficile de voir que pour :

$$T = I - \frac{e}{2\,k.p}\not{k}\not{A}, \tag{4.13}$$

et

$$T^{-1} = I + \frac{e}{2\,k.p} \not{k} \not{A}, \tag{4.14}$$

le choix exprimé en (4.9) est réalisé, avec

$$\theta\left(k.x, k.p\right) = -\frac{1}{k.p}\left(e\; p.\; A - \frac{e^2}{2}A^2\right). \tag{4.15}$$

La transformation T étant déterminée, l'élément de matrice en (3.22) devient

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) &= \int Dp\, Dx \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma\, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)\Big|_{\tau_a}^{\tau_b}\right] \\ &\times \left[T^{-1}\left(k.p, k.x_b\right)\right]_{\beta\sigma} \exp\left\{ i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} \right.\right. \\ &+ \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma \delta_{\sigma\rho}\, z_\rho - \overline{z}_\sigma\, \delta_{\sigma\rho} \dot{z}_\rho\right) \\ &\left.\left. -\overline{z}_\sigma \left(\gamma_{\sigma\rho}.p - \frac{1}{k.p}\left(e\; p.\; A - \frac{e^2}{2}A^2\right)\gamma_{\sigma\rho}.k\right)\, z_\rho\right]\right\} \\ &\times \left[T\left(k.p, k.x_a\right)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

A ce stade, il ne reste plus que les opérations d'intégrations successives qui doivent nous mener au résultat final. Cependant, et à cause de la dépendance en $k.x$ de plusieurs facteurs, l'intégration par rapport à la variable x est inextricable. Il faut donc opérer une séparation entre $k.x$ et x. Pour ce faire, introduisons, dans l'expression ci-dessus, l'identité suivante ([70])

$$\int d\phi_b\; d\phi_a\;\; \delta\left(\phi_a - k.x_a\right)\, \delta\left(\phi_b - \phi_a - k.\left(x_b - x_a\right)\right) = 1. \tag{4.17}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) &= \int Dp\, Dx \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma\, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)\Big|_{\tau_a}^{\tau_b}\right] \int d\phi_b\; d\phi_a \\ &\delta\left(\phi_a - k.x_a\right)\, \delta\left(\phi_b - \phi_a - k.\left(x_b - x_a\right)\right) \\ &\times \left[T^{-1}\left(k.p, \phi_b\right)\right]_{\beta\sigma} \exp\left\{ i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} \right.\right. \\ &+ \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma \delta_{\sigma\rho}\, z_\rho - \overline{z}_\sigma\, \delta_{\sigma\rho} \dot{z}_\rho\right) \\ &\left.\left. -\overline{z}_\sigma \left(\gamma_{\sigma\rho}.p - \frac{1}{k.p}\left(e\; p.\; A - \frac{e^2}{2}A^2\right)\gamma_{\sigma\rho}.k\right)\, z_\rho\right]\right\} \\ &\times \left[T\left(k.p, \phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Suivant la discrétisation adoptée, et si p_ϕ est une constante, alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\delta\left(\phi_b-\phi_a-k.\left(x_b-x_a\right)\right) &= \int\prod_{j=1}^{N}d\phi_j\prod_{j=1}^{N+1}\delta\left(\Delta\phi_j-k.\Delta x_j\right)\\ &= \int\prod_{j=1}^{N}d\phi_j\int\prod_{j=1}^{N+1}\frac{dp_{\phi j}}{2\pi}\exp\left[ip_{\phi j}\left(\Delta\phi_j-k.\Delta x_j\right)\right],\end{aligned}\tag{4.19}$$

où, $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$ et $\Delta\phi_j=\phi_j-\phi_{j-1}$. L'élément de matrice en (4.18), après arrangement, devient :

$$\begin{aligned}G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) = & \int Dp\,Dx\int D\phi\,Dp_\phi\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\\ & \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|_{\tau_a}^{\tau_b}\right]\int d\phi_b\,d\phi_a\delta\left(\phi_a-k.x_a\right)\\ & \times\left[T^{-1}\left(k.p,\phi_b\right)\right]_{\beta\sigma}\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(p-p_\phi k\right).\dot{x}+p_\phi\dot{\phi}\right.\right.\\ & +\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\\ & \left.\left.-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p-\frac{1}{k.p}\left(e\,p.\,A-\frac{e^2}{2}A^2\right)\gamma_{\sigma\rho}.k\right)\,z_\rho\right]\right\}\\ & \times\left[T\left(k.p,\phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

En changeant $p-p_\phi k$ en p, et en intégrant ensuite par rapport à x et p, respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned}G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) = & \int\frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\,p.\left(x_b-x_a\right)\right]\int D\phi\,Dp_\phi\\ & \sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|_{\tau_a}^{\tau_b}\right]\\ & \int d\phi_b\,d\phi_a\,\delta\left(\phi_a-k.x_a\right)\\ & \times\left[T^{-1}\left(k.p,\phi_b\right)\right]_{\beta\sigma}\\ & \times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[p_\phi\dot{\phi}+\right.\right.\\ & +\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\\ & \left.\left.-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+\left(p_\phi+\theta\right)\gamma_{\sigma\rho}.k\right)z_\rho\right]\right\}\\ & \times\left[T\left(k.p,\phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Par suite, on transforme $p_\phi + \theta\left(k.p,\phi\right)$ en p_ϕ de sorte à avoir :

$$\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\,p.\left(x_b-x_a\right)\right]\int D\phi\, Dp_\phi \\
&\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\ Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
&\int d\phi_b\, d\phi_a\, \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) \\
&\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi\left(e\,p.\,A\left(\phi\right)-\frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\
&\times\left[T^{-1}\left(k.p,\phi_b\right)\right]_{\beta\sigma} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[p_\phi\dot{\phi}\right.\right. \\
&+\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right) \\
&\left.\left.\quad-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+\gamma_{\sigma\rho}.kp_\phi\right)z_\rho\right]\right\} \\
&\times\left[T\left(k.p,\phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}, \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

ceci, sachant que la quantité $\theta\left(k.p,\phi\right)\dot{\phi}$ est une phase classique qui ne dépend que du point initial et final.

Maintenant, l'intégration par rapport aux variables ϕ et p_ϕ, respectivement, donne :

$$\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\,p.\left(x_b-x_a\right)\right]\int \frac{dp_\phi}{2\pi} \\
&\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\ Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
&\int d\phi_b\, d\phi_a\, \delta\left(\phi_a - k.x_a\right) \\
&\exp\left[i\,p_\phi\left(\phi_b-\phi_a\right)\right] \\
&\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi\left(e\,p.\,A\left(\phi\right)-\frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\
&\times\left[T^{-1}\left(k.p,\phi_b\right)\right]_{\beta\sigma} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\right.\right. \\
&\left.\left.\quad-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+\gamma_{\sigma\rho}.kp_\phi\right)z_\rho\right]\right\} \\
&\times\left[T\left(k.p,\phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

A présent, on change $p+\,k\,p_\phi$ en p. Après arrangement, on a :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\,p.\left(x_b-x_a\right)\right]\int\frac{dp_\phi}{2\pi} \\ &\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\int d\phi_b\,d\phi_a\,\delta\left(\phi_a-k.x_a\right) \\ &\exp\left[i\,p_\phi\left(\phi_b-\phi_a-k.\left(x_b-x_a\right)\right)\right] \\ &\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{\phi_a}^{\phi_b}d\phi\left(e\,p.A\left(\phi\right)-\frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\ &\times\left[T^{-1}\left(k.p,\phi_b\right)\right]_{\beta\sigma} \\ &\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p\right)z_\rho\right]\right\} \\ &\times\left[T\left(k.p,\phi_a\right)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

En intégrant par rapport à p_ϕ, ensuite, par rapport à ϕ_b et ϕ_a, respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[i\,p.\left(x_b-x_a\right)\right] \\ &\times\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\times\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}d\phi\left(e\,p.A\left(\phi\right)-\frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\ &\times\left[T^{-1}\left(k.p,k.x_b\right)\right]_{\beta\sigma} \\ &\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\,z_\rho-\overline{z}_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\right.\right. \\ &\quad\left.\left.-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p\right)z_\rho\right]\right\} \\ &\times\left[T\left(k.p,k.x_a\right)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Il reste, maintenant, à absorber par intégration les variables $\overline{z}$ et z. Pour cela, considérons, sous sa forme discrète et après arrangement, le membre réduit des intégrales de chemins suivant :

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right)d\overline{z}^j_\sigma dz^j_\rho\prod_{j=1}^{n+1}\exp\left\{\lambda\overline{z}^j_\sigma\left[\left(I-\frac{i\varepsilon}{\lambda}\gamma.p\right)_{\sigma\rho}z^j_\rho-\,\delta_{\sigma\rho}\,z^{j-1}_\rho\right]\right\}. \tag{4.26}$$

Après intégrations, successivement, par rapport à $\overline{z}$ puis à z, la forme précédente se ramène à l'exponentielle suivante :

$$\left\{\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\prod^{n+1}\left(\frac{I}{I-\left(\frac{i\varepsilon}{\lambda}\right)\gamma.p}\right)_{\sigma\rho}\right\}=\left[\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right)\right]_{\sigma\rho}. \tag{4.27}$$

L'élément de matrice en (4.25) devient :

$$\begin{aligned}G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b,x_a) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\,p.(x_b-x_a)\right]\\ &\times\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}d\phi\left(e\,p.A(\phi)-\frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right)\right]\\ &\times\sum_{\sigma,\rho}\left[T^{-1}(k.p,k.x_b)\right]_{\beta\sigma}\left[\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right)\right]_{\sigma\rho}\left[T(k.p,k.x_a)\right]_{\rho\alpha}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Ce qui revient à écrire, simplement,

$$\begin{aligned}G^{\tau}(x_b,x_a) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\,p.(x_b-x_a)\right]\\ &\times\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}d\phi\left(e\,p.A(\phi)-\frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right)\right]\\ &\times\left[T^{-1}(k.p,k.x_b)\right]\left[\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right)\right]\left[T(k.p,k.x_a)\right].\end{aligned} \tag{4.29}$$

Finalement, en insérant l'expression ci-dessus dans la relation (3.11), et après intégration par rapport au temps de transition, nous obtenons

$$\begin{aligned}G(x_b,x_a) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[ip.(x_b-x_a)\right]\\ &\times\exp\left[\frac{i}{k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}d\phi\left(e\,p.A(\phi)-\frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right)\right]\\ &\times\left(I+\frac{e}{2k.p}\not{k}\not{A}(k.x_b)\right)\\ &\times\frac{1}{(\not{p}-m)}\\ &\times\left(I-\frac{e}{2k.p}\not{k}\not{A}(k.x_a)\right).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Cette expression représente donc la fonction de Green pour un électron soumis à un champ d'une onde plane électromagnétique.

4.2 Cas de deux ondes planes électromagnétiques orthogonales

Le problème de deux ondes planes électromagnétiques, dont les directions de propagations sont orthogonales, ne diffère pas trop, de part la construction, du cas d'une seule onde plane électromagnétique. Toutefois, du point de vue du calcul pratique, de nouvelles contraintes sont induites par ce problème, en premier lieu, la condition d'orthogonalité. Concrètement, si k_1^μ et k_2^μ représentent les deux vecteurs d'ondes relatifs, la condition d'orthogonalité s'exprime alors comme

$$k_1.k_2 = 0. \tag{4.31}$$

Aussi, si $A\left(k_1.x\right)$ et $B\left(k_2.x\right)$ représentent les deux champs en question, la jauge de Lorentz conduit à

$$k_1.\,A\left(k_1.x\right) = k_2.\,B\left(k_2.x\right) = 0. \tag{4.32}$$

Pour ce qui concerne la transformation T, dans notre cas, on peut supposer, objectivement, que sa forme pourrait être :

$$T = T_1 T_2, \tag{4.33}$$

où, T_1 et T_2 représentent les transformations relatives au premier et au second champ, respectivement. Lorsque l'un des deux champs devient nul (T_1 ou T_2 égal à l'identité), le problème se réduit alors au cas d'une seule onde plane. De plus, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté à propos de l'ordre des opérateurs, pendant la construction, nous imposons la condition suivante :

$$[T_1, T_2] = 0. \tag{4.34}$$

Cela revient à choisir, lors de la construction, la forme suivante pour la transformation T :

$$T\; = T_1\left(k_1.\widehat{p}, k_1.\widehat{x}, \gamma\right) T_2\left(k_2.\widehat{p}, k_2.\widehat{x}, \gamma\right). \tag{4.35}$$

L'élément de matrice de la fonction de Green se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) \;=\; & \int Dp\, Dx \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma\, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)\Big|_{\tau_a}^{\tau_b}\right] \\ & \times \left(T_b^{-1}\right)_{\beta\sigma} \exp\left\{ i \int_0^\tau d\tau \left[p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma \delta_{\sigma\rho}\, z_\rho - \overline{z}_\sigma\, \delta_{\sigma\rho} \dot{z}_\rho\right) \right.\right. \\ & \left.\left. -\overline{z}_\sigma \left(\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}\,.\,p - e\,\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}.V\right)\, z_\rho \right] \right\} \left(T_a\right)_{\rho\alpha}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

où $V^{\mu} = A^{\mu}(k_1.x) + B^{\mu}(k_2.x)$, et avec toujours $\widetilde{\gamma}^{\mu} = T\,\gamma^{\mu}\,T^{-1}$.

Il est clair que pour

$$T_1 = I - \frac{e}{2\,k_1.p}\not{k}\not{A}, \tag{4.37}$$

et,

$$T_2 = I - \frac{e}{2\,k_2.p}\not{k}\not{B}, \tag{4.38}$$

la condition imposée en (4.34) est effectivement vérifiée. En résumé, nous avons :

$$T\left(\not{p} - e\not{V}\right)T^{-1} = \not{p} + \theta_1\not{k}_1 + \theta_2\not{k}_2, \tag{4.39}$$

avec,

$$\theta_1 = \theta_1\left(k_1.p, k_1.x\right) = -\frac{1}{k_1.p}\left(e\,p.\,A - \frac{e^2}{2}A^2\right), \tag{4.40}$$

et,

$$\theta_2 = \theta_2\left(k_2.p, k_2.x\right) = -\frac{1}{k_2.p}\left(e\,p.\,B - \frac{e^2}{2}B^2\right). \tag{4.41}$$

Par conséquent, l'élément de matrice de la fonction de Green devient :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) \;=\; & \int Dp\,Dx \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_{\sigma}\,Dz_{\rho} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_{\sigma}\delta_{\sigma\rho}z_{\rho}\right)\Big|_{\tau_a}^{\tau_b}\right] \\ & \times \left(T_b^{-1}\right)_{\beta\sigma} \\ & \times \exp\left\{ i\int_0^{\tau} d\tau \left[p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_{\sigma}\delta_{\sigma\rho}\,z_{\rho} - \overline{z}_{\sigma}\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_{\rho}\right)\right.\right. \\ & \left.\left. -\overline{z}_{\sigma}\left(\gamma_{\sigma\rho}.p + \theta_1\gamma_{\sigma\rho}.k_1 + \theta_2\gamma_{\sigma\rho}.k_2\right)z_{\rho}\right]\right\} \\ & \times \left(T_a\right)_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

A présent, nous allons déterminer la fonction de Green par intégrations successives. Pour ce cas aussi, la dépendance en $k_1.x$ ou en $k_2.x$ de certains facteurs rend inextricable l'intégration par rapport à la variable x. De même que pour ce cas, on introduit les identités suivantes (Ref.70) :

$$\left\{\begin{array}{l} \int d\phi_b\,d\phi_a\;\delta\left(\phi_a - k_1.x_a\right)\delta\left(\phi_b - \phi_a - k_1.\left(x_b - x_a\right)\right) = 1, \\ \int d\xi_b\,d\xi_a\;\delta\left(\xi_a - k_2.x_a\right)\delta\left(\xi_b - \xi_a - k_2.\left(x_b - x_a\right)\right) = 1. \end{array}\right. \tag{4.43}$$

Suivant la discrétisation adoptée, et pour le cas de l'onde plane, on a :

$$\begin{aligned} \delta\left(\phi_b - \phi_a - k_1.\left(x_b - x_a\right)\right) &= \int \prod_{j=1}^{N} d\phi_j \prod_{j=1}^{N+1} \delta\left(\Delta\phi_j - k_1.\Delta x_j\right), \\ &= \int \prod_{j=1}^{N} d\phi_j \int \prod_{j=1}^{N+1} \frac{dp_{\phi j}}{2\pi} \exp\left[ip_{\phi j}\left(\Delta\phi_j - k_1.\Delta x_j\right)\right] \end{aligned} \tag{4.44}$$

et

$$\delta\left(\xi_b-\xi_a-k_2.\left(x_b-x_a\right)\right)=\int\prod_{j=1}^{N}d\xi_j\prod_{j=1}^{N+1}\delta\left(\Delta\xi_j-k_2.\Delta x_j\right)$$
$$=\int\prod_{j=1}^{N}d\xi_j\int\prod_{j=1}^{N+1}\frac{dp_{\xi j}}{2\pi}\exp\left[ip_{\xi j}\left(\Delta\xi_j-k_2.\Delta x_j\right)\right], \qquad (4.45)$$

où, les quantités p_ϕ et p_ξ sont des constantes. L'élément de matrice de la fonction de Green, après arrangement, devient :

$$\begin{aligned}G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) \;=\;& \int Dp\,Dx\int D\phi\,Dp_\phi\int D\xi\,Dp_\xi\\ &\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\;Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right]\\ &\int d\phi_b\;d\phi_a\;\delta\left(\phi_a-k_1.x_a\right)\int d\xi_b\;d\xi_a\;\delta\left(\xi_a-k_2.x_a\right)\\ &\times\left[T^{-1}\left(k_1.p,k_2.p,\phi_b,\xi_b\right)\right]_{\beta\sigma}\\ &\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(p-p_\phi k_1-p_\xi k_2\right).\dot{x}+p_\phi\dot{\phi}+p_\xi\dot{\xi}\right.\right.\\ &+\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\;z_\rho-\overline{z}_\sigma\;\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\\ &\left.\left.\quad-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+\theta_1\gamma_{\sigma\rho}.k_1+\theta_2\gamma_{\sigma\rho}.k_2\right)z_\rho\right]\right\}\\ &\times\left[T\left(k_1.p,k_2.p,\phi_a,\xi_a\right)\right]_{\rho\alpha}.\end{aligned} \qquad (4.46)$$

On commence par changer $p-p_\phi k_1-p_\xi k_2$ en p, ensuite, utilisant la forme discrète, on intègre par rapport à x et à p, respectivement. Il en résulte que :

$$\begin{aligned}G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b,x_a\right) \;=\;& \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\;p.\left(x_b-x_a\right)\right]\int D\phi\,Dp_\phi\int D\xi\,Dp_\xi\\ &\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\;Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right]\\ &\int d\phi_b\,d\phi_a\,\delta\left(\phi_a-k_1.x_a\right)\int d\xi_b\,d\xi_a\,\delta\left(\xi_a-k_2.x_a\right)\\ &\times\left[T^{-1}\left(k_1.p,k_2.p,\phi_b,\xi_b\right)\right]_{\beta\sigma}\\ &\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[p_\phi\dot{\phi}+p_\xi\dot{\xi}\right.\right.\\ &+\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma\delta_{\sigma\rho}\;z_\rho-\overline{z}_\sigma\;\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_\rho\right)\\ &\left.\left.\quad-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+\left(p_\phi+\theta_1\right)\gamma_{\sigma\rho}.k_1+\left(p_\xi+\theta_2\right)\gamma_{\sigma\rho}.k_2\right)z_\rho\right]\right\}\\ &\times\left[T\left(k_1.p,k_2.p,\phi_a,\xi_a\right)\right]_{\rho\alpha}.\end{aligned} \qquad (4.47)$$

Maintenant, on change $p_\phi + \theta_1$ et $p_\xi + \theta_2$ en p_ϕ et en p_ξ, respectivement. Tenant compte aussi du fait que $\theta_1 \dot{\phi}$ et $\theta_2 \dot{\xi}$ sont deux phases classiques, l'expression ci-dessus, après intégration sur ϕ, p_ϕ, ξ et p_ξ, respectivement, devient :

$$\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b, x_a) = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[i p.(x_b - x_a)\right] \int \frac{dp_\phi}{2\pi} \int \frac{dp_\xi}{2\pi} \\
& \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma \, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2} \left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right) |^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
& \int d\phi_b \, d\phi_a \, \delta\left(\phi_a - k_1.x_a\right) \int d\xi_b \, d\xi_a \, \delta\left(\xi_a - k_2.x_a\right) \\
& \times \exp\left[i p_\phi \left(\phi_b - \phi_a\right) + i p_\xi \left(\xi_b - \xi_a\right)\right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{k_1.p} \int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi \left(e p.A(\phi) - \frac{e^2}{2} A^2(\phi)\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{k_2.p} \int_{\xi_a}^{\xi_b} d\xi \left(e p.B(\xi) - \frac{e^2}{2} B^2(\xi)\right)\right] \\
& \times \left[T^{-1}\left(k_1.p, k_2.p, \phi_b, \xi_b\right)\right]_{\beta\sigma} \\
& \times \exp\left\{i \int_0^{\tau} d\tau \left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right) \left(\dot{\overline{z}}_\sigma \delta_{\sigma\rho} \, z_\rho - \overline{z}_\sigma \, \delta_{\sigma\rho} \dot{z}_\rho\right)\right.\right. \\
& \quad \left.\left. - \overline{z}_\sigma \left(\gamma_{\sigma\rho}.p + p_\phi \gamma_{\sigma\rho}.k_1 + p_\xi \gamma_{\sigma\rho}.k_2\right) z_\rho\right]\right\} \\
& \times \left[T\left(k_1.p, k_2.p, \phi_a, \xi_a\right)\right]_{\rho\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Après cela, on change $p + p_\phi k_1 + p_\xi k_2$ et on intègre ensuite par rapport à p_ϕ et p_ξ respectivement, puis par rapport à ϕ_a, ϕ_b , ξ_a et ξ_b , respectivement aussi, l'élément de matrice de la fonction de Green devient :

$$
\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) = & \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \exp\left[i\, p.\left(x_b - x_a\right)\right] \\
& \times \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma \, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{k_1.p}\int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} d\phi \left(e\,p.A\left(\phi\right) - \frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{k_2.p}\int_{k_2.x_a}^{k_2.x_b} d\xi \left(e\,p.B\left(\xi\right) - \frac{e^2}{2}B^2\left(\xi\right)\right)\right] \\
& \times \left[T^{-1}\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_{n+1}, k_2.x_{n+1}\right)\right]_{\beta\sigma} \\
& \times \exp\left\{ i \int_0^{\tau} d\tau \left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_\sigma \delta_{\sigma\rho}\, z_\rho - \overline{z}_\sigma\, \delta_{\sigma\rho} \dot{z}_\rho\right)\right.\right. \\
& \left.\left. - \overline{z}_\sigma \left(\gamma_{\sigma\rho}.p\right) z_\rho\right]\right\} \\
& \times \left[T\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_0, k_2.x_0\right)\right]_{\rho\alpha} . \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

Pour ce qui concerne l'intégration par rapport à $\overline{z}$ et z, elle conduit exactement au même résultat trouvé pour le cas de l'onde plane, à savoir que :

$$
\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_b, x_a\right) = & \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \exp\left[i\, p.\left(x_b - x_a\right)\right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{k_1.p}\int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} d\phi \left(e p.\, A\left(\phi\right) - \frac{e^2}{2}A^2\left(\phi\right)\right)\right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{k_2.p}\int_{k_2.x_a}^{k_2.x_b} d\xi \left(e\,p.B\left(\xi\right) - \frac{e^2}{2}B^2\left(\xi\right)\right)\right] \\
& \times \sum_{\sigma,\rho} \left[T^{-1}\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_{n+1}, k_2.x_{n+1}\right)\right]_{\beta\sigma} \\
& \times \left[\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.\,p\right)\right]_{\sigma\rho} \\
& \times \left[T\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_0, k_2.x_0\right)\right]_{\rho\alpha} , \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

ou alors, simplement

$$\begin{aligned}
G^{\tau}(x_b, x_a) = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[i\,p.\left(x_b - x_a\right)\right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{k_1.p}\int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} d\phi \left(e\,p.A(\phi) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right)\right. \\
& \left. + \frac{i}{k_2.p}\int_{k_2.x_a}^{k_2.x_b} d\xi \left(e\,p.B(\xi) - \frac{e^2}{2}B^2(\xi)\right)\right] \\
& \times \left[T^{-1}\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_{n+1}, k_2.x_{n+1}\right)\right] \\
\times \quad & \left[\exp\left(i\frac{\tau}{\lambda}\gamma.p\right)\right] \\
& \times \left[T\left(k_1.p, k_2.p, k_1.x_0, k_2.x_0\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Finalement, après l'insertion de cette relation en (3.11) et intégration par rapport au temps de transition, nous obtenons le résultat recherché, à savoir :

$$\begin{aligned}
G(x_b, x_a) = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp\left[ip.\left(x_b - x_a\right)\right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{k_1.p}\int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} d\phi \left(e\,p.A(\phi) - \frac{e^2}{2}A^2(\phi)\right)\right. \\
& \left. + \frac{i}{k_2.p}\int_{k_2.x_a}^{k_2.x_b} d\xi \left(e\,p.B(\xi) - \frac{e^2}{2}B^2(\xi)\right)\right] \\
& \times \exp\left(\frac{e}{2k_1.p}\not{k}_1\not{A}(k_1.x_b) + \frac{e}{2\,k_2.p}\not{k}_2\not{B}(k_2.x_b)\right) \\
& \times \frac{1}{(\not{p} - m)} \\
& \times \exp\left(-\frac{e}{2k_1.p}\not{k}_1\not{A}(k_1.x_a) - \frac{e}{2\,k_2.p}\not{k}_2\not{B}(k_2.x_a)\right).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

C'est la fonction de Green pour un électron en présence de deux ondes planes, de directions de propagation orthogonales, conformément à la littérature ([71] et [72]).

4.3 Cas d'un champ gravitationnel faible

La théorie de la relativité générale est, sans conteste, l'une des plus belles théories physiques. Oeuvre colossale d'Albert Einstein, cette théorie, éminemment intuitive de par sa construction, place l'espace-temps comme acteur principal de l'interaction gravitationnelle, à travers le rôle de quantité dynamique joué par le tenseur métrique. Elle n'a cependant pas connu que des réussites, en témoignent les difficultés enregistrées notamment en cosmologie, où les champs gravitationnels deviennent très importants. Du point de vue des mathématiques, ceci tient au fait que, lorsque le tenseur métrique se présente sous une forme non diagonale, celle là alors, n'est pas très convenable dans les calculs pratiques où les équations d'Einstein deviennent intouchables. Albert Einstein dut même reconsidérer sa position sur le problème de la singularité à l'origine du Big Bang ([73]), reconnaissant que ses équations ne pouvaient pas décrire correctement un état avec une densité de matière infinie, ni de prédire l'expansion de l'univers, car, ces mêmes équations ne reproduisent que le cas stationnaire. Ce genre de restriction a fait que la théorie de la relativité générale, tant "sacralisée" au début, soit objectivement critiquée dans ses fondements mathématiques mêmes, puisque, il était devenu clair que ses équations ne pouvaient pas trouver à chaque fois leurs solutions analytiques, mais, que cela est possible seulement dans l'approximation du champ faible. Ainsi, et à l'échelle de notre système solaire, la théorie de la relativité générale se montrait assez efficiente pour expliquer certains phénomènes, comme celui de la déflection, au voisinage du soleil, de la lumière provenant des étoiles lointaines, ou bien, pour le cas des corrections apportées à la précession de la planète Mercure. Dans le cas de l'approximation du champ faible, ou ce qui désigne la version linéarisée des équations d'Einstein, tout se passe comme si le champ était une perturbation de faible amplitude dans un espace-temps plat, ce qui permet de ne considérer, dans les calculs, que les termes de premier ordre. D'un autre côté aussi, et toujours dans ce cas de figure, il est à noter la ressemblance entre les équations linéarisées et celles de la théorie de l'électromagnétisme. Cette analogie laisse envisager, tout comme pour les équations de Maxwell, une solution sous forme d'ondes planes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière. En effet, les équations d'Einstein du champ, reliant le couple matière-énergie avec la courbure, s'expriment par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.53}$$

Dans l'expression ci-dessus, $R_{\mu\nu}$ et R représentent le tenseur et le scalaire de Ricci, $G_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ notent le tenseur d'Einstein et le tenseur métrique, et $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion-énergie, respectivement. Bien que ce ne soit pas apparent, il s'agit d'un ensemble d'équations différentielles de second ordre, lesquelles, sous certaines conditions, peuvent se rapporter à la forme, bien connue, des équations d'ondes. Essentiellement, et au départ, il s'agit de considérer un espace-temps de faible courbure. En effet, si $\eta_{\mu\nu}$ représente le tenseur métrique de l'espace-temps plat, on écrit dans ce cas :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{4.54}$$

avec

$$|h_{\mu\nu}| << 1. \tag{4.55}$$

Par conséquent, en négligeant tous les termes d'ordres supérieurs en $h_{\mu\nu}$, nous écrivons :

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x), \tag{4.56}$$

où, dans ce qui suivra, tous les indices sont élevés ou abaissés en utilisant $\eta^{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$.

Pour obtenir la forme linéarisée des équations d'Einstein, il est nécessaire, tout d'abord, de réécrire les symboles de Christoffel dans cette configuration même. Ainsi, puisque nous avons :

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left(\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} \right), \tag{4.57}$$

alors, considérant (4.55), nous obtenons :

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\nu} \left(\partial_\beta h_{\nu\alpha} + \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta} \right). \tag{4.58}$$

Par conséquent, le tenseur de Ricci devient :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \left(\partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\mu} + \partial_\mu \partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\nu} - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha}{}_{\alpha} \right). \end{aligned} \tag{4.59}$$

D'un autre côté, le scalaire de Ricci peut simplement se réduire à $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, de sorte que :

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h, \tag{4.60}$$

où $\Box = -\partial_t^2 + \nabla^2$, représente de Dalembertien.

A présent, tenant compte de la forme du tenseur et du scalaire de Ricci, les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\partial_\nu \partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\mu} + \partial_\mu \partial_\alpha h^{\alpha}{}_{\nu} - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha}{}_{\alpha} - \eta_{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h \right) = 16\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.61}$$

A ce stade, il y a encore besoin de rajouter des restrictions supplémentaires, qui vont nous permettre de simplifier, encore plus, l'équation ci-dessus. A cet effet, et en remarquant que la décomposition exprimée en (4.54) ne spécifie pas complètement le système de coordonnées dans l'espace-temps, il est utile, dans pareil cas, d'imposer une jauge spécifique appelée la jauge coordonnée ([74], [75] et [76]). Cette dernière est équivalente à :

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.62}$$

A la limite du champ faible, l'expression ci-dessus mène à :

$$\partial_{\lambda} h^{\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\mu} h^{\alpha}{}_{\alpha} = 0. \tag{4.63}$$

Dans ce cas, il est possible d'imposer les conditions suivantes :

$$\partial_{\lambda} h^{\lambda}{}_{\mu} = 0, \tag{4.64}$$

et

$$h^{\alpha}{}_{\alpha} = 0. \tag{4.65}$$

Par suite de ces nouvelles conditions, les équations d'Einstein s'écrivent :

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.66}$$

Maintenant, l'ultime étape consiste à considérer le problème dans le vide, c'est à dire, avec $T_{\mu\nu} = 0$. Les équations d'Einstein se présentent finalement sous la forme suivante :

$$\Box h_{\mu\nu} = 0. \tag{4.67}$$

C'est une équation de propagation, qui admet l'onde plane comme solution. On peut donc écrire :

$$h_{\mu\nu}(k.x) = f_{\mu\nu}.\chi(k.x), \tag{4.68}$$

avec, k_{μ} le vecteur de propagation (constant) vérifiant la condition $k_{\mu}k^{\mu} = 0$, $f_{\mu\nu}$ un tenseur symétrique constant et χ une fonction dépendant uniquement de la quantité $k.x$. De plus, la condition (4.64) revient à

$$k^{\mu} f_{\mu\nu} = 0. \tag{4.69}$$

Maintenant que la perturbation considérée est clairement identifiée, l'équation de Dirac que vérifie la fonction de Green s'écrit alors :

$$\left[-i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\left(k.x\right)\partial^{\nu}\right)_{b}-m\right]G\left(x_{b},x_{a}\right)=\delta\left(x_{b}-x_{a}\right), \tag{4.70}$$

où, γ^{μ} représente les matrices de Dirac telles que la relation $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2\eta^{\mu\nu}$ est admise comme étant une bonne approximation, et m étant toujours la masse de la particule.

Dans ce cas aussi, la construction détaillée au Chapitre III reste valable avec, de façon générale,

$$T=T\left(k.\widehat{x},k.\widehat{p},\gamma\right). \tag{4.71}$$

Par conséquent, l'élément de matrice représentant la fonction de Green est obtenu sous la forme :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}\left(x_{b},x_{a}\right) &= \int Dp\,Dx\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_{\sigma}\,Dz_{\rho}\,\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_{\sigma}\delta_{\sigma\rho}z_{\rho}\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\times\left(T_{b}^{-1}\right)_{\beta\rho}\exp\left\{i\int_{0}^{\tau}d\tau\left[p.\dot{x}+\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}_{\sigma}\,\delta_{\sigma\rho}z_{\rho}-\overline{z}_{\sigma}\,\delta_{\sigma\rho}\dot{z}_{\rho}\right)\right.\right. \\ &\left.\left.-\overline{z}_{\sigma}\left(\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}.p-\frac{1}{2}\widetilde{\gamma}_{\sigma\rho}.h\left(k.x\right).p\right)z_{\rho}\right]\right\}\left(T_{a}\right)_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Autrement, si on considère la fonction de Green, elle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} G^{\tau}\left(x_{b},x_{a}\right) &= \int Dp\,Dx\int D\overline{z}Dz\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}z\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ &\times T_{b}^{-1}.\exp\left\{i\int_{0}^{\tau}d\tau\left[p.\dot{x}+\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}z-\overline{z}\dot{z}\right)\right.\right. \\ &\left.\left.-\overline{z}\left(\widetilde{\gamma}.p-\frac{1}{2}\widetilde{\gamma}.h\left(k.x\right).p\right)z\right]\right\}.T_{a}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Les résultats obtenus, pour les cas précédents, nous encouragent à opter pour le même choix, à savoir :

$$T\left[\gamma.p-\frac{1}{2}\gamma.h\left(k.x\right).p\right]T^{-1}=\not{p}+\theta\not{k}, \tag{4.74}$$

où, θ est une quantité sans matrices de Dirac.

On peut postuler que la forme la plus générale, admise pour la transformation T^{-1}, par exemple, pourrait être :

$$T^{-1}=I+S^{odd}+S^{even}, \tag{4.75}$$

où, S^{odd} et S^{even} représentent toutes les combinaisons possibles des principales quantités, à savoir, $\not{p}$, $\not{k}$ et $h_{\mu\nu}$. Cependant, nous pouvons remarquer que

$$[\gamma.p, (\gamma.k)\,\gamma.h.p] = (2k.p)\,\gamma.h.p - 2\,(\gamma.k)\,p.h.p, \tag{4.76}$$

et

$$[\gamma.h.p, (\gamma.k)\,\gamma.h.p] = 0. \tag{4.77}$$

De ce qui précède, si on choisit :

$$T = I - \frac{1}{4k.p}\,(k.\gamma)\,\gamma.h\,(k.x)\,.p, \tag{4.78}$$

et

$$T^{-1} = I + \frac{1}{4k.p}\,(k.\gamma)\,\gamma.h\,(k.x)\,.p, \tag{4.79}$$

la relation (4.74) est alors réalisée, de sorte que :

$$\theta = -\frac{1}{2k.p}p.h\,(k.x)\,.p. \tag{4.80}$$

Maintenant que la transformation T est connue, on se propose de déterminer la fonction de Green, par intégrations successives, à partir de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_{n+1}, x_0) \;=\; & \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \prod_{j=1}^{n+1} \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \int \prod_{j=1}^{n} d^4 x_j \sum_{\sigma,\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n+1} \left(\frac{i\lambda}{2\pi}\right) d\overline{z}^j_\sigma\, dz^j_\rho \\ & \left[T^{-1}(k.x_{n+1}, k.p)\right]_{\beta\sigma} \\ & \times \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{n+1} \left[p_j.\,(x_j - x_{j-1}) + \frac{\lambda}{i}\,\overline{z}^j_\sigma\,\delta_{\sigma\rho}\left(z^j_\rho - z^{j-1}_\rho\right) \right.\right. \\ & \left.\left. \qquad - \varepsilon\,\overline{z}^j_\sigma\,(\gamma.\,p_j + \theta_j\,\gamma.k)_{\sigma\rho}\, z^j_\rho \right] \right\} \\ & \times \left[T\,(k.x_0, k.p)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Dans ce cas aussi, et pour les mêmes raisons évoquées dans les deux applications précédentes, nous introduisons l'identité suivante (Ref.70) :

$$\int d\phi_b\, d\phi_a\; \delta\left(\phi_a - k.x_a\right)\, \delta\left(\phi_b - \phi_a - k.\left(x_b - x_a\right)\right) = 1. \tag{4.82}$$

Après insertion de la contrainte ci-dessus, l'élément de matrice sous sa forme compacte devient :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b, x_a) &= \int Dp\, Dx \int D\phi\, Dp_\phi \int d\phi_b\, d\phi_a\, \delta(\phi_a - k.x_a) \\ & \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma\, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ & \times \left[T^{-1}(\phi_b, k.p)\right]_{\beta\sigma} \\ & \times \exp\left\{ i \int_0^\tau d\tau \left[(p - p_\phi k).\dot{x} + p_\phi \dot{\phi} \right.\right. \\ & \quad \left.\left. + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}} z - \overline{z}\dot{z}\right) - \overline{z}_\sigma \left(\gamma.p + \theta\gamma.k\right)_{\sigma\rho} z_\rho \right]\right\} \\ & \times \left[T(\phi_a, k.p)\right]_{\rho\alpha}, \end{aligned} \tag{4.83}$$

où p_ϕ est une constante. On commence d'abord par changer $(p - p_\phi k)$ en p, et ensuite, on intègre par rapport à x et à p, respectivement, pour obtenir :

$$\begin{aligned} G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b, x_a) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp\left[i\, p.(x_b - x_a)\right] \int D\phi\, Dp_\phi \int d\phi_b\, d\phi_a\, \delta(\phi_a - k.x_a) \\ & \times \sum_{\sigma,\rho} \int D\overline{z}_\sigma\, Dz_\rho \exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma \delta_{\sigma\rho} z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\ & \times \left[T^{-1}(\phi_b, k.p)\right]_{\beta\sigma} \\ & \times \exp\left\{ i \int_0^\tau d\tau \left[p_\phi \dot{\phi} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}} z - \overline{z}\dot{z}\right) \right.\right. \\ & \quad \left.\left. - \overline{z}_\sigma \left(\gamma.p + (p_\phi + \theta)\, \gamma.k\right)_{\sigma\rho} z_\rho \right]\right\} \\ & \times \left[T(\phi_a, k.p)\right]_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{4.84}$$

A présent, on transforme la quantité $(p_\phi + \theta)$ en p_ϕ. Or, la quantité $\theta\dot{\phi}$ étant une phase classique qui dépend du point final et celui initial, il en résulte, après intégration par rapport à ϕ et à p_ϕ, respectivement, que :

$$\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\,p.(x_b-x_a)\right]\int\frac{dp_\phi}{2\pi} \\
&\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
&\int d\phi_b\,d\phi_a\,\delta\left(\phi_a-k.x_a\right)\exp\left[i\,p_\phi\left(\phi_b-\phi_a\right)\right] \\
&\times\exp\left[\frac{i}{2k.p}\int_{\phi_a}^{\phi_b}p.h\left(\phi\right).pd\phi\right] \\
&\times\left[T^{-1}\left(\phi_b,k.p\right)\right]_{\beta\sigma} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}z-\overline{z}\dot{z}\right)-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p+p_\phi\gamma_{\sigma\rho}.k\right)z_\rho\right]\right\} \\
&\times\left[T\left(\phi_a,k.p\right)\right]_{\rho\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

On procède, à ce stade aussi, à un shift en changeant $(p+k.p_\phi)$ en p. Par suite, l'intégration par rapport à p_ϕ, ϕ_a et ϕ_b, respectivement, donne :

$$\begin{aligned}
&G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b,x_a) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[i\,p.(x_b-x_a)\right] \\
&\sum_{\sigma,\rho}\int D\overline{z}_\sigma\,Dz_\rho\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\left(\overline{z}_\sigma\delta_{\sigma\rho}z_\rho\right)|^{\tau_b}_{\tau_a}\right] \\
&\quad\times\exp\left[\frac{i}{2k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}p.h\left(\phi\right).pd\phi\right] \\
&\times\left[T^{-1}\left(k.x_{n+1},k.p\right)\right]_{\beta\sigma} \\
&\times\exp\left\{i\int_0^\tau d\tau\left[\left(\frac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}z-\overline{z}\dot{z}\right)-\overline{z}_\sigma\left(\gamma_{\sigma\rho}.p\right)z_\rho\right]\right\} \\
&\times\left[T\left(k.x_0,k.p\right)\right]_{\rho\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Pour ce qui concerne l'intégration par rapport aux variables $\overline{z}$ et z, elle s'effectue, quant à elle, de la même manière que celle exposée dans les deux cas précédents. En somme, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
G^{\tau}_{\beta\alpha}(x_b,x_a) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp\left[ip.(x_b-x_a)\right] \\
&\qquad\times\exp\left[\frac{i}{2k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b}p.h\left(\phi\right).pd\phi\right] \\
&\times\sum_{\sigma,\rho}\left(T_b^{-1}\right)_{\beta\sigma}\exp\left[\left(i\frac{\tau}{\lambda}p.\gamma\right)\right]_{\sigma\rho}\left(T_a\right)_{\rho\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

On déduit facilement alors que :

$$
\begin{aligned}
G^{\tau}\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip.\left(x_b-x_a\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b} p.h\left(\phi\right)p.d\phi\right] \\
&\times \left(T_b^{-1}\right)\,\exp\left[\left(i\frac{\tau}{\lambda}p.\gamma\right)\right]\,\left(T_a\right). \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

Finalement, l'insertion de l'expression ci-dessus dans (3.11), et l'intégration par rapport au temps de transition, conduit à :

$$
\begin{aligned}
G\left(x_b,x_a\right) &= \int \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4}\exp\left[ip.\left(x_b-x_a\right)\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{2k.p}\int_{k.x_a}^{k.x_b} p.h\left(\phi\right).pd\phi\right] \\
&\times \left[I+\frac{1}{4k.p}\left(k.\gamma\right)\gamma.h.p\right] \\
&\times \frac{1}{\left(\not{p}-m\right)} \\
&\times \left[I-\frac{1}{4k.p}\left(k.\gamma\right)\gamma.h.p\right], \qquad (4.89)
\end{aligned}
$$

c'est à dire, la fonction de Green pour une particule de Dirac, en présence d'un champ gravitationnel faible, conformément à la littérature ([77], [78] et [79]).

Chapitre 5

Les transformations canoniques

On se limitera, dans cette étude, aux cas de deux ondes planes orthogonales (le cas d'une onde plane est facilement déductible), et d'un champ gravitationnel faible.

5.1 Cas de deux ondes planes orthogonales

Pour ce cas, et connaissant la transformation T, l'expression générale du Lagrangien est donnée par :

$$\begin{aligned} L = p.\dot{x} + \left(\tfrac{\lambda i}{2}\right)\left(\dot{\overline{z}}\, z - \overline{z}\dot{z}\right) \\ -\overline{z}\left[\gamma.p - \tfrac{1}{k_1.p}\left(e\, p.A - \tfrac{e^2}{2}A^2\right)\gamma.k_1 \right. \\ \left. -\tfrac{1}{k_2.p}\left(e\, p.B - \tfrac{e^2}{2}B^2\right)\gamma.k_2\right] z. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Par conséquent, les équations de mouvement, pour p et x particulièrement, sont :

$$\begin{aligned} \frac{dp^\rho}{d\tau} &= -\frac{k_1^\rho}{p.k_1}\overline{z}\not{k}_1 z \frac{d}{d\left(k_1.x\right)}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) \\ &\quad -\frac{k_2^\rho}{k_2.p}\overline{z}\not{k}_2 z \frac{d}{d\left(k_2.x\right)}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dx^\rho}{d\tau} &= -\overline{z}\gamma^\rho z + \overline{z}\not{k}_1 z\left[\frac{e}{p.k_1}A^\rho - \frac{k_1^\rho}{\left(p.k_1\right)^2}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right)\right] \\ &\quad +\overline{z}\not{k}_2 z\left[\frac{e}{p.k_2}B^\rho - \frac{k_2^\rho}{\left(p.k_2\right)^2}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En multipliant ces deux équations par $k_{1\rho}$ ($k_{2\rho}$ respectivement), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{dp.k_1}{d\tau} &= \frac{dp.k_2}{d\tau} = 0, && (5.4)\\
\frac{dk_1.x}{d\tau} &= -\overline{z}\not{k}_1 z, && (5.5)\\
\frac{dk_2.x}{d\tau} &= -\overline{z}\not{k}_2 z. && (5.6)
\end{aligned}$$

Maintenant, en combinant (5.2) avec (5.5) et (5.6), nous déduisons :

$$\frac{d}{d\tau}\left[p^\rho - \frac{k_1^\rho}{p.k_1}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) - \frac{k_2^\rho}{p.k_2}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right)\right] = 0. \quad (5.7)$$

On voit bien que la quantité entre crochets est une constante de mouvement :

$$P^\rho = p^\rho - \frac{k_1^\rho}{p.k_1}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) - \frac{k_2^\rho}{p.k_2}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right) = Cte. \quad (5.8)$$

Pour la quadrivitesse, en utilisant (5.5) et (5.6), nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{dx^\rho}{d\tau} &= -\overline{z}\gamma^\rho z - \frac{dk_1.x}{d\tau}\left[\frac{e}{p.k_1}A^\rho - \frac{k_1^\rho}{(p.k_1)^2}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right)\right]\\
&\quad -\frac{dk_2.x}{d\tau}\left[\frac{e}{p.k_2}B^\rho - \frac{k_2^\rho}{(p.k_2)^2}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right)\right]. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Puisque la quantité P^ρ est une constante de mouvement, il est possible de ramener la dernière équation à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{dx^\rho}{d\tau} &= -\overline{z}\gamma^\rho z - \frac{e}{P.k_1}\frac{d}{d\tau}\int^{k_1.x} d\varphi\left[A^\rho - \frac{k_1^\rho}{P.k_1}\left(P.A - \frac{e}{2}A^2\right)\right]\\
&\quad -\frac{e}{P.k_2}\frac{d}{d\tau}\int^{k_2.x} d\xi\left[B^\rho - \frac{k_2^\rho}{P.k_2}\left(P.B - \frac{e}{2}B^2\right)\right]. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Donc, si on pose :

$$\begin{aligned}
X^\rho &= x^\rho + \frac{e}{P.k_1}\int^{k_1.x} d\varphi\left[A^\rho - \frac{k_1^\rho}{P.k_1}\left(P.A - \frac{e}{2}A^2\right)\right]\\
&\quad +\frac{e}{P.k_2}\int^{k_2.x} d\xi\left[B^\rho - \frac{k_2^\rho}{P.k_2}\left(P.B - \frac{e}{2}B^2\right)\right], \quad (5.11)
\end{aligned}$$

et en utilisant les nouvelles variables P et X, nous obtenons, finalement, les équations de mouvement d'une particule libre, à savoir :

$$\begin{aligned}
\frac{dP^\rho}{d\tau} &= 0, && (5.12)\\
\frac{dX^\rho}{d\tau} &= -\overline{z}\gamma^\rho z, && (5.13)
\end{aligned}$$

où, les mêmes propriétés ont été utilisées. On peut voir que lorsque $A = B = 0$, ces dernières équations demeurent celles d'une particule libre.

D'un autre côté, il est intéressant de relever que la transformation $(x, p) \to (X, P)$ est canonique, puisque le Jacobien est égal à l'unité :

$$J = \left| \frac{\partial (X, P)}{\partial (x, p)} \right| = 1. \tag{5.14}$$

En effet, on peut voir que :

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial (X, P)}{\partial (x, p)} \right| = \left| \frac{\partial (X, P,)}{\partial (x, P)} \right|_{P=const} \left| \frac{\partial (x, P)}{\partial (x, p)} \right|_{x=cont}, \\ &= Det \left| \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \right| Det \left| \frac{\partial P^\rho}{\partial p^\mu} \right|, \\ &= Det\,(I + D)\, Det\,(I + C)\,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} &= I^\rho_\mu + D^\rho_\mu = \delta^\rho_\mu + \frac{e}{P.k_1} k_{1\mu} \left[A^\rho - \frac{k_1^\rho}{P.k_1} \left(A.P - \frac{e}{2} A^2 \right) \right] \\ &\quad + \frac{e}{P.k_2} k_{2\mu} \left[A^\rho - \frac{k_2^\rho}{P.k_2} \left(P.B - \frac{e}{2} B^2 \right) \right], \end{aligned} \tag{5.16}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^\rho}{\partial p^\mu} &= I^\rho_\mu + C^\rho_\mu = \delta^\rho_\mu - \frac{e k_1^\rho}{P.k_1} A_\mu + \frac{k_1^\rho k_{1\mu}}{(P.k_1)^2} \left(eP.A - \frac{e^2}{2} A^2 \right) \\ &\quad - \frac{e k_2^\rho}{P.k_2} B_\mu + \frac{k_2^\rho k_{2\mu}}{(P.k_2)^2} \left(eP.B - \frac{e^2}{2} B^2 \right), \end{aligned} \tag{5.17}$$

sont les éléments du déterminant, calculables par la formule suivante :

$$Det\,(I + Q) = \exp Tr\,(Ln\,(I + Q))\,, \tag{5.18}$$

où, $Tr\,(Q) = \sum Q_\mu{}^\mu$, $Tr\,(Q^2) = \sum Q_\mu{}^\sigma Q_\sigma{}^\mu$, $Tr\,(Q^3) = \sum Q_\mu{}^\sigma Q_\sigma{}^\nu Q_\nu{}^\mu$, etc.

Dans notre cas, il est évident que :

$$D = \frac{e}{P.k} k_{1\rho} \left[A^\rho - \frac{k_1^\rho}{P.k_1} \left(A.P - \frac{e}{2} A^2 \right) \right] = 0, \tag{5.19}$$

et

$$
\begin{aligned}
C = -\frac{ek_1^\rho}{P.k_1}A_\rho + \frac{k_1^\rho k_{1\rho}}{(P.k_1)^2}\left(eP.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) \\
-\frac{ek_2^\rho}{P.k_2}B_\rho + \frac{k_2^\rho k_{2\rho}}{(P.k_2)^2}\left(eP.B - \frac{e^2}{2}B^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

Après expansion, nous obtenons, respectivement :

$$
\exp TrLn\,(I + B) = \exp TrLn\,(I + C) = 1. \tag{5.21}
$$

La transformation est donc canonique.

Pour ce qui concerne la fonction génératrice F, nous rappelons que :

$$
p_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = P_\mu + \frac{k_1^\rho}{p.k_1}\left(ep.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) + \frac{k_2^\rho}{p.k_2}\left(ep.B - \frac{e^2}{2}B^2\right), \tag{5.22}
$$

ou bien,

$$
X_\mu = \frac{\partial F}{\partial P^\mu}. \tag{5.23}
$$

De l'expression (5.22), par exemple, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
F\,(x, P, \tau) &= P.x + \frac{1}{P.k_1}\int^{k_1.x} d\eta\left(eP.A - \frac{e^2}{2}A^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{P.k_2}\int^{k_2.x} d\eta'\left(eP.B - \frac{e^2}{2}B^2\right) + g\,(\tau)\,,
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

où g est une fonction arbitraire du paramètre temps τ. Cependant, il est possible de déterminer la fonction g à partir du résultat obtenu en (4.52). En effet, dans cette expression, nous pouvons voir que :

$$
\frac{1}{(\not{p} - m)} = -i\left(\not{p} + m\right)\int_0^\infty d\tau \exp\left[i\tau\left(p^2 - m^2\right)\right]. \tag{5.25}
$$

Sachant que la quantité P obtenue en (5.8) est une constante de mouvement, il en résulte que la fonction de Green devient

$$
\begin{aligned}
G\left(x_b, x_a\right) &= (-i) \int_0^{\infty} d\tau \exp\left(-i\tau m^2\right) \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \\
& \exp\left\{ i \left[P.\left(x_b - x_a\right) + \frac{1}{k_1.P} \int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} d\phi \left(e\, P.A\left(\phi\right) - \frac{e^2}{2} A^2\left(\phi\right) \right) \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{1}{k_2.P} \int_{k_2.x_a}^{k_2.x_b} d\xi \left(e\, P.B\left(\xi\right) - \frac{e^2}{2} B^2\left(\xi\right) \right) \right] + \tau P^2 \right\} \\
& \times \exp\left(\frac{e}{2k_1.P} \not{k}_1 \not{A}\left(k_1.x_b\right) + \frac{e}{2k_2.P} \not{k}_2 \not{B}\left(k_2.x_b\right) \right) \\
& \times \left(\not{P} + m\right) \\
& \times \exp\left(-\frac{e}{2k_1.P} \not{k}_1 \not{A}\left(k_1.x_a\right) - \frac{e}{2k_2.P} \not{k}_2 \not{B}\left(k_2.x_a\right) \right)
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

En identifiant la quantité τP^2 à $g\left(\tau\right)$ dans l'exponentielle, nous pouvons donc déduire la fonction $F\left(x, P, \tau\right)$ qui génère la transformation $(x, p) \xrightarrow{F} (X, P)$. Ainsi, suivant le choix

$$
g = P^2 \tau, \tag{5.27}
$$

nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \tau} &= P^2 = \left(p - \frac{k_1}{p.k_1} \left(ep.A - \frac{e^2}{2} A^2 \right) - \frac{k_2}{p.k_2} \left(ep.B - \frac{e^2}{2} B^2 \right) \right)^2 \\
&= \left(p - e\left(A + B\right)\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Cette dernière équation peut se mettre aussi sous la forme :

$$
-\left(-\frac{\partial F}{\partial x} - e\left(A + B\right) \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \tag{5.29}
$$

c'est à dire, rien d'autre que l'équation d'Hamilton-Jacobi pour une particule de Klein-Gordon (spin 0).

5.2 Cas d'un champ gravitationnel faible

En conjonction avec ce qui a été présenté, au Chapitre IV, pour le cas du champ gravitationnel faible, nous allons montré que la transformation T induit une transformation canonique. Nous rappelons que pour ce cas, l'expression du Lagrangien est donnée par :

$$
L = p.\dot{x} + \left(\frac{\lambda i}{2}\right) \left(\dot{\overline{z}} z - \overline{z} \dot{z} \right) - \overline{z} \left[\gamma.p - \frac{1}{2k.p} \left(\gamma.k\right) p.h\left(k.x\right).p \right] z. \tag{5.30}
$$

Il n'est pas difficile de montrer que les équations de mouvement, spécialement pour les variables p et x, sont données par :

$$\frac{dp^{\eta}}{d\tau} = \frac{1}{2p.k}\overline{z}\not{k}z k^{\eta} p.\frac{dh\left(k.x\right)}{dk.x}.p, \tag{5.31}$$

et

$$\frac{dx^{\eta}}{d\tau} = \overline{z}\gamma^{\mu}z\left[\delta_{\mu}^{\eta} + \frac{1}{p.k}k_{\mu}h^{\eta\nu}\left(k.x\right)p_{\nu}\right]. \tag{5.32}$$

En multipliant les deux dernières équations par k_{η}, et puisque nous avons $k_{\eta}k^{\eta} = 0$ ainsi que $k^{\eta}h_{\eta\mu} = 0$, nous obtenons :

$$\frac{dp.k}{d\tau} = 0, \tag{5.33}$$

$$\frac{dk.x}{d\tau} = \overline{z}\not{k}z. \tag{5.34}$$

Maintenant, en combinant (5.31) avec (5.34), il en résulte alors la constante de mouvement suivante :

$$P^{\eta} = p^{\eta} - \frac{1}{2p.k}k^{\eta}p.h\left(k.x\right).p = Cte. \tag{5.35}$$

Pour la quadrivitesse, en utilisant la relation (5.34), nous obtenons :

$$\frac{dx^{\eta}}{d\tau} = \overline{z}\gamma^{\eta}z + \frac{1}{p.k}\frac{dk.x}{d\tau}h^{\eta\nu}\left(k.x\right)p_{\nu}. \tag{5.36}$$

Puisque la quantité P^{ρ} est une constante de mouvement, la dernière équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dx^{\eta}}{d\tau} = \overline{z}\gamma^{\eta}z + \frac{1}{P.k}\frac{d}{d\tau}\int^{k.x} h^{\eta\nu}\left(\phi\right)P_{\nu}d\varphi. \tag{5.37}$$

Par conséquent, si on pose :

$$X^{\eta} = x^{\eta} - \frac{1}{P.k}\int^{k.x} h^{\eta\nu}\left(\phi\right)P_{\nu}d\varphi, \tag{5.38}$$

on peut remarquer alors, en utilisant les nouvelles variables P et X, que les équations de mouvement pour le cas de la particule libre sont à nouveau obtenues, c'est à dire,

$$\frac{dP^{\rho}}{d\tau} = 0, \tag{5.39}$$

$$\frac{dX^{\rho}}{d\tau} = \overline{z}\gamma^{\rho}z, \tag{5.40}$$

où, les mêmes propriétés ont été utilisées. De plus, on peut montrer, une fois encore, que la transformation $(x, p) \to (X, P)$ est canonique, c'est à dire que,

$$J = \left| \frac{\partial (X, P)}{\partial (x, p)} \right| = 1. \tag{5.41}$$

En effet, là aussi, on peut voir que :

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial (X, P)}{\partial (x, p)} \right| = \left| \frac{\partial (X, P,)}{\partial (x, P)} \right|_{P=const} \left| \frac{\partial (x, P)}{\partial (x, p)} \right|_{x=cont}, \\ &= Det \left| \frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \right| Det \left| \frac{\partial P^{\rho}}{\partial p^{\mu}} \right|, \\ &= Det\,(I + D)\, Det\,(I + C)\,, \end{aligned} \tag{5.42}$$

où

$$\frac{\partial X^{\eta}}{\partial x^{\mu}} = I^{\eta}_{\mu} + D^{\eta}_{\mu} = \delta^{\eta}_{\mu} - \frac{1}{P.k} k_{\mu} h^{\eta\nu} (k.x)\, P_{\nu}, \tag{5.43}$$

et

$$\frac{\partial P^{\eta}}{\partial p^{\mu}} = I^{\eta}_{\mu} + C^{\eta}_{\mu} = \delta^{\eta}_{\mu} - \frac{1}{P.k} k^{\eta} h_{\mu\nu} (k.x)\, P^{\nu},$$

sont les éléments du déterminant, lesquels, sont calculables par la formule suivante

$$Det\,(I + Q) = \exp Tr\,(Ln\,(I + Q))\,, \tag{5.44}$$

où, nous avons toujours $Tr\,(Q) = \sum Q_{\mu}{}^{\mu}$, $Tr\,(Q^2) = \sum Q_{\mu}{}^{\sigma} Q_{\sigma}{}^{\mu}$, $Tr\,(Q^3) = \sum Q_{\mu}{}^{\sigma} Q_{\sigma}{}^{\nu} Q_{\nu}{}^{\mu}$, etc.

Dans notre cas, il est évident que, après expansion, tous les termes sont nuls à cause des propriétés du champ. Nous avons donc

$$\exp Tr Ln\,(I + D) = \exp Tr Ln\,(I + C) = 1, \tag{5.45}$$

c'est à dire que $J = 1$, effectivement.

Concernant la fonction génératrice F, nous rappelons que

$$p_{\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} = P_{\mu} + \frac{1}{2\,p.k} k_{\mu}\, p.h\,(k.x)\,.p, \tag{5.46}$$

ou bien que

$$X_{\mu} = \frac{\partial F}{\partial P^{\mu}}. \tag{5.47}$$

A partir de la relation (5.46), par exemple, on trouve :

$$F(x,P,\tau) = P.x + \frac{1}{2P.k}\int^{k.x} p.h(\phi).pd\phi + g(\tau), \tag{5.48}$$

avec g une fonction arbitraire du paramètre temps τ. Cependant, pour ce cas aussi, il est possible de déduire cette fonction. En effet, dans l'expression (4.89), on peut voir que :

$$\frac{1}{(\not{p}-m)} = -i(\not{p}+m)\int_0^{\infty} d\tau \exp\left[i\tau\left(p^2-m^2\right)\right]. \tag{5.49}$$

Sachant que la quantité P obtenue en (5.35) est une constante de mouvement, il en résulte que la fonction de Green devient :

$$\begin{aligned} G(x_b,x_a) &= (-i)\int_0^{\infty} d\tau \exp\left(-i\tau m^2\right)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \exp\left\{i\left[P.(x_b-x_a) + \frac{1}{2k.P}\int_{k_1.x_a}^{k_1.x_b} P.h(\phi).Pd\phi + \tau P^2\right]\right\} \\ &\quad \times\left[I + \frac{1}{4k.P}(k.\gamma)\gamma.h.P\right] \\ &\quad \times\left(\not{P}+m\right) \\ &\quad \times\left[I - \frac{1}{4k.P}(k.\gamma)\gamma.h.P\right] \end{aligned} \tag{5.50}$$

Par conséquent, en identifiant la quantité τP^2 à $g(\tau)$ dans l'exponentielle, il est possible de déduire la fonction $F(x,P,\tau)$ qui génère la transformation $(x,p)\xrightarrow{F}(X,P)$. Donc, suivant le choix

$$g = P^2\tau, \tag{5.51}$$

nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = P^2 = \left(p - \frac{1}{2}h.p\right)^2. \tag{5.52}$$

Cette dernière peut se mettre aussi sous la forme suivante :

$$-\left(-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}h\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \tau} = 0. \tag{5.53}$$

L'équation ci-dessus n'est rien d'autre que celle d'Hamilton-Jacobi pour le cas d'une particule de Klein-Gordon.

Conclusion

Le travail qui a été réalisé constitue une variante possible, en intégrales de chemins, pour la résolution de l'équation de Dirac, ainsi qu'à la théorie perturbative. Il s'agissait, dès le départ, d'explorer une nouvelle possibilité dans l'optique de proposer un formalisme, le moins contraint possible, permettant de décrire la dynamique pour différents cas d'interaction.

Eu égard à certains des ses attributs, tels, le cadre purement classique ainsi que l'aptitude à rendre compte de la plupart des processus d'interaction connus en QED, le modèle de l'électron proposé par Barut et Zanghi a constitué le centre de cet intérêt. Les calculs parfois très complexes, dans le cadre de la théorie perturbative, ont plaidé pour une approche différente, laquelle, repose sur une reconstruction susceptible de donner un résultat exact.

Techniquement, cette reconstruction s'opère par l'introduction, sous certaines conditions, de transformations matricielles qui permettent, chaque fois que possible, de ramener le problème étudié au cas d'une particule libre. En fait, la technique permettant la déduction de la fonction d'onde à partir de la solution libre, via une transformation de Lorentz (Ref.68) et dans le cas de l'onde plane, a été adaptée au cas d'une matrice (fonction de Green causale). Pour le reste, c'est un calcul standard, en intégrales de chemins, qui permet d'absorber progressivement les variables, par intégrations successives, jusqu'à l'obtention du résultat final.

L'autre fait à souligner réside dans la transformation canonique, induite par la nouvelle représentation des matrices gamma de Dirac. En effet, il a été montré que la fonction génératrice est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, pour le cas d'une particule de spin zéro. Ce résultat exhibe, de manière différente, la connexion qui existe, dans le cas de l'onde plane, entre la solution de l'équation de Dirac et celle de Klein-Gordon (Ref.64).

Cependant, une évaluation objective de ce travail ne pourrait pas faire l'économie d'une critique de la méthode proposée. Bien que certains résultats concrets aient été obtenus, l'approche proposée présente, à notre sens, un inconvénient sur lequel il faut insister. Il s'agit de l'absence d'une technique claire qui puisse conduire à la détermination des transformations, quelque soit la nature de l'interaction. Dans ce sens, Il n'est pas exclu qu'un examen poussé de la topologie de l'espace des configurations puisse conduire à un principe général, permettant spécialement la déduction des ces mêmes transformations. Si cet objectif est réalisable, au final, ce serait alors une alternative réelle à la résolution des équations différentielles, ainsi qu'à la théorie perturbative.

Bibliographie

[1] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, Naturwiss, 13, 953 (1925).

[2] J. Frenkel, Z. f¨ur Physik, 37, 243 (1926).

[3] V. Bargmann, L. Michel and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett, 2, 435 (1959).

[4] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond, A 117, 610-624 (1928).

[5] A. D. Kirsh, Comments Nucl. & Particle Physics, 11, 93 (1983).

[6] A. O. Barut, "The importance of spin", (SISSA-International School For Advanced Studies, 12/87/EP).

[7] E.P. Wigner, Communications on Pure and Applied Mathématics, XIII, 1-14 (1960).

[8] J. Martin, Proc. Roy. Soc. of London, A 251, 536 (1959).

[9] Jr. S.J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W.Gates, ”Superspace” Benjamin/Cummings, London 1983.

[10] K. Sundermeyer, ”Constrained Dynamics”, Springer, Berlin (1982).

[11] W. Tobocman, Nuovo Cim., 3, 134 (1956).

[12] P. Matthews and A. Salam, Nuovo Cim., 2, 120 (1955).

[13] A. J. Hanson and T. Regge, Ann.Phys, 87, 498 (1974).

[14] P. Grassberger, J. Phys. A, Math Gen, 11, 1221 (1978).

[15] A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nuovo Cimento, 35 A, 377 (1976).

[16] F. A. Berezin and M. S. Marinov, Ann. Phys. 104, 366, (1977).

[17] L. Brink and J. H. Schwarz, Phys. Lett. 100 B, 310 (1981).

[18] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, Nucl. Phys.B, 118, 76 (1977).

[19] J. A. de Azc´arraga and J. Lukierski, Phys. Lett, 113.B, 170 (1982).

[20] W. Siegel, Class. Quantum Grav, 2, L95 (1985).

[21] W. Siegel, Phys. Lett, 203 B, 79 (1988).

[22] D. P. Sorokin, V. I. Tkach and D. V. Volkov, Mod. Phys. Lett. A, 4,901 (1989).

[23] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys, 20, 367 (1948).

[24] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", (McGraw-Hill, New York, 1965).

[25] E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Phys. Rev. D 44, 3230, (1991).

[26] S. Zeggari et al., CZEC J PHYS, 51(3), 185-198 (2001).

[27] D. M. Gitman and A. V. Saa, Class. Quantum Gravi.10, 1447 (1993).

[28] D. M. Gitman and S. I. Zlatev, Phys. Rev. D55, 7701-7714 (1997).

[29] S. Haouat and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C 53, 289–294 (2008).

[30] D. M. Gitman, Nucl. Phys. B, 448, 490-512 (1997).

[31] R. P. Malik, Phys. Lett. B, 345, 131-138 (1995).

[32] J. Lukierski, A. Nowicki and H. Ruegg, Phys. Lett. B, 264 (1991).

[33] J. Lukierski, A. Nowicki and H. Ruegg, Phys. Lett. B, 313 (1993).

[34] S. Weinberg , Phys. Rev. Lett. 19, 1264-1266 (1967).

[35] A. Salam, "Elementary Particle Theory", (N. Svartholm, Almqvist Forlag AB, 367.1968).

[36] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani , Phys. Rev. D2, 1285-1292 (1970).

[37] R. Jackiw, Proc. Natl. Acad. Sci. Usa, 12776-12778 (1998).

[38] M. B. Green and J. H. Schwarz, Phys. Lett B, 149 (1984).

[39] B. Zwiebach, "A first course in string theory", (Cambridge University Press, Second Edition, 2009).

[40] A. O. Barut and N. Zanghi, Phys. Rev. Lett. 52, 2009 (1984).

[41] E. Schrodinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K1. 24, 418 (1930).

[42] O. A. Barut and I. H. Duru, Phys. Rev. Lett. 53, 2355 (1984).

[43] A.O. Barut and I. H. Duru, Phys.Rep. 172, 1 (1989).

[44] A. O. Barut, Phys. Scr, 18 (1988).

[45] H. K. Ould-Lahoucine and L. Chetouani, Cent. Eur. J. Phys. 7, 184-192 (2009).

[46] H. K. Ould-Lahoucine and L. Chetouani, Int. Jour. Theo. Phys. (2012).

[47] H. K. Ould-Lahoucine and L. Chetouani, J. Math. Phys, 53, 072303 (2012).

[48] L. T. Thomas, Phil. Mag. 3, 1 (1927).

[49] M. Mathisson, Acta Phys. Polon. 6, 163 (1937) ; 6, 218 (1937).

[50] J. Weyssenhoff and A. Raabe, Acta Phys. Polon. 9, 7 (1947) ; 9, 19 (1947).

[51] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. (London) A209, 248 (1951).

[52] L. H. Thomas, Phil.Magazine, 3, 1 (1927).

[53] A. O. Barut, "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles", (MacMillan, New York, 1964).

[54] G. Cognola, R. Soldati, L. Vanzo and S. Zerbini, Phys. Lett. 104 B, 67 (1981).

[55] J-M. Souriau, "Structure des syst‘emes dynamiques", (Dunod, Paris, 1970).

[56] S. Zakrzewski, "Extended phase space for a spinning particle", hep-th/9412100.

[57] Ch. Duval, P. Horvathy, Ann. Phys. (NY) 142, 10 (1982).

[58] Ch. Duval, Ann. Inst. H. Poincaré A XXV, 345 (1976).

[59] Z. Hasiewicz, P. Siemion and F. Defever, Int. J. Mod. Phys. A 17, 3979 (1992).

[60] S. M. Kuzenko, S. L. Lyakhovich, A. Yu. Segal, Int. J. Mod. Phys. A 10, 1529 (1995).

[61] R. Penrose, W. Rindler, "Spinors and space-time", (Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1986).

[62] V. D. Gershun, V. I Tkach, JETP Lett. 29, 320 (1979).

[63] P. S. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend, Phys. Lett. B 215, 255 (1988).

[64] D. M. Volkov, Z. Phys. 94, 250 (1935).

[65] F. Ehlotzky, Opt. Commun. 13, 1 (1975).

[66] H. Brehme, Phys. Rev. C 3, 837 (1971).

[67] T. W. B. Kibble, Phys. Rev. D 3, 1692 (1971).

[68] A. H. Taub, Rev. Mod. Phys. 21, 388 (1949).

[69] R. W. Brown and K. L. Kowalski, Phys. Rev. Lett. 51, 2355 (1983).

[70] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi and T .F. Hammann, Phys. Scr. 46, 289 (1992).

[71] T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi and T .F. Hammann, Phys. Scr. 46, 289 (1992).

[72] S. Taleb-Hacine, Master Thesis, Université de Constantine (2007).

[73] A. Einstein, "The Meaning of Relativity", (Princeton University Press, 5th edition, 1953).

[74] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", (John Wiley and Sons, New York, 1972).

[75] S. M. Carroll, "Lecture Notes On General Relativity", http ://itp.ucsb.edu/~carroll/notes/.

[76] L. Landau et E. Lifchitz, "Théorie Des Champs", (EDITION MIR MOSCOU, 4^e édition revue et complétée, 1989).

[77] A. Barducci, R. Giachetti, J. Phys. A Math. Gen. 38, 1615 (2005).

[78] A.N. Vaidya, C. Farina, M.S. Guimaraes, M. Neves, J.Phys. A Math. Theor. 40, 9149 (2007).

[79] S. Haouat and L. Chetouani, Eur. Phys. J. C 53, 289–294 (2008).