REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et d'informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématique Fondamental

Option : Analyse et applications

Thème

Etude de la différentiabilité locale de la fonction distance

Présenté par :

Besma BOUNNECHE

Devant le jury :

Président :	**N. Fetouci**	M.C.B	Univ.Jijel
Encadreur :	**S. Izza**	M.C.B	Univ.Jijel
Examinateur :	**M. Benguessoum**	M.A.A	Univ.Jijel

Promotion 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce travail.

Je remercie vivement tous les enseignants qui ont participé à ma formation et particulièrement mon encadreur **Mme Izza Sabrina** d'avoir proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

Mes remerciments vont aussi au président de jury **Mme N. Fatouci** et à **Mme M. Benguessoum** pour avoir acceptée de lire et noter ce travail.

Enfin, à mes parents, aux membres de ma famille, connaissances et amis qui m'ont été d'un soutien moral tout au long de mon travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

A mes chèrs parents ⋆ Abd-Ellah et Noura ⋆ pour leurs soutien moraux
et pour leurs encouragements ...
Que Dieu vous protège

A mon frère, Houssam et Yassine

A mes soeurs Sara, Ahlam et Meriem

A ma charmante tante Wafia

A mes chères Amina, Abla, Hanna et Fatiha

A mes amies de ma promotion

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime

"B.Besma"

TABLE DES MATIÈRES

Notations

E un espace quelconque.

E' dual topologique de E.

E'' bidual topologique de E.

$\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ produit scalaire.

$\sigma(E, E')$ la topologie faible définie sur E.

$\sigma(E', E)$ la topologie faible* définie sur E'.

$\mathbb{B}(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

$\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r.

$\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

$| \cdot |$ norme sur l'espace E.

$int(A)$ l'intérieur de l'ensemble A.

$Fr(A)$ la frontière de l'ensemble A.

$\vartheta(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.

$\rightarrow$ convergence forte.

$\rightharpoonup$ convergence faible.

$\rightharpoonup^*$ convergence faible*.

$f \Box g$ La convolution infimale de f et g.

s.c.s. semicontinue supérieurement.

s.c.i. semicontinue inférieurement.

$Df(x_0)$ la dérivée de Fréchet associée à une fonction$f$ au point x_0.

$\nabla f(x_0)$ la dérivée de Gâteaux associée à une fonction f au point x_0.

Introduction

La fonction distance d_C associée à un sous ensemble fermé C d'un espace de Hilbert réel H est définie pour chaque $u \in H$ par

$$d_C(u) = \inf_{x \in C} \mid u - x \mid .$$

Dans quelle mesure d_C est différentiable au sens de Fréchet ou au sens de Gâteaux ? Où est-elle continûement différentiables ? Cela représente un intérêt considérable dans l'analyse variationnelle, non seulement pour sa connexion à la géométrie de C et à la projection P_C mais également pour ses applications en optimisation. Pour C convexe, la différentiabilité de d_C partout à l'extérieur de C est bien connue, mais pour C non convexe, a été moins etudiée, à part dans quelques résultats sur la différentiabilité générique comme dans **Borwein** et **Giles** [5].

Quel caractère-peut être donné à l'existence d'un voisinage ouvert O de $\bar{x}$ tel que d_C est continûement différentiable sur $O \backslash C$? On pourrait imaginer que des résultats locaux pourraient être obtenus en invoquant les résultats globaux lisses dans le cas de $C \cap \overline{\mathbb{B}}$ pour une boule fermée $\overline{\mathbb{B}}$ de centre $\bar{x}$, mais ceci se fait difficilement par rapport à ce qui se passe aux points où la frontière de $\overline{\mathbb{B}}$ rencontre C.

Il est également nécessaire de mieux comprendre comment les propriétés locales de d_C correspondent à ceux de P_C, il est bien connu qu'un ensemble convexe fermé C admet une projection P_C généralement univoque.

Clarke, Stern et **Wolenski** [9] qui on fait des progrès en étudiant des ensembles convexes, les ensembles proximalement lisses , qu'ils ont définis comme ensembles fermés $C \subset H$ tels que d_C est continûement différentiable sur une couronne ouverte définie par

$$U_C(r) = \{ \, u \in H \;\mid\; 0 < d_C(u) < r \, \},$$

pour un certain $r > 0$. Ils ont montré pour les ensembles C non convexes, où une distinction doit être faite entre forte et faible fermeture, que l'ensemble faiblement fermé C est proximalement lisse si et seulement si P_C est univoque sur la couronne $U_C(r)$. Un autre résultat a été obtenu par **A. S. Shapiro** [19] au niveau local, il a montré pour un ensemble fortement fermé C et un point $\bar{x} \in C$, que P_C est univoque sur un voisinage de $\bar{x}$ si la propriété de Shapiro à C au point $\bar{x}$ est satisfaite.

La valeur unique de la projection sur un voisinage de $\bar{x}$ a été utilisé par **H. Federer** [12] pour définir des ensembles à Portée positive **"positive reach sets"** au voisinage de $\bar{x}$. Dans le cadre de la dimension finie, il a établi, entre autres résultats, que le carré de d_C est continûement différentiable au voisinage de $\bar{x}$ lorsque C est à portée positive au voisinage de $\bar{x}$.

En reprenant la théorie locale de la différentiabilité de la fonction distance d_C et ses conséquences sur la projection P_C dans un espace de Hilbert, nous nous appuyons sur une propriété différente de C en un point $\bar{x}$, à savoir la prox-régularité qui a été introduite par **Poliquin** et **Rockafellar** [15, 16].

Ce mémoire est composé en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous allons introduire toutes les définitions et résultats qui nous sont indisponsable, c'est à dire des rappels sur la fonction distance, la topologie faible et les multifonctions, sur la différentiabilité et sous différentiabilité des fonctions, sur la projection et les cônes normaux . . . etc.
Le deuxième chapitre est divisé en deux parties principales. La première partie est partagée en deux sections, dans la premiére nous introduisons les ensembles prox-réguliers et dans la deuxiéme nous définissons les fonctions **"primal lower nice"** et quelques une de leurs propriétées. Dans la deuxième partie qui est la troisiéme section nous donnons quelques propriétés sur les ensembles prox-réguliers, ainsi que leur relation avec le cône normal tronqué et les fonction **"primal lower nice"**.
Enfin, le troisième chapitre est consacré à l'étude de la différentiabilité locale du carré de la fonction distance $d_C^2(\cdot)$ associée à un ensemble prox-régulier C qui admet la propriété de Shapiro pour trouver des résultats intéressants sur les sous différentiels de Fréchet et de Clarke de $d_C^2(\cdot)$ et la différentiabilité au sens de Fréchet et au sens de Gâteaux correspondant à ceux de la fonction distance $d_C(\cdot)$, puis nous donnons des résultats locaux sur la projection $P_C(\cdot)$ comme la continuité forte, l'existence et l'unicité.

La plus grande partie de ce traveil a été basée sur l'article, *local differentiability of distance functions* de **R. A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault** [16] et pour compléter nos pagages préliminaires voici quelques titres de livres qui ont été utilisés *Nonsmooth analysis* de **W.Schirotzek** [18], *Applied Nonlinear Analysis* de **J.-P. Aubin and I. Ekeland** [3] et *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications* de **H.Brezis** [6].

CHAPITRE 1

Préliménaires

Dans ce chapitre nous avons énoncé tous les résultats et les notions que nous avons utilisés dans ce mémoire, c'est à dire les définitions, les propositions et les théorèmes dont nous avons eu besoin pour une bonne étude de la différentiabilité locale de la fonction distance.

1.1 Rappels sur la fonction distance

Définition 1.1.1. *Soit H un espace de Hilbert. L'application définie par*

$$\begin{aligned} |\cdot| : H &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \end{aligned}$$

est appelée la norme de x, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire défini sur H.

Proposition 1.1.1. *L'application définie par*

$$\begin{aligned} |\cdot|^2 : H &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |x|^2 = \langle x, x\rangle. \end{aligned}$$

est appelée la norme carrée de x.
De plus, $|\cdot|^2$ est localement lipschitzienne.

Démonstration.
Montrons que $|\cdot|^2$ est localement lipschitzienne :
i.e., montrons qu'il existe $k' > 0$ tels que $\big||x|^2 - |y|^2\big| \leq k'|x-y|$.

Soit $x_0 \in H$ et $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r')$, $r' > 0$, donc

$$|x - y| = |x - x_0 + x_0 - y| \leq |x - x_0| + |y - x_0| \leq 2r'.$$

On a

$$|x|^2 = |x - y + y|^2 \leq |x - y|^2 + |y|^2 + 2|x - y||y|$$

alors

$$|x|^2 - |y|^2 \leq |x - y|(|x - y| + 2|y|)$$

et

$$|y|^2 = |y - x + x|^2 \leq |y - x|^2 + |x|^2 + 2|y - x||x|$$

alors

$$|y|^2 - |x|^2 \leq |x - y|(|x - y| + 2|x|),$$

comme $|x| - |x_0| \leq |x - x_0| \leq r'$, on a $|x| \leq r' + |x_0|$. De même pour $|y| \leq r + |x_0|$.
d'où

$$\begin{aligned} |x|^2 - |y|^2 &\leq |x - y|(|x - y| + 2|y|) \\ &\leq (2r' + 2(r' + |x_0|))|x - y| \\ &= (4r' + 2|x_0|)|x - y|. \end{aligned} \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} |y|^2 - |x|^2 &\leq |y - x|(|x - y| + 2|x|) \\ &\leq (2r' + 2(r' + |x_0|))|x - y| \\ &= (4r' + 2|x_0|)|x - y|, \end{aligned}$$

donc

$$|x|^2 - |y|^2 \geq -(4r' + 2|x_0|)|x - y|. \tag{1.2}$$

on prend $k' = (\, 4r' + 2|x_0|) > 0$ de (1.1) et (1.2) on obtient au voisinage de x_0

$$\big||x|^2 - |y|^2\big| \leq k'|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{B}(x_0, r'),\ r' > 0.$$

D'où $|\cdot|^2$ est localement lipschitzienne.

■

Définition 1.1.2. *Soient (E, d) un espace métrique et C une partie non vide de E. On appelle "fonction distance associée à C" qu'on note d_C, la fonction définie par*

$$\begin{aligned} d_C : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d_C(x) = \inf_{y \in C} |x - y|. \end{aligned}$$

Si $x \in \overline{C}$, alors $d_C(x) = 0$.

On a d_C est globalement lipschitzienne dans E, c'est à dire

$$|d_C(x) - d_C(y)| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in E.$$

Proposition 1.1.2. *Soit la fonction d_C^2 définie par*

$$\begin{aligned} d_C^2 : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d_C^2(x) = \left(\inf_{y \in C} |x - y| \right)^2 = \inf_{y \in C} |x - y|^2. \end{aligned}$$

La fonction d_C^2 est localement lipschitzienne.

Démonstration.

Montrons que d_C^2 est localement lipschitzienne :

Soient $x_0 \in H$ et $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r)$, $r > 0$. Montrons qu'il existe $k > 0$ tel que

$$|d_C^2(x) - d_C^2(y)| \leq k|x - y|$$

On a

$$d_C^2(x) = \inf_{a \in C} |x - a|^2, \quad \forall x \in \mathbb{B}(x_0, r),$$

et

$$d_C^2(y) = \inf_{a \in C} |y - a|^2, \quad \forall y \in \mathbb{B}(x_0, r).$$

D'après la caractérisation de l'inf, on a

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, a_\varepsilon, b_\varepsilon \in C$ tels que

$$d_C^2(x) \leq |x - a_\varepsilon|^2 < d_C^2(x) + \varepsilon,$$

et

$$d_C^2(y) \leq |y - b_\varepsilon|^2 < d_C^2(y) + \varepsilon,$$

comme $d_C^2(x) = \inf_{z \in C} |x - z|^2$, alors $d_C^2(x) \leq |x - z|^2$, $\forall z \in C$.

pour $z = b_\varepsilon$ on trouve

$$\begin{aligned} d_C^2(x) \leq |x - b_\varepsilon|^2 = |x - y + y - b_\varepsilon|^2 &\leq |x - y|^2 + |y - b_\varepsilon|^2 + 2|x - y|.|y - b_\varepsilon| \\ &< d_C^2(y) + \varepsilon + |x - y|(|x - y| + 2|y - b_\varepsilon|). \end{aligned}$$

donc

$$d_C^2(x) - d_C^2(y) < |x-y|(|x-y| + 2|y-b_\varepsilon|) + \varepsilon. \tag{1.3}$$

D'autre part, comme $d_C^2(y) = \inf_{z\in C}|y-z|^2$, alors $d_C^2(y) \leq |y-z|^2$, $\forall z \in C$.
pour $z = a_\varepsilon$ on obtient

$$\begin{aligned} d_C^2(y) \leq |y-a_\varepsilon|^2 = |y-x+x-a_\varepsilon|^2 &\leq |y-x|^2 + |x-a_\varepsilon|^2 + 2|y-x|.|x-a_\varepsilon|, \\ &< d_C^2(x) + \varepsilon + |x-y|(|x-y| + 2|x-a_\varepsilon|). \end{aligned}$$

donc

$$d_C^2(y) - d_C^2(x) < |x-y|(|x-y| + 2|x-a_\varepsilon|) + \varepsilon. \tag{1.4}$$

Comme

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x-x_0+x_0-y| \\ &\leq |x-x_0| + |y-x_0| \\ &\leq 2r, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |x-a_\varepsilon| &= |x-x_0+x_0-a_\varepsilon| \\ &< |x-x_0| + |x_0-a_\varepsilon| \\ &< r + |x_0-a_\varepsilon| \\ &< r + \sup_{c\in C}|x_0-c|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |y-b_\varepsilon| &= |y-x_0+x_0-b_\varepsilon| \\ &< |y-x_0| + |x_0-b_\varepsilon| \\ &< r + |x_0-b_\varepsilon| \\ &< r + \sup_{c\in C}|x_0-c|, \end{aligned}$$

donc, d'après (1.3) on a

$$\begin{aligned} d_C^2(x) - d_C^2(y) &< |x-y|(2r + 2(r + \sup_{c\in C}|x_0-c|)) + \varepsilon \\ &= |x-y|(4r + 2\sup_{c\in C}|x_0-c|) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Et d'après (1.4) on a

$$\begin{aligned} d_C^2(y) - d_C^2(x) &< |x-y|(2r + 2(r + \sup_{c\in C}|x_0 - c|)) + \varepsilon \\ &= |x-y|(4r + 2\sup_{c\in C}|x_0 - c|) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donc

$$d_C^2(x) - d_C^2(y) > -\left[|x-y|(4r + 2\sup_{c\in C}|x_0 - c|) + \varepsilon\right]. \tag{1.6}$$

On prend $k = (4r + 2\sup_{c\in C}|x_0 - c|) > 0$, de (1.5) et (1.6) on obtient

$$|d_C^2(x) - d_C^2(y)| \leq k|x-y| + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

d'où en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$|d_C^2(x) - d_C^2(y)| \leq k|x-y|.$$

■

Remarque 1.1.1. *Si d_C^2 et $|\cdot|^2$ sont localement lipschitziennes. Alors, $d_C^2 + |\cdot|^2$ est localement lipschitzienne.*

En effet *;*

Il existe $k > 0$, $r > 0$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r)$

$$|d_C^2(x) - d_C^2(y)| \leq k|x-y|,$$

et il existe $k' > 0$, $r' > 0$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r')$

$$\big||x|^2 - |y|^2\big| \leq k'|x-y|.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{B}(x_0, r) \cap \mathbb{B}(x_0, r') = \mathbb{B}(x_0, r'')$ avec $r'' = \min(r, r')$ on a

$$\begin{aligned} \big|(d_C^2(x) + |x|^2) - (d_C^2(y) + |y|^2)\big| &= \big|(d_C^2(x) - d_C^2(y)) + (|x|^2 - |y|^2)\big| \\ &\leq \big|d_C^2(x) - d_C^2(y)\big| + \big||x|^2 - |y|^2\big| \\ &\leq k|x-y| + k'|x-y| \\ &= (k+k')|x-y| \\ &= k''|x-y|. \end{aligned}$$

D'où, $\exists\, k'' = k + k' > 0$ tel que $d_C^2 + |\cdot|^2$ est localement lipschitzienne.

1.2 Ensembles et fonctions convexes

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. On dit que A est convexe si*

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda\, x + (1-\lambda) y \in A.$$

Remarque 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel normé.*
i) $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$ et $\mathbb{B}(x_0, r)$ sont convexes, pour tout $x_0 \in E$, $r > 0$.
ii) Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{x\}$ et $\emptyset$ sont des ensembles convexes.

Définition 1.2.2 (Cônes). *Soient E un espace vectoriel, K un sous ensemble de E. On dit que K est un cône si*

$$\forall x \in K,\ \forall \lambda \geq 0,\ \lambda\, x \in K.$$

Proposition 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel, K un cône dans E. Alors K est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in K$ on a*

$$x + y \in K.$$

Définition 1.2.3 (Polaire et bipolaire). *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et K un cône de E.*
i) On définit le polaire de K qu'on note K^o par

$$K^o = \left\{x' \in E',\ \langle x', x\rangle \leq 0,\ \forall x \in K\right\}.$$

ii) On définit le bipolaire de K qu'on note K^{oo} par

$$K^{oo} = \left\{x \in E,\ \langle x', x\rangle \leq 0,\ \forall x' \in K^o\right\}.$$

Proposition 1.2.2. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et K un cône de E.*
a) K^o et K^{oo} sont des cônes convexes.
b) K^{oo} est fermé.

1.2.2 Fonctions convexes

I) Fonctions convexes dans $\mathbb{R}$

Définition 1.2.4. *Soient E un espace vectoriel, $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si*

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.

Proposition 1.2.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors*

a) f admet en tout point $x_0 \in int(I)$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b) f est continue en tout point $x_0 \in int(I)$.

Remarque 1.2.2. *Toute fonction linéaire est convexe et concave en même temps.*

Exemple 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel, A un ensemble de E.*
Si A est convexe, alors d_A est convexe.

II) Fontions convexes dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soient E un espace vectoriel et f une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.2.5.
i) On appelle domaine de définition de f qu'on note par $D(f)$, l'ensemble défini par

$$D(f) = \{x \in E \;/\; f(x) < +\infty\}.$$

ii) On dit que f est propre si

$$f : E \to]-\infty, +\infty] \;\; et \;\; \exists\, x_0 \in E, \;\; f(x_0) \neq +\infty.$$

Définition 1.2.6. *On dit que f est convexe si pour tout $x, y \in E$, tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \alpha$, $f(y) < \beta$ on a*

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) < \lambda\, \alpha + (1-\lambda)\, \beta.$$

Remarque 1.2.3. *Si f est propre, alors f est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in D(f)$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a*

$$f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Théorème 1.2.4. *Si f est propre, convexe et bornée sur un ouvert non vide de E. Alors f est localement lipschitzienne sur $int(D(f))$.*

Définition 1.2.7. *Soient E un espace vectoriel et A un sous ensemble non vide de E. On appelle fonction indicatrice de A qu'on note δ_A la fonction définie par*

$$\delta_A : E \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A \\ +\infty & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

Proposition 1.2.5. *Soient E un espace vectoriel et A un sous ensemble non vide de E. A est convexe si seulement si δ_A est convexe.*

Exemple 1.2.2. *Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|^2$.*
Montrons que g est convexe :
Soient $x, y \in D(g)$ et $\lambda \in [0,1]$, montrons que $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.
On a

$$\begin{aligned}
\big|\lambda x + (1-\lambda)y\big|^2 - \lambda|x|^2 - (1-\lambda)|y|^2 &\leq \big[|\lambda x| + |(1-\lambda)y|\big]^2 - \lambda|x|^2 - (1-\lambda)|y|^2 \\
&= \big[\lambda|x| + (1-\lambda)|y|\big]^2 - \lambda|x|^2 - (1-\lambda)|y|^2 \\
&= \lambda^2|x|^2 + (1-\lambda)^2|y|^2 + 2\lambda(1-\lambda)|xy| - \lambda|x|^2 + (\lambda-1)|y|^2 \\
&= \lambda\big[(\lambda-1)|x|^2\big] + (\lambda-1)\big[(\lambda-1+1)|y|^2\big] - 2\lambda(\lambda-1)|xy| \\
&= \lambda(\lambda-1)\big(|x|^2 + |y|^2 - 2|xy|\big) \\
&= \lambda(\lambda-1)\big(\,|x| - |y|\big)^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

D'où $|\cdot|^2$ est convexe.

1.3 Topologies faible et faible*

1.3.1 Topologie faible

Définition 1.3.1. *Soient E un espace de Banach réel et $f \in E'$, considérons l'application*

$$\begin{aligned}
\varphi_f : E &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle.
\end{aligned}$$

On appelle topologie faible sur E qu'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ et on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.3.1. *Soient E un espace de Banach réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, alors*
1) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.
2) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.
3) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|x| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} |x_n|$.
4) Si $x_n \rightharpoonup x$ et $f_n \to f$, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.3.2. *Si E est de dimension finie, alors la topologie forte de E et la topologie faible $\sigma(E, E')$ coïncident.*

1.3.2 Topologie faible*

Définition 1.3.2. *Soient E un espace de Banach réel et $x \in E$, considérons l'application*

$$\psi_x : E' \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \psi_x(f) = \langle f, x \rangle.$$

On appelle topologie faible sur E' qu'on note $\sigma(E', E)$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\psi_x)_{x\in E}$ et on désigne par $f_n \rightharpoonup^* f$ la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.3.3. *Soient E un espace de Banach réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$. Alors*
1) $f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.
2) $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.
3) $f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.
4) $f_n \rightharpoonup^* f \Rightarrow (|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $|f| \le \liminf_{n\to+\infty} |f_n|$.
5) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ et $x_n \to x$, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.3.4. *Si E est de dimension finie, toutes les topologies coïncident.*

Théorème 1.3.5. *Soit E un espace de Banach et A une partie de E. On dit que A est faiblement* fermé (resp. compact) s'il est fermé (resp. compact) par rapport à la topologie faible*.*

1.4 Espace réflexifs

Définition 1.4.1. *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$ (on identifie alors E et E'' à l'aide de l'isomorphisme J ; $E \backsimeq E''$).*

Proposition 1.4.1. *Tout espace de dimension finie est réflexif.*

Théorème 1.4.2. *Toute espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Proposition 1.4.3. *Tout espace de Hilbert est uniformément convexe et donc réflexif.*

Définition 1.4.2 (Norme de Kadec). *La norme $|\cdot|$ d'un espace de Banach E est dite une norme de Kadec si pour une suite $(x_n)_n$ de E converge faiblement vers x et $|x_n|$ converge fortement vers $|x|$ implique x_n converge fortement vers x, quand $n \to \infty$.*

Lemme 1.4.4. *La norme d'un espace de Banach localement uniformément convexe est une norme de Kadec.*

1.5 Fonctions semicontinues inférieurement et semicontinues supérieurement

Définition 1.5.1. *Soient E un espace topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*

a) On dit que f est semicontinue inférieurement (s.c.i.) au point $x_0 \in E$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$, avec $h < f(x_0)$, il existe $V_{x_0} \in \vartheta(x_0)$ tel que $h < f(x)$, $\forall\, x \in V_{x_0}$.

b) On dit que f est semicontinue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in E$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$, avec $h > f(x_0)$, il existe $V_{x_0} \in \vartheta(x_0)$ tel que $h > f(x)$, $\forall\, x \in V_{x_0}$.

Remarque 1.5.1. *Soient E un espace topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$. Alors*

1. *f est s.c.i. au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, V_{x_0} \in \vartheta(x_0), \forall\, x \in V_{x_0}, f(x) - f(x_0) > -\,\varepsilon$.*
2. *f est s.c.s. au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, V_{x_0} \in \vartheta(x_0), \forall\, x \in V_{x_0}, f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.*
3. *f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, V_{x_0} \in \vartheta(x_0), \forall\, x \in V_{x_0}, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Proposition 1.5.1. *Soient E un espace vectoriel topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, alors f est s.c.i si seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles de niveau de f*

$$A_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) \leq \lambda\},$$

sont fermés.

Proprieté 1.5.1. *Soit E un espace topologique et $A \subset E$, alors*
A est fermée si et seulement si δ_A est s.c.i.

Définition 1.5.2. *On dit que f est une fonction faiblement s.c.i au point x si*

$$f(x) \leq \liminf_{i \to +\infty} f(x_i),$$

pour toute suite $(x_i)_i$ convergent faiblement vers x.

1.6 Multifonctions

1.6.1 Généralités

Définition 1.6.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. Une multifonction (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$. Le domaine d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est donné par*

$$Dom(F) = \{x \in X;\, F(x) \neq \emptyset\}.$$

Et l'image de F est donnée par

$$Im(F) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X;\, y \in F(x)\}.$$

Définition 1.6.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction. On appelle graphe de la multifonction F l'ensemble défini par*

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y;\, y \in F(x)\}.$$

Définition 1.6.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors on définit la multifonction inverse de F qu'on note F^{-1} par*

$$F^{-1} : Y \rightrightarrows X$$

où

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x)$$

et on a

$$(F^{-1})^{-1} = F\,;\;\; Dom(F^{-1}) = Im(F) \;\; et \;\; Im(F^{-1}) = Dom(F)$$

Définition 1.6.4. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ et $G : Y \rightarrow Z$ une multifonction, alors on définit la composition $G \circ F$ qu'on note*

$$\begin{aligned} G \circ F : X &\rightrightarrows Z \\ x &\mapsto (G \circ F)(x) = G(F(x)) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y). \end{aligned}$$

Définition 1.6.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors F est dite semicontinue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifiant $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V, \forall\, x \in U$. On dit que F est s.c.s. sur X, si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.*

Définition 1.6.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction, alors F est dite semicontinue inférieurement (s.c.i.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y vérifiant $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \cap V \neq \emptyset, \forall\, x \in U$. On dit que F est s.c.i. sur X, si elle est s.c.i. en tout point $x \in X$.*

Définition 1.6.7. *On dit que F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i. au point x_0 et F est continue si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i.*

1.6.2 Multifonctions monotones et hypomonotones

Définition 1.6.8. *Soient E un espace vectoriel normé et $\Phi : E \rightrightarrows E'$ une multifonction. On dit que Φ est monotone si*

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0,$$

pour tout $x, y \in Dom(\Phi)$, $x \neq y$, $x^* \in \Phi(x)$, $y^* \in \Phi(y)$.

Définition 1.6.9. *Une multifonction $T : H \rightrightarrows H$ est hypomonotone sur un sous ensemble O de H s'il existe $\sigma > 0$, tel que $T + \sigma I$ est monotone sur O ; cela correspond à avoir*

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\sigma|x_1 - x_2|^2, \quad \forall v_i \in T(x_i) \text{ et } x_i \in O,\ i = 1, 2.$$

Définition 1.6.10. *Soit E un espace de Banach.*
On dit que la multifonction $\Phi : E \rightrightarrows E'$ est maximale monotone, si Φ est monotone et le graphe de Φ n'est pas contenue dans le graphe d'aucune autre multifonction monotone.

Lemme 1.6.1. *(voir [17, lemme7.7]) Soit E un espace de Banach.*
Supposons que $D \subset E$ est ouvert, et que $T : D \rightrightarrows E$ est monotone, fortement-faiblement semicontinue supérieurement, et que $T(x)$ est non vide, convexe et faiblement* fermé pour tout $x \in D$. Alors, T est maximal monotone sur D.*

1.7 Différentiabilité et sous différentiabilité

1.7.1 Dérivées directionnelles

Définition 1.7.1. *Soient E un espace vectoriel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient x_0,$v \in E$. On appelle dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction v qu'on note par $f'(x_0, v)$, la limite définie par*

$$f'(x_0, v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand elle existe.

Théorème 1.7.1. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et convexe et $x_0 \in D(f)$. Alors,*
a) $f'(x_0, v)$ existe, pour tout $v \in E$.
b) La fonction

$$\begin{aligned} g : E &\to \overline{\mathbb{R}} \\ v &\mapsto g(v) = f'(x_0, v) \end{aligned}$$

est positivement homogène, convexe et sous additive.
c) $f'(x_0, v) \leq f(x_0 + v) - f(x_0)$*, pour tout* $v \in E$.

Définition 1.7.2 (*Dérivée directionnelle de Clarke*). *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction localement lipschitzienne au voisinage de* $x_0 \in E$*. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de* f *au point* x_0 *dans la direction* $v \in E$*, notée* $f^o(x_0, v)$ *est définie par*

$$f^o(x_0, v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

tel que x *est un vecteur de* E *et* t *un scalaire positif.*

Proposition 1.7.2. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction localement lipschitzienne au voisinage de* $x_0 \in E$ *de rapport* $k > 0$*, alors*
a) La fonction

$$\begin{aligned} f^o(x_0, \cdot\,) : E &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto f^o(x_0, v) \end{aligned}$$

est finie, positivement homogène, sous additive et satisfait

$$|f^o(x_0, v)| \leq k|v|, \text{ pour tout } v \in E.$$

1.7.2 Différentiabilité

Définition 1.7.3. *Soient* E *un espace vectoriel normé,* E' *son dual topologique,* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in D(f)$.
1) *On dit que* f *est différentiable au sens de Gâteaux au point* x_0*, s'il existe* $x' \in E'$*, tel que*

$$f'(x_0, v) = \langle x', v \rangle \ \ , \forall v \in E, \tag{1.7}$$

x' *est défini d'une façon unique par la relation* (1.7) *et est appelée différentielle de* f *au sens de Gâteaux au point* x_0*, on la note souvent par* $x' = \nabla f(x_0)$*, appelée aussi gradient de* f *au point* x_0.
2) *On dit que* f *est différentiable au sens de Fréchet au point* x_0*, si la convergence dans la relation* (1.7) *est uniforme par rapport à* v *sur les ensembles bornés de* E*, c'est à dire*

$$\forall\, r > 0\,, \forall \varepsilon\, > 0\,,\ \exists \delta > 0, \forall t \in \mathbb{R},\ |t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x', v \rangle \right| < \varepsilon,\ \forall\, v \in E,$$

avec $|v| \leq r$*,* x' *est appelée la différentielle de* f *au sens de Fréchet au point* x_0*, on la note souvent par* $x' = f'(x_0) = Df(x_0)$.

Proposition 1.7.3. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est différentiable au sens de Fréchet au point x_0 s'il existe $x' \in E'$, tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} = 0.$$

Remarque 1.7.1. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, on écrit f est G-différentiable (resp. F-différentiable) au point x_0 au lieu de f est différentiable au sens de Gâteaux (resp. au sens de Fréchet) au point x_0.*

Proposition 1.7.4. *soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et $x_0 \in D(f)$. Si f est F-différentiable au point x_0, alors*

- *f est G-différentiable au point x_0 et $Df(x_0) = \nabla f(x_0)$.*
- *f est continue au point x_0*

Remarque 1.7.2. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$.*
Si f est G-différentiable au point x_0, alors $f'(x_0, v)$ existe pour tout $v \in E$, et on a dans ce cas $f'(x_0, v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$.

Proposition 1.7.5. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe et G-différentiable au point $x_0 \in D(f)$, alors f est s.c.i. au point x_0.*

Proposition 1.7.6. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, si f admet un minimum local au point x_0 et f est G-différentiable au point x_0, alors*

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0, \ \forall v \in E.$$

Définition 1.7.4 (*Différentiabilité stricte*). *Soient E et F deux espaces de Banach et $x_0 \in E$. On dit que $f : E \to F$ est strictement différentiable au point x_0 s'il existe un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ noté $\nabla_S f(x_0)$ tel que*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \langle \nabla_S f(x_0), v \rangle, \forall\, v \in E.$$

1.7.3 Sous différentiels

Définition 1.7.5. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est propre convexe et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$ l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E' \mid \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in E\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0, on dit que f est sous différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Remarque 1.7.3. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$.*
1) Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.
2) ∂f est une multifonction de E dans E'.

Proposition 1.7.7. *Soient $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et convexe et $x_0 \in D(f)$, alors*

1. *Si f est G-différentiable au point x_0, alors $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.*
2. *Si $x_0 \in Cont(f)$ et $\partial f(x_0)$ se compose d'un élément simple u, alors f est G-différentiable au point x_0 et $u = \nabla f(x_0)$.*

Où, $Cont(f) = \{x \in H \ / \ f \text{ est continue en } x\}$.

Proposition 1.7.8. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x_0 \in D(f)$. Alors, on a*
a) $0 \in \partial f(x_0)$ si et seulement si f admet un minimum global au point x_0.
b) $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$.

Proposition 1.7.9. *Soient E un espace vectoriel normé, $f_1, f_2 : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres convexes et $x_0 \in E$, alors*

$$\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) \subset \partial(f_1 + f_2)(x_0).$$

De plus, si f_1 (où bien f_2) est continue en un point $y \in E$ on a

$$\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) = \partial(f_1 + f_2)(x_0).$$

Théorème 1.7.10. *(voir [2, corollaire 3]) Soient E un espace vectoriel normé et soit f une fonction $\sigma(E, E')$ s.c.i, propre et convexe sur E. Soit U un ensemble non vide de E ouvert par rapport à la topologie forte. Supposons que pour tout $x \in U$, $\partial f(x)$ est un singleton de E' (désigné par $\nabla f(x)$), alors f est différentiable au sens de Gâteaux sur U et ∇f définie de U dans E' est fortement-faiblement continue (c-à-d l'espace de départ est muni de la topologie forte et l'espace d'arrivée muni de la topologie faible). Pour que f soit différentiable au sens de Fréchet sur U, il est nécessaire et suffisant que ∇f soit fortement continue de U dans E'.*

Proposition 1.7.11. *[18] Soit E un espace vectoriel normé. Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est propre et convexe. Alors, ∂f est monotone.*

Définition 1.7.6 (*Sous différentiel de Clarke*). *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, le sous différentiel de Clarke de f au point x_0 notée $\partial^C f(x_0)$ est défini par*

$$\partial^C f(x_0) = \{x' \in E';\ f^o(x_0, v) \geq \langle x', v \rangle, \forall\, v \in E\}.$$

Remarque 1.7.4. *Soient H un espace de Hilbert et f une fonction s.c.i. On peut aussi définir le sous différentiel de Clarke sur H pour f au point x_0 en utilisant la dérivée directionnelle de Rockafellar qu'on note $f^{\uparrow}(x_0, h)$, par*

$$\partial^C f(x_0) = \{\xi \in H;\ f^{\uparrow}(x_0, h) \geq \langle \xi, h \rangle, \forall\, h \in H\}.$$

où

$$f^{\uparrow}(x_0, h) = \limsup_{\substack{x' \to_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{h' \to h} t^{-1}[f(x' + th') - f(x')],$$

avec $x' \to^f x$ i.e., $x' \to x$ et $f(x') \to f(x)$.

Proposition 1.7.12. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, $\partial^C f(x_0)$ est un ensemble non vide, convexe et faiblement* compact.*

Proposition 1.7.13. *Soient E un espace de Banach réel, $x_0 \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de x_0. Si f est convexe, alors $f'(x_0, v) = f^o(x_0, v)$ pour tout $v \in E$ et dans ce cas $\partial f(x_0) = \partial^C f(x_0)$.*

Proposition 1.7.14. *Soient $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement lipschitziennes au voisinage de $x_0 \in E$. alors*

(i) $\partial^C(f_1 + f_2)(x_0) \subset \partial^C(f_1)(x_0) + \partial^C(f_2)(x_0)$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\partial^C(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial^C f(x_0)$.

Corollaire 1.7.15. *Pour tous scalaires λ_i, $i = 1, ..., n$ on a*

$$\partial^C \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right)(x_0) \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial^C f_i(x_0).$$

L'égalité est vraie si tout au plus une des f_i est strictement différentiable au point x_0.

Proposition 1.7.16. *Soit E un espace de Banach. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement différentiable au point x_0, alors f est localement lipschitzienne au voisinage de x_0 et on a $\partial^C f(x_0) = \{\nabla_S f(x_0)\}$.*
***Inversement** si $f : E \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne au voisinage de x_0 et $\partial^C f(x_0) = \{x'\}$. Alors, f est strictement différentiable au point x_0 et $x' = \nabla_S f(x_0)$.*

Théorème 1.7.17. *(voir [11, Théorème 3.8]) Soient E un espace de Banach réflexif et une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i et finie. Si $\partial^C f$ est monotone, alors f est convexe.*

Définition 1.7.7 (*Sous différentiel proximal*). *Soient E un espace de Banach réel, et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel proximal de f au point x_0 qu'on note $\partial^P f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial^P f(x_0) = \{x' \in E',\ \exists\, \delta > 0\,,\ \exists\, \sigma > 0 \mid \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) + \sigma\,|x - x_0|^2,\ \forall x \in \mathbb{B}(x_0, \delta)\}.$$

Proposition 1.7.18. *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. Alors*
a) Si f est G-différentiable en x_0, alors $\partial^P f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
b) Si f est convexe, alors $\partial^P f(x_0) = \partial f(x_0)$.

Remarque 1.7.5. *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i sur E et $x_0 \in D(f)$. Si f admet un minimum local au point x_0 . Alors, $0 \in \partial^P f(x_0)$.*

Définition 1.7.8 (*Sous différentiel de Fréchet*). *(voir [14]) Soit E un espace de Banach réel, et soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel de Fréchet de f au point x_0 qu'on note $\partial^F f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial^F f(x_0) = \left\{x' \in E',\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \mid \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon|x - x_0|,\ \forall x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, \delta)\right\}.$$

De plus, cet ensemble est non vide si et seulement si f est F-différentiable au point x_0.

Proposition 1.7.19. *Soient $f_1, f_2 : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres et s.c.i sur E, alors*

$$\partial^F f_1(x_0) + \partial^F f_2(x_0) \subset \partial^F (f_1 + f_2)(x_0).$$

Proposition 1.7.20. *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. Si f est F-différentiable au point x_0, alors*

$$\partial^F f(x_0) = \{Df(x_0)\}.$$

Proposition 1.7.21. *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. f est convexe si et seulement si*

$$\partial^F f(x_0) = \partial f(x_0).$$

Proposition 1.7.22. *Soient E un espace de Banach réel. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne au voisinage de x_0, alors*

$$\partial^F f(x_0) \subset \partial^C f(x_0).$$

Même si f est seulement s.c.i, l'inclusion précédente reste vraie.

Corollaire 1.7.23. *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$. Si f est localement lipschitzienne au voisinage de x_0, alors*

$$\partial^P f(x_0) \subset \partial^F f(x_0) \subset \partial^C f(x_0).$$

Proposition 1.7.24. *Soient $f_1, f_2 : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres et s.c.i. Si f_1 est F-différentiable au point $\bar{x}$ de E, alors*

$$\partial^F (f_1 + f_2)(\bar{x}) = \nabla f_1(\bar{x}) + \partial^F f_2(\bar{x}).$$

Proprieté 1.7.1. *(voir [11, propriété 2.7]) Soient E un espace de Banach réflexif et une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i et finie. Si f est localement lipschitzienne. Alors, la monotonité de $\partial^F f$ est équivalente à la monotonité de $\partial^C f$.*

1.8 Cônes normaux

Définition 1.8.1 (*Cône normal*). *Soient E un espace vectoriel normé, A un sous ensemble non vide de E et $x_0 \in A$. Tout vecteur $x' \in \partial\delta_A(x_0)$ est dit normal à A au point x_0 et $\partial\delta_A(x_0)$ est appelé le cône normal à A au point x_0 qu'on note $N_A(x_0)$ et qu'on définit par l'ensemble*

$$N_A(x_0) = \{x' \in E' \mid \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in A\}.$$

- *Si $x_0 \notin A$, alors $N_A(x_0) = \emptyset$.*

Proposition 1.8.1. *Soient E un espace vectoriel normé et A un sous ensemble non vide de E, on a*

$$\partial\delta_A(x_0) = N_A(x_0), \quad \forall x_0 \in E.$$

Proposition 1.8.2. *Soient E un espace vectoriel normé et A un sous ensemble convexe et non vide de E. Si $x' \in N_A(x_0)$, alors*

$$\alpha x' \in N_A(x_0), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x_0 \in E.$$

Définition 1.8.2 (*Cône tangent*). *Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. On appelle cône contingent, des vecteurs tangents à A au point x_0 qu'on note $T_A(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$T_A(x_0) = \{v \in E : \exists\, t_n \to 0,\ v_n \to v \mid\ x_0 + t_n v_n \in A\}.$$

Définition 1.8.3. *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E . On appelle cône normal à A au point x_0, l'ensemble défini par*

$$N_A(x_0) = (T_A(x_0))^o = \{x' \in E' \mid \langle x', y\rangle \leq 0\,,\, \forall\, y \in T_A(x_0)\}.$$

Définition 1.8.4 (*Cône tangent de Clarke*). *Soient E un espace de Banach, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. On appelle cône tangent de Clarke à A au point x_0 qu'on note $T_A^C(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$T_A^C(x_0) = \{v \in E\,,\, d_A^o(x_0, v) \leq 0\}.$$

Définition 1.8.5 (*Cône normal de Clarke*). *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. On appelle cône normal de Clarke à A au point x_0 qu'on note $N_A^C(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$N_A^C(x_0) = (T_A^C(x_0))^o = \{x' \in E' \mid \langle x', y\rangle \leq 0\,,\, \forall\, y \in T^C(A, x_0)\}.$$

Proposition 1.8.3. *Soient E un espace de Banach réel et A un sous ensemble non vide et fermé de E, on a*

$$\partial^C \delta_A(x_0) = N_A^C(x_0), \quad \forall x_0 \in E.$$

Définition 1.8.6 (*Cône normal de Fréchet*). *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. On appelle cône normal de Fréchet à A au point x_0 qu'on note $N_A^F(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$N_A^F(x_0) = \left\{x' \in E',\, \forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \;\mid\; \langle x', x - x_0\rangle \leq \varepsilon|x - x_0|,\, \forall x \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x_0, \delta)\right\}.$$

Proposition 1.8.4. *Soient E un espace de Banach réel et A un sous ensemble non vide et fermé de E, on a*

$$\partial^F \delta_A(x_0) = N_A^F(x_0), \quad \forall x_0 \in E.$$

Définition 1.8.7 (*Cône normal proximal*). *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. On appelle cône normal proximal à A au point x_0 qu'on note $S_A(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$S_A(x_0) = \left\{x' \in E',\, \exists\, \sigma > 0,\, \exists\, \delta > 0 \;\mid\; \langle x', x - x_0\rangle \leq \sigma|x - x_0|^2,\, \forall x \in A \cap \overline{\mathbb{B}}(x_0, \delta)\right\}.$$

Proposition 1.8.5. *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E, on a*

$$\partial^P \delta_A(x_0) = S_A(x_0), \quad \forall x_0 \in E.$$

Proposition 1.8.6. *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$ on a*

$$S_A(x_0) \subset N_A^F(x_0) \subset N_A^C(x_0) \subset N_A(x_0).$$

Proposition 1.8.7. *Soient E un espace de Banach réel, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$. Si A est convexe on a*

$$S_A(x_0) = N_A^F(x_0) = N_A^C(x_0) = N_A(x_0).$$

Définition 1.8.8 (*Cône normal tronqué*). *Soient H un espace de Hilbert, A un sous ensemble non vide et fermé de E et $x_0 \in A$.*
Le cône normal tronqué N_A^r à A au point x_0 comme étant la multifonction définie de $H \rightrightarrows H$ pour tout $r > 0$ par

$$N_A^r(x_0) = \begin{cases} N_A(x_0) \cap \mathbb{B}(0, r) & si \;\; x_0 \in A \\ \emptyset & si \;\; x_0 \notin A \end{cases}$$

Proprieté 1.8.1. *L'hypomonotonicité de N_C^r sur un voisinage O de $\bar{x}$ est équivalente à l'existence de nombres réels $c > 0$, $t_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que*

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

chaque fois que $v_i \in N_C(x_i)$, $|v_i| \leq ct$ et $|x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon$.

1.9 Projection

Définition 1.9.1. *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble fermé de H et $x_0 \in H$. La projection du point x_0 sur A est définie par*

$$P_A(x_0) = \{y \in A; \, |x_0 - y| = d_A(x_0)\}, \; \forall \, x_0 \in H.$$

Si A est de plus convexe, la projection est caractérisée par

$$y \in P_A(x_0) \Leftrightarrow y \in A \;\; et \; \forall \, z \in A, \, \langle x_0 - y, z - y \rangle \leq 0.$$

Proposition 1.9.1. *(voir [8, page 22]) Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide de H et $x \in H$. Supposons que $x \notin A$ et qu'il existe un point s tel que*

$$s = P_A(x), \;\; avec \, s \in A.$$

Alors, le vecteur $(x - s)$ détermine ce qu'on appelle "Une direction normale proximale à A au point s".

Proposition 1.9.2. *(voir[3, Théorème 15]) Soit H un espace de Hilbert et A un ensemble non vide de H. Si $y \notin \bar{A}$ et $x \in P_{\bar{A}}(y)$, alors*

$$(y - x) \in N_A(x).$$

Proposition 1.9.3. *Supposons que E est réflexif et que les normes de E et E' sont différentiables au sens de Fréchet sur $X \setminus \{0\}$, alors pour tout sous ensemble fermé A de E, il existe dans $E \setminus A$ un ensemble dense D de points x admetant une projection unique sur A : toute les suites $(y_n)_n \in A$ telles que $|x - y_n| \to d_A(x)$ convergent vers la même limite dans A.*

Définition 1.9.2. *Un ensemble K dans un espace de Hilbert H est dit un ensemble de Tchebychev si pour tout $x \in H$ il existe une projection unique $P_K(x)$, i.e.*

$$|x - y| > |x - P_K(x)|,$$

si $y \in K$ et $y \neq P_K(x)$.

Proprieté 1.9.1. *(voir [1]) Soit K un ensemble de Tchebychev non convexe. considérons la fonction :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup_{y \in K}\{\langle x, y\rangle - \frac{|y|^2}{2}\} \\ &= \frac{|x|^2}{2} - \inf_{y \in K}\left\{\frac{|x-y|^2}{2}\right\}, \end{aligned}$$

est une fonction convexe. De plus,

$$\{P_K(x)\} \in \partial f(x), \quad \forall x \in H.$$

1.10 Convolution infimale

Définition 1.10.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur $H \to]-\infty, +\infty]$, la convolution infimale de f et g est défini par*

$$\begin{aligned} f \Box g : H &\to [-\infty, +\infty] \\ x &\mapsto (f \Box g)(x) = \inf_{y \in H}(f(y) + g(x - y)). \end{aligned}$$

Proposition 1.10.1. *Soient f et g deux fonctions dans $\Gamma_o(H)$ et $x, y \in H$, supposons que $f \Box g \in \Gamma_o(H)$, $(f \Box g)(x) = f(y) + g(x - y)$ et f est G-différentiable au point y.*
Alors, $x \in Cont(f \Box g)$, $f \Box g$ est G-différentiable au point x et $\nabla(f \Box g)(x) = \nabla f(y)$.
De plus, si f est F-différentiable au point y, alors $f \Box g$ est F-différentiable au point x.
où $\Gamma_o(H)$: Lensemble de fonctions propres, s.c.i et convexes.

Lemme 1.10.2. *(voir [11, lemme 3.6]) Soient E un espace de Banach réflexif et $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres et s.c.i. Si la convolution : $(f\Box g)(a) = \inf\limits_{y\in E}[f(y) + g(a-y)]$ est exact, c-à-d si le minimum est atteint au point $\bar{y}$, alors*

$$\partial^F(f\Box g)(a) \subset \partial^F f(\bar{y}) \cap \partial^F g(a-\bar{y}).$$

Théorème 1.10.3. *(voir[5, Théorème 11]) Soit E un espace de Banach réflexif muni de la norme de kadec, Y un espace topologique et T une application propre continue de Y dans E avec $T(Y)$ bornée. Considérons la fonction*

$$\Phi(x) = \inf_{y\in Y}\{g(y) + h(|x - Ty|)\}$$

où g est s.c.i sur Y et minoré, et h est continue sur $[0, +\infty[$ avec sa dérivé h' continue positive sur $]0, +\infty[$ et $h(0) = 0$. Alors pour chaque point $x_0 \in E$ du sous ensemble dense, où Φ est sous différentiable au sens de Fréchet, il existe $y_0 \in Y$ tel que

$$\Phi(x_0) = g(y_0) + h(|x_0 - Ty_0|).$$

CHAPITRE 2

Prox-régularité et fonctions "primal lower nice"

Ce chapitre se compose de trois sections. Dans la première et la deuxiéme sections nous présentons les définitions d'un ensemble prox-régulier C et des fonctions **"primal lower nice"**.

Dans la troisième section nous donnons quelques propiétés sur les ensembles prox-réguliers ainsi que leurs relations avec le cône normal tronqué et les fonction **"primal lower nice"**.

2.1 Ensembles prox-réguliers

Définition 2.1.1. *Soit H un espace de Hilbert. Un ensemble fermé C de H est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour $\bar{v}$, où $\bar{x} \in C$ et $\bar{v} \in N_C(\bar{x})$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ tels que chaque fois que $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ et $|v - \bar{v}| < \varepsilon$, alors x est l'unique point le plus proche de $\left\{x' \in C, |x' - \bar{x}| < \varepsilon\right\}$ au point $x + \rho^{-1}v$.*

Il est prox-régulier au point $\bar{x}$ si cette propriété est vraie pour tout vecteur $\bar{v} \in N_C(\bar{x})$.

Définition 2.1.2. *On dit que v est un vecteur normal proximal non nul à un ensemble C au point $x \in C$ peut être réalisé par r-boule si et seulement si*

$$0 \geq \langle \frac{v}{|v|}, x' - x \rangle - \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.1. *Un ensemble fermé C est prox-régulier au point $\bar{x}$ si et seulement s'il est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour le vecteur $\bar{v} = 0$. Ceci est équivalent à l'existence de $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ tels que chaque fois que $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ et $|v| < \varepsilon$, on a*

$$0 \geq \langle v, x' - x \rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C \text{ avec } |x' - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$ et montrons qu'il est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour $\bar{v} = 0$.

Il est évident que si C est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour tout $\bar{v} \in N_C(\bar{x})$, alors C est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour $\bar{v} = 0$ car $0 \in N_C(\bar{x})$.

$\Leftarrow$) Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour le vecteur $\bar{v} = 0$ et montrons qu'il est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour tout $\bar{v} \in N_C(\bar{x})$.

D'après la **Définition** 2.1.1 C est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour le vecteur $\bar{v} = 0$, i.e. $\exists\, \varepsilon > 0$ et $\rho > 0$, $\forall x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ et $|v| < \varepsilon$, x est l'unique point le plus proche de $\{x' \in C,\ |x' - \bar{x}| < \varepsilon\}$ au point $x + \rho^{-1}v$.

Soient $\bar{v} \in N_C(\bar{x})$ avec $\bar{v} \neq 0$, $\varepsilon' = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2}; \dfrac{|\bar{v}|}{2}\right\}$, $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon'$ et $|v - \bar{v}| < \varepsilon'$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,|v| &= \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,|v - \bar{v} + \bar{v}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,\big(|v - \bar{v}| + |\bar{v}|\big) \\
&= \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,|\bar{v}| + \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,|v - \bar{v}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,\varepsilon'
\end{aligned}$$

or $\varepsilon' \leq \dfrac{|\bar{v}|}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,|v| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,\frac{|\bar{v}|}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

par le choix de ε cela implique que x est l'unique point le plus proche de $\big\{x' \in C,\ |x' - \bar{x}| < \varepsilon\big\}$ au point $x + \rho^{-1}\dfrac{\varepsilon}{2|\bar{v}|}\,v$.

Posons $\rho^{-1}\dfrac{\varepsilon}{2|\bar{v}|} = {\rho'}^{-1}$, alors on déduit que C est prox-régulier au point $\bar{x}$ avec des constantes $\varepsilon' > 0$ et $\rho' = \varepsilon^{-1}2\rho\,|\bar{v}| > 0$.

Montrons maintenant que (2.2) est vérifiée

a) Si $x' = x$:

l'inégalité (2.2) est satisfaite.

b) Si $x' \neq x$:

d'après (2.1) et comme $v \in S_C(x) \subset N_C(x)$ (d'après la **Proposition** 1.8.6) on obtient

$$0 \geq \langle \frac{v}{|v|}, x' - x\rangle - \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

d'où

$$0 \geq \langle v, x' - x \rangle - \frac{|v|}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

comme $|v| < \varepsilon$

$$0 \geq \langle v, x' - x \rangle - \frac{\varepsilon}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

pour $\rho = \dfrac{\varepsilon}{r} > 0$, (2.2) est vérifiée.

■

2.2 Fonctions "primal lower nice"

Définition 2.2.1. *(voir [10, 20]) Soit $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i. f est dite* **"primal lower nice"** *(p.l.n) au point $\bar{x} \in D(f)$ ($f(\bar{x})$ est finie), s'il existe $t_0 > 0, c > 0$ et $\varepsilon > 0$ pour les quels on a*

$$f(x') \geq f(x) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{t}{2}|x' - x|^2, \tag{2.3}$$

chaque fois que $t > t_0, |v| < ct, v \in \partial^P f(x)$, et $|x' - \bar{x}| < \varepsilon$, et $|x - \bar{x}| < \varepsilon$.

Proposition 2.2.1. *Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction finie au point $\bar{x}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est p.l.n au point $\bar{x}$.

(ii) Il existe $\varepsilon > 0, c > 0, t_0 > 0$ tels que

$$\langle u_1 - u_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

$$\forall u_i \in \partial^P f(x_i),\ |u_i| \leq ct,\ t \geq t_0 \text{ et } |x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Remarque 2.2.1. *Toute fonction f convexe est P.l.n pour tout point $x \in D(f)$*

Théorème 2.2.2. *Soit H un espace de Hilbert.*
Si une fonction $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est p.l.n au point $\bar{x}$. Alors

$$\partial^P f(x) = \partial f(x),$$

pour tout x dans un voisinage de $\bar{x}$.

Théorème 2.2.3. *Soient E, Y deux espaces de Banach. Supposons que $F : E \to Y$ est continûment différentiable au point $\bar{x}$ avec ∇F est lipschitzienne au voisinage de $\bar{x}$.*
$f : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe et s.c.i avec $f(F(\bar{x})) < +\infty$ et que la condition de qualification

$$\mathbb{R}_+[D(f) - F(\bar{x})] - \nabla F(\bar{x})(X) = Y$$

est satisfaite. Alors, la fonction composée $f \circ F$ est p.l.n au point $\bar{x}$. De plus

$$\partial^P (f \circ F)(\bar{x}) = \partial^C (f \circ F)(\bar{x}).$$

2.3 Relation entre un ensemble prox-régulier et la fonction indicatrice

Proposition 2.3.1. *L'ensemble C est prox-régulier au point $\bar{x} \in C$ si et seulement si sa fonction indicatrice est p.l.n au point $\bar{x}$.*

Démonstration.
On a C est un fermé sur H, d'après la **Propriété** 1.5.1 δ_C est s.c.i. Et comme $\delta_C(x) = 0 < +\infty$ pour tout $x \in C$, donc δ_C est finie sur C.
$\Rightarrow$) Supposons que δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$ et montrons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$.
On a δ_C est une fonction p.l.n, s.c.i et finie sur C donc il existe des nombres réels $t_0 > 0, c > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que (2.3) soit vérifiée, c'est à dire

$$\delta_C(x') \geq \delta_C(x) + \langle v, x' - x\rangle - \frac{t}{2}|x' - x|^2,$$

pour tout $t > t_0, v \in \partial^P \delta_C(x)$ avec $|v| < ct$, et $x', x \in C$ vérifiant $|x' - x| < \varepsilon$, et $|\bar{x} - x| < \varepsilon$.
Montrons qu'il existe $\varepsilon' > 0$, $\rho > 0$ tels que pour tout $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon'$ et $|v| < \varepsilon'$, (2.2) est satisfaite.

Soient $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon'$ et $|v - \bar{v}| < \varepsilon'$.
On a $|x - \bar{x}| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon)$. Alors, x est un point dans le voisinage de $\bar{x}$
et on a δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$ et d'après le **Théorème** 2.2.2, on obtient

$$\partial^P \delta_C(x) = \partial \delta_C(x),$$

et d'après la **Proposition** 1.8.1 et la **Proposition** 1.8.5, on a

$$S_C(x) = N_C(x)$$

donc

$$v \in N_C(x) \Leftrightarrow v \in S_C(x)$$

i.e., d'après la **Définition** (1.8.7) il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle v, x' - x\rangle \leq \sigma|x' - x|^2, \quad \forall x' \in \mathbb{B}(x, \delta) \cap C,$$

ce qui est équivalent à

$$\langle v, x' - x\rangle - \sigma|x' - x|^2 \leq 0, \quad \forall x' \in \mathbb{B}(x, \delta) \text{ et } x' \in C$$

et on a

$$\begin{aligned}|x' - \bar{x}| &= |x' - x + x - \bar{x}|\\ &\le |x' - x| + |x - \bar{x}|\\ &< \delta + \varepsilon,\end{aligned}$$

donc il suffit de prendre

$$\sigma = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \rho = 2\sigma > 0$$

et

$$\varepsilon' = \max\{\delta + \varepsilon,\, ct\}$$

pour que (2.2) soit vérifiée. Alors, C est prox-régulier au point $\bar{x} \in C$.

$\Leftarrow$) Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$ pour $\bar{v} = 0$ et montrons que δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$.

il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$, pour tout $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|x - \bar{x}| < \varepsilon$ et $|v| < \varepsilon$ on a

$$0 \ge \langle v, x' - x\rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C \text{ avec } |x' - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Comme $x, x' \in C$ alors, $\delta_C(x) = \delta_C(x') = 0$, donc

$$\delta_C(x') \ge \delta_C(x) + \langle v, x' - x\rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C \text{ avec } |x' - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Posons $c = \dfrac{\varepsilon}{\rho}$. Si $|v| < ct = \dfrac{\varepsilon}{\rho}t$, alors

$$\frac{\rho}{t}|v| = |\frac{\rho}{t}.v| < \varepsilon, \quad \forall t > 0, \tag{2.4}$$

et $v \in N_C(x)$, donc d'après la **Proposition** 1.8.2 on a

$$\left(\frac{\rho}{t}.v\right) \in N_C(x). \tag{2.5}$$

de (2.4) et (2.5) on obtient

$$\delta_C(x') \ge \delta_C(x) + \langle\frac{\rho}{t}.v, x' - x\rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2,$$

en divisant par $\dfrac{\rho}{t}$, on trouve

$$\delta_C(x') \ge \delta_C(x) + \langle v, x' - x\rangle - \frac{t}{2}|x' - x|^2,$$

d'où δ_C est p.l.n au point $\bar{x} \in C$.

$\blacksquare$

Corollaire 2.3.2. *Soit C un sous ensemble fermé de H et soit $\bar{x} \in C$. L'ensemble C est prox-régulier au point $\bar{x}$ si et seulement si, pour tout $r > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$, N_C^r est hypomonotone sur O.*

Dans ce cas, il existe un voisinage ouvert O de $\bar{x}$ tel que pour tout $x \in O \cap C$ le cône normal $N_C(x)$ est fermé et convexe, avec $v \in N_C(x)$ étant un vecteur normal proximal à C au point x.

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que C est prox- régulier au point $\bar{x}$ et montrons que N_C^r est hypomonotone sur O.

On a de la **Proposition** 2.3.1, C est prox-régulier au point $\bar{x}$, alors δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$, et de la **Proposition** 2.2.1, δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$, donc il existe $\varepsilon > 0$, $c > 0$, $t_0 > 0$ tels que

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

pour tout $v_i \in \partial^P \delta_C(x_i),\ |v_i| \leq ct,\ t \geq t_0$ et $|x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2$.

Et d'après le **Théorème** 2.2.2 on a si δ_C est p.l.n, $\partial^P \delta_C(x) = \partial \delta_C(x),\ \forall x \in V$ avec $V \in \vartheta(\bar{x})$, et $|x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon$ par suite $x_i \in \mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon)$ i.e., x_i est dans un voisinage de $\bar{x}$, $i = 1, 2$.

D'après la **Proposition** 1.8.1

$$\partial \delta_C(x) = N_C(x), \quad \forall x \in C,$$

donc, il existe $c > 0,\ t_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

pour tout $v_i \in N_C(x_i),\ |v_i| \leq ct$ et $|x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2$.

D'après la **Propriété** 1.8.1, N_C^r est hypomonotone sur O.

$\Leftarrow$) Supposons que N_C^r est hypomonotone sur O et montrons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

On a N_C^r est hypomonotone sur O, c'est à dire il existe $c > 0,\ t_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

pour tout $v_i \in N_C(x_i),\ |v_i| \leq ct$ et $|x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2$.

Pour $v_1 = 0$, on a $v_1 \in N_C(x_1)$ et $|v_1| \leq ct$, donc

$$\langle -v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -t|x_1 - x_2|^2,$$

alors

$$0 \geq \langle v_2, x_1 - x_2 \rangle - t|x_1 - x_2|^2.$$

Posons $v_2 = v,\ x_1 = x'$ et $x_2 = x$ avec $t = \dfrac{\rho}{2}$,
donc il existe $\varepsilon' = \max\{\varepsilon, ct\}$, et $\rho = 2t > 0,\ \forall x \in C,\ |x - \bar{x}| < \varepsilon',\ |v| < \varepsilon'$ tels que

$$0 \geq \langle v, x' - x\rangle - \frac{\rho}{2}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C \text{ et } |x' - \bar{x}| < \varepsilon'.$$

D'après la **Proposition** 2.1.1, C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

■

une classe majeure d'ensembles jouissants de la prox-régularité locale a été développée en termes de représentations de contraintes. Il a été montré que $C \subset \mathbb{R}^n$ est prox-régulier au point $\bar{x}$ s'il existe un voisinage ouvert O de $\bar{x}$ tel que

$$C \cap O = \{X \in O \mid F(x) \in D\}, \tag{2.6}$$

où $F : O \to \mathbb{R}^m$ est une application de classe C^2, et D un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^m$ satisfaisant la contrainte "que le seul vecteur $y \in N_D(F(\bar{x}))$ avec $\nabla F(\bar{x})^* y = 0$ est le vecteur nul". Comme D est convexe, cette qualification de contrainte est équivalente à

$$\mathbb{R}_+[D - F(\bar{x})] - \nabla F(\bar{x})\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m,$$

où $\nabla F(\bar{x})$ est la matrice jacobienne pour F au point $\bar{x}$ et $\nabla F(\bar{x})^*$ son adjoint.

Proposition 2.3.3. *Soient $C \subset H$ un ensemble fermé et un point $\bar{x} \in C$, supposons que* (2.6) *est vérifiée pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$, un ensemble convexe et fermé D dans un espace de Banach E, et une application $F : O \to E$ qui est Fréchet différentiable et telle que la dérivée de Fréchet associée à F au point x, $DF(x)$ est continûement lipschitzienne sur O. Si on a*

$$\mathbb{R}_+[D - F(\bar{x})] - DF(\bar{x})(H) = E.$$

Alors, C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

Démonstration.
On a F est F-différentiable avec $DF(x)$ est continûement lipschitzienne sur O, alors d'après la **Proposition** 1.7.4, $\nabla F(x)$ est lipschitzienne sur $x \in O$ et F est de classe C^2 donc F est continûement différentiable au point $\bar{x}$.
Soit la fonction indicatrice de D

$$\delta_D : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

comme D est convexe, alors d'après la **Proposition** 1.2.5 δ_D est convexe.
D'autre part, D est fermé, alors d'après la **Propriété** 1.5.1 δ_D est s.c.i, donc δ_D est convexe s.c.i avec $\delta_D(F(\bar{x})) = 0 <+\infty$ (car $F(\bar{x}) \in D$) et que la contrainte

$$\mathbb{R}_+[D - F(\bar{x})] - DF(\bar{x})(H) = E$$

est satisfaite, alors d'après le **Théorème** 2.2.3, $\delta_D \circ F$ est p.l.n au point $\bar{x}$, avec

$$\delta_D \circ F(x) = \delta_D(F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) \in D \\ +\infty & \text{si } F(x) \notin D \end{cases}$$

et d'après (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} \delta_D(F(x)) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \cap O \\ +\infty & \text{si } x \notin C \cap O \end{cases} \\ &= \delta_{C \cap O}(x) \end{aligned}$$

d'où $\delta_{C \cap O}$ est p.l.n au point $\bar{x}$.

Comme $x \in O$ deux cas se présentent

1$^{\text{er}}$ cas ; Si $x \in C \cap O$, on a $x \in C$ et $x \in O$.D'où

$$\delta_{C \cap O}(x) = \delta_C(x) = \delta_O(x) = 0.$$

2$^{\text{ème}}$ cas ; Si $x \notin C \cap O$, autrement dit $x \in O \setminus C$, c'est à dire $x \notin C$ et $x \in O$, donc

$$\delta_C(x) = +\infty.$$

alors, si $x \in O$ on a

$$\delta_{C \cap O}(x) = \delta_C(x),$$

i.e., δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$.

D'où, d'après la **Proposition** 2.3.1, C est prox-régulier.

■

Définition 2.3.1. *Un ensemble fermé C est uniformément prox-régulier avec la constante $\rho > 0$ si à chaque fois que $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|v| < 1$, x est l'unique point le plus proche de C au point $x + \rho^{-1}v$.*

Proposition 2.3.4. *Supposons qu'il existe $r > 0$ et un voisinage ouvert O de $\bar{x} \in C$ telle que toute normale proximale non nulle à C en tout point x dans $C \cap O$ peut être réalisée par r-boule alors N_C^r est hypomonotone sur O.*

Démonstration.

Soit v un vecteur normal proximal non nul de C au point x avec $x \in C \cap O$. Alors, il existe $r > 0$ et O un voisinage ouvert de $\bar{x}$ on a d'après (2.1), v peut être réalisée par r-boule, i.e.

$$0 \geq \langle \frac{v}{|v|}, x' - x \rangle - \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

donc

$$-\langle v, x' - x\rangle \geq -\frac{|v|}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C. \tag{2.7}$$

Montrons d'abord que $S_C^r(x)$ est hypomonotone sur O :

Posons $v = v_1$ et $x = x_1 \in O \cap C$, donc d'après (2.7), $v_1 \in S_C(x_1)$ ce qui implique

$$-\langle v_1, x_2 - x_1\rangle \geq -\frac{|v_1|}{2r}|x_2 - x_1|^2. \tag{2.8}$$

posons $v = v_2$ et $x = x_2 \in O \cap C$, donc d'après (2.7), $v_2 \in S_C(x_2)$ ce qui implique

$$-\langle v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\frac{|v_2|}{2r}|x_1 - x_2|^2. \tag{2.9}$$

En faisant la somme de (2.8) et (2.9) membre à membre on obtient

$$-\langle v_1, x_2 - x_1\rangle - \langle v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\frac{|v_1|}{2r}|x_2 - x_1|^2 - \frac{|v_2|}{2r}|x_1 - x_2|^2,$$

d'où

$$\langle v_1, x_1 - x_2\rangle - \langle v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\frac{|v_1|}{2r}|x_1 - x_2|^2 - \frac{|v_2|}{2r}|x_1 - x_2|^2,$$

alors

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\frac{1}{2r}(|v_1| + |v_2|)|x_1 - x_2|^2,$$

$\forall v_i \in S_C(x_i)$ et $x_i \in O,\ i = 1, 2.$

Par conséquent, si $|v_i| \leq r,\ \forall i = 1, 2$, on obtient

$$|v_1| + |v_2| \leq 2r,$$

donc

$$-\frac{1}{2r}(|v_1| + |v_2|)|x_1 - x_2|^2 \geq -\frac{1}{2r}(2r)|x_1 - x_2|^2,$$

par suite

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -|x_1 - x_2|^2, \tag{2.10}$$

$\forall v_i \in S_C(x_i),\ |v_i| \leq r,\ x_i \in O,\ i = 1, 2.$

En fin, d'après la **Définition** 1.6.9, il existe $\sigma = 1$ tel que l'ensemble des vecteurs normaux proximaux S_C^r est hypomonotone sur O.

Montrons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$:

On a $v_i \in S_C(x_i) \subset N_C(x_i)$, $|v_i| < r$, et $x_i \in C \cap O$ avec $x_i \in O$ implique l'existence d'une constante $r > 0$ tel que $|x_i - \bar{x}| < r,\ i = 1, 2.$

Posons $v_1 = v$ et $x_1 = x$. Donc $v \in N_C(x)$,

et $v_2 = 0,\ x_2 = x'$, donc $0 \in N_C(x')$. D'après (2.10) on a

$$\langle v, x - x'\rangle \geq -|x - x'|^2.$$

on choisit $\dfrac{\rho}{2} = 1$, i.e. $\rho = 2$. Alors
$\exists\, \varepsilon = r,\ \exists\, \rho = 2 > 0,\ \forall x \in C,\ v \in N_C(x),\ |x - \bar{x}| < \varepsilon,$ et $|v| < \varepsilon$, on obtient

$$0 \geq \langle v, x' - x \rangle - \frac{\rho}{2}|x - x'|^2, \quad \forall x' \in C, |x' - \bar{x}| < \varepsilon.$$

d'où C est prox-régulier au point $\bar{x}$.
La **Proposition** 2.3.1 donne δ_C est p.l.n au point $\bar{x}$, et le **Théorème** 2.2.2 donne

$$\partial^P \delta_C(x) = \partial \delta_C(x), \quad \forall x \in O.$$

ainsi

$$S_C(x) = N_C(x), \quad \forall x \in O.$$

d'après la **Définition** 1.8.8 on a

$$\begin{aligned} S_C^r(x) &= \begin{cases} S_C(x) \cap int\mathbb{B}(0,r) & \text{si } \ x \in C \\ \emptyset & \text{si } \ x \notin C \end{cases} \\ &= \begin{cases} N_C(x) \cap int\mathbb{B}(0,r) & \text{si } \ x \in C \\ \emptyset & \text{si } \ x \notin C \end{cases} \\ &= N_C^r(x) \end{aligned}$$

et comme S_C^r est hypomonotone sur O, alors N_C^r est hypomonotone sur O.

■

Corollaire 2.3.5. *Si tout vecteur normal proximal non nul à C en un point quelconque de C peut être réalisé par r-boule. Alors, C est uniformément prox-régulier avec la constante $\dfrac{1}{r'}$ pour chaque $0 < r' < r$.*

Démonstration.
Soit v un vecteur normal proximal non nul au point $x \in C$ peut être réalisé par r-boule, alors d'après la **Proposition** 2.3.4 on a N_C^r est hypomonotone sur un voisinage ouvert O de x et d'après le **Corollaire** 2.3.2, C est prox-régulier au point x, $\forall x \in C$.

Soit $v \in N_C(x)$ avec $|v| < 1$, d'après la **Proposition** 1.8.6 on a $S_C(x) \subset N_C(x)$.
Soit $r' \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r' < r$, il résulte de (2.1) que pour tout $x \in C$ et $v \in N_C(x)$ avec $|v| < 1$

$$0 \geq \langle v, x' - x \rangle - \frac{|v|}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

or $|v| < 1$, alors

$$0 > \langle v, x' - x \rangle - \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C,$$

et $0 < r' < r$ implique

$$0 > \langle v, x' - x \rangle - \frac{1}{2r'}|x' - x|^2, \quad \forall x' \in C, \tag{2.11}$$

et comme C est prox-régulier au point x, d'après (2.11), on a x est l'unique point le plus proche de C au point $x + r'v$, par suite C est uniformément prox-régulier avec la constante $\rho = \dfrac{1}{r'} > 0$, pour tout réel r' tel que $0 < r' < r$.

■

CHAPITRE 3

Différentiabilité locale de la fonction distance associée à des ensembles prox-réguliers

Dans ce dernier chapitre nous donnons les résultats principaux de ce mémoire par l'étude de la différentiabilité au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet et les sous différentiels de Fréchet et de Clarcke du carré de la fonction distance $d_C^2(\cdot)$ à un ensemble prox-régulier C qui admet la propriété de Shapiro correspondant à ceux de la fonction distance $d_C(\cdot)$ et de l'existence et l'unicité de la projection $P_C(\cdot)$ sur C.

3.1 Différentiabilité locale de $d_C^2(\cdot)$ et existence et unicité de la projection

Proposition 3.1.1. *Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$, alors*

(i) P_C est univoque au voisinage de $\bar{x}$.

(ii) d_C^2 est C^{1+} sur un voisinage ouvert de $\bar{x}$ i.e., F-différentiable sur O avec la multifonction $Dd_C^2(x) : H \rightrightarrows H$ est continûement lipschitzienne sur x.

(iii) Pour tout $\sigma > 0$, il existe un voisinage convexe O_σ de $\bar{x}$ sur lequel la fonction $d_C^2 + \sigma|\cdot|^2$ est convexe.

De plus, il existe un voisinage O de $\bar{x}$ tel que P_C est monotone et Continûement lipschitzienne avec $P_C = (I + N_C^r)^{-1}$ sur O pour un certain $r > 0$ ($I : H \to H$ désigne l'identité).

Démonstration.

Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$, d'après le **Corollaire** 2.3.2, N_C^r est hypomonotone sur un voisinage O de $\bar{x}$ pour $r > 0$, i.e. il existe ρ, $\varepsilon > 0$ tels que

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\rho |x_1 - x_2|^2. \tag{3.1}$$

$\forall v_i \in N_C(x_i),\ |v_i| < \varepsilon$ et $|x_i - \bar{x}| < \varepsilon$, $i = 1, 2$. (il suffit de choisir $\varepsilon < r$ avec $\mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subset O$)

On a besoin du lemme suivant pour la suite de la démonstration

Lemme 3.1.2. *Soit* $0 < \lambda \leq \rho$ *avec* $\lambda < 2$ *et soit* $x_i' \in P_C(x_i)$ *tel que* $|x_i - \bar{x}| < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2\rho}$, $i = 1, 2$ *alors*

$$|x_1' - x_2'| \leq \frac{2}{2 - \lambda} |x_1 - x_2|.$$

et

$$\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2' \rangle \geq \left[1 - \frac{\lambda}{2}\right] |x_1' - x_2'|^2.$$

Démonstration.

On a $x_i' \in P_C(x_i)$ alors

$$|x_i - x_i'| = d_C(x_i) = \inf_{y \in C} |x_i - y| \leq |x_i - \bar{x}| < \frac{\lambda\varepsilon}{2\rho} \tag{3.2}$$

donc $|x_i' - \bar{x}| = |x_i' - x_i + x_i - \bar{x}| \leq |x_i' - x_i| + |x_i - \bar{x}| < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2\rho} + \dfrac{\lambda\varepsilon}{2\rho} = \dfrac{\lambda\varepsilon}{\rho} \leq \varepsilon$ (car $\lambda \leq \rho$)

et $|x_i - x_i'| < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2\rho}$, alors

$$((2\rho)/\lambda)|x_i - x_i'| < \varepsilon \Leftrightarrow |((2\rho)/\lambda)(x_i - x_i')| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

comme $x_i' \in P_C(x_i)$, la **Proposition** 1.9.1 donne $(x_i - x_i')$ est un vecteur non nul normal proximal à C au point x_i', donc $(x_i - x_i') \in N_C(x_i')$, et d'après la **Proposition** 1.8.2 on a

$$((2\rho)/\lambda)(x_i - x_i') \in N_C(x_i'),$$

et de (3.2) et (3.3)

$$|((2\rho)/\lambda)(x_i - x_i')| < \varepsilon \text{ avec } |x_i - \bar{x}| < \frac{\lambda\varepsilon}{2\rho} \leq (\varepsilon/2) < \varepsilon,\ i = 1, 2,$$

d'après (3.1) on aura

$$\langle ((2\rho)/\lambda)(x_1 - x_1') - ((2\rho)/\lambda)(x_2 - x_2'), x_1' - x_2' \rangle \geq -\rho |x_1' - x_2'|^2,$$

en divisant par$((2\rho)/\lambda)$

$$\langle (x_1 - x_1') - (x_2 - x_2'), x_1' - x_2' \rangle \geq -(\lambda/2\rho).\rho |x_1' - x_2'|^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\langle (x_1 - x'_1) - (x_2 - x'_2), x'_1 - x'_2\rangle &= \langle (x_1 - x_2) - (x'_1 - x'_2), x'_1 - x'_2\rangle \\ &= \langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle - \langle x'_1 - x'_2, x'_1 - x'_2\rangle \\ &= \langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle - |x'_1 - x'_2|^2,\end{aligned}$$

alors

$$\langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle - |x'_1 - x'_2|^2 \geq -(\lambda/2)|x'_1 - x'_2|^2,$$

ce qui donne

$$\langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle \geq [1 - (\lambda/2)]|x'_1 - x'_2|^2.$$

On a d'après l'inégalité de Schwartz $|\langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle| \leq |x_1 - x_2|.|x'_1 - x'_2|$, donc

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2|.|x'_1 - x'_2| &\geq \langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2\rangle \\ &\geq [1 - (\lambda/2)]|x'_1 - x'_2|^2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

d'où

$$|x_1 - x_2| \geq \frac{2-\lambda}{2}|x'_1 - x'_2|,$$

en d'autre terme

$$|x'_1 - x'_2| \leq \frac{2}{2-\lambda}|x_1 - x_2|. \tag{3.5}$$

■

$i)$ Montrons que P_C est univoque au voisinage de $\bar{x}$:
D'après le **Lemme** 3.1.2 on a $0 < \lambda \leq \rho,\ \lambda < 2,\ x'_i \in P_C(x_i)$ avec $|x_i - \bar{x}| < \dfrac{\lambda\varepsilon}{2\rho} < \dfrac{\varepsilon}{\rho} < \varepsilon$, donc $x_i \in \mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subset O$, $i = 1, 2$.
Soit $x'_1, x'_2 \in P_C(x)$, pour tout x dans un voisinage de $\bar{x}$,
d'après (3.5) on a $|x'_1 - x'_2| \leq \dfrac{2}{2-\lambda}|x - x| = 0$, donc

$$0 \leq |x'_1 - x'_2| \leq 0 \ \Leftrightarrow\ |x'_1 - x'_2| = 0 \ \Leftrightarrow\ x'_1 = x'_2,$$

d'où, P_C est univoque au voisinage de $\bar{x}$.
De plus, $|x'_1 - x'_2| \leq \dfrac{2}{2-\lambda}|x_1 - x_2|$ i.e., $|P_C(x_1) - P_C(x_2)| \leq \dfrac{2}{2-\lambda}|x_1 - x_2|$, $\forall x_i \in O$, $i = 1, 2$
alors, il existe $k = \dfrac{2}{2-\lambda} > 0,\ x'_i \in P_C(x_i),\ x_i \in O,\ i = 1, 2$ tels que

$$|P_C(x_1) - P_C(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

ainsi, P_C est continûement lipschitzienne sur O.
D'après (3.4) on a

$$\langle\, x'_1 - x'_2, x_1 - x_2\rangle \geq [1 - (\lambda/2)]|x'_1 - x'_2|^2 \geq 0.$$

D'où, d'après la **Définition** 1.6.8 P_C est monotone sur O.

iii) Montrons que $d_C^2 + \sigma|\cdot|^2$ est convexe sur un voisinage convexe de $\bar{x}$:
Pour $0 < \lambda \leq \rho$, avec $\lambda < 2$. Soit $x_1,\, x_2 \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$.
On a

$$\begin{aligned} d_C^2(x_i) &= \inf_{y\in C} |x_i - y|^2 \\ &= \inf_{y\in C} \left\{ \delta_C(y) + |x_i - y|^2 \right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

d'après la **Définition** 1.10.1 on obtient

$$d_C^2(x_i) = (\delta_C \Box |\cdot|^2)(x_i) \tag{3.7}$$

Supposons que $\partial^F d_c^2(x_i) \neq \emptyset,\ i = 1, 2$. D'après le **Théorème** 1.10.3 on a $P_C(x_i)$ est non vide.
En effet,
De (3.6) il est clair que

$$d_C^2(x_i) = \inf_{y\in C} \left\{ \delta_C(y) + |x_i - y|^2 \right\} = \inf_{y\in H} \left\{ \delta_C(y) + |x_i - y|^2 \right\}.$$

D'après la **Proposition** 1.4.3 et le **Lemme** 1.4.4, l'espace de Hilbert H est un espace réflexif muni de la norme de Kadec, pour $T = I$ une fonction continue et bornée de H dans H, $g = \delta_C$ est s.c.i sur H et minorée et $h = |\cdot|^2$, alors les conditions du **Théorème** 1.10.3 sont vérifiées, donc pour tout $x_i \in H$, il existe $x_i' \in H$ tel que

$$d_C^2(x_i) = \delta_C(x_i') + |x_i - x_i'|^2,$$

autrement dit $x_i' \in C$, c'est à dire $\delta_C(x_i') = 0$, donc

$$|x_i - x_i'|^2 = \inf_{y\in C} |x_i - y|^2$$

alors

$$\begin{aligned} |x_i - x_i'| &= \inf_{y\in C} |x_i - y| \\ &= d_C(x_i), \end{aligned}$$

ce qui imlique $x_i' \in P_C(x_i)$. D'où $P_C(x_i) \neq \emptyset$.
De plus, d'après **Lemme** 3.1.2 P_C est univoque.

Soit $x_i' = P_C(x_i)$. Donc x_i' est minimum de (3.7) et d'après le **Lemme** 1.10.2 on aura

$$\partial^F d_C^2(x_i) \subset \partial^F \delta_C(x_i') \cap \partial^F \left(|x_i - x_i'|^2 \right),\ i = 1, 2.$$

• *Calculons* $\partial^F(|x_i - x_i'|^2)$:

Posons $g(x_i) = |x_i - x_i'|^2$

de la **Définition** 1.7.8 on a $\forall \varepsilon > 0, y \in \overline{\mathbb{B}}(x_i, \delta),\ \exists\, \delta > 0$ tels que

$$\begin{aligned}\partial^F g(x_i) &= \{x' \in H,\ \ \langle x', y - x_i\rangle \leq g(y) - g(x_i) + \varepsilon|y - x_i|\}\\ &= \left\{x' \in H,\ \ \langle x', y - x_i\rangle \leq |y - x_i'|^2 - |x_i - x_i'|^2 + \varepsilon|y - x_i|\right\}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle x', y - x_i\rangle &\leq |y - x_i + x_i - x_i'|^2 - |x_i - x_i'|^2 + \varepsilon|y - x_i|\\ &= |y - x_i|^2 + |x_i - x_i'|^2 + 2\langle x_i - x_i', y - x_i\rangle - |x_i - x_i'|^2 + \varepsilon|y - x_i|\\ &= 2\langle\, x_i - x_i', y - x_i\rangle + |y - x_i|^2 + \varepsilon|y - x_i|\\ &\leq 2\langle x_i - x_i', y - x_i\rangle + \delta^2 + \varepsilon\delta\end{aligned}$$

alors

$$\langle x' - 2(x_i - x_i'), y - x_i\rangle \leq \delta^2 + \varepsilon\delta, \quad \forall y \in \overline{\mathbb{B}}(x_i, \delta),$$

soit $v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$, posons $y = x_i + \delta v \in \overline{\mathbb{B}}(x_i, \delta)$, on trouve

$$\langle x' - 2(x_i - x_i'), \delta v\rangle \leq \delta^2 + \varepsilon\delta\,, \quad \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$$

donc

$$\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle \leq \delta + \varepsilon\,, \quad \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1). \tag{3.8}$$

Or, pour tout $v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$ on a $-v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$, et (3.8) est vraie pour $-v$, on remplace dans (3.8)

$$\langle x' - 2(x_i - x_i'), -v\rangle \leq \delta + \varepsilon,$$

alors

$$-\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle \leq \delta + \varepsilon,$$

ainsi

$$\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle \geq -(\delta + \varepsilon)\,, \quad \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1). \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9) on obtient

$$|\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle| \leq \delta + \varepsilon\,, \quad \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1).$$

Faisant tendre δ et ε vers 0 on obtient

$$|\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle| \leq 0\,, \quad \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0, 1),$$

donc $\langle x' - 2(x_i - x_i'), v\rangle = 0,\ \forall v \in \overline{\mathbb{B}}(0,1)$ ce qui implique $x' - 2(x_i - x_i') = 0$ c'est à dire $x' = 2(x_i - x_i')$, alors

$$\partial^F \left(|x_i - x_i'|^2\right) = \{2(x_i - x_i')\}, \tag{3.10}$$

et

$$\partial^F d_C^2(x_i) \subset \partial^F \delta_C(x_i) \cap \{2(x_i - x_i')\}\,,\ \ i = 1, 2.$$

En d'autre terme, $\partial^F d_C^2(x_i) \subset \partial^F \delta_C(x_i')$ et $\partial^F d_C^2(x_i) = \{2(x_i - x_i')\},\ \ i = 1, 2$. Donc

$$2(x_i - x_i') \in \partial^F \delta_C(x_i'),\ i = 1, 2,$$

d'après la **Proposition** 1.8.4 on a $\partial^F \delta_C(x_i') = N_C^F(x_i')$ et d'après le **Corollaire** 2.3.2 N_C est convexe sur $O \cap C$, alors d'après la **Proposition** 1.8.7 on obtient $N_C^F(x_i') = N_C(x_i') = \partial^F \delta_C(x_i')$, d'où (3.1) est vérifiée pour $v_i \in \partial^F \delta_C(x_i')$ et donc pour $v_i \in \partial^F d_C^2(x_i)$ avec

$$\begin{aligned}
\langle 2(x_1 - x_1') - 2(x_2 - x_2'), x_1 - x_2\rangle &= 2\langle\, x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle - 2\langle\, x_1' - x_2', x_1 - x_2\rangle \\
&= 2|x_1 - x_2|^2 - 2\langle\, x_1' - x_2', x_1 - x_2\rangle \\
&\geq 2|x_1 - x_2|^2 - 2|x_1' - x_2', x_1 - x_2| \\
&\geq 2|x_1 - x_2|^2 - 2\left(\frac{2}{2-\lambda}\right)|x_1 - x_2|^2 \\
&= 2(1 - \frac{2}{2-\lambda})|x_1 - x_2|^2 \\
&= -\left(\frac{2\lambda}{2-\lambda}\right)|x_1 - x_2|^2.
\end{aligned}$$

D'après la **Définition** 1.6.9, il existe $\sigma = \dfrac{2\lambda}{2-\lambda} > 0$, tel que $\partial^F d_C^2 + \dfrac{2\lambda}{2-\lambda} I$ est monotone sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$, ainsi d'après(3.10) $\partial^F(|\cdot|^2) = 2I$ sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$, donc $\partial^F d_C^2 + \partial^F \left(\dfrac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right)$ est monotone sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$.

D'autre part, de la **proposition** 1.7.19 et la **Proposition** 1.7.22 on a

$$\partial^F d_C^2 + \partial^F \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right) \subset \partial^F \left(d_C^2 + \frac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right) \subset \partial^C \left(d_C^2 + \frac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right)$$

et d'après la **Remarque** 1.1.1 on a $d_C^2 + \dfrac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2$ est localement lipschitzienne.

donc, d'après la **Propriété** 1.7.1 $\partial^C \left(d_C^2 + \dfrac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right)$ est monotone.

D'où, d'après le **Théorème** 1.7.17 on obtient $\left(d_C^2 + \dfrac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right)$ est convexe sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$.

ii) Montrons que d_C^2 est C^{+1} :

D'après la **Proposition** 1.7.21 et d'après la convexité de $\left(d_C^2 + \frac{\lambda}{2-\lambda}|\cdot|^2\right)$ sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$ on obtient

$$\partial^F\left(d_C^2(x) + \frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right) = \partial^C\left(d_C^2(x) + \frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right), \quad x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho). \tag{3.11}$$

De plus, d'après la **Proposition** 1.1.1 on a $|\cdot|^2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$ et d'après **Exemple** 1.2.2 elle est convexe, d'où

$$\partial^C|\cdot|^2 = \partial^F|\cdot|^2 = \{2I\},$$

donc, d'après la **Proposition** 1.7.16 $|\cdot|^2$ est strictement différentiable.

Par suite, d'après le **Corollaire** 1.7.15 on trouve

$$\partial^C\left(d_C^2(x) + \frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right) = \partial^C d_C^2(x) + \partial^C\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho). \tag{3.12}$$

Comme $\partial^F d_C^2$ est non vide sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$, alors d_C^2 est F-différentiable sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$. Ainsi, d_C^2 et $|\cdot|^2$ sont lipschitziennes (d'après la **Proposition** 1.1.2 et la **Proposition** 1.1.1, donc d_C^2 et $|\cdot|^2$ sont s.c.i. De la **Proposition** 1.7.24 on obtient

$$\partial^F\left(d_C^2(x) + \frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right) = \nabla d_C^2(x) + \partial^F\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho) \tag{3.13}$$

en remplaçant par (3.12) et (3.13) dans (3.11) on trouve

$$\nabla d_C^2(x) + \partial^F\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right) = \partial^C d_C^2(x) + \partial^C\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right)$$

et comme $\partial^F\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right) = \partial^C\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2\right)$ (car $\frac{\lambda}{2-\lambda}|x|^2$ est convexe), on obtient

$$\nabla d_C^2(x) = \partial^C d_C^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho) \tag{3.14}$$

de la **Proposition** 1.7.20 et la **Proposition** 1.7.4 on a $\partial^F d_C^2(x) = \{\nabla d_C^2(x)\}$, donc

$$\partial^F d_C^2(x) = \partial^C d_C^2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho). \tag{3.15}$$

Ainsi, d'après la **Proposition** 1.7.12 on a $\partial^C d_C^2$ est non vide sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$ implique que $\partial^F d_C^2$ est non vide sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$ et ainsi P_C est non vide sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$.

D'après la **Définition** 1.7.8 d_C^2 est F-différentiable sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$, et d'après la **Proposition** 1.7.20 on a

$$\partial^F d_C^2(x) = \{D d_C^2(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$$

donc

$$Dd_C^2(x) = 2(I - P_C)(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$$

et comme P_C et continûement lipschitzienne, alors Dd_C^2 et continûement lipschitzienne sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \lambda\varepsilon/2\rho)$, d'où d_C^2 est C^{+1} au voisinage de $\bar{x}$.

Monrtrons que $P_C = (I + N_C^r)^{-1}$, pour un certain $r > 0$ sur O :

Fixons $\bar{\lambda} < 0$ avec $\bar{\lambda} < \min\{\rho, 1\}$

soit

$$T(x) = \begin{cases} N_C(x) \cap \mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho) & \text{si } x \in C \cap \mathbb{B}(\bar{x}, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons d'abord que $P_C(x) = (I + T)^{-1}(x)$,$\forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho)$;

a) Montrons que $P_C(x) \subset (I + T)^{-1}(x)$:

Supposons que $x' \in P_C(x)$,

d'après la **Proposition** 1.9.1 on a $(x - x')$ est un vecteur normal proximal à C au point x' donc, d'après la **Proposition** 1.8.6

$$(x - x') \in N_C(x')$$

et on a $x' \in P_C(x)$, alors

$$\begin{aligned} |x - x'| &= d_C(x) \\ &= \inf_{y \in C} |x - y| \\ &< |x - \bar{x}| \\ &< \frac{\bar{\lambda}\varepsilon}{2\rho}, \end{aligned}$$

donc

$$(x - x') \in \mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho).$$

D'où

$$(x - x') \in N_C(x') \cap \mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho).$$

Alors

$$(x - x') \in T(x') \Rightarrow x \in T(x') + x' = (I + T)(x') \Rightarrow x' \in (I + T)^{-1}(x),$$

d'où

$$P_C(x) \subset (I+T)^{-1}(x).$$

b) Montrons que $(I+T)^{-1}(x) \subset P_C(x)$:

(i.e. montrons que $(I+T)^{-1}$ est univoque)

supposons que $x_i' \in (I+T)^{-1}(x)$, pour $x_i' \in C \cap \mathbb{B}(\bar{x}, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho),\ i=1,2$.

Alors

$$\begin{aligned} x \in (I+T)(x_i') = x_i' + T(x_i') &\Rightarrow x - x_i' \in T(x_i') = N_C(x_i') \cap \mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho), \\ &\Rightarrow x - x_i' \in N_C(x_i') \text{ et } x - x_i' \in \mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho), \end{aligned}$$

on a $|x - x_i'| < \dfrac{\bar{\lambda}\varepsilon}{2\rho}$ autrement dit $2\rho|x - x_i'| < \bar{\lambda}\varepsilon < \varepsilon$ (pour $\bar{\lambda} < 1$), donc on a d'après (3.1)

$$\begin{aligned} -\rho|x_1' - x_2'|^2 &\leq \langle 2\rho(x - x_1') - 2\rho(x - x_2'), x_1' - x_2' \rangle \\ &\leq 2\rho\langle -(x_1' - x_2'), x_1' - x_2' \rangle \\ &\leq -2\rho|x_1' - x_2'|^2, \end{aligned}$$

implique

$$0 \leq -\rho|x_1' - x_2'|^2 \leq 0,$$

alors

$$-\rho|x_1' - x_2'|^2 = 0 \Rightarrow |x_1' - x_2'|^2 = 0, \qquad (\text{car } \rho \neq 0)$$

i.e.

$$x_1' = x_2'.$$

donc, $(I+T)^{-1}$ est univoque sur $\mathbb{B}(\bar{x}, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho)$.

d'où

$$P_C(x) = (I+T)^{-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho).$$

Posons $(\bar{\lambda}\varepsilon/2\rho) = r'$, alors

$$\mathbb{B}(0, \bar{\lambda}\varepsilon/2\rho) = \mathbb{B}(0, r')$$

d'où

$$\begin{aligned} T(x) &= \begin{cases} N_C(x) \cap \mathbb{B}(0, r') & \text{si } x \in C \cap \mathbb{B}(\bar{x}, r') \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\ &= N_C^{r'}(x). \end{aligned}$$

D'où $P_C = (I + N_C^{r'})^{-1}$, pour $r' > 0$ sur O.

■

Corollaire 3.1.3. *Pour un ensemble fermé C de H, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'ensemble C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

(b) Pour tout $\sigma > 0$, la fonction $d_C^2 + \sigma|\cdot|^2$ est convexe sur un voisinage convexe O_σ de $\bar{x}$.

(c) Pour un certain $\sigma > 0$, la fonction $d_C^2 + \sigma|\cdot|^2$ est convexe sur un voisinage convexe de $\bar{x}$.

Démonstration.
on a $(a) \Rightarrow (b)$ d'après la **Proposition** 3.1.1, et il est évident que $(b) \Rightarrow (c)$.
Montrons que $(c) \Rightarrow (a)$:
Supposons que pour un $\sigma > 0$, la fonction $d_C^2 + \sigma|\cdot|^2$ est convexe sur un voisinage O de $\bar{x}$, alors d'après la démonstration de la **Proposition** 3.1.1, $\partial^F d_C^2$ existe en tout points de O, donc d_C^2 est F-différentiable sur O. D'après la **Proposition** 3.1.1, on a C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

■

3.2 Différentiabilité locale de $d_C(\cdot)$

Proposition 3.2.1. *Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$, alors il existe un voisinage O de $\bar{x}$ tel que*

$$D(d_C)(x) = (I - P_C)(x)/d_C(x),$$

avec

$$|D(d_C)(x)| = 1,$$

pour tout $x \in O\backslash C$.

Démonstration.
D'après la **Proposition** 3.1.1, on a d_C^2 est F-différentiable, par suite d_C est F-différentiable alors, d'après la **Proposition** 1.7.4

$$Dd_C(x) = \nabla d_C(x), \quad \forall x \in O \setminus C.$$

• *Calculons* $\nabla(d_C)$:
on a $d_C(x) = |x - P_C(x)|, \quad \forall x \in O.$
D'après la **Définition** 1.7.3 on a pour tout $v \in H$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla d_C(x), v\rangle &= d'_C(x,v)\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{d_C(x+tv)-d_C(x)}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{|x+tv-P_C(x+tv)|-|x-P_C(x)|}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{(|x+tv-P_C(x+tv)|-|x-P_C(x)|)(|x+tv-P_C(x+tv)|+|x-P_C(x)|)}{t(|x+tv-P_C(x+tv)|+|x-P_C(x)|)}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{|x+tv-P_C(x+tv)|^2-|x-P_C(x)|^2}{t(|x+tv-P_C(x+tv)|+|x-P_C(x)|)}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{d_C^2(x+tv)-d_C^2(x)}{t}.\frac{1}{|x+tv-P_C(x+tv)|+|x-P_C(x)|}\right)\\
&= (d_C^2)'(x,v).\frac{1}{|x-P_C(x)|+|x-P_C(x)|}\\
&= \langle \nabla\, d_C^2(x), v\rangle\frac{1}{2d_C(x)}\\
&= \left\langle \frac{2(I-P_C)(x)}{2d_C(x)}, v\right\rangle.
\end{aligned}$$

d'où

$$\nabla d_C(x) = \frac{(I-P_C)(x)}{d_C(x)}\ ,\quad \forall x\in O/C.$$

avec

$$|Dd_C(w_k)| = \left|\frac{w_k-P_C(w_k)}{d_C(w_k)}\right| = \frac{|w_k-P_C(w_k)|}{d_C(w_k)} = \frac{d_C(w_k)}{d_C(w_k)} = 1.$$

■

Lemme 3.2.2. *Si $v\in\partial^F d_C(u)$, alors $2d_C(u).v\in\partial^F d_C^2(u)$.*

Démonstration.
$v\in\partial^F d_C(u)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall x\in\overline{\mathbb{B}}(u,\delta)$ tels que

$$\langle v, x-u\rangle \le d_C(x)-d_C(u)+\varepsilon|x-u|.$$

donc

$$\begin{aligned}
2d_C(u)\langle v, x-u\rangle &\leq 2d_C(u)(d_C(x) - d_C(u) + \varepsilon|x-u|) \\
&= 2d_C(u)d_C(x) - 2d_C(u)d_C(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u| \\
&= 2d_C(u)d_C(x) - 2d_C^2(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u| \\
&= 2d_C(u)d_C(x) - d_C^2(u) - d_C^2(x) + d_C^2(x) - d_C^2(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u| \\
&= -(d_C(x) - d_C(u))^2 + d_C^2(x) - d_C^2(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u| \\
&\leq \ d_C^2(x) - d_C^2(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u|.
\end{aligned}$$

alors $\forall \varepsilon' = 2d_C(u)\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{B}(u,\delta)$ tels que

$$\langle 2d_C(u).v, x-u\rangle \leq d_C^2(x) - d_C^2(u) + 2d_C(u)\varepsilon|x-u|,$$

d'où

$$2d_C(u).v \in \partial^F d_C^2(u).$$

$\blacksquare$

Corollaire 3.2.3. *Soient H un espace de Hilbert et C un ensemble fermé de H, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) C est prox-régulier au point $\bar{x}$.
(b) $\partial^P d_C(x)$ est non vide en tous les points x dans un voisinage de $\bar{x}$.
(c) $\partial^F d_C(x)$ est non vide en tous les points x dans un voisinage de $\bar{x}$.

Démonstration.
Montrons que $(a) \Rightarrow (b)$:
Supposons que C est prox-régulier, d'après le **Proposition** 3.2.1, on a d_C est C^{1+} sur $O \setminus C$ (pour O un voisinage de $\bar{x}$), donc d_C est F-différentiable et Dd_C existe sur $O \setminus C$.
D'après la **Proposition** 1.7.18 et la **Proposition** 1.7.4 on a

$$\partial^P d_C(x) = \nabla f(x) = Dd_C, \ \ \forall x \in O \setminus C$$

alors $\partial^P d_C$ est non vide sur $O \setminus C$. De plus ; on a

$$0 \leq d_C(x), \quad \forall x \in H.$$

et

$$d_C(x) = 0, \quad \forall x \in C$$

d'où d_C admet un minimum local en tout point $x \in C$. Donc, d'après la **Remarque** 1.7.5 on obtient

$$0 \in \partial^P d_C(x), \quad \forall x \in C,$$

d'où $\partial^P d_C$ est non vide sur O.

Montrons que $(b) \Rightarrow (c)$:

D'après le **Corollaire** 1.7.23 on a

$$\partial^P d_C(x) \subset \partial^F d_C(x), \quad \forall x \in O,$$

et comme $\partial^P d_C$ est non vide sur O, alors $\partial^F d_C(x)$ est non vide sur O.

Montrons que $(c) \Rightarrow (a)$:

Supposons que $\partial^F d_C(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in O$, d'après le **Lemme** 3.2.2

$$v \in \partial^F d_C(x) \Rightarrow 2d_C(x).v \in \partial^F d_C^2(x), \quad \forall x \in O,$$

alors $\partial^F d_C^2(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in O$, donc d_C^2 est F-différentiable sur O.

D'où, d'après la **Proposition** 3.1.1, on a C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

■

3.3 Autres résultats sur la projection

Lemme 3.3.1. *Soit C un sous ensemble fermé non vide de H.*
Si d_C^2 est F-différentiable sur un ensemble ouvert O, ou équivalement à d_C est F-différentiable sur $O \setminus C$. Alors, P_C est univoque et est fortement continue sur O.

Démonstration.

On a d'après la **Proposition** 3.1.1, $Dd_C^2(u) = 2(u - P_C(u))$.

et

$$\begin{aligned} d_C^2(u) &= \inf_{x \in C}\{|u-x|^2\} \\ &= |u|^2 + \inf_{x \in C}\{-2\langle u-x\rangle + |x|^2\} \\ &= |u|^2 - \sup_{x \in C}\{2\langle u-x\rangle - |x|^2\} \end{aligned}$$

donc

$$-d_C^2(u) = -|u|^2 + \sup_{x \in C}\{2\langle u-x\rangle - |x|^2\}$$

d'où

$$-d_C^2(u) + |u|^2 = \sup_{x \in C}\{2\langle u, x\rangle - |x|^2\},$$

posons $f(u) = \sup\limits_{x \in C}\{2\langle u, x\rangle - |x|^2\}$.

Montrons que f est convexe :

Soient $u, w \in Dom(f)$, $\lambda \in [0,1]$. on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + (1-\lambda)w) &= \sup_{x \in C}\{\, 2\langle \lambda u + (1-\lambda)w, x\rangle - |x|^2 \,\} \\
&= \sup_{x \in C}\{\, 2\lambda\langle u, x\rangle + 2(1-\lambda)\langle w, x\rangle - \lambda|x|^2 - (1-\lambda)|x|^2 \,\} \\
&= \sup_{x \in C}\{\, 2\lambda\langle u, x\rangle - \lambda|x|^2 \,\} + \sup_{x \in C}\{\, 2(1-\lambda)\langle w, x\rangle - (1-\lambda)|x|^2 \,\} \\
&= \lambda \sup_{x \in C}\{\, 2\langle u, x\rangle - |x|^2 \,\} + (1-\lambda)\sup_{x \in C}\{\, 2\langle w, x\rangle - |x|^2 \,\} \\
&= \lambda f(u) + (1-\lambda) f(w).
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire. D'après la **Remarque** 1.2.2 on a f est convexe.

Remarquons que $f = -d_C^2 + |\cdot|^2$ est convexe, propre et s.c.i, donc On peut appliquer le **Théorème** 1.7.10, supposons que $\partial f(x)$ est un singleton, alors f est G-différentiable sur O. et ∇f est fortement-faiblement continue sur O.

De plus ; on a pour tout $v \in H$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(u), v\rangle &= f'(u, v) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{-d_C(u+tv) + |u+tv|^2 + d_C(u) - |u|^2}{t} \\
&= -\lim_{t \downarrow 0} \frac{d_C(u+tv) - d_C(u)}{t} + \lim_{t \downarrow 0} \frac{|u+tv|^2 - |u|^2}{t} \\
&= -\langle \nabla\, d_C^2(u), v\rangle + \langle \nabla\big(|u|^2\big), v\rangle \\
&= \langle -\nabla\, d_C^2(u) + \nabla\big(|u|^2\big), v\rangle,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

et d'après la **Proposition** 1.7.7, on a

$$\partial^F |u|^2 = \partial |u|^2 = \big\{\nabla\big(|u|^2\big)\big\}, \tag{3.17}$$

de (3.16) et (3.17) on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla f(u) &= \nabla\left(-d_C^2 + |\cdot|^2\right)(u) \\
&= -\nabla d_C^2(u) + \nabla(|u|^2) \\
&= 2(P_C(u) - u) + 2u \\
&= 2P_C(u).
\end{aligned}$$

d'où P_C est fortement-faiblement continue.

soit $(x_k)_k$ une suite qui converge vers $x \in O$.

on a Dd_C^2 est définie sur H muni de la topologie forte dans $\mathbb{R}_+$ muni de la topologie faible, alors

$$x_k \to x \Rightarrow Dd_C^2(x_k) \rightharpoonup Dd_C^2(x). \tag{3.18}$$

De plus, d_C est lipschitzienne donc continue, alors
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ tels que

$$\begin{aligned}
|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2} &\Rightarrow |d_C(x_k) - d_C(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow 2|d_C(x_k) - d_C(x)| < \varepsilon \\
&\Rightarrow 2\big||x_k - P_C(x_k)| - |x - P_C(x)|\big| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \big||Dd_C^2(x_k)| - |Dd_C^2(x)|\big| < \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme l'espace H muni de la norme de Kadec, on a d'après la **Définition** 1.4.2 et d'apès (3.18) et (3.19) $Dd_C^2(x_k)$ est fortement convergente vers $Dd_C^2(x)$.
Montrons maintenant que P_C est fortement continue sur O :
On a

$$\begin{aligned}
|P_C(x_k) - P_C(x)| &= |P_C(x_k) - x_k + x_k - x + x - P_C(x)| \\
&\leq |(P_C(x_k) - x_k) - (P_C(x) - x)| + |x_k - x| \\
&= \frac{1}{2}|2(P_C(x_k) - x_k) - 2(P_C(x) - x)| + |x_k - x| \\
&= \frac{1}{2}|Dd_C^2(x_k) - Dd_C^2(x)| + |x_k - x| < \frac{1}{2}\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,\varepsilon \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où P_C est fortement continue sur O.

■

Lemme 3.3.2. *Supposons que d_C est F-différentiable sur un voisinage d'un point $\bar{u} \notin C$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que chaque fois que $u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \delta)$ et $P_C(u) = x$, il existe $t > 0$ tel que le point $u_t = u + t(u - x)$ satisfait aussi $P_C(u_t) = x$.*

Démonstration.
D'après le **Lemme** 3.3.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que P_C est univoque et est continue et d_C est F-différentiable sur $\mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$.
Soit

$$\sigma = \sup\{\, d_C(u) \mid u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon)\}.$$

1)Montrons que $\varepsilon \leq d_C(u) \leq \sigma, \ \forall u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon)$:

a) Il est clair que

$$d_C(u) \leq \sigma, \quad \forall u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon).$$

b) Montrons que $\varepsilon \leq d_C(u)$:

On a $\mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon) \subset \mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$, et comme P_C est univoque et est continue sur $\mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$, alors P_C est univoque et est continue sur $\mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon)$. De plus,

$$d_C(u) = |u - P_C(u)|,\ u \in\ \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon),\ P_C(u) \in\ C,$$

donc $P_C(u) \notin\ \mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$ (car $\bar{u} \notin C$) qui implique

$$|\bar{u} - P_C(u)| \geq 2\varepsilon,$$

alors

$$\begin{aligned} d_C(u) = |u - P_C(u)| &= |u - \bar{u} + \bar{u} - P_C(u)| \\ &\geq |\bar{u} - P_C(u)| - |u - \bar{u}| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où $d_C(u) \geq \varepsilon$
de a) et b) on a

$$\varepsilon \leq\ d_C(u) \leq \sigma, \quad \forall u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon). \tag{3.20}$$

À chaque fois que $t \in]0, \varepsilon/\sigma[$, le point $u_t = u + t(u - P_C(u))$ se trouve dans $\mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$.
En effet,

$$
\begin{aligned}
|u_t - u| &= |u + t(u - P_C(u)) - \bar{u}| \\
&\leq |u - \bar{u}| + t|u - P_C(u)| \\
&< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\sigma = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Fixons $\delta \in]0, \varepsilon[$ et $s \in]0, \delta/\sigma[$ (alors, $s < 1$) avec

$$|P_C(u_s) - P_C(u)| < d_C(u), \quad \forall u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \delta),$$

ce choix et possible car

on a $u_s = u + s(u - P_C(u))$ avec d_C et P_C sont continues sur $\mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$, donc

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{s\downarrow 0 \\ u\to\bar{u}}} \big[d_C(u) - |P_C(u_s) - P_C(u)|\big] &= \lim_{u\to\bar{u}} \big[d_C(u) - |P_C(u) - P_C(u)|\big], \\
&= \lim_{u\to\bar{u}} d_C(u) = d_C(\bar{u}) > 0,
\end{aligned}
$$

alors

$$d_C(u) - |P_C(u_s) - P_C(u)| > 0,$$

d'où

$$|P_C(u_s) - P_C(u)| < d_C(u). \tag{3.21}$$

2)Montrons que $sd_C(u) < \delta$:
On a $s < \dfrac{\delta}{\sigma}$ et $d_C(u) \leq \sigma \Rightarrow \dfrac{1}{d_C(u)} \geq \dfrac{1}{\sigma}$, donc $s < \delta\dfrac{1}{d_C(u)}$, alors

$$sd_C(u) < \delta. \tag{3.22}$$

De plus ; $d_C(u_s) > d_C(u)$ sur $\mathbb{B}(\bar{u}, \delta)$.

En effet,

$$
\begin{aligned}
d_C(u_s) &= |u_s - P_C(u_s)| \\
&= |u + s(u - P_C(u)) - P_C(u_s) + sP_C(u) - sP_C(u)| \\
&= |(1+s)(u - P_C(u_s)) + s(P_C(u_s) - P_C(u))| \\
&\geq (1+s)|u - P_C(u_s)| - s|P_C(u_s) - P_C(u)| \\
&> (1+s)d_C(u) - sd_C(u) \qquad (\text{ d'après } (3.21)) \\
&= d_C(u).
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Soit $u \in \mathbb{B}(\bar{u}, \delta)$ et

$$D = \{ \ w \ \mid \ d_C(w) \geq d_C(u_s) \ \},$$

remarquons que $u_s \in D$. D'après la **Proposition** 1.9.3 il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u avec $P_D(u_k) \neq \emptyset$. De (3.23) et comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u avec d_C est continue, donc $d_C(u_s) > d_C(u_k)$, alors $u_k \notin D$.

Soit $w_k \in P_D(u_k)$, d'après la **Proposition** 1.9.1 $u_k - w_k$ est un vecteur proximal normal à D au point w_k, ainsi $w_k \in Fr(D)$, alors de la définition de D on a

$$d_C(w_k) = d_C(u_s). \tag{3.24}$$

3)Montrons que $w_k \in \mathbb{B}(\bar{u}, 2\delta)$:

$$\begin{aligned} u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} u \ &\Leftrightarrow \forall V \in \vartheta(u), \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 \Rightarrow u_k \in V, \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq k_0, \ \text{on a } u_k \in \mathbb{B}(\bar{u}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{3.25}$$

comme $u_s \in D$, d'après (3.22) on obtient

$$\begin{aligned} |u_k - w_k| &= |u_k - P_D(u_k)| \\ &= d_D(u_k) \\ &= \inf_{y \in D} |u_k - y| \\ &\leq |u_k - u_s|, \end{aligned}$$

avec

$$|u_k - u_s| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} |u - u_s|,$$

et

$$\begin{aligned} |u - u_s| &= |u - u + s(u - P_C(u_s))|, \\ &= s|u - P_C(u)|, \\ &= s d_C(u), \\ &< \delta. \end{aligned} \tag{3.26}$$

de (3.25) et (3.26) on a

$$\begin{aligned} |w_k - \bar{u}| &= |w_k + u_k - u_k - \bar{u}| \\ &\leq |w_k - u_k| + |u_k - \bar{u}| \\ &< \delta + \delta \\ &= 2\delta, \end{aligned}$$

d'où $w_k \in \mathbb{B}(\bar{u}, 2\delta) \subset \mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$ (car $2\delta < 2\varepsilon$).

En particulier ; on a $w_k \in \mathbb{B}(\bar{u}, 2\varepsilon)$, donc d'après (3.20) on obtient $\varepsilon < 2\varepsilon \leq d_C(w_k)$.

D'après la définition de D, le demi-espace

$$H_k = \{v \mid \langle -Dd_C(w_k), v\rangle \leq 0\},$$

est le cône tangent général à D au point w_k.

Montrons que $T_D(w_k) \subset H_k$:

Soit $v \in T_D(w_k)$, alors il existe une suite $(\alpha_n)_n$ qui converge vers 0 et une suite $(v_n)_n \subset H$ qui converge vers v telles que $w_k + \alpha_n v_n \in D$. On a

$$w_k + \alpha_n v_n \in D \Leftrightarrow d_C(w_k + \alpha_n v_n) \geq d_C(u_s). \tag{3.27}$$

d_C est F-différentiable au point w_k avec $Dd_C(w_k) = \nabla d_C(w_k)$

de (3.24) et (3.27) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\langle Dd_C(w_k), v_n\rangle &= \lim_{\alpha_n \downarrow 0} \frac{d_C(w_k + \alpha_n v_n) - d_C(w_k)}{\alpha_n} \\ &= \lim_{\alpha_n \downarrow 0} \frac{d_C(w_k + \alpha_n v_n) - d_C(u_s)}{\alpha_n} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\langle -Dd_C(w_k), v_n\rangle \leq 0,$$

par passage à la limite on obtient

$$\langle -Dd_C(w_k), v\rangle \leq 0,$$

d'où $v \in H_k$.

Montrons maintenant que $H_k \subset T_D(w_k)$:

Pour $v \in H_k$ on a $\langle -Dd_C(w_k), v\rangle \leq 0$, or

$$\langle Dd_C(w_k), v\rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_C(w_k + \alpha_n v) - d_C(w_k)}{t},$$

qu'on peut écrire aussi : soit $(\alpha_n)_n \downarrow 0$ telle que $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = v$

$$\langle Dd_C(w_k), v\rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{d_C(w_k + \alpha_n v) - d_C(w_k)}{\alpha_n} \geq 0,$$

d'où, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$; $d_C(w_k + \alpha_n v) - d_C(w_k) \geq 0$ (car $\alpha_n > 0$)

donc

$$d_C(w_k + \alpha_n v) \geq d_C(w_k),$$

alors il existe $\alpha_n = 1/n$, $(v_n)_n$ telles que $v_n = v$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec

$$d_C(w_k + \alpha_n v_n) \geq d_C(u_s)$$

i.e., $w_k + \alpha_n v_n \in D$. D'où $v \in T_D(w_k)$, et donc $T_D(w_k) = H_k$
Comme $u_k - w_k$ est un vecteur normal proximal, alors $u_k - w_k \in N_D(w_k) = T_k^\circ(w_k)$.
Par suite, $u_k - w_k$ est un multiple positif du vecteur normal$(-(w_k - P_C(w_k))/d_C(w_k))$ à H_k
i.e. $u_k - w_k = \lambda_k(-(w_k - P_C(w_k))/d_C(w_k))$; avec

$$\lambda_k = |u_k - w_k| = d_D(w_k) > 0, \tag{3.28}$$

d'après (3.26) et (3.28) on a $\lambda_k < \delta < \varepsilon$, alors d'après (3.20)

$$\lambda_k < \varepsilon \leq d_C(u) < d_C(u_s) = d_C(w_k), \tag{3.29}$$

de (3.28) et (3.29) on a $d_D(w_k) < d_C(w_k) \Rightarrow \dfrac{d_D(w_k)}{d_C(w_k)} < 1.$

Posons $r_k = \dfrac{d_D(w_k)}{d_C(w_k)}$,
donc

$$0 < r_k < 1,$$

alors

$$\begin{aligned} u_k - w_k &= \frac{w_k - P_C(w_k)}{d_C(w_k)} \\ &= -\frac{d_D(w_k)}{d_C(w_k)}(w_k - P_C(w_k)) \qquad (\text{ d'après}\,(3.28)) \\ &= -r_k(w_k - P_C(w_k)) \end{aligned}$$

ainsi $u_k = w_k - r_k w_k + r_k P_C(w_k) = (1 - r_k)w_k + r_k P_C(w_k)$,
d'où u_k appartient au segment de droite joignant w_k et $P_C(w_k)$, alors on obtient

$$P_C(u_k) = P_C(w_k).$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_k &= |w_k - P_C(w_k)| - |u_k - P_C(w_k)| \\ &= |w_k - P_C(w_k)| - |u_k - P_C(u_k)| \\ &= d_C(w_k) - d_C(u_k) \\ &= d_C(u_s) - d_C(u_k) \qquad (\text{ de } (3.24)) \end{aligned} \tag{3.30}$$

on a $u_k = (1-r_k)w_k + r_k P_C(w_k)$, donc

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{u_k}{1-r_k} - \frac{r_k}{1-r_k}P_C(w_k) \\ &= \frac{u_k}{1-r_k} - \frac{r_k u_k}{1-r_k} + \frac{r_k u_k}{1-r_k} - \frac{r_k}{1-r_k}P_C(w_k) \\ &= \frac{(1-r_k)u_k}{1-r_k} + \frac{r_k}{1-r_k}(u_k - P_C(w_k)) \\ &= u_k + t_k(u_k - P_C(w_k)), \end{aligned} \tag{3.31}$$

avec $t_k = \dfrac{r_k}{1-r_k}$
comme $r_k = \dfrac{d_D(u_k)}{d_C(w_k)}$, alors $1 - r_k = \dfrac{d_C(w_k) - d_D(u_k)}{d_C(w_k)}$,
donc

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{d_D(u_k)}{d_C(w_k) - d_D(u_k)} \\ &= \frac{\lambda_k}{d_C(w_k) - \lambda_k} \qquad \text{(d'après (3.28))} \\ &= \frac{d_C(u_s) - d_C(u_k)}{d_C(u_k)} \qquad \text{(d'après (3.30)).} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} t &= \lim_{k\to+\infty} t_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{d_C(u_s) - d_C(u_k)}{d_C(u_k)} \\ &= \frac{d_C(u_s) - d_C(u)}{d_C(u)} \end{aligned}$$

et d'après (3.31)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} w_k &= \lim_{k\to+\infty} u_k + t_k(u_k - P_C(u_k)) \\ &= u + t(u - P_C(u)) \\ &= u_t. \end{aligned}$$

Doù

$$\left.\begin{array}{l} P_C(w_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P_C(u_t) \\ \text{et} \\ P_C(w_k) = P_C(u_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P_C(u) \end{array}\right\} \Rightarrow P_C(u_t) = P_C(u).$$

■

Proposition 3.3.3. *Supposons que d_C est F-différentiable sur $O \setminus C$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$. Alors, il existe $\lambda > 0$ tel que*
(i)

$$\left.\begin{array}{c} x = P_C(u), \;\; x \neq u \\ 0 < |u - \bar{x}| < \lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow x = P_C(u') \text{ pour } u' = x + \lambda \frac{u - x}{|u - x|}. \tag{3.32}$$

(ii) Pour $D = \{\, y \;\mid\; d_C(y) \geq \lambda \,\}$ et pour tout $u \in \mathbb{B}(\bar{x}, \lambda) \setminus C$, on a

$$d_C(u) + d_D(u) = \lambda.$$

Démonstration.
1)Montrons (i) :
D'après le **Lemme** 3.3.1, on peut supposer que d_C^2 est F-différentiable sur $\mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$, alors P_C est univoque et est fortement continue sur $\mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$.

Soit $x = P_C(u)$ avec $|u - \bar{x}| < \lambda$ et $u \notin C$, donc $0 < |u - x| < \lambda$.
Puisque d_C est F-différentiable sur un voisinage de $u\,(u \notin C)$ et d'après le **Lemme** 3.3.2, $\exists\, s > 0$ avec $s < \lambda$ tel que $\forall t \in]0, s[$ on a

$$P_C(u_t) = x \quad \text{et} \quad u_t = u + t\frac{u - x}{|u - x|}, \quad u_t \notin C.$$

Soit $\lambda_0 = \sup\limits_{t \in [0,\lambda]} \{\, t \;\mid\; P_C(u_t) = x \}$.
La continuité de P_C sur $\mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$ implique que la borne supérieure est atteinte.
En effet,

$$\sup_{t \in [0,\lambda]} P_C(u_t) = \sup_{t \in [0,\lambda]} x$$
$$P_C(u_{\lambda_0}) = x.$$

On a $u_t \in \mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$, $\forall t \in [0, \lambda]$; donc $u_{\lambda_0} \in \mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$.
On ne peut pas avoir $\lambda_0 < \lambda$, car lorsque on applique le **Lemme** 3.3.2 avec u_{λ_0} à la place de u ; c-à-d, il existe $u_{\lambda_0} \in \mathbb{B}(\bar{x}, 2\lambda)$, $P_C(u_t) = x$ et il existe $t > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{\lambda_0} + \frac{t}{|u_{\lambda_0} - x|}(u_{\lambda_0} - x), \quad P_C(u_t) = x \\
&= u + \lambda_0 \frac{u - x}{|u - x|} + t\,\frac{u + \lambda_0 \frac{u-x}{|u-x|} - x}{|u + \lambda_0 \frac{u-x}{|u-x|} - x|}, \quad P_C(u_t) = x \\
&= u + \lambda_0 \frac{u - x}{|u - x|} + t\,\frac{\left(1 + \frac{\lambda_0}{|u-x|}\right)(u - x)}{\left|\left(1 + \frac{\lambda_0}{|u-x|}\right)(u - x)\right|}, \quad P_C(u_t) = x,
\end{aligned}$$

alors

$$u_t = u + (\lambda_0 + t)\frac{u-x}{|u-x|}, \quad P_C(u_t) = x,$$

donc si $\lambda_0 < \lambda$, il existe $t > 0$ tel que

$$\lambda_0 < \lambda_0 + t \leq \lambda, \quad P_C(u_t) = x.$$

contradiction avec la définition de λ_0, alors $\lambda_0 = \lambda$.
Notons par $u_t = x + (|u-x| + t)\dfrac{u-x}{|u-x|}$.
En effet ;

$$\begin{aligned}
u_t &= u + t\frac{u-x}{|u-x|} \\
&= u + x - x + t\frac{u-x}{|u-x|} \\
&= x + (u-x)\frac{|u-x|}{|u-x|} + t\frac{u-x}{|u-x|} \\
&= x + |u-x|\frac{u-x}{|u-x|} + t\frac{u-x}{|u-x|} \\
&= x + (|u-x| + t)\frac{u-x}{|u-x|}.
\end{aligned}$$

Posons $|u-x| + t = \lambda$, d'où on obtient

$$u_t = u' = x + \lambda\frac{u-x}{|u-x|}$$

2)Montrons $ii)$:
Soit $u' = x + \lambda\dfrac{u-x}{|u-x|}$,
on a $x \in C$ (car $x = P_C(u')$, et $u' \in D$ car

$$d_C(u') = \inf_{x\in C}|u'-x| = \inf_{x\in C}\left|\lambda\frac{u-x}{|u-x|}\right| = \lambda\inf_{x\in C}\left|\frac{u-x}{u-x}\right| = \lambda.$$

Ainsi, comme $u' = u + t\dfrac{u-x}{|u-x|}$, donc

$$|u-u'| = \left|t\frac{u-x}{|u-x|}\right| = t \tag{3.33}$$

et

$$|u-x| + t = \lambda. \tag{3.34}$$

De (3.33) et (3.34) on obtient

$$|u-x| + |u-u'| = \lambda,$$

par suite

$$\begin{aligned} d_C(u) + d_D(u) &= |u - P_C(u)| + \inf_{u' \in D} |u - u'| \\ &\leq |u - x| + |u - u'| \\ &= \lambda. \end{aligned} \tag{3.35}$$

De plus ; on a

$$d_C(y) \geq \lambda, \quad \forall y \in D.$$

Alors

$$d_C(y) - d_C(u) \geq \lambda - d_C(u), \quad \forall y \in D. \tag{3.36}$$

avec pour tout $y \in D$ on a

$$\begin{aligned} d_C(y) - d_C(u) &= \inf_{z \in C} |y - z| - \inf_{z \in C} |u - z| \\ &= \inf_{z \in C} \{ |y - z| - |u - z| \} \\ &\leq \inf_{z \in C} \{ |(y - z) - (u - z)| \} \\ &= |y - u|. \end{aligned}$$

Donc

$$d_C(y) - d_C(u) \leq |y - u|, \quad \forall y \in D,$$

alors

$$d_C(y) - d_C(u) \leq \inf_{y \in D} |y - u| = d_D(u),$$

donc, d'après (3.36) on a

$$\lambda - d_C(u) \leq d_C(y) - d_C(u) \leq d_D(u),$$

alors

$$\lambda - d_C(u) \leq d_D(u),$$

d'où

$$\lambda \leq d_C(u) + d_D(u). \tag{3.37}$$

De (3.35) et (3.37) on aura

$$d_C(u) + d_D(u) = \lambda.$$

■

Proposition 3.3.4. *Considérons un ensemble fermé $C \subset H$, un point $\bar{x} \in C$ et un voisinage O de $\bar{x}$.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) d_C est continûement différentiable sur $O \setminus C$.

(ii) d_C est F-différentiable sur $O \setminus C$.

(iii) d_C est G-différentiable sur $O \setminus C$ et P_C est non vide sur O.

(iv) P_C est univoque et fortement-faiblement continue sur O.

Si l'ensemble C est faiblement fermé par rapport à O, alors les propriétés précédentes sont équivalentes à :

(v) P_C est univoque sur O.

Démonstration.
Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$:
Supposons que d_C est F-différentiable sur $O \setminus C$ et montrons que d_C et continûement différentiable sur $O \setminus C$.
D'après le **Lemme** 3.3.1 on a

$$d_C \text{ est F-différentiable sur } O \setminus C \Rightarrow P_C \text{ est fortement continue sur } O,$$

et d'après la **Proposition** 3.1.1 on a

$$Dd_C(u) = \frac{u - P_C(u)}{d_C(u)}, \quad \text{sur } O \setminus C,$$

alors Dd_C est continue sur $O \setminus C$, d'où d_C est continûement différentiable sur $O \setminus C$.
Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$:
évident (voir la **Proposition** 1.7.4).
Montrons que $(iii) \Rightarrow (iv)$:
Supposons que d_C est G-différentiable sur $O \setminus C$ et $P_C(u) \neq \emptyset$, $\forall u \in O$ et montrons que P_C est univoque, et qu'elle est fortement-faiblement continue sur O.
Soit la fonction $f : H \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(u) = \sup_{x \in C} \{ \, 2\langle u, x \rangle - |x|^2 \, \}.$$

De la démonstration du **Lemme** 3.3.1, f est convexe et $f(\cdot) + d_C^2(\cdot) = |\cdot|^2$, d'après le **Théorème** 1.7.10 on obtient que la différentiabilité au sens de Gâteaux de f est fortement-faiblement continue sur O et $\nabla f(u) = \partial f(u)$, donc

$$\nabla f(u) = 2\nabla(\tfrac{1}{2} f)(u) = 2\,\partial(\tfrac{1}{2} f)(u), \ \ \forall u \in O,$$

est fortement-faiblement continue sur O.

Par suite, d'après la **Propriété** 1.9.1 on a

$$2P_C(u) \in 2\,\partial(\tfrac{1}{2}f)(u), \ \ \forall u \in O,$$

comme $\nabla f(u)$ est unique et $P_C(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in O$ on trouve

$$2P_C(u) \in 2\,\partial(\tfrac{1}{2}f)(u), \ \ \forall u \in O,$$

d'où $P_C(u)$ est un singleton et elle est fortement-faiblement continue sur O.

Montrons que $(iv) \Rightarrow (i)$:

Supposons que P_C est univoque et qu'elle est fortement-faiblement continue sur O et montrons que d_C est continûement différentiable sur $O \setminus C$.

Comme on a

- $P_C : O \to C$ est monotone (d'après la **Proposition** 3.1.1).
- P_C est continûement lipschitzienne sur $O \Rightarrow P_C$ est continue sur $O \Rightarrow P_C$ est s.c.s sur O.
- car P_C est univoque sur O on obtient
  - $P_C \neq \emptyset$,
  - P_C est convexe (d'après la **Remarque** 1.2.1)
  - P_C est faiblement* fermée.

d'où D'après le **Lemme** 1.6.1

$$P_C \text{ est maximal monotone sur } O. \tag{3.38}$$

on a f est convexe, alors $\frac{1}{2}f$ est convexe, d'après la **Proposition** 1.7.11 on obtient

$$\partial(\tfrac{1}{2}f) \text{ est monotone sur } O. \tag{3.39}$$

de (3.38) et (3.39) et d'après la **Définition** 1.6.10 on trouve

$$P_C \not\subset \partial(\frac{1}{2}f), \ \ \text{sur}\, O. \tag{3.40}$$

et d'après Hirirat-Urruty (voir [13]) on a

$$P_C \subset \partial(\frac{1}{2}f), \ \ \text{sur}\, H. \tag{3.41}$$

de (3.40) et (3.41) et comme P_C est univoque on a

$$P_C(u) = \partial(\tfrac{1}{2}f)(u), \quad \forall u \in O.$$

donc pour tout $u \in O$

$$\begin{aligned}\nabla d_C^2(u) &= 2(u - P_C(u))\\ &= 2(u - \frac{1}{2}\partial f(u))\\ &= 2u - \partial f(u),\\ &= 2u - \nabla f(u).\end{aligned}$$

est fortement-faiblement continue sur O (car f convexe).

d'après la démonstration du **Lemme** 3.3.1 on a ∇d_C^2 est fortement continue sur O.

Alors, d_C^2 est continûement différentiable sur O.

D'où, d_C est continûement différentiable sur O.

De plus ; si C est faiblement fermé par rapport à O,

Montrons que $(v) \Rightarrow (iv)$:

Supposons que P_C est univoque sur O et montrons qu'elle est univoque et est fortement-faiblement continue sur O.

Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge fortement vers $x \in O$, donc d'après la **Proposition** 1.3.1 $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.

Supposons que $P_C(x_n) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} v$, $(v \in C)$.

On sait que la norme est faiblement s.c.i, alors d'après sa **Définition** 1.5.2 on a

$$\begin{aligned}|x - v| &\leq \liminf_{n\to\infty} |x_n - P_C(x_n)|\\ &= \liminf_{n\to\infty} d_C(x_n),\end{aligned}$$

ainsi, d_C est continue, alors $\lim\limits_{n\to\infty} d_C(x_n) = d_C(x)$, donc

$$\liminf_{n\to\infty} d_C(x_n) = \lim_{n\to\infty} d_C(x_n) = d_C(x),$$

alors

$$|x - v| \leq d_C(x) = \inf_{y\in C} |x - y|,$$

donc

$$|x - v| = d_C(x) = |x - P_C(x)|,$$

d'où $P_C(x) = v$,

comme C est faiblement fermé, $v \in C$ et $P_C(x) = v$, alors

$$P_C(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} P_C(x).$$

D'où P_C est fortement-faiblement continue sur O.

Et comme $(iv) \Rightarrow (v)$ est évident, alors (iv) et (v) sont équivalentes.

■

3.4 Relation entre les ensembles $O(m)$-convexe et la prox-régularité

Définition 3.4.1 (La propriété de Shapiro). *Soit S un ensemble fermé dans un espace de Hilbert. On dit que l'ensemble S admet la propriété de Shapiro (ou bien l'ensemble S est $O(m)$-convexe) au point x_0 si*

1. *il existe une constante $K > 0$ et un voisinage V de x_0 tels que*

$$d_{T_S(x)}(x' - x) \leq K|x' - x|^m, \quad \forall x, x' \in S \cap V. \tag{3.42}$$

2. *il existe un fonction $k(x, x')$ et un voisinage V de x_0 tels que*

$$d_{T_S(x)}(x' - x) \leq k(x, x')|x' - x|^m, \quad \forall x, x' \in S \cap V.$$

et

$$\lim_{x, x' \to x_0} k(x, x') = 0,$$

avec

$$d_{T_S(x)}(x' - x) = \sup_{v \in N_S(x), |v| = 1} \langle v, x' - x \rangle.$$

Lemme 3.4.1. *[19, Lemme2.1] Supposons que S est $O(m)$-convexe au point x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que, $\forall x_1, x_2 \in S \cap V$, $\forall y_1 \in N_S(x_1), y_2 \in N_S(x_2)$ on a*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\{k(x_1, x_2)|y_1| + k(x_2, x_1)|y_2|\}|x_1 - x_2|^m,$$

où bien

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -2K(|y_1| + |y_2|)|x_1 - x_2|^m.$$

Proposition 3.4.2. *Un sous ensemble fermé C de H est prox-régulier au point $\bar{x}$ si et seulement si C admet la propriété de Shapiro au point $\bar{x}$.*

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que C est prox-régulier au point $\bar{x}$. Donc, il existe $r > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$

tel que tout vecteur non nul normal proximal v à C au point $x \in C \cap O$ peut être réalisé par r-boule. i.e. :

$$\langle \frac{v}{|v|}, x' - x\rangle - \frac{1}{2r}|x' - x|^2 \leq 0, \quad \forall x' \in C. \tag{3.43}$$

Soit $x, x' \in C \cap O$, d'après (3.43) on a

$$\langle \frac{v}{|v|}, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall\, x, x' \in C \cap O,$$

alors

$$\sup_{v \in S_C(x), |v|=1} \langle \frac{v}{|v|}, x' - x\rangle \leq \sup_{v \in S_C(x), |v|=1} \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall\, x, x' \in C \cap O,$$

et comme $S_C(x) = N_C(x)$, on a $v \in N_C(x)$

donc

$$\sup_{v \in N_C(x), |v|=1} \langle v, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall\, x, x' \in C \cap O,$$

on trouve

$$d_{T_C(x)}(x' - x) \leq \frac{1}{2r}|x' - x|^2, \quad \forall\, x, x' \in C \cap O.$$

D'où, il existe $K = \dfrac{1}{2r} > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$ tels que la propriété de Shapiro au point $\bar{x}$ soit vérifiée.

$\Leftarrow$) Supposons que l'ensemble fermé C satisfait la propriété de Shapiro au point $\bar{x}$, i.e. :

Il existe $K > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$ tels que (3.42) est vérifiée et d'après le **lemme** 3.4.1 on a

<u>pour $m = 2$:</u>

$\forall x_1, x_2 \in O \cap C, \forall v_1 \in N_C(x_1),\ v_2 \in N_C(x_2)$,

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -2K(|v_1| + |v_2|)|x_1 - x_2|^2.$$

Posons $|v_i| \leq 1,\ i = 1, 2$, donc

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2\rangle \geq -4K|x_1 - x_2|^2,$$

alors on a $v_i \in N_C^1(x_i)$ (d'après la **Définition** 1.8.8) et $x_i \in O$.

D'où, il existe $\rho = 4K > 0$ tel que N_C^1 est hypomonotone sur O (d'après la **Définition** 1.6.9). Et d'après le **Corollaire** 2.3.2 on a C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

∎

Corollaire 3.4.3. *Supposons que l'ensemble fermé C de H admet la propriété de Shapiro au un point $\bar{x} \in C$, alors $P_C(x)$ existe et elle unique et localement lipschitzienne pour tout x dans un voisinage de $\bar{x}$.*

Démonstration.

Découle directement de la **Proposition** 3.1.1.

■

Conclusion

Dans le cas des ensembles convexes la différentiabilité de la fonction distance est bien connue et a été établie dans plusieurs papiers, mais celle-ci n'est pas toujours satisfaite dans le cas plus général d'ensembles non convexes .

Ce mémoire étudie la différentiabilité de la fonction distance associée à des ensembles non convexes dans le cas particulier des ensembles prox-réguliers. Les résultats obtenus et démontrés se résument dans le théorème suivant :

Théorème 3.4.4. *Pour un ensemble fermé $C \subset H$ et tout point $\bar{x} \in C$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) C est prox-régulier au point $\bar{x}$.

(b) d_C est continûement différentiable sur $O \setminus C$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$.

(c) d_C est F-différentiable sur $O \setminus C$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$.

(d) d_C est G-différentiable sur $O \setminus C$ pour un voisinage ouvert O de $\bar{x}$, et P_C est non vide sur O.

(e) d_C^2 est C^{1+} sur un voisinage ouvert O de $\bar{x}$.

(f) Il existe $r > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$ tels que pour tout vecteur non nul normal proximal à C en tout point $x \in O \setminus C$ peut être réalisé par r-boule.

(g) Pour une constante $r > 0$ et un voisinage O de $\bar{x}$, la multifonction N_C^r est hypomonotone sur O.

(h) Il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{r} x = P_C(u), \quad x \neq u \\ 0 < |u - \bar{x}| < \lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow x = P_C(u') \text{ pour } u' = x + \lambda \frac{u - x}{|u - x|}.$$

(i) P_C est univoque et est fortement-faiblement continue sur un voisinage de $\bar{x}$.

(j) C admet la propriété de Shapiro au point $\bar{x}$. Alors, il existe un voisinage O de $\bar{x}$ sur lequel P_C est univoque, monotone et continûement lipschitzienne avec $P_C = (I + N_C^r)^{-1}$ sur O pour un certain $r > 0$, et de plus $D(d_C) = [I - P_C]/d_C$ sur $O \setminus C$.

Si l'ensemble C est faiblement fermé par rapport à un voisinage de $\bar{x}$ (ce qui est toujours le cas quand l'espace H est de dimension finie), on a les propriétés précédentes sont équivalentes à :

(k) P_C est univoque au voisinage de $\bar{x}$.

Comme de la **Proposition** 2.3.4, on a (f) implique (g) et du **Corollaire** 2.3.2, (g) est équivalente à (a) et de la **Proposition** 3.1.1, (a) implique (e) et de la **Proposition** 3.3.4, (e) implique (b) et aussi (b) implique (c). De plus, d'après la **Proposition** 3.4.2, on a l'équivalence entre (a) et (j), et de la **Proposition** 3.1.1, (a) implique (c), et il est évident que (c) imlique (d), et d'après la **Proposition** 3.3.3 partie (i) on a (c) implique (h).

Enfin, pour terminer la démonstration, d'après la **Proposition** 3.3.4 on a l'équivalence entre (d), (i) et (k).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **E. Asplund**, *Čebyšev sets in Hilbert spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 235-240. MR 40 :6238

[2] **E. Asplund and R. T. Rockafellar**, *Gradients of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1968), 31-47. MR 39 :1968

[3] **J.-P. Aubin and I. Ekeland**, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, 1984. MR 87a :58002

[4] **D. Azzam-Laouir**, *Cours d'optimisation*, cour de master 2, université de jijel, 2016-2017.

[5] **J. M. Borwein and J. R. Giles**, *The proximal normal formula in Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 371-381. MR 88m :49013

[6] **H.Brezis**, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[7] **F. H. Clarke**, *Optimization and nonsmooth analysis*. Wiley and sons. New York, 1983

[8] **F.H. Clarke, and al.**, *nonsmooth analysis and control theory*. Springer-verlag New York, Inc., 1998.

[9] **F. H. Clarke, R. J Stern and P. R.Wolenski**, *Proximal smoothness and the lower-C2 property*, J. Convex Analysis, 2 (1995), 117–144. MR 96j :49014

[10] **C. Combari, A. Elhilali Alaoui, A. Levy, R. A. Poliquin and L. Thibault**, *Convex composite functions in Banach spaces and the primal-lower-nice property*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 3701-3708. MR 99b :49016.

[11] **R. Correa, A. Jofré and L. Thibault**, *Characterization of lower semicontinuous convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 61-72. MR 92k :49027

[12] **H. Federer**, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 418-491. MR 22 :961

[13] **J.-B. Hiriart-Urruty**, *Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes : l'état de la situation vu par l'analyse convexe non lisse*, Ann. Sci. Math. Que. 22 (1998), 47-62. MR 99f :49018

[14] **A. Ya. Kruger**, *On Fréchet subdifferentials*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 116, No. 3, 2003, 3325-3358.

[15] **R. A. Poliquin and R. T. Rockafellar**, *Prox-regular functions in variational analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1805-1838. MR 96h :49039

[16] **R. A. Poliquin, R.T. Rockafellar and L. Thibault**, *local differentiability of distance functions* Trans. Amer. math. soc. Vol 352 (2000) No 11, pp.5232-5249.

[17] **R. R. Phelps**, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364 2nd edition, Springer-Verlag, 1993. MR 94f :46055

[18] **W. Schirotzek**, *Nonsmooth analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

[19] **A. S. Shapiro**, *Existence and differentiability of metric projections in Hilbert spaces*, SIAM J. Optimization 4 (1994), 130-141. MR 94m :90111

[20] **L. Thibault and D. Zagrodny**, *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions*, J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), 33-58. MR 95i :49032.