REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Résolution des inclusions différentielles par le théorème de Bressan-Colombo

Présenté par :

Asma Haddad

Devant le Jury :

Président :	D. Affane	M.C.B. Univ. Jijel
Encadreur :	F. Aliouane	M.C.B. Univ. Jijel
Examinateur :	M. Benguessoum	M.A.A. Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

REMERCIMENTS

Tout d'abord, louange à ***Dieu*** qui m'a donné la volonté et la santé me permettant de mener ce mémoire jusqu'au bout.
C'est un grand plaisir pour moi de remercier toutes les personnes qui m'ont aider à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier chèrement et chaleureusement ma chère famille pour les encouragements et tout ce qu'elle a fait pour moi tout au long de cette période d'étude.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon encadreur Mademoiselle ***le Docteur Aliouane Fatine*** pour tout ce que j'ai appris avec elle pendant ce travail, soit d'un point de vue mathèmatiques, soit d'un point de vue humain. Je tiens à la remercier pour toute l'attention, la disponibilitè et la patience avec lesquelles elle a suivi ce mémoire.

Je voudrais adresser mes remerciements à Madame ***le Docteur D. Affane*** d'avoir accepter la présidence de ce mémoire et à l'examinatrice Madame ***M. Benguessoum*** pour avoir accepter d'être membres de ce jury. Je les remercie aussi pour l'intérêt qu'elles ont porté à mon travail.

J'en profite pour remercier profondément tous les enseignants du département de Mathématiques qui nous ont enseigné tout au long de ces années. J'exprime mes plus vifs remerciements à Madame ***le Professeur D. Azzam-Laouir*** pour ses bons conseils qui m'ont permis d'aboutir ce travail.

Un grant merci à l'ensemble des collègues du département de Mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Les inclusions différentielles sont une généralisation des équations différentielles. Elles représentent un sujet très abordé ces dernières années. Elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques,... ect. Parmi les méthodes de résolution d'une inclusion différentielle, celles qui reviennent à chercher une sélection continue de la multi-application qui régit l'inclusion différentielle.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour des inclusions différentielles, en appliquant le Théorème de **Bressan-Colombo** [4]. Notamment, l'existence d'une sélection continue d'une multi-application semicontinue inférieurement à valeurs fermées décomposables. Le problème de l'existence de sélection de ce type de multi-appliction à été étudié à partir des années 80 par différents mathématiciens. En précisant, **Fryszkowski** [8], **A. Bressan** et **G. Colombo** [4] qui ont démontré des théorème d'existence très généraux. Entre autre, le théorème de **Bressan-Colombo**.

La notion de décomposabilité est dans un sens similaire à la convexité, mais il existe aussi des différences majeurs. Cependant, dans plusieurs cas, la condition de décomposabilité est un bon remplaçant de la convexité.

Un ensemble décomposable a été considéré pour la première fois dans l'analyse multivoque par **Autosiewiez Cellina** , en relation avec le problème d'existence d'une sélection continue pour les multi-applications continues à valeurs non nécessairement convexes.

Le Théorème de **Bressan-Colombo** est l'un des principaux théorèmes fondamontaux des mathématiques qui donne plusieurs résultats dans l'analyse multivoque non-convexe et est une base d'existence de sélection continue pour les multi-applications semicontinues inférieurements à valeurs fermées décomposables.

Notre travail a été effectué selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionelle que nous avons utilisés tout au long de ce travail. Plus spécialement, les applications multivoques et leurs propriétés, ainsi que quelques propriétés des ensembles décomposables.

Dans le deuxième chapitre, on présente le Théorème de **Bressan-Colombo** et sa démonstration. Autrement dit, on démonte l'existence de sélection continue pour une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs décomposables.

Le troisiéme chapitre consiste à appliquer le résultat du deuxième chapitre pour la résolution des inclusions différentielles. On présente dans la première partie des résultats préliminaires. Dans la deuxième, On cherche l'existence de solution pour un problème de Cauchy du premièr ordre suivant

$$\begin{cases} x' \in F(t, x, s) \ \ p.p. \ t \in I, \\ x(0) = \xi(s). \end{cases}$$

où $I = [0, 1]$. Tandis que dans la troisième partie, on présente l'existence de solution d'un problème du deuxième ordre qui est une généralisation du problème de **Strum-Liouville** de la forme suivante

$$\begin{cases} (p(t)x'(t))' \in F(t, x(t)) \ \ p.p. \ t \in I, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1. \end{cases}$$

avec $I = [0, T]$, $T > 0$.

CHAPITRE 1

Notations et préliminaires

Pour élaborer notre travail, il est évident d'introduire des outils de base nécessaires. On donne quelques notions de topologie ainsi que quelques propriétés des multi-applications. On termine par des propriétés des ensembles décomposables. Dans ce chapitre on fait référence à [3], [4], [6], [7] et [11].

1.1 Notations générales

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	$= \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$	$= \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$\overline{\mathbb{R}}$	$= [-\infty, +\infty]$.
μ	la mesure de probabilité.
$\mathcal{L}(I)$	la mesure de Lebesgue définie sur intervalle I de $\mathbb{R}$.
Σ	la tribu définie sur T.
$\mathcal{B}(X)$	la tribu boréliene définie sur X.

$\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

$L^p(T,E)$ l'ensemble $\{f : T \longrightarrow E$ mesurable, $\|f\|_p < +\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_p = \Big(\int\limits_T \|f(t)\|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}}$.

$M(T,\overline{\mathbb{R}})$ l'espace des fonctions mesurables de T dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$C(I,X)$ l'espace de Banach des applications contines $x : I \longrightarrow X$ muni de la norme $\|\cdot\|_C$ définie par

$$\|x\|_C = \sup_{t\in I}\|x(t)\|.$$

$AC(I,X)$ l'espace de Banach des fonctions $u : I \longrightarrow X$ absolument continues

muni de la norme $\|u\|_{AC}$ définie par

$$\|u\|_{AC} = \|u(0)\|_X + \|u'\|_1.$$

$esssup$ la borne supérieure essentielle.

$essinf$ la borne inférieure essentielle.

$x'(t)$ $= \dfrac{dx}{dt}(t)$ la dérivée de x par rapport à t.

$x_n \longrightarrow x$ $(x_n)_n$ converge vers x.

Soient A, B deux ensembles non vides, on désigne par

$cl(A)$ la clôture de A.

$X \backslash A$ complémentaire de A dans X.

$card(A)$ le cardinal d'un ensemble A i.e., le nombre d'éléments de A.

$B_E(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r.

$\overline{B}_E(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r.

$S_E(0,r)$ la sphère de centre 0 et de rayon r.

$V(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

$A\Delta B$ $= (A\backslash B)\bigcup(B\backslash A)$.

$d(x,A)$ la distance entre x et l'ensemble $A \subset X$ définie par

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|.$$

$e(A,B)$ l'écart entre A et B défini par

$$e(A,B) = \sup_{x\in A} d(x,B) = \sup_{x\in A}\big(\inf_{y\in B} d(x,y)\big).$$

$H(A,B)$ la distance de Hausdorff entre l'ensemble A et l'ensemble B donnée par

$$H(A,B) = max\big(e(A,B), e(B,A)\big).$$

χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in A, \\ 0 \quad si \quad x \in C^A. \end{cases}$$

1.2 Recouvrement

Définition 1.2.1 (Recouvremment d'un ensemble). *Soit X un ensemble quelconque et soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de X. On dit que $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X si $X \subset \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$.*

Exemple 1.2.1. *Si $X = [0,1]$, la famille des parties $\Big[\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}+1\Big]$ $(n > 0)$, forme un recouvrement de X.*

Remarque 1.2.1. *Si X est un espace topologique et $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X si pour tout $i \in I$, Ω_i est un sous ensemble ouvert de X, alors $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X.*

Définition 1.2.2 (Recouvrement localement fini). *Un recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'un espace topologique X est dit localement fini si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que $\Omega_i \cap V \neq \emptyset$ pour un nombre fini d'indices i.*

Définition 1.2.3 (Rafinement). *Soient $(\Omega_i)_{i\in I}$ et $(\omega_j)_{j\in J}$ deux recouvrements de X, $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un rafinement de $(\omega_j)_{j\in J}$ si pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que*

$$\Omega_i \subset \omega_j.$$

1.3 Espaces de Hausdorff, paracompacts et séparables

Définition 1.3.1 (Espace de Hausdorff). *Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace de Hausdorff (ou espace séparé) si pour tous $x, y \in E$, tels que $x \neq y$, ils existent V_x, V_y deux voisinages de x et y respectivement tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.3.2. *Soit A un ensemble non vide, on dit que A est dénombrable si et seulement s'il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ à valeurs dans A.*

Définition 1.3.3 (Espace séparable). *Soit X un espace topologique. On dit que X est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense dans X.*

Définition 1.3.4 (Espace paracompact). *L'espace topologique X est dit paracompact si c'est un espace de Hausdorff et chaque recouvrement ouvert de X admet un rafinement ouvert localement fini.*

Théorème 1.3.1 (Théorème de Stone). *[6] Tout espace métrique est un espace paracompact.*

1.4 Partition de l'unité

Définition 1.4.1 (Support d'une application). *Soit X un espace topologique et soit $f : X \longmapsto \mathbb{R}$. La fermeture de l'ensemble $\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ est appelée le support de f et est noté supp(f), i.e.,*

$$supp(f) = \overline{\{x \in X, f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.4.2. *On appelle partition de l'unité d'un espace topologique (X, θ) une famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fonctions continues définies sur X à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que pour tout point $x \in X$ les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *Il existe un voisinage de x tel que toutes les fonctions ϕ_i soient nulles sur ce voisinage à l'exeption d'un nombre fini d'entre elles.*
2. *La somme de toutes les valeurs prise par les fonctions ϕ_i au point x est égale à 1, i.e.,*

$$\sum_{i\in I} \phi_i(x) = 1.$$

Définition 1.4.3. *On dit que la partition de l'unité $(\phi_i)_{i\in I}$ est subordonnée à un recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$ si pour tout $i \in I$*

$$supp(\phi_i) \subset \Omega_i.$$

Théorème 1.4.1. *[6] Soit X un espace séparable. Pour tout recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.*

1.5 Applications absolument continues et Lipschitziennes

Définition 1.5.1 (Applications absolument continues). *Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si et seulement pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k) < \delta$$

on a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\| f(b_k) - f(a_k) \right\| \leq \epsilon.$$

Théorème 1.5.1. *[3] Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolumment continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, i.e.*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Remarque 1.5.1.

• *Une fonction absolument continue est continue.*

• *Si f est absolument continue, il existe une fonction Lebesgue integrable g sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Définition 1.5.2 (Application k-Lipschitzienne). *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite k-Lipschizienne s'il existe $k > 0$, tel que pour tous $x, y \in X$,*

$$\left\| f(x) - f(y) \right\|_Y \leq k \|x - y\|_X.$$

Théorème 1.5.2. *[3] Soit E un espace de Banach et soit $f : [a,b] \longrightarrow E$. Si f est k-Lipschizienne, alors f est absolument continue.*

1.6 Bornes inférieure essentielle et supérieure essentielle

Définition 1.6.1. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, (Y, d) un espace métrique et $f : T \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est mesurable si pour tout ouvert V de Y, on a $f^{-1}(V) \in \Sigma$.*

Soit $M(T,\overline{\mathbb{R}})$ l'espace des fonctions mesurables de T dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.6.2. *Soient $\{f_i\}_{i\in I} \subset M(T,\overline{\mathbb{R}})$ et $f \in M(T,\overline{\mathbb{R}})$. On dit que f est un infimum essentiel de la famille $\{f_i\}_{i\in I}$, noté par $essinf\{f_i\}_{i\in I}$ si*

(i) pour tout $i \in I,\ f_i \geq f$ p.p.

(ii) pour tous $g : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $i \in I$ si $f_i \geq g$ p.p., alors $f \geq g$ p.p.

Définition 1.6.3. *Soient $\{f_i\}_{i\in I} \subset M(T,\overline{\mathbb{R}})$ et $f \in M(T,\overline{\mathbb{R}})$. On dit que f est un supermum essentiel de la famille $\{f_i\}_{i\in I}$, noté par esssup$\{f_i\}_{i\in I}$ si*

(i) pour tout $i \in I,\ f_i \leq f$ p.p.

(ii) pour tous $g : T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $i \in I$ si $f_i \leq g$ p.p., alors $f \leq g$ p.p.

Exemple 1.6.1. *[3] Soit $T = [0,1]$ muni de la tribu et la mesure de Lebesgue, et soit $J = [0,1]$. Considérons pour chaque $j \in J$, la fonction $f_j : T \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$t \longmapsto f_j(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ t = j, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Alors, pour $j \in J$, nous avons $f_j \equiv 0$ p.p. et donc esssup$_{j\in J} f_j = 0$ et $essinf_{j\in J} f_j = 0$.

Théorème 1.6.1. *[7] Pour toute famille $\{f_i\}_{i\in I} \subset M(T,\overline{\mathbb{R}})$, il existe $essinf\{f_i\}_{i\in I}$. De plus, il existe une famille dénombrable $\{f_{i_n}\}_{n\geq 1}$ telle que $essinf\{f_i\} = \inf\limits_{n\geq 1}\{f_{i_n}\}$.*

Remarque 1.6.1.

- *Pour tout $n \geq 1$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n \leq essinf f_n \leq f_n$.*
- *$essinf(f_n) = -esssup\,(-f_n)$.*

1.7 Mesure non-atomique et de probabilité

Définition 1.7.1. *Soit (T,Σ) un espace mesurable, on appelle mesure positive sur (T,Σ) toute application $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) pour toute $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ disjointes deux à deux alors, $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

- Le triplet (T,Σ,μ) est dit espace mesuré.

Définition 1.7.2 (Mesure non-atomique). *[6]Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré et soit* $A \subset T$ *un ensemble mesurable tel que* $\mu(A) > 0$*, on dit que* μ *est une mesure non-atomique s'il existe* $B \subset A$ *tel que* $\mu(A) > \mu(B) > 0$.

Exemple 1.7.1. *La mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ *est non-atomique.*

Définition 1.7.3 (Mesure de probabilité). *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré, on dit que* μ *est une mesure de probabilité si* $\mu(T) = 1$.

Exemple 1.7.2 (Mesure de Dirac). *Soit* (T, Σ) *un espace mesurable, pour* $A \in \Sigma$*. On définit la mesure* δ_a *par*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ a \in A, \\ 0 \ \ sinon. \end{cases}$$

On peut remarquer que $\delta_a(T) = 1$*, alors la mesure de Dirac est de probabilité.*

1.8 Théorèmes de convergence

Soit (T, Σ) un espace mesurable et soient $f_n : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications mesurables.

Définition 1.8.1 (Convergence simplement presque partout). $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement presque partout vers* f *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; \big|f_n(t) - f(t)\big| < \epsilon, \ \ \forall t \in T \backslash A,$$

tel que A *est un ensemble négligeable. On note* $\quad f_n \overset{p.p}{\longrightarrow} f$.

Définition 1.8.2 (La convergence uniforme). *On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformement vers* f *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in T} |f_n(t) - f(t)| = 0.$$

On note $\quad f_n \overset{u}{\longrightarrow} f$.

Théorème 1.8.1. *[3] Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré et soient* $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(T, \mathbb{R})$ *et* $f \in L^p(T, \mathbb{R})$*. Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $L^p(T, \mathbb{R})$*, alors il existe* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *une sous suite de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge p.p. vers* f.

Théorème 1.8.2 (Convergence dominée dans L^p). *[3] Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(T, \mathbb{R})$ telle que*

(i) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers une fonction f,*

(ii) *il existe une fonction positive $g \in L^p(T, \mathbb{R})$ tel que $\big|f_n(x)\big| < g(x)$ p.p sur T, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors, $f \in L^p(T, \mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(T, \mathbb{R})$.

Théorème 1.8.3 (Théorème d'Egorov). *[3] Soit (T, Σ, μ) espace mesuré où μ est finie, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable $T_\delta \subset T$ tel que*

$$\mu(T_\delta) > \mu(T) - \delta \;\; \text{et} \;\; f_n \xrightarrow{u} f \text{ sur } T_\delta.$$

Proposition 1.8.1. *[3] Pour toute suite $(A_n)_{n\in N} \subset \Sigma$ décroissante telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mu(A_{n_0} < +\infty)$. Alors*

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\big(\lim_{n\to+\infty} A_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

1.9 Les multi-applications

Définition 1.9.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides. On appelle multi-application définie sur X à valeurs dans Y toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \rightrightarrows Y$. Alors, pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous ensemble de Y.*
Le domaine de F noté par dom(F) et est défini par

$$dom(F) = \{x \in X \colon F(x) \neq 0\}.$$

Remarque 1.9.1. *Si D est un sous ensemble de X, on appelle $F(D)$ l'image de D par F qu'on définit par*

$$F(D) = \bigcup_{x\in D} F(x).$$

Définition 1.9.2. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et soit V un ouvert de Y.*

- *On appelle image réciproque large de V qu'on note par $F^{-1}(V)$ le sous ensemble de X défini par $F^{-1}(V) = \{x \in X \colon F(x) \bigcap V \neq \emptyset\}$.*
- *On appelle image réciproque étroite de V qu'on note par $F_+^{-1}(V)$ le sous ensemble de X défini par $F_+^{-1}(V) = \{x \in X \colon F(x) \subseteq V\}$.*

Définition 1.9.3 (Semicontinuité inférieure). *Soient X et Y deux espaces topologiques. La multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semicontinue inférieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \bigcap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(z) \bigcap U \neq \emptyset$, $\forall\, z \in \Omega$.*

Définition 1.9.4 (Semicontinuité supérieure). *Soint X, Y deux espaces topologiques. La multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semicontinue supérieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y vérifiant $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.*

Remarques 1.9.1.

- *F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point $x_0 \in X$.*
- *F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x_0 \in X$.*
- *On dit que F est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si elle est s.c.i. et s.c.s. au point x_0.*
- *On dit que F est continue sur X si et sulement si elle est s.c.i. et s.c.s. sur X.*

Définition 1.9.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est mesurable si pour tout ouvert V de Y, on a $F^{-1}(V) \in \Sigma$.*

Proposition 1.9.1. *[3] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est s.c.i. au point x_0 si et seulement si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_n \in F(x_n)$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y_0.*

Corollaire 1.9.1. *[3] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.i. La semicontinuité inférieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes*

1. *$F^{-1}(V)$ est un ouvert de X pour tout ouvert V de Y,*
2. *$F_+^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y,*
3. *$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$.*

Proposition 1.9.2. *[7] Soit X un ensemble non vide et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application, alors*

$$F \text{ est s.c.i. si et seulement si } (clF) \text{ est s.c.i.}$$

avec $cl(F) : T \rightrightarrows X$ est définie par $cl(F)(x) = \overline{F(x)}$.

Définition 1.9.6. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est s.c.s. au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X; d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

• *f est s.c.s. sur X si et seulement si f est s.c.s. en tout point de X.*

Proposition 1.9.3. *[3] Soit (X, d) un espace métrique et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. f s.c.s. au point $x_0 \in X$ si et seulement si $\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$.*

Proposition 1.9.4. *[3] Soit X un ensemble non vide et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors on a l'équivalence des assertions suivantes*

(i) F est s.c.i.

(ii) l'application $t \longmapsto d(x, F(t))$ est s.c.s.

Définition 1.9.7. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : dom(F) \longrightarrow Y$ telle que pour tout $x \in dom(F), f(x) \in F(x)$.*

Proposition 1.9.5. *[3] Soient (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique complet séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Si F est Σ-mesurable alors, elle admet une sélection Σ-mesurable.*

Définition 1.9.8. *Soient X un espace paracompact, Y un espace métrique et soient $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application si pour tous $\epsilon > 0$ et $x \in X$*

$$f(x) \in B(F(x), \epsilon).$$

Alors, on dit que f est une sélection ϵ-approximante de F.

Théorème 1.9.1 (Brouwer). *[6] Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe i,e., il existe $x \in dom(f)$; $x = f(x)$.*

Théorème 1.9.2 (Michael). *[4] Soient X un espace topologique paracompact et E un espace de Banach. Alors, toute multi-application $F : X \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ s.c.i. à valeurs fermées convexes admet une sélection continue.*

Exemple 1.9.1. *[6] Soient $\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$, $S^1 = \partial\overline{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ sa frontière, et soit $F : \overline{B}(0,1) \rightrightarrows \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ une multi-application à valeurs compactes définie par*

$$F(x) = \begin{cases} S^1 \backslash \{\xi \colon \left\|\xi - x\|x\|^{-1}\right\| < \|x\|\}, & x \neq 0 \\ S^1 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

Alors, F est s.c.i. sur $\overline{B}(0,1)$, mais elle n'admet pas de sélection continue.
Supposons que F admet une sélection continue $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$. Par le théorème de Brouwer, il existe $x^* \in \overline{B}(0,1)$ telle que $x^* = f(x^*)$.
Maintenant, $x^* \in F(x^*)$, implique que $x^* \neq 0$. Donc $x^* \in S^1 \backslash \{\xi\colon \left\| \xi - x\|x\|^{-1} \right\| < \|x\|\}$.
Alors, $\left\| x^* - x^*\|x^*\|^{-1} \right\| \geq \|x^*\| = 1 \Longrightarrow 0 \geq 1$. Absurde.

1.10 Ensemble décomposable

La notion de décomposabilitée à été introduite par **Rochafellar** [12] en 1968 en connection avec les fonctionnelles intégrales et depuis, les ensembles décomposables sont devenus un outil principal dans l'analyse non convexe. Ils sont dans le sens d'un substitut de la convexité et de nombreuses propriétés des ensembles convexes ont des contreparties d'ensembles décomposables.

Définition 1.10.1. *Soit E un espace vectoriel, et soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si et seulement si pour tous $u, v \in A$ et tout $\lambda \in [0,1]$*

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Définition 1.10.2. *Soit $K \subseteq L^p(T,E)$. On dit que K est décomposable si, pour tout ensemble mesurable A et tous $u, v \in K$*

$$u\chi_A + v\chi_{T\backslash A} \in K.$$

L'ensemble de toute les partie décomposable de $L^p(T,E)$ sera noté par $D(L^p(T,E))$.

Exemple 1.10.1. *[11] Soit (T,Σ) un espace mesurable et soit l'ensemble $C = \{\chi_A \backslash\ A \text{ mesurable de } T\}$ est décomposable. En effet, soit B un ensemble mesurable de T et soient $u, v \in C$.*
Montrons que $u\chi_B + v\chi_{T\backslash B} \in C$.

$$u \in C \Longleftrightarrow \exists A_1 \subset T \text{ mesurable},\ u = \chi_{A_1}.$$

$$v \in C \Longleftrightarrow \exists A_2 \subset T \text{ mesurable},\ v = \chi_{A_2}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} u\chi_B + v\chi_{T\backslash B} &= \chi_{A_1}\chi_B + \chi_{A_2}\chi_{T\backslash B} \\ &= \chi_{(A_1 \bigcap B)} + \chi_{(A_2 \bigcap T\backslash B)} \\ &= \chi_{(A_1 \bigcap B)\bigcup(A_2 \bigcap T\backslash B)}. \end{aligned}$$

Alors, il existe $D = (A_1 \bigcap B) \bigcup (A_2 \bigcap T\backslash B) \subset T$ *mesurable tel que* $u\chi_B + v\chi_{T\backslash B} = \chi_D$.
Donc, $u\chi_B + v\chi_{T\backslash B} \in C$.

Proposition 1.10.1. *[7] Si* K *est un ensemble décomposable, alors* $cl(K)$ *l'est aussi.*

Démonstration.

Montrons que $cl(K)$ est décomposable, i.e., $\forall u, v \in cl(K)$ et $A \in \Sigma$

$$\chi_A u + (1 - \chi_A)v \in cl(K).$$

Soit $A \in \Sigma$ et soient $u, v \in cl(A)$

$$u \in cl(A) \Longrightarrow \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K;\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{converge vers}\ u.$$

$$v \in cl(A) \Longrightarrow \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K;\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{converge vers}\ v.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n, v_n \in K$ et K est décomposable, donc $\chi_A u_n + (1 - \chi_A)v_n \in K$.

Mais $(\chi_A u_n + (1 - \chi_A)v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\chi_A u + (1 - \chi_A)v)$, donc

$$(\chi_A u + (1 - \chi_A)v) \in cl(K).$$

■

Théorème 1.10.1. *[4] Si* $\mathcal{K}$ *est une famille décomposable alors,* $\mathcal{K}$ *est une famille décroissante.*

Proposition 1.10.2. *[7] Soit* K *une famille de sous-ensembles décomposables non-vides de* $L^p(T, X)$ *et* $w \in L^p(T, X)$*, alors l'ensemble* $(K-w)$ *est une famille de sous-ensembles décomposables non-vides de* $L^p(T, X)$.

Proposition 1.10.3. *[7] Soit* K *une famille de sous-ensembles décomposables non-vides de* $L^p(T, X)$ *p-intégrablement bornée, alors pour tout* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ *et pour* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *une partition de* T *on a,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} u_k$$

est une famille de sous-ensembles décomposables fermées.

CHAPITRE 2

Théorème de Bressan-Colombo

Dans ce chapitre nous présentons un résultat très important concernant l'existence de sélection continue pour des multi-application s.c.i. à valeurs décomposables. Il sagit du célèbre Théorème de Bressan-Colombo. Une démonstration détaillée sera donnée dans ce chapitre. Tout d'abord, il est indispensable d'évoquer quelques résultats qui nous seront utiles pour la preuve.

2.1 Résultats et propositions principales

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [4], [7] et [8].
Dans ce chapitre, on se réstreint à un espace mesuré (T, Σ, μ) où μ est une mesure non-atomique de probabilité.

Lemme 2.1.1. *[4] Soit X un espace métrique séparable et soient $\varphi_n : X \longrightarrow L^1(T, \mathbb{R})$, $h_n : X \longrightarrow [0,1]$ $(n \geq 1)$ deux suites de fonctions continues, avec $\varphi_n(x)(t) \geq 0$.*
Pour tous $x \in X$ et $t \in T$ tels que $\{supp(h_n), n \geq 1\}$ est un recouvrement localement fini de X.
Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction continue $l : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ strictement positive, ils existent $\tau : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et une multi-application $\Phi : \mathbb{R}^+ \times [0,1] \longrightarrow \Sigma$ qui satisfont aux conditions suivantes

1. $\Phi(\tau,\lambda_1)\subseteq\Phi(\tau,\lambda_2)$ *si* $\lambda_1\leq\lambda_2$,
2. $\mu\big(\Phi(\tau_1,\lambda_1)\Delta\Phi(\tau_2,\lambda_2)\big)\leq|\lambda_1-\lambda_2|+2|\tau_1-\tau_2|$,
3. *pour tous* $x\in X,\ \lambda\in[0,1]$ *et* $n\geq 1,$ *si* $h_n(x)=1,$ *alors*

$$\Big|\int\limits_{\Phi(\tau(x),\lambda)}\varphi_n(x)d\mu-\lambda\int\limits_{T}\varphi_n(x)d\mu\Big|<\frac{\epsilon}{\big(4l(x)\big)}.$$

Proposition 2.1.1. *[9] Soit $\mathcal{K}$ une famille de fonctions mesurables $u:T\longrightarrow\mathbb{R}^+$ strictement positives. Alors il existe une fonction $v:T\longrightarrow\mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $v\leq u$ *p.p. pour tout* $u\in\mathcal{K}$,

(ii) si w est une fonction mesurable telle que $w\leq u$ p.p. pour tout $u\in\mathcal{K}$, alors $w\leq v$ p.p.

De plus, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{K}$ telle que pour presque tout $t\in T$,

$$v(t)=\inf\{u_n(t),n\geq 1\}.$$

Remarque 2.1.1.

1. *Si la famille $\mathcal{K}$ est décroissante (i.e., si pour tous $u,u'\in\mathcal{K}$, il existe $w\in\mathcal{K}$ tel que $w\leq u$ et $w\leq u'$ p.p.), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
2. *Par (ii), la fonction v est unique par rapport à la μ-équivalence. Ça représente la plus grande borne inferieure dans le sens de $\mu-p.p.$ et est notée par $essinf\big\{u,u\in\mathcal{K}\big\}$ i.e.,*

$$v(t)=essinf\big\{u,u\in\mathcal{K}\big\}.$$

Proposition 2.1.2. *[4] Soit K un sous ensemble non vide, fermé et décmposable de $L^1(T,E)$ et soit $\psi(t)=essinf\big\{\|u(t)\|,\ u\in\mathrm{K}\big\}$. Alors, pour tout $v_0\in L^1(T,\mathbb{R})$ telle que $v_0(t)>\psi(t)$ p.p., il existe un élément $u_0\in\mathrm{K}$ tel que*

$$\|u_0(t)\|=\psi(t)<v_0(t)\ \ p.p.$$

Démonstration.

Notons que

$$\mathcal{K} = \big\{ \|u(\cdot)\|, u \in \mathrm{K} \big\}$$

est un ensemble décomposable (car K l'est) de $L^1(T, \mathbb{R})$, alors $\mathcal{K}$ est une famille décroissante.

D'après la proposition 2.1.1., il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de $\mathcal{K}$ telle que

$$\psi(t) = \inf\{a_n(t), n \geq 1\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \exists u_n \in \mathrm{K} \text{ tel que } a_n(\cdot) = \|u_n(\cdot)\|.$$

Donc, pour presque tout $t \in T$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \inf \big\{ \|u_n(t)\|, n \geq 1 \big\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|u_n(t)\| \end{aligned}$$

et

$$\|u_m(t)\| \geq \|u_n(t)\|, \ \forall m < n, \ t \in T.$$

Soit $v_0(t) > \psi(t)$ *p.p.* On définit une suite d'ensembles croissantes

$$T_0 = \emptyset \quad \text{et} \quad T_n = \big\{ t \in T \colon \|u_n(t)\| < v_0(t), n \geq 1 \big\}.$$

Observons que $\mu\big(T \backslash \bigcup_{n\geq 0} T_n\big) = 0$. En effet, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, i.e., $\forall m < n, \ T_m \subset T_n$. On a

$$\begin{aligned} t \in T_m &\Longleftrightarrow \|u_m(t)\| < v_0(t) \\ &\Longrightarrow \|u_n(t)\| < \|u_m(t)\| < v_0(t) \\ &\Longrightarrow t \in T_n. \end{aligned}$$

Nous avons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $(T\backslash T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\mu\Big(T \backslash \bigcup_{n\geq 0} T_n\Big) = \mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} T\backslash T_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(T\backslash T_n) = \mu(T_0) = \mu(\emptyset) = 0.$$

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(T,E)$ par

$$w_n(t) = \begin{cases} u_k(t) \quad si \quad t \in T_k \backslash T_{k-1}, \quad k = 1, \dots, (n-1), \\ u_n(t) \quad si \quad t \in T \backslash \bigcup\limits_{k<n} T_k. \end{cases}$$

i.e.,

$$w_n(t) = \begin{cases} u_1(t) \quad si \qquad t \in T_1, \\ u_2(t) \quad si \quad t \in T_2 \backslash T_1, \\ \quad \vdots \\ u_n(t) \quad si \quad t \in T \backslash T_{n-1}. \end{cases}$$

Puisque K est décomposable, chaque w_n appartient à K. En effet,

si $n = 1$, $\quad w_1(t) = u_1(t) \in \mathrm{K}$

si $n = 2$, $\quad w_2(t) = \begin{cases} u_1(t) \quad \text{si} \;\; t \in T_1 \backslash T_0 = T_1 \\ u_2(t) \quad \text{si} \;\; t \in T \backslash T_1. \end{cases}$

On a,

$$w_2(t) = u_1(t)\chi_{T_1}(t) + u_2(t)\chi_{T\backslash T_1}(t) \in \mathrm{K}.$$

Par récurrence sur n et par la définition de w_n, on trouve via la Proposition 1.10.3 que $w_n \in \mathrm{K}$. Nous avons, la suite $w_n(t)$ est éventuellement constante, pour presque tout $t \in T$. Car, par la définition de w_n, nous avons,

$$w_n(t) = \begin{cases} u_k(t) \;\; si \;\; t \in T_k \backslash T_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ u_n(t) \;\; si \;\; t \in T \backslash \bigcup\limits_{k<n} T_k \end{cases}$$

par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(t) = \begin{cases} u_k(t) \qquad\qquad si \;\; t \in T_k \backslash T_{k-1}, \;\; \forall k \geq 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) \;\; si \;\; t \in T \backslash \bigcup\limits_{k\geq 1} T_k. \end{cases}$$

Nous avons, $\mu\big(T \backslash \bigcup\limits_{k\geq 1} T_k\big) = 0$ i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n(t) = u_k(t) \;\; p.p. \; t \in T \text{ et } \forall k \geq 1.$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$\|w_n(t)\| \le \|u_1(t)\|, \quad p.p.\ t \in T.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue 1.8.2., $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction u_0 dans $L^1(T,E)$ et comme K est un fermé et $w_n \in \mathrm{K}$, on a

$$d(u_0,\mathrm{K}) \le d(w_n,\mathrm{K}) + \|w_n - u_0\|_1 = \|w_n - u_0\|_1.$$

Un passage à la limite nous donne que $d\big(u_0,\mathrm{K}\big) = 0$, d'où $u_0 \in \overline{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$. Enfin, si $t \in T_n\backslash T_{n-1}$ i.e., $t \in T\backslash T_{n-1}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons, $w_n(t) = u_n(t)$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|w_n(t)\| = \|u_0(t)\|$ $p.p.\ t \in T$.
Donc,

$$\|u_0(t)\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n(t)\| = \psi(t) \quad p.p.\ t \in T.$$

Alors,

$$\|u_0(t)\| = \psi(t) < v_0(t) \quad p.p.\ t \in T.$$

■

Proposition 2.1.3. *Soit X un espace métrique et soit $F : X \rightrightarrows L^1(T,E)$ une multi-application s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Pour tout $x \in X$, posons*

$$\psi_x(t) = essinf\big\{\|u(t)\|, u \in F(x)\big\}. \tag{2.1}$$

Alors, la multi-application $P : X \rightrightarrows L^1(T,\mathbb{R})$ définie par

$$P(x) = \big\{v \in L^1(T,\mathbb{R}) \colon v(t) > \psi_x(t) \ \ p.p.\ t\ dans\ T\big\} \tag{2.2}$$

est s.c.i.

Démonstration.

Pour montrer que P est s.c.i., il suffit de montrer que

$$P_+^{-1}(C) \text{ est un fermé de } X, \text{ pour tout fermé } C \text{ de } L^1(T,\mathbb{R}).$$

Autrement dit, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P_+^{-1}(C)$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 dans X alors, $x_0 \in P_+^{-1}(C)$. C'est à dire, il suffit de montrer que si $P(x_n) \subseteq C$ alors, $P(x_0) \subseteq C$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 dans X.

Posons $v_0 \in P(x_0)$ i.e., $v_0(t) > \psi_{x_0}(t)$. Puisque F est une multi-application à valeurs non vides fermées et décomposables. Par la Proposition 2.1.2., il existe $u_0 \in F(x_0)$ tel que

$$\psi_{x_0}(t) = \|u_0(t)\| < v_0(t) \;\; p.p. \; t \in T. \tag{2.3}$$

Or, F est s.c.i., il existe alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F(x_n)$ telle que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } u_0 \text{ dans } L^1(T,E).$$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$t \longmapsto v_n(t) = \|u_n(t)\| + v_0(t) - \|u_0(t)\|.$$

Il est clair que $v_n \in P(x_n)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans $L^1(T,\mathbb{R})$.

En effet, par la relation (2.3), on a pour presque tout $t \in T$,

$$v_n(t) = \|u_n(t)\| + v_0(t) - \|u_0(t)\| > \|u_n(t)\| + v_0(t) - v_0(t) = \|u_n(t)\|.$$

C'est à dire, $v_n(t) > \psi_{x_n}(t)$ $p.p.$ D'où $v_n \in P(x_n)$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|v_n - v_0\|_1 &= \int_T \big|v_n(t) - v_0(t)\big| d\mu(t) \\
&= \int_T \big|\|u_n(t)\| + v_0(t) - \|u_0(t)\| - v_0(t)\big| d\mu(t) \\
&= \int_T \big|\|u_n(t)\| - \|u_0(t)\|\big| d\mu(t) \\
&\leq \int_T \|u_n(t) - u_0(t)\| d\mu(t) = \big\|u_n - u_0\big\|_1.
\end{aligned}$$

Puisque, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_0 dans $L^1(T,E)$, un passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, nous assure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans $L^1(T,\mathbb{R})$.

De plus, $P(x_n) \subset C$ et C un ensemble fermé de $L^1(T,\mathbb{R})$, on trouve $v_0 \in C$. D'où la s.c.i. de P.

$\blacksquare$

Proposition 2.1.4. *[4] Soient X un espace métrique, $G : X \rightrightarrows L^1(T,E)$ une multi-application s.c.i. à valeurs fermées et décomposables, $g : X \longrightarrow L^1(T,E)$ et $\varphi : X \longrightarrow L^1(T,E)$ des fonctions continues telles que, pour tout $x \in X$ l'ensemble*

$$H(x) = \{u \in G(x) \colon \|u(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t) \ \ \textit{p.p. dans}\, T\}$$

est non vide. Alors, la multi-application $H : X \rightrightarrows L^1(T,E)$ est s.c.i. à valeurs décomposables.

Démonstration.

Pour tout $x \in X$, $H(x)$ est l'intersection de deux ensembles décomposables. Alors $H(x)$ est décomposable. En effet

$$H(x) = G(x) \cap \{u \in L^1(T,E) \colon \|u(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t) \ \ \textit{p.p.}\ \text{dans}\ T\}.$$

Soient $u, v \in H(x)$ et soit $A \in \Sigma$, on montre que

$$u\chi_A + v\chi_{T\setminus A} \in H(x).$$

Nous avons,

$$u \in H(x) \Longleftrightarrow u \in G(x) \text{ et } \|u(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t) \ \ \textit{p.p.}$$

$$v \in H(x) \Longleftrightarrow v \in G(x) \text{ et } \|v(t) - g(x)(t)\| < \varphi(x)(t) \ \ \textit{p.p.}$$

Etant donné que $G(x)$ est décomposable, pour tout $x \in X$, ainsi

$$u\chi_A + v\chi_{T\setminus A} \in G(x).$$

De plus, pour presque tout $t \in T$ on a,

$$\begin{aligned}
\big\|u(t)\chi_A(t)+v(t)\chi_{T\setminus A}(t)-g(x)(t)\big\| &= \big\|u(t)\chi_A(t)+v(t)\big(1-\chi_A(t)\big)-g(x)(t)\big(1-\chi_A(t)\big)\\
&\quad -g(x)(t)\chi_A(t)\big\|\\
&= \big\|\big(u(t)-g(x)(t)\big)\chi_A(t)+\big(v(t)-g(x)(t)\big)\big(1-\chi_A(t)\big)\big\|\\
&\leq \big\|\big(u(t)-g(x)(t)\big)\chi_A(t)\big\|+\big\|\big(v(t)-g(x)(t)\big)\big(1-\chi_A(t)\big)\big\|\\
&= \chi_A(t)\big\|u(t)-g(x)(t)\big\|+\big(1-\chi_A(t)\big)\big\|v(t)-g(x)(t)\big\|\\
&< \varphi(x)(t)\chi_A(t)+\varphi(x)(t)\big(1-\chi_A(t)\big)\\
&= \varphi(x)(t).
\end{aligned}$$

On conclut que $u\chi_A+v\chi_{T\setminus A}\in H(x)$. D'où $H(x)$ est décomposable.

Pour finir, on montre la s.c.i. de la multi-application H. Pour cela, soit C un sous ensemble fermé de $L^1(T,E)$ et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de X qui converge vers x_0.

Montrons que si $H(x_n)\subset C$, alors $H(x_0)\subset C$.

Fixons $u_0\in H(x_0)$. Tant que G est une multi-application s.c.i., il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}\subset G(x_n)$ telle que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers u_0 dans $L^1(T,E)$.

D'autre part, on a $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x_0 dans X, φ et g sont continues, on aboutit à $(\varphi(x_n))_{n\geq 1}$converge vers $\varphi(x_0)$ dans $L^1(T,\mathbb{R})$, $(g(x_n))_{n\geq 1}$converge vers $g(x_0)$ dans $L^1(T,E)$. Nous avons trouvé alors que $(u_n)_{n\geq 1}$, $(g(x_n))_{n\geq 1}$ convergent vers u_0, $g(x_0)$ respectivement dans $L^1(T,E)$ et $(\varphi(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers $\varphi(x_0)$ dans $L^1(T,\mathbb{R})$. On peut leurs extraire des sous suites qui convergent presque partout, i.e., pour presque tout $t\in T$, les suites $(u_n(t))_{n\in\geq 1}$, $(g(x_n)(t))_{n\geq 1}$ et $(\varphi(x_n)(t))_{n\geq 1}$ convergent vers $u_0(t), g(x_0)(t)$ et $\varphi(x_0)(t)$ respectivement.

Appliquant le Théorème d'Egorov par rapport à la mesure $\varphi(x_0).\mu$ définie pour tout ensemble mesurable A par

$$(\varphi(x_0).\mu)(A)=\nu(A)=\int_A \varphi(x_0)d\mu.$$

Pour tout $i \geq 1$, il existe un ensemble mesurable $T_i \subset T$ tel que $(u_n)_{n\geq 1}$, $(g(x_n))_{n\geq 1}$ et $(\varphi(x_n))_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers u_0, $g(x_0)$ et $\varphi(x_0)$ respectivement dans T_i et

$$\nu(T_i) > \nu(T) - \frac{1}{i}\cdot$$

i.e.,

$$\int_{T\setminus T_i} \varphi(x_0) d\mu < \frac{1}{i}\cdot$$

Pour chaque $k \geq 1$, considérons les ensembles suivants

$$T_i^k = \Big\{t \in T_i\colon \|u_0(t) - g(x_0)(t)\| < \varphi(x_0)(t) - \frac{1}{k}\Big\}. \tag{2.4}$$

Notons $T_i^k \subseteq T_i^{k+1}$ et $\bigcup\limits_{k\geq 1} T_i^k = T_i$. En effet

$$\begin{aligned} t \in T_i^k \quad &\Longleftrightarrow \quad \big\|u_0(t) - g(x_0)(t)\big\| < \varphi(x_0)(t) - \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow \quad \big\|u_0(t) - g(x_0)(t)\big\| < \varphi(x_0)(t) - \frac{1}{k+1} \\ &\Longrightarrow \quad t \in T_i^{k+1}. \end{aligned}$$

On a, $T_i^k \subset T_i^{k+1}$ pour tout $k \geq 1$, c'est à dire que $(T_i^k)_{k\geq 1}$ est une suite d'ensemble croissante de T_i. D'où

$$\bigcup_{k\geq 1} T_i^k = T_i.$$

Pour tout $i \geq 1$, il existe $k(i)$ tel que

$$\int_{T_i\setminus T_i^{k(i)}} \varphi(x_0) d\mu < \frac{1}{i}\cdot$$

Posons $T_i^{k(i)} = T_i'$, alors on trouve pour tout $t \in T_i'$,

$$\big\|u_0(t) - g(x_0)(t)\big\| < \varphi(x_0)(t) - \frac{1}{k(i)}\cdot \tag{2.5}$$

De plus,

$$\int_{T_i\setminus T_i'} \varphi(x_0) d\mu < \frac{2}{i}\cdot \tag{2.6}$$

La relation (2.6) est satisfaite car

$$T \backslash T_i' = T \backslash T_i \cup T_i \backslash T_i'.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{T \backslash T_i'} \varphi(x_0) d\mu &= \int\limits_{T \backslash T_i \cup T_i \backslash T_i'} \varphi(x_0) d\mu \\
&= \int\limits_{T \backslash T_i} \varphi(x_0) d\mu + \int\limits_{T_i \backslash T_i'} \varphi(x_0) d\mu \\
&< \frac{1}{i} + \frac{1}{i} \\
&= \frac{2}{i}.
\end{aligned}$$

Nous avons $(u_n)_{n \geq 1}, (g(x_n))_{n \geq 1}$ et $(\varphi(x_n))_{n \geq 1}$ convergent uniformément vers $u_0, g(x_0)$ et $\varphi(x_0)$ respectivement sur T_i et puisque $T_i' \subset T_i$ on a la convergence uniforme sur T_i'.

Par définition, on aura pour tout $i \geq 1$

$$\begin{aligned}
\exists n_{i_1} \in \mathbb{N}, \forall t \in T_i', n \geq n_{i_1} &\implies \left\| u_n(t) - u_0(t) \right\| < \frac{1}{3k(i)} \cdot \\
\exists n_{i_2} \in \mathbb{N}, \forall t \in T_i', n \geq n_{i_2} &\implies \left\| g(x_n)(t) - g(x_0)(t) \right\| < \frac{1}{3k(i)} \cdot \\
\exists n_{i_3} \in \mathbb{N}, \forall t \in T_i', n \geq n_{i_3} &\implies \left| \varphi(x_n)(t) - \varphi(x_0)(t) \right| < \frac{1}{3k(i)} \cdot
\end{aligned}$$

Soit $n_i = max(n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}) \in \mathbb{N}$. $\forall t \in T_i', \forall n \geq n_i$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| u_n(t) - g(x_n)(t) \right\| &\leq \left\| u_n(t) - u_0(t) \right\| + \left\| g(x_n)(t) - g(x_0)(t) \right\| + \left\| u_0(t) - g(x_0)(t) \right\| \\
&< \frac{1}{3k(i)} + \frac{1}{3k(i)} + \varphi(x_0)(t) - \frac{1}{k(i)} \\
&= \varphi(x_0) - \frac{1}{3k(i)} \\
&\leq \varphi(x_n) + \frac{1}{3k(i)} - \frac{1}{3k(i)} = \varphi(x_n).
\end{aligned}$$

Il en résulte que,

$$\left\| u_n(t) - g(x_n)(t) \right\| < \varphi(x_n)(t), \quad \forall t \in T_i', \quad n \geq n_i. \tag{2.7}$$

On peut supposer que $(n_i)_{i\geq 1}$ est une suite strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons w_n un point arbitraire de $H(x_n)$ et posons pour tout $n_i \leq n < n_{i+1}$,

$$v_n = u_n \chi_{T_i'} + w_n \chi_{T_i \setminus T_i'}.$$

Il est clair que $v_n \in H(x_n)$ (car il est décomposable).

Enfin, on montre que $(v_n)_n$ converge vers u_0 dans $L^1(T, E)$, ceci implique que $u_0 \in C$. Nous avons, pour tout $n_i \leq n < n_{i+1}$

$$\begin{aligned}
\big\|v_n - u_0\big\|_1 &= \int_T \big\|v_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_{T_i' \bigcup T\setminus T_i'} \big\|v_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_{T\setminus T_i'} \big\|v_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) + \int_{T_i'} \big\|v_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_{T\setminus T_i'} \big\|w_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) + \int_{T_i'} \big\|u_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_{T\setminus T_i'} \big\|w_n(t) - g(x_n)(t) + g(x_n)(t) - g(x_0)(t) + g(x_0)(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&\quad + \int_{T_i'} \big\|u_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) \\
&\leq \int_{T\setminus T_i'} \big\|w_n(t) - g(x_n)(t)\big\| d\mu(t) + \int_{T\setminus T_i'} \big\|g(x_n)(t) - g(x_0)(t)\big\| d\mu(t) \\
&\quad + \int_{T\setminus T_i'} \big\|g(x_0)(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t) + \int_{T_i'} \big\|u_n(t) - u_0(t)\big\| d\mu(t)
\end{aligned}$$

par les relations (2.6) et (2.7)

$$\begin{aligned}
\|v_n-u_0\|_1 &\leq \int\limits_{T\setminus T_i}\varphi(x_n)(t)d\mu(t)+\|g(x_n)-g(x_0)\|_1+\int\limits_{T\setminus T_i'}\varphi(x_0)(t)d\mu(t)+\|u_n-u_0\|_1\\
&< \int\limits_{T\setminus T_i'}\Big[\varphi(x_n)(t)-\varphi(x_0)(t)+\varphi(x_0)(t)\Big]d\mu(t)+\|g(x_n)-g(x_0)\|_1+\frac{2}{i}+\|u_n-u_0\|_1\\
&\leq \int\limits_{T\setminus T_i'}\big|\varphi(x_n)(t)-\varphi(x_0)(t)\big|d\mu(t)+\int\limits_{T\setminus T_i'}\varphi(x_0)(t)d\mu(t)+\|g(x_n)-g(x_0)\|_1\\
&\quad+\frac{2}{i}+\|u_n-u_0\|_1\\
&< \|\varphi(x_n)-\varphi(x_0)\|_1+\|g(x_n)-g(x_0)\|_1+\|u_n-u_0\|_1+\frac{4}{i}\cdot
\end{aligned}$$

Quand $n\longrightarrow+\infty$ et aussi $i\longrightarrow+\infty$, on déduit que $(v_n)_{n\geq1}$ converge vers u_0 dans $L^1(T,E)$.

■

Le résultat qui suit concernant l'existence des sélections approximantes est le noyau de la preuve de notre Théorème principal.

Proposition 2.1.5. *[4] Soit X un espace séparable et soit $G: X\rightrightarrows L^1(T,E)$ une multi-application s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Alors, pour tout $\epsilon>0$, ils existent deux fonctions continues $f_\epsilon: X\longrightarrow L^1(T,E)$ et $\varphi_\epsilon: X\longrightarrow L^1(T,\mathbb{R})$ telles que f_ϵ est une sélection $\epsilon-$approximante de G, dans le sense suivant, pour tout $x\in X$, l'ensemble*

$$G_\epsilon(x)=\Big\{u\in G(x)\colon \|u(t)-f_\epsilon(x)(t)\|<\varphi_\epsilon(x)(t)\ p.p.\ dans\ T\Big\} \tag{2.8}$$

est non vide et

$$\|\varphi_\epsilon(x)\|_1<\epsilon.$$

De plus, la multi-application $x\longmapsto G_\epsilon(x)$ est s.c.i. à valeurs décomposables.

Démonstration.

On fait la démonstration de cette proposition en trois étapes.

- ***Étap1.*** **Construction des applications** f_ϵ **et** φ_ϵ.

Fixons $\epsilon > 0$. Pour tout $\overline{x} \in X$ et $\overline{u} \in G(\overline{x})$, la multi-application Q définie par

$$Q(x) = \big\{v \in L^1(T,\mathbb{R}) \colon v(t) \geq essinf\{\|u(t) - \overline{u}(t)\|, u \in G(x)\} \;\; p.p.\; t \in T\big\}$$

est s.c.i. à valeurs fermées convexes.

Pour cela, on définit la multi-application $F : X \rightrightarrows L^1(T, E)$ par

$$F(x) = \big\{u - \overline{u}, u \in G(x)\big\}.$$

Il est clair que la multi-application F est s.c.i. à valeurs fermées décomposables.

• Montrons que pour tout $x \in X,\; F(x)$ est un fermé de $L^1(T, E)$ i.e., pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F(x)$ telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans $L^1(T, E)$, alors $v_0 \subset F(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n \in F(x) \Longleftrightarrow \exists\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G(x),\; v_n = u_n - \overline{u}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|v_n - v_0\|_1 &= \lim_{n\to+\infty} \|u_n - \overline{u} - v_0\|_1 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|u_n - (v_0 + \overline{u})\|_1 = 0 \end{aligned}$$

i.e., $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(T, E)$ vers $u_0 = v_0 + \overline{u}$ et puisque G à valeurs fermées, on trouve $u_0 \in G(x)$ et

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 + \overline{u} &\implies v_0 = u_0 - \overline{u} \\ &\implies v_0 \in F(x). \end{aligned}$$

D'où, F est à valeurs fermées dans $L^1(T, E)$.

• Montrons que F est à valeurs décomposables.

Soit A un ensemble mesurable de Σ, et soient $v, w \in F(x)$. Montrons que $v\chi_A + w\chi_{T\setminus A} \in F(x)$.

Nous avons,

$$v \in F(x) \Longleftrightarrow \exists u \in G(x),\ v = u - \overline{u}.$$

$$w \in F(x) \Longleftrightarrow \exists u' \in G(x),\ w = u' - \overline{u}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} v\chi_A + w\chi_{T\setminus A} &= (u-\overline{u})\chi_A + (u'-\overline{u})\chi_{T\setminus A} \\ &= (u-\overline{u})\chi_A + (u'-\overline{u})(1-\chi_A) \\ &= u\chi_A + u'(1-\chi_A) - \overline{u}. \end{aligned}$$

Comme $G(x)$ est décomposable, alors $u\chi_A + u'\chi_{T\setminus A} \in G(x)$,

ceci implique que $v\chi_A + w\chi_{T\setminus A} \in F(x)$. D'où la décomposabilité de $F(x)$.

• Montrons que la multi-application F est s.c.i., pour cela, il suffit de montrer que

$$F_+^{-1}(C) \text{ est un fermé de } X, \text{ pour tout fermé } C \text{ de } L^1(T,E).$$

Autrement dit, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_+^{-1}(C)$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 dans X alors, $x_0 \in F_+^{-1}(C)$. C'est à dire, si $F(x_n) \subseteq C$ alors, $F(x_0) \subseteq C$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 dans X.

Soit $v_0 \in F(x_0)$ donc il existe $u_0 \in G(x_0)$ tel que $v_0 = u_0 - \overline{u}$.

La s.c.i. de la multi-application G nous affirme l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G(x_n)$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_0 dans $L^1(t,E)$.

Posons $v_n = u_n - \overline{u}$. Il est claire que $v_n \in F(x_n)$ et v_n converge vers v_0 dans $L^1(T,E)$. En effet

$$\begin{aligned} \|v_n - v_0\|_1 &= \int_T \|v_n(t) - v_0(t)\| d\mu(t) \\ &= \int_T \|u_n(t) - \overline{u}(t) - u_0(t) + \overline{u}(t)\| d\mu(t) \\ &= \int_T \|u_n(t) - u_0(t)\| d\mu(t) \\ &= \|u_n(t) - u_0(t)\|_1. \end{aligned}$$

De la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u_0 dans $L^1(T,E)$ et par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans $L^1(T,E)$.

De plus, $F(x_n)\subset C$ et C un ensemble fermé de $L^1(T,E)$, on trouve $v_0\in C$. D'où la s.c.i. de F.

Soit

$$\begin{aligned}\psi_x(t) &= essinf\big\{\|w(t)\|, w\in F(x)\big\}\\ &= essinf\big\{\|u(t)-\bar{u}(t)\|, u\in G(x)\big\}.\end{aligned}$$

Par la Proposition 2.1.3., la multi-application P définie par

$$P(x)=\{v\in L^1(T,\mathbb{R}) \colon v(t)>\psi_x(t)\ \ p.p.\ t\in T\} \tag{2.9}$$

est s.c.i.

Remarquant que $Q(x)$ est la clôture de $P(x)$, pour tout $x\in X$. On conclut que, Q est s.c.i.

Maintenant, on montrons que $Q(x)$ est un ensemble convexe.

Soit $\lambda\in[0,1]$ et soient $v,w\in Q(x)$.

$$\begin{aligned} v\in Q(x) &\iff v(t)\geq\psi_x(t)\ \ p.p.\ t\in T.\\ w\in Q(x) &\iff w(t)\geq\psi_x(t)\ \ p.p.\ t\in T.\end{aligned}$$

Pour presque tout $t\in T$,

$$\begin{aligned}\lambda v(t)+(1-\lambda)w(t) &\geq \lambda\psi_x(t)+(1-\lambda)\psi_x(t)\\ &= \psi_x(t).\end{aligned}$$

Ceci implique que $\big(\lambda v(t)+(1-\lambda)w(t)\big)\in Q(x)$, d'où la convexité de $Q(x)$. De plus, il est clair que $Q(x)$ est un fermé, on déduit que Q est une multi-application s.c.i. à valeurs fermées et convexes. Via le Théorème de Michael, Q admet une sélection continue $\varphi_{\overline{x},\overline{u}}: X\longrightarrow L^1(T,\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_{\overline{x},\overline{u}}\in Q(x),\forall x\in X\ \text{ et }\ \varphi_{\overline{x},\overline{u}}(\overline{x})\equiv 0.$$

La famille des ensembles suivants

$$A = \left\{ \left\{ x \in X \colon \|\varphi_{\overline{x},\,\overline{u}}\|_1 < \frac{\epsilon}{4} \right\},\ \overline{x} \in X,\ \overline{u} \in G(\overline{x}) \right\}$$

forme un recouvrement ouvert de X. En effet

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \left\{ x \in X \colon \|\varphi_{\overline{x},\overline{u}}(x)\|_1 < \frac{\epsilon}{4} \right\},\ \overline{x} \in X,\ \overline{u} \in G(\overline{x}) \right\} \\ &= \left\{ x \in X \colon \varphi_{\overline{x},\,\overline{u}}(x) \in B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right),\ \overline{x} \in X,\ \overline{u} \in G(\overline{x}) \right\} \\ &= \left\{ x \in \varphi^{-1}_{\overline{x},\,\overline{u}}\left(B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right)\right),\ \overline{x} \in X,\ \overline{u} \in G(\overline{x}) \right\} \\ &= \bigcup_{\substack{\overline{u} \in G(\overline{x}) \\ \overline{x} \in X}} \varphi^{-1}_{\overline{x},\,\overline{u}} \left(B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

$B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right)$ est un ouvert de $L^1(T, \mathbb{R})$ et $\varphi_{\overline{x},\overline{u}}$ est continue $\Longrightarrow$ $\varphi^{-1}_{\overline{x},\overline{u}}\left(B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right)\right)$ est un ouvert de X

$\Longrightarrow$ $\bigcup_{\substack{\overline{u} \in G(\overline{x}) \\ \overline{x} \in X}} \varphi^{-1}_{\overline{x},\overline{u}}\left(B_{L^1}\left(0, \frac{\epsilon}{4}\right)\right)$ est un ouvert de X

$\Longrightarrow$ A est un recouvrement ouvert de X.

X un espace métrique donc paracompact (du Théorème 1.3.1. de Stone). Alors A admet un raffinement ouvert localement fini $\{V_n, n \geq 1\}$. Puisque X est séparable, il existe $\{p_n(\cdot)\}$ une partition continue de l'unité subordonée à $\{V_n\}$.
Soit $\{h_n(\cdot)\}$ une famille de fonctions continues définies de X dans $[0, 1]$ telle que

$$h_n(x) = 1, \forall x \in supp\ (p_n) \quad \text{et} \quad supp\ (h_n) \subset V_n.$$

Pour tout $n \geq 1$, choisissons $x_n \in X,\ u_n \in G(x_n)$ telles que $V_n \subseteq \left\{ x \in X, \|\varphi_{x_n,u_n}(x)\|_1 < \frac{\epsilon}{4} \right\}$ et posons $\varphi_n = \varphi_{x_n,u_n}$. Les fonctions φ_n vérifient les propriétés suivantes

$$\varphi_n(x)(t) \geq essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\|, u \in G(x)\big\}\ \ p.p\ t \in T. \tag{2.10}$$

$$p_n(x)\|\varphi_n(x)\|_1 \leq p_n(x)\frac{\epsilon}{4},\ \ \big(x \in X, n \geq 1\big). \tag{2.11}$$

On applique le Lemme 2.1.1. sur les deux suites $\{\varphi_n\}$ et $\{h_n\}$ et sur la fonction $l(x) = \sum_{n\geq 1} h_n(x)$. Il en resulte qu'il existe une fonction continue $\tau : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et une famille $\{\Phi(\tau, \lambda)\} \subset \Sigma$ qui vérifient $(1), (2)$ et (3).

Il est possible de construire deux fonctions $f_\epsilon,\ \varphi_\epsilon$ telles que

$$f_\epsilon(x) = \sum_{n\geq 1} u_n \chi_n(x) \quad \text{et} \quad \varphi_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \varphi_n(x)\chi_n(x).$$

Où $\qquad \lambda_0 \equiv 0, \quad \lambda_n(x) = \sum_{m\leq n} p_m(x) \quad$ et $\quad \chi_n(x) = \chi_{\Phi(\tau(x),\, \lambda_n(x))\setminus\Phi(\tau(x),\, \lambda_{n-1}(x))}.$

Clairement, f_ϵ et φ_ϵ sont continues dans $L^1(T, E)$ et $L^1(T, \mathbb{R})$ respectivement. En effet montrons que f_ϵ est continue sur X i.e., f_ϵ est continue au point $x_0 \in X$.

Nous avons,

$$\big\|f_\epsilon(x) - f_\epsilon(x_0)\big\|_1 = \Big\| \sum_{n\geq 1} u_n\chi_n(x) - \sum_{n\geq 1} u_n\chi_n(x_0)\Big\|_1 \leq \sum_{n\geq 1} \big\|u_n\chi_n(x) - u_n\chi_n(x_0)\big\|_1.$$

De plus, par (3) du Lemme 2.1.1., on a

$$\begin{aligned}
\big\|u_n\chi_n(x) - u_n\chi_n(x_0)\big\|_1 &= \int_T \big\|u_n(t)\chi_n(x)(t) - u_n(t)\chi_n(x_0)(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_T \big\|u_n(t)\big\| \big(\chi_n(x)(t) - \chi_n(x_0)(t)\big) d\mu(t) \\
&= \int_T \big\|u_n(t)\big\|\chi_n(x)(t) d\mu(t) - \int_T \big\|u_n(t)\big\|\chi_n(x_0)(t) d\mu(t) \\
&= \int_T \big\|u_n(t)\big\|\chi_{\Phi(\tau(x),\lambda_n(x))\setminus\Phi(\tau(x),\lambda_{n-1}(x))}(t) d\mu(t) \\
&\quad - \int_T \big\|u_n(t)\big\|\chi_{\Phi(\tau(x_0),\lambda_n(x_0))\setminus\Phi(\tau(x_0),\lambda_{n-1}(x_0))}(t) d\mu(t) \\
&= \int_{\Phi(\tau(x),\lambda_n(x))\setminus\Phi(\tau(x),\lambda_{n-1}(x))} \big\|u_n(t)\big\| d\mu(t) \\
&\quad - \int_{\Phi(\tau(x_0),\lambda_n(x_0))\setminus\Phi(\tau(x_0),\lambda_{n-1}(x_0))} \big\|u_n(t)\big\| d\mu(t) \\
&= \int_{\Phi(\tau(x),\lambda_n(x))} \big\|u_n(t)\big\| d\mu(t) - \int_{\Phi(\tau(x),\lambda_{n-1}(x))} \big\|u_n(t)\big\| d\mu(t) \\
&\quad - \int_{\Phi(\tau(x_0),\lambda_n(x_0))} \big\|u_n(t)\big\| d\mu(t) + \int_{\Phi(\tau(x_0),\lambda_{n-1}(x_0))} \|u_n(t)\| d\mu(t)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\big\|u_n\chi_n(x) - u_n\chi_n(x_0)\big\|_1 &= \lambda_n(x)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t) - \lambda_{n-1}(x)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t)\\
&\quad -\lambda_n(x_0)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t) + \lambda_{n-1}(x_0)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t)\\
&= \big(\lambda_n(x) - \lambda_{n-1}(x)\big)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t) - \big(\lambda_n(x_0) - \lambda_{n-1}(x_0)\big)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t)\\
&= p_n(x)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t) - p_n(x_0)\int\limits_T \big\|u_n(t)\big\|d\mu(t)\\
&= p_n(x)\big\|u_n\big\|_1 - p_n(x_0)\big\|u_n\big\|_1\\
&= \big(p_n(x) - p_n(x_0)\big)\big\|u_n\big\|_1.
\end{aligned}$$

$\{p_n(\cdot)\}$ est une famille de fonctions continues de X dans $[0,1]$ et on a, $u_n \in L^1(T,E), \forall n \in \mathbb{N}$ i.e., $\|u_n\|_1 < +\infty$ et puisque la somme est localement finie.

On déduit que f_ϵ est continue en x_0 et donc f_ϵ est continue sur X.

On procède de même pour montrer que φ_ϵ est continue.

- ***Étap2.*** **Montrons que G_ϵ définie par (2.8) est non vide.**

Fixons $x \in X$. Pour tout $n \geq 1$, nous avons d'après la proposition 2.1.2. l'existence de $u_x^n \in G(x)$ tel que

$$\|u_x^n(t) - u_n(t)\| < \frac{\epsilon}{4} + \ essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\|, u \in G(x)\big\} \ \ p.p. \text{ dans } T. \tag{2.12}$$

En effet,

d'après la relation (2.10), nous avons

$$\varphi_n(x)(t) \geq essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\|, u \in G(x)\big\}.$$

Par la Proposition 2.1.2., il existe $u_x^n \in G(x)$ telle que

$$\|u_x^n(t) - u_n(t)\| = essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\|, u \in G(x)\big\} \ \ p.p. \text{ dans } T.$$

D'où, $\forall \epsilon > 0$

$$\|u_x^n(t) - u_n(t)\| < \frac{\epsilon}{4} + essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\big\|, u \in G(x)\big\} \ \ p.p. \text{ dans } T.$$

On pose

$$u_x = \sum_{n\geq 1} u_x^n \chi_n(x).$$

Par la Proposition 1.10.3., et puisque $G(x) \in D(L^1(T, E))$, on trouve que $u_x \in G(x)$.

On montre que $u_x \in G_\epsilon(x)$, autrement dit, u_x vérifie la relation

$$\big\|u_x(t) - f_\epsilon(x)(t)\big\| < \varphi_\epsilon(x)(t) \;\; p.p. \; t \text{ dans } T. \tag{2.13}$$

Par la relation (2.10) et (2.12), nous avons pour presque tout $t \in T$

$$\begin{aligned}
\big\|u_x(t) - f_\epsilon(x)(t)\big\| &= \Big\| \sum_{n\geq 1} u_x^n(t)\chi_n(x)(t) - \sum_{n\geq 1} u_n(t)\chi_n(x)(t) \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{n\geq 1} \big(u_x^n(t) - u_n(t)\big)\chi_n(x)(t) \Big\| \\
&< \sum_{n\geq 1} \big\|u_x^n(t) - u_n(t)\big\| \chi_n(x)(t) \\
&< \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{\epsilon}{4} + essinf\big\{\|u(t) - u_n(t)\|, u \in G(x)\big\}\Big)\chi_n(x)(t) \\
&< \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{\epsilon}{4} + \varphi_n(x)(t)\Big)\chi_n(x)(t) \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \varphi_n(x)(t)\chi_n(x)(t) \\
&= \varphi_\epsilon(x)(t)
\end{aligned}$$

On a trouvé, $u_x \in G_\epsilon(x)$, pour tout x fixé dans X. Par conséquent,

$$G_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

- ***Étap3.* Montrons que $\|\varphi_\epsilon(x)\|_1 < \epsilon$, pour tout $x \in X$.**

Posons $I(x) = \{n \geq 1, \; p_n(x) > 0\}$.

Notons que

$$1 \leq card\big(I(x)\big) \leq l(x).$$

Par (3) du Lemme 2.1.1. et la relation (2.11), on déduit que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\epsilon(x)\|_1 &= \int_T \varphi_\epsilon(x)(t)d\mu(t) \\
&= \int_T \Big(\frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \varphi_n(x)(t)\chi_n(x)(t)\Big)d\mu(t) \\
&= \frac{\epsilon}{4}\mu(T) + \sum_{n\geq 1} \int_T \varphi_n(x)(t)\chi_n(x)(t)d\mu(t) \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \int_T \varphi_n(x)(t)(\chi_{\Phi(\tau(x),\lambda_n(x))}(t) - \chi_{\Phi(\tau(x),\lambda_{n-1}(x))})(t)d\mu(t) \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\Phi(\tau(x),\lambda_n(x))} \varphi_n(x)(t)d\mu(t) - \int_{\Phi(\tau(x),\lambda_{n-1}(x))} \varphi_n(x)(t)d\mu(t)\Big).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{-\epsilon}{4l(x)} < \int_{\Phi(\tau(x),\lambda)} \varphi_n(x)(t)d\mu(t) - \lambda \int_T \varphi_n(x)(t)d\mu(t) < \frac{\epsilon}{4l(x)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\epsilon(x)\|_1 &< \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \Big(\lambda_n(x) \int_T \varphi_n(x)(t)d\mu(t) + \frac{\epsilon}{4l(x)} - \lambda_{n-1}(x) \int_T \varphi_n(x)(t)d\mu(t) + \frac{\epsilon}{4l(x)}\Big) \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\geq 1} \Big(p_n(x)\|\varphi_n(x)\|_1 + \frac{\epsilon}{2l(x)}\Big) \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\in I(x)} \Big(p_n(x)\|\varphi_n(x)\|_1 + \frac{\epsilon}{2l(x)}\Big) \\
&= \frac{\epsilon}{4} + \sum_{n\in I(x)} p_n(x)\|\varphi_n(x)\|_1 + \sum_{n\in I(x)} \frac{\epsilon}{2l(x)} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \sum_{n\in I(x)} p_n(x) + card(I(x)\frac{\epsilon}{2l(x)} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon\, card(I(x))}{2l(x)} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon\, l(x)}{2l(x)} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Par la Proposition 2.1.4., il est clair que G_ϵ est une multi-application s.c.i. à valeurs décomposables.

■

A cette étape, tous les résultats sont à notre disposition pour démontrer le résultat principal de ce chapitre.

2.2 Théorème de Bressan-Colombo

Théorème 2.2.1 (Bressan-Colombo). *[4] Soient X un espace métrique séparable, E un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows L^1(T, E)$ une multi-application s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Alors, F admet une sélection f continue définie de X dans $L^1(T, E)$ i.e., $f(x) \in F(x)$, pour tout $x \in X$.*

Démonstration du théorème.

Soit F une multi-application donnée. On va construire deux suites de fonctions continues $f_n : X \longrightarrow L^1(T, E)$ et $\varphi_n : X \longrightarrow L^1(T, \mathbb{R})$ et une suite de multi-application s.c.i. G_n à valeurs décomposables telles que pour tous $x \in X$ et $n \geq 1$,

(i) $G_n(x) = \big\{u \in F(x) \colon \big\|u(t) - f_n(x)(t)\big\| < \varphi_n(x)(t) \ p.p.\big\} \neq \emptyset$,

(ii) $\big\|f_n(x)(t) - f_{n-1}(x)(t)\big\| < \varphi_n(x)(t) + \varphi_{n-1}(x)(t)$ *p.p.* t dans T $(n \geq 2)$,

(iii) $\|\varphi_n(x)\|_1 < 2^{-n}$.

Pour cela, on procède par récurrence sur n.

Appliquant la Proposition 2.1.5. pour $G = F$ et $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, on trouve $f_1 : X \longrightarrow L^1(T, E)$ et $\varphi_1 : X \longrightarrow L^1(T, \mathbb{R})$ des applications continues, telles que

$$G_1(x) = \big\{u \in F(x) \colon \big\|u(t) - f_1(x)(t)\big\| < \varphi_1(x)(t) \ \ p.p.\ t \in T\big\}$$

est non vide et $\|\varphi_1(x)\|_1 < \dfrac{1}{2}\cdot$ De plus, la multi-application G_1 est s.c.i. à valeurs décmposables.

Soit maintenant,

$$G : X \rightrightarrows L^1(T, E)$$

$$x \longmapsto G(x) = clG_1(x)$$

est s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Donc pour $\epsilon = \dfrac{1}{2^2}$ et par la Proposition 2.1.5., ils existent $f_2 : X \longrightarrow L^1(T,E)$ et $\varphi_2 : X \longrightarrow L^1(T,\mathbb{R})$ des applications continues telles que

$$G_2(x) = \big\{u \in G_1(x) \colon \big\|u(t) - f_2(x)(t)\big\| < \varphi_2(x)(t) \;\; p.p. \; t \in T\big\}$$

est non vide et $\|\varphi_2(x)\|_1 < \dfrac{1}{2^2}$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\big\|f_2(x)(t) - f_1(x)(t)\big\| &= \big\|f_2(x)(t) - u(t) + u(t) - f_1(x)(t)\big\| \\
&\leq \big\|u(t) - f_2(x)(t)\big\| + \big\|u(t) - f_1(x)(t)\big\| \\
&< \varphi_2(x)(t) + \varphi_1(x)(t) \;\; p.p. \; t \in T.
\end{aligned}$$

Maintenant, par inducation sur n. Supposons que f_m, φ_m et G_m sont construites pour $m = 1, \ldots, n-1$.

De l'étape $(n-1)$, on a la multi-application définie par

$$G : X \rightrightarrows L^1(T,E)$$

$$x \longmapsto G(x) = clG_{n-1}(x)$$

est s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Pour $\epsilon = \frac{1}{2^n}$ et par la Propositon 2.1.5., ils existent deux applications continues $f_n : X \longrightarrow L^1(T,E)$ et $\varphi_n : L^1(T,\mathbb{R})$ telles que

$$G_n(x) = \big\{u \in G_{n-1}(x) \colon \big\|u(t) - f_n(x)(t)\big\| < \varphi_n(x)(t) \;\; p.p. \; t \in T\big\}$$

est non vide et $\|\varphi_n(x)\|_1 < \dfrac{1}{2^n}\cdot$ De plus, nous avons

$$G_n(x) \subset G_{n-1}(x) \subset \ldots \subset G_1(x) \subset F(x)$$

et

$$\begin{aligned}
\big\|f_n(x)(t) - f_{n-1}(x)(t)\big\| &\leq \big\|u(t) - f_n(x)(t)\big\| + \big\|u(t) - f_{n-1}(x)(t)\big\| \\
&< \varphi_n(x)(t) + \varphi_{n-1}(x)(t) \;\; p.p. \; t \in T.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|f_n(x)-f_{n-1}(x)\|_1 &= \int_T \|f_n(x)(t)-f_{n-1}(x)(t)\|d\mu(t)\\
&< \int_T |\varphi_n(x)(t)|d\mu(t)+\int_T |\varphi_{n-1}(x)(t)|d\mu(t)\\
&= \|\varphi_n(x)\|_1+\|\varphi_{n-1}(x)\|_1\\
&< \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Donc, $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $C(X, L^1(T,E))$ qui est complet, d'où elle converge uniformement vers une fonction continue f.

• Montrons que $d(f_n(x), F(x)) < 2^{-n}$.

$$\begin{aligned}
d(f_n(x), F(x)) &= \inf_{u\in F(x)} \|u-f_n(x)\|_1\\
&\leq \|u-f(x)\|_1, \quad \forall u\in F(x)\\
&= \int_T \|u(t)-f_n(x)(t)\|d\mu(t)\\
&< \int_T |\varphi_n(x)(t)|d\mu(t)\\
&= \|\varphi_n(x)\|_1\\
&< 2^{-n}.
\end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
d(f(x), F(x)) &\leq d(f_n(x), F(x))+\|f_n(x)-f(x)\|_1\\
&\leq \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= \frac{3}{2^n}
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on trouve $d(f(x), F(x)) = 0$. Comme $F(x)$ est un fermé, ceci nous donne que $f(x)\in F(x)\ \ \forall x\in X$. Alors f est une sélection de F.

Ce qui achève la démonstration du Théorème.

$\blacksquare$

Corollaire 2.2.1. *[5] Soit E un espace de Banach séparable. et Soit $G : X \rightrightarrows L^1(T, E)$ une multi-application s.c.i. à valeurs non vides fermées et décomposables. Soient $g : X \longrightarrow L^1(T, E)$ et $\varphi : X \longrightarrow L^1(T, \mathbb{R})$ des fonctions continues, telles que la multi-application*

$$H : X \rightrightarrows L^1(T, E)$$

définie par

$$H(x) = cl\{v \in G(x) \colon \|v(t) - g(x)(t)\| < \varphi(s)(t) \;\; p.p. \; t \in T\}.$$

est non vide. Alors H admet une sélection continue, i.e., il existe une application continue

$$h : X \longrightarrow L^1(T, E),$$

telle que

$$h(x) \in H(x), \;\; \forall x \in X.$$

Démonstration.

Par la Proposition 2.1.4., la multi-application H est s.c.i. à valeurs décomposables. De plus, H est à valeurs fermées.

Appliquant le Théorème de Bressan-Colombo, on trouve $h : X \longrightarrow L^1(T, E)$ une sélection continue de H i.e., $\forall x \in X, h(x) \in H(x)$.

■

CHAPITRE 3

Les inclusions différentielles

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach séparable.

Dans ce chapitre, on va étudier les inclusions différentielles du premier ordre [5] et du second ordre [2] suivantes

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{cases} x' \in F(t, x, s), \quad p.p.\ t \in I, \\ x(0) = \xi(s), \end{cases}$$

où $I = [0, 1]$, $F : I \times E \times X \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ une multi-application mesurable et s.c.i. par rapport à la troisième variable et ξ une application continue définie de X dans E.

$$(\mathcal{P}'_s) \qquad \begin{cases} (p(t)x'(t))' \in F(t, x(t)), \quad p.p.\ t \in I, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1, \end{cases}$$

où $I = [0, T],\ T > 0,\ F : I \times E \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ une multi-application mesurable, s.c.i. par rapport à la deuxième variable et $p : I \longrightarrow]0, +\infty[$ une application continue.

Notre outil crucial pour la démonstration est le Théorème 2.2.1. de Bressan-Colombo.

Avant d'entamer ces problèmes, on va se rappeler de quelques résultas préliminaires qui nous seront utiles.

Pour plus de détaille concernant ces résultats, nous renvoyons le lecteur à [1], [2], [5], [10] et [13].

3.1 Préliminaires.

Proposition 3.1.1. *[13] Soit $u : I \longrightarrow E$ une fonction mesurable et soit $G : I \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ une muli-application mesurable à valeurs fermées. Alors pour toute fonction mesurable $r : I \longrightarrow]0, +\infty[$, il existe une sélection mesurable $g : I \longrightarrow E$ de la multi-application G, i.e., pour tout $t \in I$*

$$g(t) \in G(t),$$

telle que

$$\big\|u(t) - g(t)\big\| < d\big(u(t), G(t)\big) + r(t) \ \text{ p.p. } t \in I.$$

Proposition 3.1.2. *[5] Soit $F : I \times X \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ une multi-application $\mathcal{L}(I) \bigotimes \mathcal{B}(X)$ à valeurs fermées telle que $F(t, .)$ est s.c.i. pour tout $t \in I$. Alors la multi-application*

$$G : X \rightrightarrows D(L^1(I, E))$$

définie par

$$G(x) = \big\{v \in L^1(I, E)\colon v(t) \in F(t, x) \ \text{ p.p. } t \in I\big\} \tag{3.1}$$

est s.c.i. si et seulement s'il existe une application continue

$$q : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$$

telle que

$$d\big(0, F(t, x)\big) \leq q(x)(t) \ \text{ p.p. } t \in I \text{ et } \forall x \in X. \tag{3.2}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) Supposons que la multi-application G définie par (3.1) est s.c.i. à valeurs non vides fermées et montrons qu'il existe une application continue $q : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in X$,

$$d\big(0, F(t, x)\big) \leq q(x)(t) \ \text{ p.p. } t \in I.$$

D'après la Proposition 3.1.1., la multi-application G admet une sélection $g : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ i.e., pour tout $x \in X$, $g(x) \in G(x)$. Alors

$$g(x)(t) \in F(t,x) \;\; p.p. \; t \in T.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\big(0, F(t,x)\big) &\leq d\big(g(x)(t), F(t,x)\big) + \big\|g(x)(t)\big\| \\ &= \big\|g(x)(t)\big\|. \end{aligned}$$

Pour $\big\|g(x)(t)\big\| = q(x)(t)$, on trouve que la relation (3.2) est satisfaite.
$\Leftarrow$) Supposons qu' il existe $q : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in X$, la relation (3.2) est satisfaite et montrons que la multi-application G définie dans (3.1) est s.c.i.
i.e., $G_+^{-1}(C)$ est un fermé de X pour tout fermé C de $L^1(I, E)$. Autrement dit, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers x_0 dans X telle que $G(x_n) \subseteq C$, alors $G(x_0) \subseteq C$.
Soit $v_0 \in G(x_0)$, et considérons une suite de sélections mesurables $v_n(t)$ de $t \longmapsto F(t, x_n)$ telle que

$$\|v_n(t) - v_0(t)\| \;<\; d\big(v_0(t), F(t,x_n)\big) + \frac{1}{n} \;\; p.p. \; t \in I. \tag{3.3}$$

Comme la multi-application $x \longmapsto F(t,x)$ est s.c.i. Alors pour tout $s \in E$, l'application $x \longmapsto d\big(s, F(t,x)\big)$ est s.c.s. Donc pour presque tout $t \in I$, et puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to +\infty} \|v_n(t) - v_0(t)\| &\leq \limsup_{n \to +\infty} d\big(v_0(t), F(t,x_n)\big) + \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \\ &\leq d\big(v_0(t), F(t,x_0)\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} v_n(t) = v_0(t) \;\; p.p. \; t \in I.$$

Aussi on a, pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} d\big(v_0(t), F(t,x_n)\big) &\leq d\big(0, F(t,x_n\big) + \|v_0(t)\| \\ &\leq q(x_n)(t) + \|v_0(t)\|. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|v_n(t) - v_0(t)\| < q(x_n)(t) + \|v_0(t)\| + \frac{1}{n} \quad p.p.\ t \in I.$$

On pose, $a_n(t) = \|v_0(t)\| + q(x_n)(t) + \frac{1}{n}\cdot$ Nous avons, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(I,\mathbb{R})$, alors elle est bornée dans $L^1(I,\mathbb{R})$.

Donc, la suite de fonctions $t \longmapsto \|v_n(t) - v_0(t)\|$ est bornée dans $L^1(I,\mathbb{R})$, et

$$\|v_n(t)\| = \|v_n(t) - v_0(t) + v_0(t)\| \leq \|v_n(t) - v_0(t)\| + \|v_0(t)\|.$$

D'où, $\big(v_n(\cdot)\big)_{n\geq 1}$ est bornée. On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers v_0 dans $L^1(I,E)$. De plus, C est un fermé de $L^1(I,E)$ et $v_n \in G(x_n) \subseteq C$, implique que $G(x_0) \subseteq C$ i.e., la multi-application G est s.c.i.

■

3.2 Inclusion différentielle du premiere ordre.

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{cases} x' \in F(t,x,s), \quad p.p.\ t \in I, \\ x(0) = \xi(s). \end{cases}$$

où $\xi : X \longrightarrow E$ une fonction continue, $I = [0,1]$ et $F : I \times E \times X \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ une multi-application vérifiant les hypothèses suivantes

- ***(H$_1$)*** : F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E \times X)$ mesurable.
- ***(H$_2$)*** : Il existe une application continue $s \longmapsto k(s)(\cdot)$ définie de X dans $L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $k(s)(t) > 0$ et pour tous $s \in X$ et $x, y \in E$,

$$H\big(F(t,x,s), F(t,y,s)\big) \leq k(s)(t)\|x - y\| \quad p.p.\ t \in I.$$

- ***(H$_3$)*** : Pour tout $(t,x) \in I \times E$, la multi-application $s \longmapsto F(t,x,s)$ est s.c.i.

- *(H_4)* : Pour toute application continue $s \longmapsto y(s)(\cdot)$ définie de X dans $AC(I,E)$, il existe une application continue $q_y : X \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $s \in X$

$$q_y(s)(t) \geq d\big(y'(s)(t), F(t, y(s)(t), s)\big) \;\; p.p.\ t \in I. \tag{3.4}$$

Notons que par les hypothèses *(H_2)*, *(H_3)* et la Proposition 3.1.2. l'hypothèse *(H_4)* peut être remplacer par les conditions équivalentes suivantes

- *(H_{4_0})* : Il existe une application continue $q_0 : X \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $s \in X$,

$$q_0(s) \geq d\big(0, F(t, 0, s)\big) \;\; p.p. \text{ dans } I. \tag{3.5}$$

- *(H'_{4_0})* : La multi-application $G_0 : X \rightrightarrows D(L^1(I,E))$ définie par

$$G_0(s) = \{v \in L^1(I,E) \colon v(t) \in F(t, 0, s) \;\; p.p.\ t \in I\}. \tag{3.6}$$

  est s.c.i. à valeurs fermées.

Démonstration.

Montrons que *(H_4)* $\Longleftrightarrow$ *(H_{4_0})* $\Longleftrightarrow$ *(H'_{4_0})*.

(H_4) $\Rightarrow$*(H_{4_0})*.

Supposons qu'il existe $q_y : X \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R})$ continue telle que pour tout $s \in X$,

$$d\big(y'(s)(t), F(t, y(s)(t), s)\big) \leq q_y(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I$$

et montrons qu'il existe $q_0 : X \longrightarrow L^1(I,\mathbb{R})$ continue telle que pour tout $s \in X$,

$$d\big(0, F(t, 0, s)\big) \leq q_0(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I.$$

Par l'hypothèse *(H_2)*, nous avons

$$\begin{aligned}
d\big(0, F(t,0,s)\big) &\leq d\big(y'(s)(t), F(t,0,s)\big) + \|y'(s)(t)\| \\
&\leq d\big(y'(s)(t), F(t, y(s)(t), s)\big) + H\big(F(t,0,s), F(t, y(s)(t), s)\big) + \|y'(s)(t)\| \\
&\leq q_y(s)(t) + \|y'(s)(t)\| + k(s)(t)\|y(s)(t)\| \\
&= q_0(s)(t).
\end{aligned}$$

(H_{4_0}) $\Rightarrow$ ***(H'_{4_0})***.

Supposons qu'il existe une application continue $q_0 : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$d\big(0, F(t, 0, s)\big) \leq q_0(s)(t) \;\; p.p. \; t \in I$$

par la Proposition 3.1.2., on déduit que la multi-application $G_0 : X \rightrightarrows D(L^1(I, E))$ définie par

$$G_0(s) = \big\{v \in L^1(I, E) \colon v(t) \in F(t, 0, s) \;\; p.p \; t \text{ dans } \; I\big\}$$

est s.c.i. Donc ***(H'_{4_0})*** est vérifiée.

(H'_{4_0}) $\Rightarrow$ ***(H_4)***. On utilisant la Proposition 3.1.2., il existe $q_0 : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ une application continue telle que

$$d\big(0, F(t, 0, s)\big) \leq q_0(s)(t) \;\; p.p. \; t \in I.$$

Par l'hypothèse ***(H_2)***, on a

$$\begin{aligned} d\big(y'(s)(t), F(t, y(s)(t), s)\big) &\leq d\big(0, F(t, y(s)(t), s)\big) + \big\|y'(s)(t)\big\| \\ &\leq d\big(0, F(t, 0, s)\big) + H\big(F(t, 0, s), F(t, y(s)(t), s)\big) + \big\|y'(s)(t)\big\| \\ &\leq q_0(s)(t) + k(s)(t)\big\|y(s)(t)\big\| + \big\|y'(s)(t)\big\| \end{aligned}$$

Donc, il existe $q_y(s)(t) = q_0(s)(t) + k(s)(t)\big\|y(s)(t)\big\| + \big\|y'(s)(t)\big\| \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$d\big(y'(s)(t), F(t, y(s)(t), s)\big) \leq q_y(s)(t) \;\; p.p. \; t \in I.$$

D'où ***(H_4)***.

■

De plus, par la Proposition 3.1.2., l'hypothèse ***(H_4)*** est équivalente à la suivante

- ***(H'_4)*** : Pour toute fonction continue

$$\begin{aligned} y : X &\longrightarrow AC(I, E) \\ s &\longmapsto y(s)(\cdot) \end{aligned}$$

la multi-application $G_y : X \rightrightarrows D(L^1(I,E))$, définie par

$$G_y(s) = \big\{v \in L^1(I,E)\colon v(t) \in F(t, y(s)(t), s) \;\; p.p.\ t \in I\big\}. \tag{3.7}$$

est s.c.i. à valeurs fermées.

Théorème 3.2.1. *[2] Supposons que la multi-application F satisfait les hypothèses* $(H_1), \ldots, (H_4)$. *Alors pour toutes applications $s \longmapsto y(s)(\cdot)$ de X dans $AC(I,E)$ et $s \longmapsto q(s) = q_y(s)$ de X dans $L^1(I,\mathbb{R})$ telles que q vérifie (3.4) et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction x telle que*

(a) Pour tout $s \in X$ la fonction $t \longmapsto x(s)(t)$ est une solution de $(\mathcal{P}_s)$.

(b) L'application $s \longmapsto x(s)(\cdot)$ est continue de X dans $AC(I,E)$.

(c) Pour tout $s \in X$,

$$\begin{aligned}\big\|y'(s)(t) - x'(s)(t)\big\| \;\; &\leq \;\; \epsilon + \epsilon\, k(s)(t)e^{m(s)(t)} + k(s)(t)\big\|y(s)(0) - \xi(s)\big\|e^{m(s)(t)} \\ &\quad + k(s)(t)\int_0^t q(s)(\tau)e^{m(s)(t)-m(s)(\tau)}d\tau + q(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I.\end{aligned}$$

(d) Pour $t \in I$ et $s \in X$,

$$\begin{aligned}\Big\|\big[y(s)(t) - x(s)(t)\big] - \big[y(s)(0) - \xi(s)\big]\Big\| \;\; &\leq \;\; \epsilon\, e^{m(s)(t)} + \big\|y(s)(0) - \xi(s)\big\|\big(e^{m(s)(t)} - 1\big) \\ &\quad + \int_0^t q(s)(\tau)e^{m(s)(t)-m(s)(\tau)}d\tau,\end{aligned}$$

où

$$m(s)(t) = \int_0^t k(s)(\tau)d\tau. \tag{3.8}$$

Démonstration.

On suppose que pour tous $t \in I, s \in X$

$$y(s)(t) = 0 \;\text{ et }\; \xi(s) = 0.$$

Fixons $\epsilon > 0$, soit $\epsilon_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)\epsilon$ et posons

$$q_n(s)(t) = \int_0^t q(s)(u)\frac{(m(s)(t) - m(s)(u))^{n-1}}{(n-1)!}du + \frac{(m(s)(t))^{n-1}}{(n-1)!}\,\epsilon_n. \tag{3.9}$$

On doit constuire une suite de Cauchy $(x_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}} \subset AC(I,E)$ des suites approximantes successives $x_n(s)(t)$ telle que pour tout $n \geq 0,\ x_n(s)(0) = 0$ et

(i) $s \longmapsto x_n(s)(\cdot)$ sont continues,

(ii) $x'_{n+1}(s)(t) \in F(t, x_n(s)(t), s)$ *p.p.* $t \in I$,

(iii) $\|x'_{n+1}(s)(t) - x'_n(s)(t)\| \leq k(s)(t)q_n(s)(t)$ *p.p.* $t \in I$

où

$$k(s)(t)q_0(s)(t) = q(s)(t) + \epsilon_0.$$

On a pour tout $s \in X$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t k(s)(u)q_n(s)(u)du &= \int_0^t k(s)(u)\Big[\int_0^u q(s)(\tau)\frac{(m(s)(u)-m(s)(\tau))^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau + \frac{(m(s)(u))^{n-1}}{(n-1)!}\,\epsilon_n\Big]du \\
&= \int_0^t k(s)(u)\Big[\int_0^u q(s)(\tau)\frac{(m(s)(u)-m(s)(\tau))^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\Big]\,du \\
&\quad + \int_0^t k(s)(u)\frac{\big(m(s)(u)\big)^{n-1}}{(n-1)!}\,\epsilon_n\,du \\
&= \int_0^t k(s)(u)\Big[\int_0^u q(s)(\tau)\frac{(m(s)(u)-m(s)(\tau))^{n-1}}{(n-1)!}\,d\tau\Big]\,du \\
&\quad + \frac{\epsilon_n}{(n-1)!}\int_0^t k(s)(u)\big(m(s)(u)\big)^{n-1}\,du \\
&= \int_0^t \Big[\int_\tau^t k(s)(u)q(s)(\tau)\frac{(m(s)(u)-m(s)(\tau))^{n-1}}{(n-1)!}\,du\Big]\,d\tau \\
&\quad + \frac{\epsilon_n}{(n-1)!}\int_0^t k(s)(u)\big(m(s)(u)\big)^{n-1}\,du \\
&= \int_0^t\int_\tau^t q(s)(\tau)\frac{d}{du}\frac{(m(s)(u)-m(s)(\tau))^n}{n!}\,du\,d\tau + \frac{\epsilon_n}{n!}\int_0^t \frac{d}{du}\big(m(s)(u)\big)^n\,du.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^t k(s)(u)q_n(s)(u)du &= \int_0^t q(s)(\tau)\frac{(m(s)(t)-m(s)(\tau))^n}{n!}d\tau + \frac{\epsilon_n}{n!}\big(m(s)(t)\big)^n \\ &= \int_0^t q(s)(\tau)\frac{(m(s)(t)-m(s)(\tau))^n}{n!}d\tau + \frac{\epsilon_{n+1}}{n!}\big(m(s)(t)\big)^n + \frac{(\epsilon_n-\epsilon_{n+1})}{n!}\big(m(s)(t)\big)^n \\ &= q_{n+1}(s)(t) - \frac{\big(m(s)(t)\big)^n}{(n+2)(n+3)n!} < q_{n+1}(s)(t).\end{aligned}$$

Par (iii), nous avons pour presque tout $t \in I$,

$$\big\|x'_{n+1}(s)(t) - x'_n(s)(t)\big\| \leq k(s)(t)q_n(s)(t).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\big\|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t)\big\| &= \Big\|x_{n+1}(s)(0) + \int_0^t x'_{n+1}(s)(\tau)d\tau - x_n(s)(0) - \int_0^t x'_n(s)(\tau)d\tau\Big\| \\ &= \Big\|\int_0^t \big(x'_{n+1}(s)(\tau) - x'_n(s)(\tau)\big)d\tau\Big\| \\ &\leq \int_0^t \big\|x'_{n+1}(s)(\tau) - x'_n(s)(\tau)\big\|d\tau \\ &\leq \int_0^t k(s)(\tau)q_n(s)(\tau)d\tau \\ &< q_{n+1}(s)(t).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\big\|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t)\big\| < q_{n+1}(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I. \tag{3.10}$$

On pose que $x_0(s)(t) = 0$ et on définit la muti-application G_0 par

$$G_0 : X \rightrightarrows L^1(I,E)$$

$$G_0(s) = \big\{v \in L^1(I,E)\colon v(t) \in F\big(t, x_0(s)(t), s\big) \;\; p.p. \text{ dans } I\big\}.$$

Considérons la multi-application H_0 définie par

$$H_0 : X \rightrightarrows L^1(I, E)$$

$$H_0(s) = cl\big\{v \in G_0(s)\colon \|v(t)\| < q(s)(t) + \epsilon_0\big\}.$$

Nous avons la multi-application G_0 vérifie l'hypothèse (H'_{4_0}) donc, G_0 est s.c.i. à valeurs fermées de X dans $D(L^1(I, E))$. Par la Proposition 3.1.2., il existe une application continue $q : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$d(0, F(t, x_0(s)(t), s)) \leq q(s)(t) \ \ p.p.\ t \in I \text{ et } \forall s \in X.$$

En vertu de la Proposition 3.1.1., il existe $v_0 : I \longrightarrow E$ une sélection mesurable de F telle que

$$\begin{aligned} \|v_0(t)\| &< d\big(0, F(t, x_0(s)(t), s)\big) + \frac{\epsilon}{2} \ \ p.p.\ t \in I,\ \forall \epsilon > 0 \\ &\leq q(s)(t) + \epsilon_0 \ \ p.p.\ t \in I. \end{aligned}$$

On a $\forall t \in I,\ v_0(t) \in F(t, x_0(s)(t), s)$ i.e., $v_0 \in G_0(s)$ et de plus

$$\|v_0(t)\| \leq q(s)(t) + \epsilon_0 \ \ p.p.\ t \in I.$$

Donc $v_0 \in H_0(s)$. D'où $H_0(s) \neq \emptyset$.

Par le Corollaire 2.2.1., il existe une application continue $h_0 : X \longrightarrow L^1(I, E)$ telle que

$$h_0(s) \in H_0(s), \ \ \forall s \in X.$$

Autrement dit,

$$h_0(s)(t) \in F(t, x_0(s)(t), s) \ \ p.p. \ \in I,$$

et

$$\big\|h_0(s)(t)\big\| \leq q(s)(t) + \epsilon_0.$$

On définit

$$x_1(s)(t) = \int_0^t h_0(s)(\tau) d\tau.$$

Il est clair que pour presque tout t dans I,

$$\begin{aligned}\big\|x_1(s)(t)-x_0(s)(t)\big\| &= \big\|x_1(s)(t)\big\| \\ &= \Big\|\int_0^t h_0(s)(\tau)d\tau\Big\| \\ &\leq \int_0^t \big\|h_0(s)(\tau)\big\|d\tau \\ &\leq \int_0^t q(s)(\tau)d\tau + t\epsilon_0 \\ &\leq \int_0^t q(s)(\tau)d\tau + \epsilon_0 \\ &< q_1(s)(t).\end{aligned}$$

Où

$$q_1(s)(t) = \int_0^t q(s)(\tau)d\tau + \epsilon_1, \ \ \forall s \in X, \ \forall t \in I.$$

Supposons que les fonctions $x_0, \ldots, x_n$ sont définies et vérifient les trois conditions précédantes (i), (ii) et (iii). Observons que,

$$\begin{aligned}d\big(x_n'(s)(t), F(t, x_{n-1}(s)(t), s)\big) &\leq d\big(x_n'(s)(t), F\big(t, x_{n-1}(s)(t), s\big)\big) \\ &\quad + H\Big(\big(F(t, x_{n-1}(s)(t), s), F(t, x_n(s)(t), s)\big)\Big) \\ &= H\big(F(t, x_{n-1}(s)(t), s), F(t, x_n(s)(t), s)\big) \\ &\leq k(s)(t)\|x_n(s)(t) - x_{n-1}(s)(t)\|.\end{aligned}$$

De la relation (3.10), on trouve

$$d\big(x_n'(s)(t), F\big(t, x_n(s)(t), s\big)\big) \leq k(s)(t)q_n(s)(t) \ \ p.p.\ t \in I. \tag{3.11}$$

Soit maintenant, G_n une multi-application définie de X dans $L^1(I, E)$ par

$$G_n(s) = \big\{v \in L^1(I, E) \colon v(t) \in F\big(t, x_n(s)(t), s\big) \ \ p.p.\ t \in I\big\}.$$

Considérons la multi-application H_n définie par

$$H_n : S \rightrightarrows L^1(I,E)$$

$$H_n(s) = cl\big\{v \in G_n(s)\colon \|v(t) - x_n'(s)(t)\| < k(s)(t)q_n(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I\big\}.$$

• Montrons que $H_n(s)$ est non vide pour tout $s \in X$.

Notons que

$$t \longmapsto r_{n-1}(s)(t) = \frac{\big(m(s)(t)\big)^{n-1}k(s)(t)}{(n+1)(n+2)(n-1)!}$$

est mesurable et strictement positive. Alors, par (ii) et la relation (3.10)

$$\begin{aligned}
d\big(x_n'(s)(t), F(t,x_n(s)(t),s)\big) &\leq d(x_n'(s)(t), F(t,x_{n-1}(s)(t),s)) + H(F(t,x_n(s)(t),s), F(t,x_{n-1}(s)(t),s)) \\
&\leq k(s)(t)\|x_n(s)(t) - x_{n-1}(s)(t)\| \\
&\leq k(s)(t)q_n(s)(t) - r_{n-1}(s)(t).
\end{aligned}$$

Via la Proposition 3.1.1., il existe $v \in L^1(I,E)$ tel que

$$v(t) \in F(t,x_n(s)(t),s) \;\; p.p.\ t \text{ dans } I$$

et

$$\begin{aligned}
\|v(t) - x_n'(s)(t)\| &< d\big(x_n'(s)(t), F((t,x_n(s)(t),s)\big) + r_n(s)(t) \\
&\leq k(s)(t)q_n(s)(t) - r_{n-1}(s)(t) + r_{n-1}(s)(t) \\
&\leq k(s)(t)q_n(s)(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $v \in H_n(s)$. D'où la non vacuité des valeurs de H_n.

Nous avons que la multi-application G_n vérifie l'hypothèse ***(H_4')*** donc, G_n est s.c.i. à valeurs fermées de X dans $D(L^1(I,E))$. Par le Corollaire 2.2.1., H_n admet une sélection $h_n : X \longrightarrow L^1(I,E)$ continue i.e.,

$$h_n(s) \in H_n(s), \quad \forall s \in X.$$

En d'autre termes,

$$h_n(s)(t) \in F\big(t, x_n(s)(t), s\big) \;\; p.p. \; t \text{ dans } I$$

et

$$\big\|h_n(s)(t) - x'_n(s)(t)\big\| < k(s)(t)q_n(s)(t) \;\; p.p. \; t \text{ dans } I.$$

On définie

$$x_{n+1}(s)(t) = \int_0^t h_n(s)(\tau)d\tau.$$

D'après la définition de $x_{n+1}(s)(.)$, on voit bien qu'elle vérifie (i), (ii) et pour presque tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|x'_{n+1}(s)(t) - x'_n(s)(t)\big\| &= \big\|x'_{n+1}(s)(t) - h_n(s)(t) - x'_n(s)(t) + h_n(s)(t)\big\| \\
&\leq \big\|x'_{n+1}(s)(t) - h_n(s)(t)\big\| + \big\|h_n(s)(t) - x'_n(s)(t)\big\| \\
&\leq \big\|h_n(s)(t) - h_n(s)(t)\big\| + k(s)(t)q_n(s)(t) \\
&= k(s)(t)q_n(s)(t).
\end{aligned}$$

Par (iii) et la relation (3.10), on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(s)(\cdot) - x_n(s)(\cdot)\|_{AC} &= \|x_{n+1}(s)(0) - x_n(s)(0)\| + \|x'_{n+1}(s)(\cdot) - x'_n(s)(\cdot)\|_1 \\
&= \|x'_{n+1}(s)(\cdot) - x'_n(s)(\cdot)\|_1 \\
&= \int_0^1 \|x'_{n+1}(s)(t) - x'_n(s)(t)\|dt \\
&\leq \int_0^1 k(s)(t)q_n(s)(t)dt \\
&< q_{n+1}(s)(1).
\end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\big\|x_{n+1}(s)(\cdot) - x_n(s)(\cdot)\big\|_{AC} < q_{n+1}(s)(1). \tag{3.12}$$

D'autre part, on a

$$q_{n+1}(s)(1) = \int_0^1 q(s)(u)\frac{(m(s)(1) - m(s)(u))^n}{n!}du + \frac{(m(s)(1))^n}{n!}\,\epsilon_{n+1}. \tag{3.13}$$

Puisque

$$\begin{aligned} m(s)(1) - m(s)(u) &= \int_0^1 k(s)(\tau)d\tau - \int_0^u k(s)(\tau)d\tau \\ &= \int_0^1 k(s)(\tau)d\tau + \int_u^0 k(s)(\tau)d\tau \\ &= \int_u^1 k(s)(\tau)d\tau \\ &\leq \int_0^1 k(s)(\tau)d\tau \\ &= \|k(s)(\cdot)\|_1 \end{aligned}$$

et

$$m(s)(1) = \int_0^1 k(s)(\tau)d\tau = \big\|k(s)(\cdot)\big\|_1.$$

On aura

$$\begin{aligned} q_{n+1}(s)(1) &\leq \int_0^1 q(s)(u)\frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}du + \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\epsilon_{n+1} \\ &= \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\Big[\int_0^1 q(s)(u)du + \epsilon_{n+1}\Big] \\ &\leq \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\Big[\int_0^1 \big|q(s)(u)\big|du + \epsilon_{n+1}\Big] \\ &\leq \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\Big[\big\|q(s)\big\|_1 + \epsilon_{n+1}\Big] \\ &\leq \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\Big[\big\|q(s)\big\|_1 + \epsilon\Big]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|x_{n+1}(s)(\cdot) - x_n(s)(\cdot)\|_{AC} \leq \frac{\big\|k(s)(\cdot)\big\|_1^n}{n!}\Big(\|q(s)\|_1 + \epsilon\Big). \tag{3.14}$$

Les fonctions $s \longmapsto \|q(s)\|_1$ et $s \longmapsto \|k(s)(\cdot)\|_1$ sont continues. Alors la relation (3.14) implique que pour tout $s \in X$, la suite $(x_n(s')(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy uniforme pour tout s' dans un voisinage de s, donc $(x_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x(s)(\cdot)$, d'où $x(s)(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(s)(t)$ est continue.

Montrons maintenant que $t \longmapsto x(s)(t)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_s)$.

$(x'_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(I,E)$. En effet, par (iii), nous avons

$$\begin{aligned}
\|x'_{n+1}(s)(\cdot) - x'_n(s)(\cdot)\|_1 &= \int_0^1 \|x'_{n+1}(s)(t) - x'(s)(t)\| dt \\
&\leq \int_0^1 k(s)(t) q_n(s)(t) dt \\
&< q_{n+1}(s)(1) \\
&< \frac{\|k(s)(\cdot)\|_1^n}{n!} \big(\|q(s)\|_1 + \epsilon\big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(x'(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $w(s)(\cdot) \in L^1(I,E)$.

On montre que $w(s)(\cdot) = x'(s)(\cdot)$.

Nous avons,

$$x_n(s)(t) = x_n(s)(0) + \int_0^t x'_n(s)(\tau) d\tau.$$

Par (iii), on a

$$\begin{aligned}
\|x'_{n+1}(s)(t)\| &\leq \|x'_{n+1}(s)(t) - x'_n(s)(t)\| + \|x'_n(s)(t)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|x'_{i+1}(s)(t) - x'_i(s)(t)\| + \|x'_1(s)(t)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|x'_{i+1}(s)(t) - x'_i(s)(t)\| + q(s)(t) + \epsilon_0 \\
&\leq q(s)(t) + \sum_{i=1}^n k(s)(t) q_i(s)(t) + \frac{1}{2}\,\epsilon \\
&\leq q(s)(t) + k(s)(t) \sum_{i=1}^n \Big[\int_0^t q(s)(u) \frac{(m(s)(t) - m(s)(u))^{i-1}}{(i-1)!} du + \frac{(m(s)(t))^{i-1}}{(i-1)!}\,\epsilon_i \Big] + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On déduit,

$$\begin{aligned}\left\|x'_{n+1}(s)(t)\right\| &\leq q(s)(t)+k(s)(t)\int_0^t q(s)(u)\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{(m(s)(t)-m(s)(u))^{i-1}}{(i-1)!}\Big]du\\ &\quad +k(s)(t)\sum_{i=1}^{n}\frac{(m(s)(t))^{i-1}}{(i-1)!}\,\epsilon+\epsilon\cdot \end{aligned}\tag{3.15}$$

Par le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on trouve

$$x(s)(t)=x(s)(0)+\int_0^t w(s)(\tau)d\tau.$$

Puisque $x(s)(\cdot)$ est absolument continue, on aura

$$x'(s)(\cdot)=w(s)(\cdot)\ \ p.p.\ t\in I.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\big(x'(s)(t),F(t,x(s)(t),s)\big) &\leq d\big(x'_{n+1}(s)(t),F(t,x_n(s)(t),s)\big)+\|x'_{n+1}(s)(t)-x'(s)(t)\|\\ &\quad +H\big(F(t,x_n(s)(t),s),F(t,x(s)(t),s)\big)\\ &\leq \|x'_{n+1}(s)(t)-x'(s)(t)\|+k(s)(t)\|x_n(s)(t)-x(s)(t)\|.\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve que

$$x'(s)(t)\in F\big(t,x(s)(t),s\big)\ \ p.p.\ t\in I.$$

Enfin, vérifions les assertions (c) et (d).

On a, $\forall\ t\in I, s\in X,\ y(s)(t)=0,\ y'(s)(t)=0,\ y(s)(0)=0,\ \xi(s)=0.$

Alors, pour montrer (c), il suffit de vérifier que

$$\left\|x'(s)(t)\right\|<\epsilon+\epsilon k(s)(t)e^{m(s)(t)}+k(s)(t)\int_0^t q(s)(\tau)e^{m(s)(t)-m(s)(\tau)}d\tau+q(s)(t)\ \ p.p.\text{ dans } I.$$

Pour cela, faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (3.15).

Pour (d), on montre la relation suivante pour tous $t\in I$ et $s\in X$,

$$\|x(s)(t)\|\leq \epsilon e^{m(s)(t)}+\int_0^t q(s)(\tau)e^{m(s)(t)-m(s)(\tau)}d\tau.$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}(s)(t)\| &= \Big\|\sum_{i=0}^{n} x_{i+1}(s)(t) - x_i(s)(t)\Big\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \|x_{i+1}(s)(t) - x_i(s)(t)\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} q_{i+1}(s)(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \Big[\int_0^t q(s)(\tau)\frac{(m(s)(t)-m(s)(\tau))^i}{i!}\, d\tau + \frac{(m(s)(t))^i}{i!}\,\epsilon_i\Big] \\
&\leq \int_0^t q(s)(\tau)\sum_{i=0}^{n}\frac{(m(\tau)(t)-m(s)(\tau))^i}{i!}\, d\tau + \sum_{i=0}^{n}\frac{(m(s)(t))^i}{i!}\,\epsilon
\end{aligned}
$$

Par passage à la limite, on déduit que

$$
\|x(s)(t)\| \leq \epsilon e^{m(s)(t)} + \int_0^t q(s)(\tau)e^{m(s)(t)-m(s)(\tau)}d\tau, \quad \forall t\in I, s\in X.
$$

■

Remarque 3.2.1.
Soit $\tilde{F}(t,z,s) = F\big(t, z+y(s)(t)-y(s)(0)+\xi(s), y'(s)(t)\big)$.
Si z *est une solution du problème*

$$
z' \in \widetilde{F}(t,z,s), \quad z(0)=0, \tag{3.16}
$$

vérifiant les assertions $(a),\ldots,(d)$ *avec*

$$
d\big(0,\widetilde{F}(t,0,s)\big) \leq q(s)(t) + \|y'(s)(t)\| + k(s)(t)\|\xi(s)-y(s)(0)\| = \widetilde{q}(s)(t) \ \ \text{p.p. dans } I.
$$

Alors, $x(s)(t) = z(s)(t) + y(s)(t)y(s)(0) + \xi(s)$ *est solution du problème* $(\mathcal{P}_s)$.

3.3 Inclusion différentielle du deuxième ordre.

Considérons maintenant le problème du second ordre. Pour tout $t \in I = [0, T],\ T > 0$

$$(\mathcal{P}'_s) \qquad \begin{cases} (p(t)x'(t))' \in F(t, x(t)), \ \ p.p.\ t \in I, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1, \end{cases}$$

où $F : I \times E \rightrightarrows \mathcal{P}(E),\ x_0,\ x_1 \in E,$ et $p : I \longrightarrow]0, +\infty[$ une application continue.

Une application continue $x \in C(I, E)$ est dite solution du problème $(\mathcal{P}'_s)$, s'il existe une fonction intégrable $f \in L^1(I, E)$ telle que

$$f(t) \in F(t, x(t)) \ \ p.p.\ t \in I,$$

et

$$x(t) = x_0 + p(0)x_1 \int_0^t \frac{1}{p(s)}\ ds + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_0^s f(u)du\ ds. \tag{3.17}$$

On appelle $\big(x(\cdot), f(\cdot)\big)$ un couple de trajectoire-sélection du problème $(\mathcal{P}'_s)$.
Si on pose $J(t) = \int_0^t \frac{1}{p(s)}\ ds$, pour tout $t \in I$, la relation (3.17) sera réecrite comme suit

$$x(t) = x_0 + p(0)x_1 J(t) + \int_0^t J(t-u) f(u)du \ \ \forall t \in I.$$

En effet

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + p(0)x_1 \int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \int_0^s f(u)du\ ds \\ &= x_0 + p(0)x_1 \int_0^1 \frac{1}{p(s)} ds + \int_0^t \int_0^s \frac{1}{p(s)} f(u)du\ ds \\ &= x_0 + p(0)x_1 J(t) + \int_0^t \int_u^t \frac{1}{p(s)} f(u)ds\ du \\ &= x_0 + p(0)x_1 J(t) + \int_0^t f(u) \int_u^t \frac{1}{p(s)} ds\ du \\ &= x_0 + p(0)x_1 J(t) + \int_0^t f(u) J(t-u)du. \end{aligned}$$

Considérons les hypothèses suivantes

- ***Hypothèse 1.***

 (i) $F : I \times E \rightrightarrows \mathcal{P}(E)$ est une multi-application à valeurs non vides fermées, $\mathcal{L}(I) \times \mathcal{B}(E)$ mesurable et telle que $t \longmapsto F(t,.)$ est s.c.i.

 (ii) Il existe $L(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $t \in I,\ F(t,.)$ est $L(t)-$*Lipschitzienne*, i.e.,

$$H(F(t,x), F(t,y)) \leq L(t)\|x-y\|,\ \forall x, y \in E.$$

- ***Hypothèse 2.***

 (i) X est un espace métrique séparable et $a, b : X \longrightarrow E,\ c : X \longrightarrow]0, +\infty[$ sont des applications continues.

 (ii) Ils existent des applications continues $g : S \longrightarrow L^1(I, E),\ y : X \longrightarrow C(I, E)$ et $q : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$, telles que

$$(p(t)(y(s))'(t))' = g(s)(t),\ \forall s \in X, \forall t \in I.$$

$$d(g(s)(t), F(t, y(s))(t)) \leq q(s)(t)\ \ p.p.\ t \in I, \forall s \in X.$$

Soit $M = \sup\limits_{t\in I} \dfrac{1}{p(t)}$, alors

$$\left|J(t)\right| \leq MT,\ \ \forall t \in I.$$

On pose

$$m(t) = \int_0^t L(u)du.$$

et

$$\begin{aligned}\xi(s)(t) &= e^{Mtm(t)}\big(tMTc(s) + \|a(s) - y(s)(0)\| + MTp(0)\|b(s) - (y(s))'(0)\|\big) \\ &+ MT\int_0^t q(s)(u)e^{MT(m(t)-m(u))}du.\end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que les deux hypothèses précédantes (* ***Hypothèse 1*** *et* ***Hypothèse 2****) sont satisfaites. Alors, il existe deux applications continues*

$$x : X \longrightarrow C(I, E)$$

$$f : X \longrightarrow L^1(I, E)$$

telles que pour tout $s \in X$, $\big(x(s)(\cdot), f(s)(\cdot)\big)$ *est un couple de trajectoire-sélection de*

$$\begin{cases} (p(t)x'(t))' \in F(t, x(t)) \;\; p.p. \; t \in [0, T], \\ x(0) = a(s), \\ x'(0) = b(s). \end{cases}$$

et

$$\|x(s)(t) - y(s)(t)\| \leq \xi(s)(t), \; \forall (t, s) \in I \times X. \tag{3.18}$$

$$\|f(s)(t) - g(s)(t)\| \leq L(t)\xi(s)(t) + q(s)(t) + c(s) \;\; p.p. \; t \in I \; et \, \forall s \in X. \tag{3.19}$$

Démonstration.

Commencons par les notations suivantes

$$\epsilon_n(s) = c(s)\frac{n+1}{n+2}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

$$d(s) = \|a(s) - y(s)(0)\| + MTp(0)\|b(s) - (y(s))'(0)\|$$

et

$$\begin{aligned} q_n(s)(t) \;\; &= \;\; (MT)^n \int_0^t q(s)(u)\frac{(m(t) - m(u))^{n-1}}{(n-1)!}du \\ &+(MT)^{n-1}\frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}(MTt\epsilon_n(s) + d(s)), \;\; \forall n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Notons aussi, $x_0(s)(t) = y(s)(t)$, $\forall s \in X$. Nous considérons les multi-applications suivantes

$$G_0 : X \rightrightarrows L^1(I, E) \;\text{ et }\; H_0 : X \rightrightarrows L^1(I, E)$$

telles que

$$G_0(s) = \big\{v \in L^1(I, E)\text{: } v(t) \in F(t, y(s)(t)) \;\; p.p. \text{ dans } I\big\}.$$

$$H_0(s) = cl\big\{v \in G_0(s)\text{: } \|v(t) - g(s)(t)\| < q(s)(t) + \epsilon_0(s)\big\}.$$

• Montrons que H_0 est non vide pour tout $s \in X$.

Par (ii) de ***Hypothèse 2***, on a

$$d\big(g(s)(t), F(t, y(s)(t))\big) \leq q(s)(t) < q(s)(t) + \epsilon_0(s). \tag{3.21}$$

On pose pour tous $t \in I$ et $s \in X$ la multi-application F_0^* telle que

$$F_0^*(t,s) = F(t, y(s)(t)).$$

Par la relation (3.21), nous avons

$$\begin{aligned} d\big(0, F_0^*(t,s)\big) &\leq d\big(g(s)(t), F_0^*(t,s)\big) + \|g(s)(t)\| \\ &\leq q(s)(t) + \|g(s)(t)\| = q^*(s)(t) \end{aligned}$$

avec

$$q^* : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$$

est une fonction continue (car q^* est une somme de deux fonctions continues.) D'après la Proposition 3.1.2., on déduit que G_0 est s.c.i. à valeurs non vides fermées de X dans $D(L^1(I,E))$. Il en résulte par le Corollaire 2.2.1., qu'il existe f_0 une application continue définie de X dans $L^1(I,E)$ telle que $f_0(s) \in H_0(s), \forall s \in X$. Autrement dit,

$$f_0(s) \in F(t, y(s)(t)) \;\; p.p. \; t \in I, \; \forall s \in X.$$

$$\big\|f_0(s)(t) - g(s)(t)\big\| \leq q(s)(t) + \epsilon_0(s) = q_0(s)(t), \;\; \forall s \in X, \; \forall t \in I. \tag{3.22}$$

On définit

$$x_1(s)(t) = a(s) + p(0)J(t)b(s) + \int_0^t J(t-u) f_0(s)(u)du.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \big\|x_1(s)(t) - x_0(s)(t)\big\| &\leq d(s) + MT\int_0^t q_0(s)(u)du + MTt\epsilon_0(s) \\ &\leq q_1(s)(t). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\big\|x_1(s)(t)-x_0(s)(t)\big\| &= \Big\|a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)f_0(s)(u)du - y(s)(t)\Big\| \\
&= \Big\|a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)\big(f_0(s)(u)-g(s)(u)\big)du \\
&\quad + \int_0^t J(t-u)g(s)(u)du - y(s)(t)\Big\| \\
&= \Big\|a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)\big(f_0(s)(u)-g(s)(u)\big)du \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{p(\tau)}\int_0^\tau g(s)(u)du\, d\tau - y(s)(t)\Big\| \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{p(\tau)}\int_0^\tau g(s)(u)du\, d\tau &= \int_0^t \frac{1}{p(\tau)}\int_0^\tau \big(p(u)(y(s))'(u)\big)'du\, d\tau \\
&= \int_0^t \frac{1}{p(\tau)}\big(p(\tau)\big(y(s)\big)'(\tau)-p(0)\big(y(s)\big)'(0)\big)d\tau \\
&= \int_0^t \big(y(s)\big)'(\tau)d\tau - p(0)\big(y(s)\big)'(0)\int_0^t \frac{1}{p(\tau)}d\tau \\
&= y(s)(t)-y(s)(0)-p(0)\big(y(s)\big)'(0)\int_0^t \frac{1}{p(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

Remplaçant cette dernière équation dans la relation (3.23), on trouve

$$\begin{aligned}
\big\|x_1(s)(t)-x_0(s)(t)\big\| &\leq \Big\|a(s)+p(0)\big|J(t)\big|b(s)+\int_0^t \big|J(t-u)\big|\big(f_0(s)(u)-g(s)(u)\big)du \\
&\quad + y(s)(t)-y(s)(0)-p(0)\big(y(s)\big)'(0)\big|J(t)\big|-y(s)(t)\Big\| \\
&\leq \big\|a(s)+p(0)MTb(s)+MT\int_0^t \big(f_0(s)(u)-g(s)(u)\big)du \\
&\quad -y(s)(0)-p(0)MT\big(y(s)\big)'(0)\big\| \\
&\leq \Big\|a(s)-y(s)(0)\Big\|+p(0)MT\Big\|b(s)-\big(y(s)\big)'(0)\Big\| \\
&\quad +MT\int_0^t \Big\|\big(f_0(s)(u)-g(s)(u)\big)\Big\|du
\end{aligned}$$

alors,

$$\big\|x_1(s)(t)-x_0(s)(t)\big\| \leq d(s)+MT\int_0^t \big\|f_0(s)(u)-g(s)(u)\big\|du.$$

Par la relation (3.22), on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_1(s)(t)-x_0(s)(t)\| &\leq d(s)+MT\int_0^t q(s)(u)du+MTt\epsilon_0(s) \\
&< d(s)+MT\int_0^t q(s)(u)du+MTt\epsilon_1(s) \\
&= q_1(s)(t).
\end{aligned}$$

En utilisant la même démarche du Théorème 3.2.1., on doit construire des suites approximantes $f_n : X \longrightarrow L^1(I,E)$ et $x_n : X \longrightarrow C(I,E)$ satisfont les propriétés suivantes

(a) $f_n : X \longrightarrow L^1(I,E)$ et $x_n : X \longrightarrow C(I,E)$ sont continues.

(b) $f_n(s)(t) \in F(t, x_n(s)(t))$ *p.p.* dans I et $\forall s \in X$.

(c) $\|f_n(s)(t)-f_{n-1}(s)(t)\| \leq L(t)q_n(s)(t)$ *p.p.* dans I et $\forall s \in X$.

(d) $x_{n+1}(s)(t) = a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)f_n(s)(u)du, \quad \forall t \in I, \forall s \in X.$

Supposons que pour tout $(i = 1, \ldots, n)$, $f_i(\cdot)$, $x_i(\cdot)$ vérifient les propriétes (a), (b), (c) et (d), la forme de x_{n+1} est donnée dans (d), montrons que f_{n+1} existe et vérifie (a), (b) et (c). On fait les mêmes étapes précédentes mais pour $n+1$.

Nous avons par (c) et (d),

$$\begin{aligned}
\Big\|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t)\Big\| &= \Big\|a(s) + p(0)J(t)b(s) + \int_0^t J(t-u)f_n(s)(u)du - a(s) \\
&\quad + p(0)J(t)b(s) - \int_0^t J(t-u)f_{n-1}(s)(u)du\Big\| \\
&= \Big\|\int_0^t J(t-u)f_n(s)(u)du - \int_0^t J(t-u)f_{n-1}(s)(u)du\Big\| \\
&= \Big\|\int J(t-u)\Big[f_n(s)(u) - f_{n-1}(s)(u)\Big]du\Big\| \\
&\leq \int_0^t \big\|J(t-u)\big[f_n(s)(u) - f_{n-1}(s)(u)\big]\big\|du \\
&= \int_0^t \big|J(t-u)\big|\big\|f_n(s)(u) - f_{n-1}(s)(u)\big\|du \\
&\leq MT\int_0^t \Big\|f_n(s)(u) - f_{n-1}(s)(u)\Big\|du \\
&\leq MT\int_0^t L(u)q_n(s)(u)du
\end{aligned}$$

Par la définition de $q_n(s)(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
MT\int_0^t L(u)q_n(s)(u)du &= (MT)^{n+1}\int_0^t\int_0^u L(u)q(s)(r)\frac{(m(u)-m(r))^{n-1}}{(n-1)!}\,drdu \\
&\quad + \int_0^t L(u)(MT)^n\frac{(m(u))^{n-1}}{(n-1)!}\big(MTu\epsilon_n(s)+d(s)\big)du \\
&= (MT)^{n+1}\int_0^t\int_r^t L(u)\frac{(m(u)-m(r))^{n-1}}{(n-1)!}\,q(s)(r)du\,dr \\
&\quad +(MT)^n\int_0^t L(u)\frac{(m(u))^{n-1}}{(n-1)!}\big(MTu\epsilon_n(s)+d(s)\big)du \\
&\leq (MT)^{n+1}\int_0^t \frac{\big(m(t)-m(r)\big)^n}{n!}q(s)(r)dr \\
&\quad +(MT)^n\frac{\big(m(t)\big)^n}{n!}\big(MTt\epsilon_n(s)+d(s)\big) \\
&= (MT)^{n+1}\int_0^t \frac{\big(m(t)-m(r)\big)^n}{n!}q(s)(r)dr + (MT)^n\frac{\big(m(t)\big)^n}{n!}\Bigg(MTt\epsilon_n(s) \\
&\quad +\frac{MTtc(s)}{(n+2)(n+3)}-\frac{MTtc(s)}{(n+2)(n+3)}+d(s)\Bigg) \\
&= (MT)^{n+1}\int_0^t \frac{\big(m(t)-m(r)\big)^n}{n!}q(s)(r)dr \\
&\quad +(MT)^n\frac{\big(m(t)\big)^n}{n!}\big(MTt\epsilon_{n+1}(s)+d(s)\big)-\frac{(MT)^{n+1}t\big(m(t)\big)^n c(s)}{n!(n+2)(n+3)} \\
&= q_{n+1}(s)(t)-\frac{(MT)^{n+1}t\big(m(t)\big)^n c(s)}{n!(n+2)(n+3)} \\
&< q_{n+1}(s)(t).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|x_{n+1}(s)(t)-x_n(s)(t)\| < q_{n+1}(s)(t)$$

D'autre part, On a

$$d\big(f_n(s)(t),F(t,x_{n+1}(s)(t))\big)\leq d\big(f_n(s)(t),F(t,x_n(s)(t))\big)+H\big(F(t,x_{n+1}(s)(t),F(t,x_n(s)(t))\big),$$

et comme

$$f_n(s)(t) \in F(t, x_n(s)(t)) \ \ p.p. \ t \in I.$$

Alors,

$$d\big(f_n(s)(t), F(t, x_n(s)(t))\big) = 0 \ \ p.p. \text{ dans } I \text{ et } \forall s \in X$$

donc,

$$\begin{aligned} d\big(f_n(s)(t), F(t, x_{n+1}(s)(t))\big) &\leq H\big(F(t, x_{n+1}(s)(t), F(t, x_n(s)(t))\big) \\ &\leq L(t)\|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t)\|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Considérons maintenant les multi-applications

$$G_{n+1} : X \rightrightarrows L^1(I, E) \ \text{ et } \ H_{n+1} : X \rightrightarrows L^1(I, E).$$

telles que

$$G_{n+1}(s) = \big\{v \in L^1(I, X) \colon v(t) \in F\big(t, x_{n+1}(s)(t)\big) \ \ p.p. \text{ dans } I\big\}.$$

$$H_{n+1}(s) = cl\big\{v \in G_{n+1}(s) \colon \|v(t) - f_n(s)(t)\| < L(t)q_{n+1}(s)(t) \ \ p.p. \text{ dans } I\big\}.$$

- Montrons que $H_{n+1}(s)$ est non vide pour tout $s \in X$.

Notons que

$$t \longmapsto r_n(s)(t) = c(s)\frac{(MT)^{n+1}L(t)(m(t))^n t}{(n+2)(n+3)n!}$$

est mesurable et strictement positive. De la relation (3.24), on trouve

$$d\big(f_n(s)(t), F(t, x_{n+1}(s)(t))\big) \ \leq \ L(t)q_{n+1}(s)(t) - r_n(s)(t).$$

Via la Proposition 3.1.1., il existe $v \in L^1(I, E)$ tel que

$$v(t) \in F(t, x_{n+1}(s)(t)) \ \ p.p. \ t \text{ dans } I$$

et

$$\begin{aligned} \|v(t) - f_n(s)(t)\| &< d\big(f_n(s)(t), F((t, x_{n+1}(s)(t))\big) + r_n(s)(t) \\ &\leq L(t)q_{n+1}(s)(t) - r_n(s)(t) + r_n(s)(t) \\ &= L(t)q_{n+1}(s)(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, $v \in H_{n+1}(s)$. D'où la non vacuité des valeurs de H_{n+1}.

Soit

$$F^*_{n+1}(t,s) = F\big(t, x_{n+1}(s)(t)\big).$$

On a pour presque tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} d\big(0, F^*_{n+1}(t,s)\big) &\leq d\big(f_n(s)(t), F^*_{n+1}(t,s)\big) + \big\|f_n(s)(t)\big\| \\ &\leq \|f_n(s)(t)\| + L(t)q_{n+1}(s)(t) \\ &= p^*_{n+1}(s)(t). \end{aligned}$$

Il est clair que $p^*_{n+1} : X \longrightarrow L^1(I, \mathbb{R})$ est continue. De la Proposition 3.1.2., on trouve que la multi-application G_{n+1} est s.c.i. à valeurs non vides fermées de X dans $D(L^1(I,E))$. On applique le Corollaire 2.2.1., on déduit que la multi-application H_{n+1} admet une sélection $f_{n+1} : X \longrightarrow L^1(I,E)$ telle que

$$f_{n+1}(s) \in H_{n+1}(s), \quad \forall s \in X,$$

en d'autres termes,

$$f_{n+1}(s)(t) \in F(t, x_{n+1}(s)(t)) \;\; p.p.\ t \in I \text{ et } \forall s \in X.$$

$$\big\|f_{n+1}(s)(t) - f_n(s)(t)\big\| \leq L(t)q_{n+1}(s)(t) \;\; p.p.\ t \in I \text{ et } \forall s \in X.$$

Par la relation (3.24) et (d), on obtient

$$\begin{aligned}
\big\|x_{n+1}(s)(\cdot)-x_n(s)(\cdot)\big\|_C &= \sup_{t\in I}\Big\|a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)f_n(s)(u)du-a(s)\\
&\quad -p(0)J(t)b(s)-\int_0^t J(t-u)f_{n-1}(s)(u)du\Big\|\\
&= \sup_{t\in I}\Big\|\int_0^t J(t-u)\big(f_n(s)(u)-f_{n-1}(s)(u)\big)du\Big\|\\
&\le \sup_{t\in I}\int_0^t \big\|J(t-u)\big(f_n(s)(u)-f_{n-1}(s)(u)\big)du\big\|\\
&\le \sup_{t\in I}\int_0^t \big|J(t-u)\big|\big\|f_n(s)(u)-f_{n-1}(s)(u)\big\|du\\
&\le MT\sup_{t\in I}\int_0^t \big\|f_n(s)(u)-f_{n-1}(s)(u)\big\|du\\
&= MT\int_0^T \big\|f_n(s)(u)-f_{n-1}(s)(u)\big\|du\\
&= MT\big\|f_n(s)(\cdot)-f_{n-1}(s)(\cdot)\big\|_1
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\|f_n(s)(.)-f_{n-1}(s)(.)\|_1 &= \int_0^T \|f_n(s)(t)-f_{n-1}(s)(t)\|dt\\
&\le \int_0^T L(t)q_n(s)(t)dt\\
&\le \int_0^T (MT)^n q(s)(t)\frac{(m(T)-m(u))^n}{n!}du+(MT)^{n-1}\frac{(m(T))^n}{n!}(MT^2\epsilon_n(s)+d(s)).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
m(T)-m(u) &= \int_0^T L(t)dt-\int_0^u L(t)dt\\
&= \int_u^T L(t)dt \le \int_0^T L(t)dt = m(T).
\end{aligned}$$

On conclut que,

$$\begin{aligned}
\big\|x_{n+1}(s)(\cdot)-x_n(s)(\cdot)\big\|_C &\leq MT\|f_n(s)(.)-f_{n-1}(s)(.)\|_1 \\
&\leq \frac{(MTm(T))^n}{n!}\big(MT\|q(s)(\cdot)\|_1+MT^2c(s)+d(s)\big). \quad (3.25)
\end{aligned}$$

La fonction $s\longmapsto MT\|q(s)(\cdot)\|_1+MT^2c(s)+d(s)$ est continue donc, localement bornée. Alors la relation (3.25) implique que les suites $(f_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le critère de Cauchy uniforme pour tout s' dans un voisinage de s. D'où $(f_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n(s)(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers $f(s)(\cdot), x(s)(\cdot)$ de X dans $L^1(I,E)$, $C(I,E)$ respectivement.

Alors, les fonction $s\longmapsto f(s)(\cdot)$, $s\longmapsto x(s)(\cdot)$ sont continue de X dans $L^1(I,E)$, $C(I,E)$ respectivement et pour presque touts t dans I, $\forall s\in X$, on a

$$\begin{aligned}
d\big(f_n(s)(t),F(t,x(s)(t))\big) &\leq d\big(f_n(s)(t),F(t,x_n(s)(t))\big)+H\big(F(t,x_n(s)(t)),F(t,x(s)(t))\big) \\
&= H\big(F(t,x_n(s)(t)),F(t,x(s)(t))\big) \\
&\leq L(t)\big\|x_n(s)(t)-x(s)(t)\big\| \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, (pour $n\longrightarrow+\infty$) et de la relation (3.26) et la propriété (d), on trouve que

$$f(s)(t)\in F(t,x(s)(t)) \ \ p.p.\ t\in I \text{ et } \forall s\in X,$$

et

$$x(s)(t)=a(s)+p(0)J(t)b(s)+\int_0^t J(t-u)f(s)(u)du.$$

- Montrons (3.18) et (3.19).

On prend

$$\sum_{i\geq 1} q_i(s)(t)\leq \xi(s)(t), \forall t\in I, \forall s\in X.$$

En effet, par la relation (3.20), on a

$$q_i(s)(t)\leq (MT)^i\int_0^t q(s)(u)\frac{(m(t)-m(u))^{i-1}}{(i-1)!}du+(MT)^{i-1}\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}\big(MTtc(s)+d(s)\big).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} q_i(s)(t) &\leq \sum_{i\geq 1}(MT)^i \int_0^t q(s)(u)\frac{(m(t)-m(u))^{i-1}}{(i-1)!}du \\
&+\sum_{i\geq 1}(MT)^{(i-1)}\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}\big(MTtc(s)+d(s)\big) \\
&= (MT)\int_0^t q(s)(u)\sum_{i\geq 1}(MT)^{i-1}\frac{(m(t)-m(u))^{i-1}}{(i-1)!}du \\
&+\sum_{i\geq 1}(MT)^{i-1}\frac{(m(t))^{i-1}}{(i-1)!}\big(MTtc(s)+d(s)\big) \\
&= (MT)\int_0^t q(s)(u)e^{MT(m(t)-m(u))}+e^{MT(m(t))}\big(MTtc(s)+d(s)\big) \\
&= (MT)\int_0^t q(s)(u)e^{MT(m(t)-m(u))}du+e^{MTm(t)}\big(MTtc(s) \\
&+\|a(s)-y(s)(0)\|+MTp(0)\|b(s)-(y(s))'(0)\|\big) \\
&= \xi(s)(t).
\end{aligned}$$

Alors pour tout $s\in X$ on a,

$$\begin{aligned}
\big\|f_{n+1}(s)(t)-g(s)(t)\big\| &= \big\|f_{n+1}(s)(t)-f_n(s)(t)+f_n(s)(t)-f_{n-1}(s)(t)+f_{n-1}(s)(t) \\
&\quad -\cdots-f_0(s)(t)+f_0(s)(t)-g(s)(t)\big\| \\
&\leq \big\|f_{n+1}(s)(t)-f_n(s)(t)\big\|+f_n(s)(t)-f_{n-1}(s)(t)\big\| \\
&\quad +\cdots+\big\|f_0(s)(t)-g(s)(t)\big\| \\
&\leq \sum_{i\geq 0}\big\|f_{i+1}(s)(u)-f_i(s)(u)\big\|+\big\|f_0(s)(t)-g(s)(t)\big\| \\
&\leq \sum_{i\geq 0}L(t)q_{i+1}(s)(t)+q(s)(t)+\epsilon_0(s) \\
&\leq L(t)\xi(s)(t)+q(s)(t)+c(s).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, pour $(n\longrightarrow+\infty)$, il en resulte

$$\|f(s)(t)-g(s)(t)\|\leq L(t)\xi(s)(t)+q(s)(t)+c(s)\ \ p.p. \text{ dans } I.$$

Par induction sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(s)(t) - y(s)(t)\| &= \|x_{n+1}(s)(t) - x_0(s)(t)\| \\
&= \|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t) + x_n(s)(t) - x_{n-1}(s)(t) + x_{n-1}(s)(t) \\
&\quad - \cdots - x_1(s)(t) + x_1(s)(t) - x_0(s)(t)\| \\
&\leq \|x_{n+1}(s)(t) - x_n(s)(t)\| + \|x_n(s)(t) - x_{n-1}(s)(t)\| \\
&\quad + \cdots + \|x_1(s)(t) - x_0(s)(t)\|_X \\
&\leq q_{n+1}(s)(t) + q_n(s)(t) + \cdots + q_1(s)(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} q_i(s)(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} q_i(s)(t) \leq \xi(s)(t).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, pour $(n \longrightarrow +\infty)$, on trouve

$$\|x(s)(t) - y(s)(t)\| \leq \xi(s)(t).$$

■

Conclusion

Le principe du Théorème de **Bressan-Colombo** intervient dans la résolution de plusieurs problèmes (inclusions différentielles). En particulier, dans l'étude d'éxistence des solutions. Dans ce mémoire, on a démontré ce théorème tout en se basant sur le fameux Théorème de Michael.

L'origine de la théorie de **Bressan-Colombo** qui donne l'existence d'une sélection continue pour des applications semicontinues infèrieurement à valeurs fermées décomposables est une branche importante de l'analyse fonctionelle, elle surgit dans plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche. Entre autre, le domaine des inclusions differentielles où on a présenté deux types de problème de Cauchy.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J. P. Aubin, and A. Cellina,** *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, (1984).

[2] **Aurelian Cernea,** *Continous verion of Filippov's theorem for a Sturm-Liouville type differential inclusion*, Electronic Journal of Differential Equation, Vol. 2008(2008), No. 53, pp. 1-7.

[3] **D. Azzam-Laouir.,** *Cours d'analyse multivoque,* LMPA (2009).

[4] **A. Bressan, and G. Colombo,** *Extension and selection of maps with decomposable values*, Studia MATH., 90(1988), 69-86.

[5] **R. M. Colombo, A. Fryszkowski, T. Rzezuchowski, and V,** *Continuos selections of Solution Sets of Lipschitzean Differential Inclusion*, Funkcialaj Ekvacioj, 34 (34) 321-330.

[6] **S. Djebali, L. Gorniewicz, A. Ouahab,** *Solutoin sets for differential equations and inclusions.*, Berlin Boston (2013).

[7] **A. Fryszkowski,** *Fixed point Theory for Decomposable sets*, (2004) Kluwer Academic Publishers Dordrecht.

[8] **A. Fryszkowski,** *Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps*, Studia MATH., 76(1983), 163-174.

[9] **J. Neveu,** *Discret-Parametre Martingales*, North-Holland, Amsterdam 1975.

[10] **J. Pierre, and A. Cellina,** *Differential Inclusions*, Springer Verlag, Berlin, (1984).

[11] **D. Repovs, P.V. Semenor,** *Continuons sélections of multivalued mappings.*, Springer science and business media Dordrecht (1984).

[12] **R.T. Rocckafellar,** *Integrals which are convex functionals*, Pacific J. Math. 24 (1968), 525-539.

[13] **Q. J. Zhu,** *On the solution set of differential inclusions in Banach space*, J. Diff. Equation, 93(1991), 213-237.