REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Solution anti-périodique d'un problème d'évolution

Présenté par : Laouar Moufida et Ikhlef Nassira

Soutenu le 18 / 06 / 2017

Devant le Jury :

Président :	D. Affane	MCB.	Univ. Jijel
Encadreur :	M. Benguessoum	MAA.	Univ. Jijel
Examinateur :	I. Boutana	MAA.	Univ. Jijel

Promotion **2016-2017**

Remerciements

Nos remerciments vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous a donné pour terminer ce mémoire.

Nous remercions vivement Madame Massouda Benguessoum, enseignante à l'université de Jijel, d'avoir voulu proposer le sujet et assurer la direction de ce mémoire. Nous la remercions aussi pour sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses précieux conseils qui nous ont beaucoup aidé tout au long de ce travail. Nous tenons à lui exprimer ici toute notre reconnaissance et tout notre respect.

Nous remercions vivement Madame Douriya Affane pour avoir accepter de présider le jury et évaluer ce mémoire.

Nous adressons également nos sincères remerciements à Madame Imane Boutana pour avoir bien voulu prendre la résponsabilité d'évaluer ce travail.

Enfin, c'est avec beauqoup de plaisir que nous remercions profondément nos familles pour leurs conseils et encouragements durant toutes les années de nos études.

Sans oublier de remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui de près ou de loin ont contribué à notre formation.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

La théorie des équations différentielles d'évolution non linéaires, celles qui sont régies par les opérateurs maximaux monotones, a été l'objectif de nombreuses études faites dans les derniers années. Comme exemple connu la théorie de Hill Yosida, qui étant donnée une condition initiale $u_0 \in D(A)$, il existe une solution univoque du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -Au(t) + f(t),\ t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Où $A : D(A) \subset H \to H$ est un opérateur maximal monotone sur un espace de Hilbert et $f \in C^1_H(\mathbb{R})$.

Dans le cas multivoque, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones trouvent leur motivations dans différents domaines, en élastoplasticité mécanique , contrôle optimal, économie, etc,... qui englobent différentes classes de problèmes différentiels.

Ce travail concerne l'étude de l'éxistence de solution anti-périodique pour l'équation parapolique de la forme

$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \tag{E}$$

où $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$, φ est une fonction convexe, propre s.c.i et $\partial\varphi$ c'est le sous différentiel de la fonction φ dans un espace de Hilbert.

D'autre part, l'éxistence de solutions anti-périodiques, et également l'existence de solutions périodiques. L'éxistence de solutions périodiques de problème (E) à été étudie par de nombreux auteurs [13, 12] sous des hypothèses où $\partial\varphi$ est coercive, i.e.,

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle \partial\varphi(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty.$$

In [17] Okochi a prouvé l'éxistence de solutions anti-périodiques dans le cas où $\partial\varphi$ est impaire.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres ordonnés comme suit.

Le premier chapitre, contient les outils, les notions de bas nécessaires et les résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle et l'analyse convexe. Nous rappelons quelques définitions et théorèmes que nous allons utiliser dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on commence par donner quelques résultats sur la différentiabilité aux sens de Gâteux et aux sens de Fréchet ensuite, nous étudions le sous différentiel des fonctions convexes. Puis on donne les propriétés élémentaires des opérateurs monotones et opérateurs maximaux monotones.

Dans le troisième chapitre, nous expliquons les résultats sur le problème anti-périodique des équations d'évolution avec des termes opérateurs (sous différentiel) qui sont définis dans des espaces de Hilbert réels, nous montrons l'éxistence et l'unicité de solution anti-périodique à (E) sous certaines conditions et hypothèses.

On termine ce chapitre, par un exemple où nous appliquons notre resultat à une équation de chaleur non linéaire définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire toutes les notations et les résultats que nous avons utilisés tout au long de ce memoire. On commence par quelques notations, puis on présente quelques définitions et théorèmes concernant l'analyse fonctionnelle, l'analyse convexe et l'analyse multivoque et on termine par quelques notions de mesurabilité et généralités sur les fonctions.

1.1 Notations générales.

- $\mathbb{N}$ ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ l'intervalle des nombres réelles positives ou égales à zéro.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite numérique achevée.
- $\mathbb{R}^n$ espace euclidien réel de dimension n ($\dim \mathbb{R}^n = n$).
- Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- $\partial\Omega = \Gamma$ frontière de Ω.
- $|\cdot|$ la valeure absolu.
- H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- $C^0(\mathbb{R}, H)$ espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans H.
- $C^2(\Gamma)$ espace des fonctions deux fois continûement différentiables sur Γ.

- $L(\mathbb{R})$ espace des fonctions continues linéaires sur $\mathbb{R}$.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mesuré.
- (X, θ) un espace topologique.
- $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

  Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
- $L^p_E(I)$ l'espace des applications p$^{\text{ème}}$ intégrable ($1 \leq p < \infty$) définies sur I à valeurs dans E, muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^p_E} = \left(\int_I \|f(t)\|^p_E \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^\infty_E(I)$ l'espace des applications essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans E muni de la norme

$$\|f(\cdot)\|_{L^\infty_E} = \inf\{c \geq 0, \ \|f(t)\|_E \leq c, \text{ p.p. sur } I\}.$$

- E' le dual topologique de E i.e., l'espace des formes linéaires et continues sur E, E' muni de la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x) = \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(y)\|}{\|y\|}.$$

- $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$ l'espace des fonctions de carré-intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e.,

$$L^2_{loc}(\mathbb{R}, H) = \{f : \mathbb{R} \to H, f \text{ intégrable et } \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2 \, dt < +\infty\}.$$

  muni de la norme

$$\|f\|_{L^2_{loc}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \ \exists g_1, g_2, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \right\}.$

  Avec $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq \infty$ et $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$.
- $W^{1,1}_E(I)$ l'espace des applications absolument continues $f : I \to E$ ayant une dérivée faible dans $L^1_E(I)$.
- p.p. presque partout (= sauf sur un ensemble négligeable).

- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ Laplacien de u.
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \overrightarrow{grad}\, u$.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ dérivée normale extérieure.
- $D(A)$ le domaine de définition de l'opérateur A.
- $R(A)$ le rang de l'opérateur A.
- $N(A)$ le noyau de l'opérateur A.
- $gph(A)$ le graphe de l'opérateur A.

Soit M est un sous ensemble de E alors

- $\overset{\circ}{M}$ est l'intérieure de M.
- $\overline{M}$ est l'adhérence de M.
- $Fr(M)$ est la frontière de M.
- $E \backslash M$ le complémentaire de M.
- $co(M)$ l'enveloppe convexe de M.
- $\overline{co}(M)$ l'enveloppe convexe fermée de M.

Par la suite, on va introduire des notions d'analyse fonctionnelle et d'analyse convexe qui seront utilisées dans ce travail .

1.2 Rappel sur les espaces topologiques et les espaces vectoriels normés

1.2.1 Les espaces topologiques

Définition 1.2.1 (Espace topologique). *[3]*

Soit X un ensemble non vide et soit θ une famille de sous ensembles de X, i.e., $\theta \subset \mathcal{P}(X)$. On dit que θ est une topologie sur X si et seulement si

1) $\emptyset \in \theta, X \in \theta$.

2) $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \theta \;\Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \theta$,(i.e., θ est stable par union quelconque).

3) $\forall (A_i)_{i=\overline{1,n}} \subset \theta \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \theta$. (i.e., θ est stable par intersection finie).

- L'ensemble X muni de la topologie θ, est appelé un espace topologique, qu'on notera quelquefois (X, θ).
- Les parties de X qui appartiennent à θ sont dites parties ouvertes ou ouverts de X.

Définition 1.2.2. *[10]*
Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, θ), on dit que A est un fermé ou partie fermée de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit

$$A \ \textit{fermé} \ \Leftrightarrow X \backslash A \in \theta.$$

Les résultats suivants sont pris de la référence [3]

Définition 1.2.3. *Soient (X, θ) un espace topologique et $A \subset X$.*
On appelle voisinage de A tout sous ensemble de X qui contient un ouvert contenant A. C'est-à-dire V est un voisinage de A si et seulement si

$$\exists O \in \theta, \ A \subset O \subset V.$$

Si $A = \{x\}$ le voisinage de A s'appelle le voisinage de point x c'est-à-dire W est un voisinage de x si et seulement si

$$\exists O \in \theta, \ A \subset O \subset W.$$

On note la famille de tous les voisinages de x par $\mathcal{V}(x)$.

$$W \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists O \in \theta, \ x \in O \subset W.$$

Définition 1.2.4 (Intérieur). *Soient (X, θ) un espace topologique, $A \subset X$ et $x_0 \in X$.*
On dit que x_0 est intérieur à A si et seulement si

$$A \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists O \in \theta, \ x \in O \subset A.$$

- *L'ensemble de tous les points intérieurs à A est appelé intérieur de A, est noté $\overset{\circ}{A}$ c'est-à-dire $\overset{\circ}{A} = \{x \in X, \ A \in \mathcal{V}(x)\}$. On écrit*

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists O \in \theta, \ x \in O \subset A.$$

Définition 1.2.5 (Adhérence). *Soient (X, θ) un espace topologique, $A \subset X$ et $x_0 \in X$.*
On dit que x_0 est un point adhérent à A si et seulement si

$$\forall \ V \in \mathcal{V}(x_0), \ V \cap A \neq \emptyset.$$

- *L'ensemble de tous les points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et est noté $\overline{A}$ c'est-à-dire $\overline{A} = \{x \in X,\ \forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$. On écrit*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 1.2.6 (Frontière). *Soient (X, θ) un espace topologique, $A \subset X$ et $x_0 \in X$. On dit que x_0 est frontière à A si et seulement si*

$$x_0 \in \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}.$$

- *L'ensemble de tous les points frontières à A est appelé la frontière de A et est noté $Fr(A)$ c'est-à-dire*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}.$$

1.2.2 Les espaces normés

Les résultats suivants sont pris de la référence [10]

Définition 1.2.7. *Une norme sur un espace vectoriel E est une application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes

1. *Pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$.*
2. *Pour tout $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.*
3. *Pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

- L'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$ est dit espace normé ou espace vectoriel normé. On note souvent un tel espace $(E, \|\cdot\|)$.
- On déduit de la propriété (2) que l'on a $\|0\| = 0$.
- Si $\|\cdot\|$ vérifié les propriétés (2) et (3). On dit que $\|\cdot\|$ est une seminorme.
- L'inégalité (3) se généralise à n points. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, on a

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Remarque 1.2.8. *Une norme est une seminorme qui vérifie* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 1.2.9. *Soit* E *un espace vectoriel normé et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E.
On dit que $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \Rightarrow \|x_p - x_q\|_E \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.10. *On dit qu'un espace vectoriel normé* E *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy de points de* E *converge dans* E.

Définition 1.2.11. *[18]*
On dit qu'un ensemble M *est compact dans l'espace vectoriel normé* E *si de toute suite* $\{x_n\} \subset M,\ n \in \mathbb{N}$, *on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Proposition 1.2.12. *Si* $\|\cdot\|$ *est une seminorme sur* E. *Alors, pour tout* $x, y \in E$ *on a*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

1.3 Les espaces de Hilbert

1.3.1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes

Les résultats suivants sont pris de la référence [10]

Définition 1.3.1 (Semi-linéaire). *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels. Une application* $f : E \to F$ *est dite semi-linéaire ou antilinéaire lorsque, pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on a*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x).$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *semi-linéaire coïncide avec linéaire.*

Définition 1.3.2 (Forme sesquilinéaire). *Soit* E *un espace vectoriel. Une forme sesquilinéaire sur* E *est une application* $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$, *vérifiant, pour tout* $x, x', y, y' \in E$ *et pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, *les propriétés suivantes*

1. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$ *et* $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.
2. $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ *et* $\varphi(x, \mu y) = \bar{\mu}\varphi(x, y)$.

Autrement dit, une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que

i) Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire.

ii) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ soit semi-linéaire.

Définition 1.3.3 (Forme hermitienne). *Soit E un espace vectoriel. Une forme hermitienne sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait*

1. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.
2. $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$.
3. $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

Remarque 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Toute forme hermitienne sur E est aussi une forme sesquilinéaire sur E.*
2. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme hermitienne sur E est tout simplement une forme bilinéaire symétrique sur E.*
3. *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire sur E est tout simplement une forme bilinéaire sur E.*
4. *Si φ est une forme sesquilinéaire sur E, alors pour tout $x, y \in E$ on a*

$$\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0.$$

Définition 1.3.5. *Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme hermitienne sur E, on définit*

1. *Le noyau de φ est l'ensemble $N(\varphi) = \{x \in E,\ \varphi(x, y) = 0,\ \text{pour tout } y \in E\}$.*
2. *On dit que φ est non dégénérée lorsque $N(\varphi) = \{0\}_{E\times E}$.*
3. *On dit que φ est positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ quel que soit $x \in E$.*
4. *On dit que φ est définie positive si φ est positive et non dégénérée.*

1.3.2 Produit scalaire et espaces de Hilbert

Définition 1.3.6 (Produit scalaire). *[10]*

Soit E un espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une forme hermitienne définie positive sur E. Autrement dit, un produit scalaire sur E est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

vérifiant, pour tout $x, x', y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les propriétés suivantes

1. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x'.y \rangle$ *et* $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Le nombre $\langle x, y \rangle$ est appelé le produit scalaire des x et y, la norme ossociée au produit scalaire sera alors

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Définition 1.3.7. *[8]*

On dit qu'une forme bilinéaire $\varphi(x, y) : E \times E \to \mathbb{R}$ est

(i) Continue s'il existe une constante c telle que

$$\|\varphi(x, y)\| \leq c\|x\| \, \|y\|, \ \forall x, y \in E.$$

(ii) Coercive s'il existe une constante α telle que

$$\varphi(x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \ \forall x \in E.$$

Définition 1.3.8. *[7]*

- *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
- *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Proposition 1.3.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *[7]*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Définition 1.3.10. *[10]*

Un espace de Banach est un espace normé $(E, \|\cdot\|_E)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.

Définition 1.3.11. *[8]*

Soient E un espace de Banach, E'' son bidual et soit J l'injection canonique de E dans E". On dit que E est réflexif si

$$J(E) = E''.$$

1.4 Quelques résultats de l'analyse convexe

Les résultats suivants sont pris de la référence [14]

1.4.1 Ensembles convexes

Définition 1.4.1. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On dit que A est convexe si et seulement si*

$$\forall u,\ v \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Autrement dit, pour tout $(u, v) \in A$, le segment de droite

$$[u, v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \ \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.4.2 (Le simplexe de $\mathbb{R}^n$). *On appelle Le simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n = \left\{(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \ \lambda_i \geq 0 \ et \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}.$$

Définition 1.4.3. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \in E$.*
On appelle combinaison convexe des éléments $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ tout élément $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tels que $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \Delta_n$.

Définition 1.4.4 (Enveloppe convexe). *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$.*
On appelle enveloppe convexe de A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant A, c'est en fait le plus petit convexe qui contient A.
• Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermé de A qu'on note $\overline{co}(A)$ le plus petit convexe fermé de E qui contient A.

Théorème 1.4.5. *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$. Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j : \, k \in \{0, \ 1, \ \dots\}, \ (\lambda_1, \ , \lambda_2, \dots, \ \lambda_{k+1}) \in \Delta_{k+1}, \, x_1, \dots, \ x_{k+1} \in A \right\}.$$

Proposition 1.4.6. *Soit E un espace vectoriel topologique et soient $A \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors*

1) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$,

2) $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

1.4.2 Fonctions convexes

Définition 1.4.7. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *On dit que f est convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in I, \ \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

- *On dit que f est strictement convexe si l'inégalité si-dessus est stricte, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in I, \ \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

- *On dit que f est concave si et seulement si*

$$\forall x, y \in I, \ \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Remarque 1.4.8. *On a les remarques suivantes*

i) Si f et g deux fonctions convexes et $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ alors, $\alpha f + \beta g$ est convexe.

ii) Toute fonction linéaire est convexe et concave.

Théorème 1.4.9. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, alors f est convexe si et seulement si elle est peut être représentée sous la forme*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t), \ x, c \in [a, b]$$

où g est une fonction continue croissante.

Théorème 1.4.10. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, si f est convexe alors*

1. f admet en tout point $x_0 \in int(I)$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite,

2. *f est continue en tout point $x_0 \in int(I)$.*

   Avec $int(I)$ est l'intérieure de I.

Définition 1.4.11 (Epigraphe). *Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*
On appelle epigraphe de f qu'on note $epi(f)$, l'ensemble défini par

$$epi(f) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R},\ f(x) \leq r\}.$$

Définition 1.4.12. *Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*

- *On appelle domaine de définition de f qu'on note par $D(f)$, l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{x \in E,\ f(x) < +\infty\}.$$

- *On dit que f est propre si*

$$f : E \to]-\infty, +\infty] \ \wedge \ \exists x_0 \in E,\ f(x_0) \neq +\infty.$$

Définition 1.4.13 (fonctions convexes dans $\overline{\mathbb{R}}$). *Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si*

$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x) < \alpha,\ f(y) < \beta,\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda\alpha+(1-\lambda)\beta.$

Théorème 1.4.14. *Soient E un espace vectoriel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) *f est convexe.*

(b) *$epi(f)$ est convexe.*

1.4.3 Les fonctions semi-continues inférieurement

Soient X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in X$.

Définition 1.4.15. *On dit que*

- *f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point x_0 si et seulement si*

$$\forall h \in \mathbb{R},\ h < f(x_0),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0),\ \forall x \in V,\ h < f(x).$$

- *f est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point de X.*

Remarque 1.4.16. *On a*

1. *Si f est continue alors, elle est s.c.i.*

2. *Si $f(x_0) = -\infty$ alors, f est s.c.i. au point x_0.*

3. *Si f est s.c.i. au point x_0 et si $f(x_0) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = +\infty$.*

Théorème 1.4.17. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) f est s.c.i.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X,\ f(x) > \lambda\}$ sont ouverts.

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X,\ f(x) \leq \lambda\}$ sont fermés.

iv) L'epigraphe de f est fermé.

Définition 1.4.18. *On appelle limite inférieure de $f(x)$ quand x tend vers x_0 qu'on note $\lim\limits_{x \to x_0} \inf f(x)$ la quantité suivante*

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) = \sup_V \{\inf\ f(x),\ x \in V\}.$$

Proposition 1.4.19. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ alors, f est s.c.i. au point x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0).$$

Les résultats suivants sont pris de [14]

Théorème de séparation

Définition 1.4.20. *Soit E un espace vectoriel réel et soit L un sous espace vectoriel de E. On dit que L est de codimension 1 si et seulement s'il existe $p \in E$ et $p \notin L$ tel que*

$$E = L + \mathbb{R}p = \{x = m + \lambda p,\ m \in L, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Soit $\mathbf{H} \subset E$. On dit que $\mathbf{H}$ est un hyperplan si et seulement s'il existe $a \in E$ tel que $\mathbf{H} = a + L$ et L de codimension 1.*

Théorème 1.4.21. *Soient E un espace vectoriel et $\mathbf{H} \subset E$. Alors $\mathbf{H}$ est un hyperplan si et seulement s'il existe une application linéaire $f :\ E \longrightarrow \mathbb{R}$ $(f \not\equiv 0)$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathbf{H} = f^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\}.$$

De plus, $\mathbf{H}$ est fermé si et seulement si f est continue.

Définition 1.4.22. *Soient E un espace vectoriel et $\mathbf{H} = f^{-1}(\alpha)$ un hyperplan de E. On dit que $\mathbf{H}$ est sépare strictement A et B si*

$$f(A) < \alpha \leq f(B) \text{ ou bien } f(A) \leq \alpha < f(B).$$

Ici $f(A) \leq \alpha$ veut dire $f(x) \leq \alpha$, pour tout $x \in A$.

Théorème 1.4.23 (Séparation). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$ un sous-ensemble non vide fermé convexe de E et soit $b \notin A$. Alors, il existe un hyperplan fermé $\mathbf{H}$ qui sépare strictement A et b.*

1.5 Quelques notions de la mesurabilité

Les résultats suivants sont pris de la référence [15]

Définition 1.5.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle tribu ou σ-algèbre sur X une famille Σ de parties de X possédant les propriétés suivantes*

1. $X \in \Sigma$.
2. *Si* $A \in \Sigma$, *alors* $X \backslash A \in \Sigma$.
3. *Si* $A_n \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *alors* $\underset{n}{\cup} A_n \in \Sigma$.

- Les éléments de Σ sont appelés les parties mesurables de X.
- On dit que (X, Σ) est un espace mesurable.
- $\emptyset \in \Sigma$ car $X \in \Sigma$.

Remarque 1.5.2. *Si au lieu de* (3) *on demande seulement*

3') Si $A, B \in \Sigma$, alors $A \cup B \in \Sigma$.

C'est-à-dire la stabilité de Σ par intersection finie.

Définition 1.5.3. *Soit (X, Σ) un espace mesurable.*

On appelle mesure positive sur X une application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ vérifiant

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Additivité dénombrable si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que (X, Σ, μ) *est un espace mesuré.*

Commentaires

- On dira souvent mesure au lieu de mesure positive.
- La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est nécessaire pour éviter des situations triviales.

Définition 1.5.4. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré.*
On dit que $A \subset X$ *est négligeable (pour la mesure* μ*) si*

$$A \in \Sigma \wedge \mu(A) = 0.$$

Définition 1.5.5. *Dans un espace mesuré* (X, Σ, μ)*, on dit qu'une propriété* $P(x)(x \in X)$ *est vraie presque partout (ou* μ*-presque partout) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.*

Définition 1.5.6. *Soient* (X, Σ_1) *et* (Y, Σ_2) *deux espaces mesurables.*
On dit qu'une application $f : X \to Y$ *est mesurable (pour les tribus* Σ_1 *et* Σ_2*) si*

$$f^{-1}(B) \in \Sigma_1,\ \forall B \in \Sigma_2.$$

Définition 1.5.7. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.*
On dit que f *est intégrable (ou sommable) par rapport à* μ *si*

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

1.6 Les multi-applications

Pour plus de détails sur les multi-applications on peut référer à [19]

Définition 1.6.1. *Soient* X, Y *deux ensembles non vides. On appelle multi-application (ou fonction multivoque)* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *tout application qui à chaque élément* $x \in X$ *associe un sous-ensemble* $F(x)$ *de* Y *et on note* $F : X \rightrightarrows Y$ *ou* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.

- *On appelle* **domaine** *(effectif) de la multi-application F qu'on note $D(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*

$$D(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle* **graphe** *de F, qu'on note $gph(F)$, le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

- *On appelle* **image** *de F, qu'on note $R(F)$, le sous-ensemble de Y défini par*

$$R(F) = \{y \in Y \ : \ \exists x \in X \ , \ y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle* **image** *de A par T qu'on note $T(A)$, le sous-ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y \ : \ \exists x \in A, y \in F(x)\}.$$

Considérons la multi-application inverse $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par

$$x \in F^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ y \in F(x).$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle* **image réciproque large** *de F, le sous-ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X \ : \ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout $V \subset Y$, on appelle* **image réciproque étroite** *de F, le sous-ensemble défini par*

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in X \ : \ F(x) \subseteq V\}.$$

1.7 Généralités sur les fonctions

Les resultats suivants sont pris de référence [5]

1.7.1 Les fonctions paires et fonctions impaires

On ne traitera ici que de fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Définition 1.7.1 (sens de variation). *Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.*

1. *On dit que f est strictement croissante sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a*
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$
2. *On dit que f est strictement décroissante sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a*
$$a < b \Rightarrow f(b) < f(a).$$
3. *On dit que f est strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.*

Remarque 1.7.2. *Soient f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.*

- *On définit de même une fonction croissante (respectivement décroissante) sur l'intevalle I en remplaçant l'implication par*
$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b),$$
respectivement
$$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b).$$
- *Les fonctions constantes sur l'intervalle I sont à la fois croissantes et décroissantes sur I, mais ne sont ni strictement croissantes, ni strictement décroissantes sur cet intervalle.*

Définition 1.7.3 (Symétrie d'une partie de $\mathbb{R}$ par rapport à 0). *Soit I une partie de $\mathbb{R}$, on dit que I est symétrique par rapport à 0 lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$*
$$x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

Définition 1.7.4 (Fonctions paires et fonctions impaires). *Soit f une fonction, $D(f)$ son ensemble de définition.*

1. *La fonction f est dite paire lorsque*

- *$D(f)$ est symétrique par rapport à 0.*
- *Pour tout $x \in D(f)$, $f(-x) = f(x)$.*

2. *La fonction f est dite impaire lorsque*
   - *$D(f)$ est symétrique par rapport à 0.*
   - *Pour tout $x \in D(f)$, $f(-x) = -f(x)$.*

Interprétation graphiques

- Les fonctions paires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (noté OY).
- Les fonctions impaires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère (noté O) .

Remarque 1.7.5. *On a*

1. *Le produit de deux fonctions paires est pair.*
2. *Le produit de deux fonctions impaires est pair.*
3. *Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impaire.*

1.7.2 Les fonctions périodiques et fonctions anti-périodiques

Définition 1.7.6 (fonction périodique). *Soient f une fonction, $D(f)$ son ensemble de définition et T un nombre réel.*
La fonction f est dite périodique de période T lorsque

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in D(f) \Leftrightarrow x + T \in D(f)$.*
- *Pour tout $x \in D(f)$, $f(x + T) = f(x)$.*

Interprétation graphique

Les fonctions périodiques de période T sont les fonctions dont la représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque 1.7.7. *On a les remarques suivantes*

1. *Pour exprimer qu'une fonction f est périodique de période T, on dira souvent qu'elle est T-périodique.*

2. *Si f est T-périodique et si $k \in \mathbb{Z}$, alors*
   - *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in D(f) \Leftrightarrow x + kT \in D(f)$.*
   - *Pour tout $x \in D(f)$, $f(x + kT) = f(x)$.*
3. *Si T est une période de f alors, les nombres de la forme kT (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont aussi des périodes de f.*
4. *En pratique, lorsqu'on affirmera qu'une fonction f est T-périodique, T sera la plus petite période strictement positive de f.*

Théorème 1.7.8. *On a*

– *Les fonctions* cos *et* sin *sont 2π-périodiques.*

– *La fonction* tan *est π-périodique.*

Remarque 1.7.9. *Il faut connaitre la période des fonctions trigonométriques suivantes si $w \neq 0$.*

- *La fonction $x \mapsto \cos(wx + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{2\pi}{|w|}$.*
- *La fonction $x \mapsto \sin(wx + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{2\pi}{|w|}$.*
- *La fonction $x \mapsto \tan(wx + \varphi)$ admet pour période $T = \dfrac{\pi}{|w|}$.*

Définition 1.7.10. *Une fonction f est dite continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma : a = a_0 < \ldots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.*

Lemme 1.7.11. *Soit f une fonction continue par morceau périodique de période T. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{a+T} f(x)dx$ ne dépond pas de réel a, autrement dit*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Même pour l'intégrale $\int_{a-T}^{a} f(x)dx$.

Démonstration

Par l'additivité de l'intégrale

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx,$$

posons, $x = y + T \;\Rightarrow\; dx = dy$

alors,

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(y+T)dy = \int_0^a f(y)dy.$$

Constatons que

$$\int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(y)dy = 0,$$

donc,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

qui est indépendant de a. ■

Même démonstration pour l'intégrale $\int\limits_{a-T}^{a} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$.

Définition 1.7.12 (Fonction anti-périodique). *Soient f une fonction, $D(f)$ son ensemble de définition et T un nombre réel. La fonction f est dite anti-périodique d'anti-période T lorsque*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R},\; x \in D(f) \Leftrightarrow x + T \in D(f)$.*
- *Pour tout $x \in D(f),\; f(x+T) = -f(x)$.*

Exemple 1.7.13. *On sait que*

- *La fonction* cos *est anti-périodique d'anti-période π.*

  En effet, pour tout réel x on a

$$x + \pi \in \mathbb{R} \textit{ et } \cos(x+\pi) = -\cos(x).$$

- *La fonction* sin *est anti-périodique d'anti-période π.*

  En effet, pour tout réel x on a

$$x + \pi \in \mathbb{R} \textit{ et } \sin(x+\pi) = -\sin(x).$$

Remarque 1.7.14. *Si f est anti-périodique d'anti-période T alors, f est $2T$-périodique mais la réciproque est fausse.*

Démonstration

On suppose que f est T-anti-périodique i.e., $f(x+T) = -f(x)$.

Et on montre que $f(x+2T)=f(x)$. On a

$$\begin{aligned}
f(x+2T) &= f(x+T+T)\\
&= f(x'+T), \text{ (posons } x'=x+T)\\
&= -f(x')\\
&= -f(x+T)\\
&= -(-f(x))\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Ce qui donne que f est $2T$-périodique.

1.8 Quelques résultats utiles dans les démonstrations

Proposition 1.8.1 (Baillon-Haraux [4]). *La difference de deux solutions $2T$-périodiques quelconques de (E) est un vecteur constant de H.*

Proposition 1.8.2. *[16]*

S'il ya un nombre positif c tel que

$$\varphi(x)-\varphi(0)\geq c\{\varphi(x)-\varphi(0)\},\ \forall x\in D(\varphi).$$

Alors, la solution $u(t)$ de l'équation

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)\in-\partial\varphi(u(t)),\ \text{p.p } t\in]0,\infty[,\\ u(0)=x\in\overline{D(\varphi)}.\end{cases}$$

Converge fortement quand $t\to\infty$ à un point minimum de φ, c'est

$$s-\lim_{t\to\infty}u(t)=\{x\in H,\ \varphi(x)=\inf\varphi\}.$$

Théorème 1.8.3 (Browder et Pertyshyn). *[17]*

Soit S une application univoque non expansive d'un ensemble convexe non vide C de H. Alors, S à un point fixe dans C si et seulement si pour tout $x_0\in C$, la sequence des itérations de Picard $\{x_n\}$ à partir de x_0 (i.e.,$x_{n+1}=Sx_n$) est bornée dans H.

Théorème 1.8.4 (Théorème de la projection). *[8]*

Soit H un espace préhilbertien, $C \subset H$ un convexe fermé et $y \in H$. Alors, il existe un unique point $x \in C$ tel que

$$\|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - y\|.$$

On note x par $Proj_C(y)$ et on a l'inégalité variationnelle suivante

$$\langle y - Proj_C(y), z - Proj_C(y) \rangle \leq 0, \ \forall z \in C. \tag{1.8.1}$$

Où $Proj$ représente l'application de la projection.

Théorème 1.8.5 (Théorème de min-max). *[9]*

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soient $A \subset E$, $B \subset F$ deux ensembles convexes fermés et compacts.

Soit $K : A \times B \to \mathbb{R}$ une application telle que

- $\forall y \in B, \ x \mapsto K(x, y)$ *est convexe s.c.i.*
- $\forall x \in A, \ y \mapsto K(x, y)$ *est concave s.c.s.*

Alors, il existe $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ tels que

$$K(x_0, y) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x, y_0), \ \forall x \in A, \ \forall y \in B. \tag{1.8.2}$$

Autrement dit (x_0, y_0) est un point selle de K. D'autre part, la propriété (1.8.2) est équivalente à l'égalité

$$\min_{x \in A} \max_{y \in B} K(x, y) = \max_{y \in B} \min_{x \in A} K(x, y). \tag{1.8.3}$$

Corollaire 1.8.6. *[8]*

Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $C \subset E$ un sous ensemble convexe, fermé et borné. Alors, C est faiblement compact.

Théorème 1.8.7 (Théorème de Hahn-Banach). *Soit E un espace vectoriel normé. Supposons que la fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est propre, convexe et s.c.i. Alors f est minorée par une fonctionnelle affine (lineaire continue).*

CHAPITRE 2

Le sous différentiel et les opérateurs maximaux monotones

Ce chapitre comprend deux sections. Dans la première nous présentons quelques dérivées directionnelles classiques (au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet) et nous donnons des résultats qui caractérisent les relations entre ces dérivés. Aussi nous donnons quelques propriétés et résultats de bas du sous différentiel d'une fonction convexe. Dans la deuxième section, on va donner quelques propriétés éssentièlles des opérateurs monotones et opérateurs maximaux monotones.

2.1 le sous différentiel

Les résultats suivants sont pris des références [2, 14]

2.1.1 Dérivée directionnelle

Définition 2.1.1. *Soient E un espace vectoriel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient $x_0, v \in E$. On appelle dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction v qu'on note par $f'(x_0, v)$ la limite définie par*

$$f'(x_0, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand elle existe.

Théorème 2.1.2. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et convexe et soit $x_0 \in D(f)$. Alors,*

1. *$f'(x_0, v)$ existe en tout point $v \in E$.*

2. *la fonction*

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ v &\rightarrow g(v) = f'(x_0, v). \end{aligned}$$

est positivement homogène, convexe et sous additive.

Démonstration

1. Soit $v \in E$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} h_v : \mathbb{R} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\rightarrow h_v(t) = f(x_0 + tv). \end{aligned}$$

Montrons que h_v est convexe.

Soient $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on montre que $h_v(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda h_v(t_1) + (1-\lambda)h_v(t_2)$.

Comme f est convexe alors,

$$\begin{aligned} h_v(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) =& f(x_0 + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)v) \\ =& f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0 + \lambda t_1 v + (1-\lambda)t_2 v) \\ =& f(\lambda(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda)(x_0 + t_2 v)) \\ \leq& \lambda f(x_0 + t_1 v) + (1-\lambda) f(x_0 + t_2 v) \\ =& \lambda h_v(t_1) + (1-\lambda) h_v(t_2). \end{aligned}$$

D'où, h_v est convexe.

Comme f est propre, alors h_v est propre (car si $t = 0,\ h_v(0) = f(x_0) \in \mathbb{R}$ alors $0 \in D(h_v)$) donc, d'après le Théorème 1.4.10 h_v ademt une dérivée à gauche et une dérivée à droite du point 0 ($h'_{v,d}(0)$) et ($h'_{v,g}(0)$) existent.

Or

$$h'_{v,d}(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{h_v(t) - h_v(0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'(x_0, v).$$

Donc, $f'(x_0, v)$ existe, $\forall v \in E$.

2. i) Montrons que g est positivement homogène

   Soient $\lambda \geq 0$ et $v \in E$, montrons que $g(\lambda v) = \lambda g(v)$.

   On distingue deux cas

- **1$^{\text{er}}$ cas**, si $\lambda = 0$, on a

$$\begin{aligned} g(\lambda v) =& g(0v) \\ =& g(o) \\ =& f'(x_0, 0) \\ =& \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + t0) - f(x_0)}{t} \\ =& \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{t} \\ =& 0 \\ =& 0g(v) \\ =& \lambda g(v). \end{aligned}$$

- **2$^{\text{ème}}$ cas**, si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} g(\lambda v) =& f'(x_0, \lambda v) \\ =& \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + t\lambda v) - f(x_0)}{t}. \end{aligned}$$

Posons, $t' = t\lambda$, on trouve $t = \dfrac{t'}{\lambda}$ alors, $t \downarrow 0$ si et seulement si $t' \downarrow 0$, donc

$$\begin{aligned} g(\lambda v) =& f'(x_0, \lambda v) \\ =& \lim_{t'\downarrow 0} \frac{f(x_0 + t'v) - f(x_0)}{\frac{t'}{\lambda}} \\ =& \lambda \lim_{t'\downarrow 0} \frac{f(x_0 + t'v) - f(x_0)}{t'} \\ =& \lambda f'(x_0, v) \\ =& \lambda g(v). \end{aligned}$$

D'où, g est positivement homogène.

ii) On montre que g est convexe.

Soient $v, w \in E$ et $\lambda \in]0, 1[$, montrons que $g(\lambda v + (1 - \lambda)w) \leq \lambda g(v) + (1 - \lambda)g(w)$.

Comme f est convexe on a

$$\begin{aligned}
g(\lambda v+(1-\lambda)w) &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+t(\lambda v+(1-\lambda)w))-f(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(\lambda x_0+(1-\lambda)x_0+\lambda tv+(1-\lambda)tw)-f(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(\lambda(x_0+tv)+(1-\lambda)(x_0+tw))-f(x_0)}{t}\\
&\leq \lim_{t\downarrow 0}\frac{\lambda f(x_0+tv)+(1-\lambda)f(x_0+tw)-f(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\frac{\lambda f(x_0+tv)+(1-\lambda)f(x_0+tw)-\lambda f(x_0)-(1-\lambda)f(x_0)}{t}\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left(\lambda\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}+(1-\lambda)\frac{f(x_0+tw)-f(x_0)}{t}\right)\\
&= \lambda\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}+(1-\lambda)\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tw)-f(x_0)}{t}\\
&= \lambda g(v)+(1-\lambda)g(w).
\end{aligned}$$

D'où, g est convexe.

iii) Montrons que g est sous additive.

Soient $v, w \in E$, montrons que $g(v+w)\leq g(v)+g(w)$.

Comme g est positivement homogène et convexe alors,

$$\begin{aligned}
g(v+w) &= g(2\frac{1}{2}(v+w))\\
&= 2g(\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}w)\\
&\leq 2(\frac{1}{2}g(v)+\frac{1}{2}g(w))\\
&= g(v)+g(w).
\end{aligned}$$

D'où, g est sous additive. ■

2.1.2 Différentiabilité

Définition 2.1.3. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$ tel que $f(x_0)\in\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux au point x_0 s'il existe $x' \in E'$, tel que*

$$f'(x_0, v) = \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E. \tag{2.1.1}$$

x' est défini d'une façon unique par la relation (2.1.1) *et est appelée différentielle de f au sens de Gâteaux au point x_0 et on le note $x' = \nabla f(x_0)$, appelée aussi gradient de f au point x_0.*

2. *On dit que f est différentiable au sens de Fréchet au point x_0 s'il existe $x' \in E'$, tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|_E} = 0. \tag{2.1.2}$$

x' est défini d'une façon unique par la relation (2.1.2) *et est appelée différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0 et le note $x' = df(x_0)$.*

Notation

On écrit f est G-différentiable (resp. F-différentiable) au point x_0 au lieu de f est différentiable au sens de Gâteaux (resp. au sens de Fréchet) au point x_0.

Proposition 2.1.4. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Si f est F-différentiable au point x_0, alors*

1. *f est continue au point x_0.*
2. *f est G-différentiable au point x_0.*

Démonstration

Comme f est F-différentiable au point x_0, alors il existe $x' \in E'$ tel que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|_E} = 0. \tag{2.1.3}$$

Donc,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle|}{\|x - x_0\|_E} < \epsilon. \tag{2.1.4}$$

1. Montrons que f est continue au point x_0, c'est-à-dire on montre que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - x_0\|_E < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

D'après (2.1.4) on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle| < \epsilon \|x - x_0\|_E.$$

Et comme

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| =&|f(x)-f(x_0)-\langle x', x-x_0\rangle + \langle x', x-x_0\rangle|\\ \leq&|f(x)-f(x_0)-\langle x', x-x_0\rangle| + |\langle x', x-x_0\rangle|\\ \leq&\epsilon\|x-x_0\|_E + \|x'\|_{E'}\|x-x_0\|_E\\ =&(\epsilon+\|x'\|_{E'})\|x-x_0\|_E.\end{aligned}$$

Alors, il suffit de prendre $\delta' = \min\left(\delta, \dfrac{\epsilon}{\epsilon+\|x'\|_{E'}}\right)$.
Car, si $\|x-x_0\|_E < \delta' \Rightarrow \|x-x_0\|_E < \delta$ et $\|x-x_0\|_E < \dfrac{\epsilon}{\epsilon+\|x'\|_{E'}}$.
Donc,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0| <&(\epsilon+\|x'\|_{E'})\|x-x_0\|_E\\ <&(\epsilon+\|x'\|_{E'})\delta\\ <&(\epsilon+\|x'\|_{E'})\frac{\epsilon}{\epsilon+\|x'\|_{E'}}\\ =&\epsilon.\end{aligned}$$

Alors,

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta' = \min\left(\delta, \frac{\epsilon}{\epsilon+\|x'\|_{E'}}\right),\ \forall x\in E,\ \|x-x_0\|_E < \delta' \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \epsilon.$$

D'où, f est continue au point x_0.

2. Montrons que f est G-différentiable au point x_0.

   Soient $v \in E$ et $t > 0$, posons $x = x_0 + tv$, alors $\|x-x_0\|_E = t\|v\|_E$, et $x \to x_0$ si et seulement si $t \downarrow 0$ et donc,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\langle x', x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|_E} = 0\\ \Rightarrow&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-\langle x', tv\rangle}{t\|v\|_E} = 0\\ \Rightarrow&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t\|v\|_E} - \frac{t\langle x', v\rangle}{t\|v\|_E} = 0\\ \Rightarrow&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - \langle x', v\rangle = 0\|v\|_E\\ \Rightarrow&\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \langle x', v\rangle.\end{aligned}$$

D'où, f est G-différentiable au point x_0. ■

Remarque 2.1.5. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient $x_0, v \in E$. Si f est G-différentiable au point x_0 alors, $f'(x_0, v)$ existe pour tout $v \in E$, et on a dans ce cas*

$$f'(x_0, v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle, \forall v \in E.$$

En effet, comme f est G-différentiable au point x_0 alors, il existe $x' = \nabla f(x_0)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0, \ \forall v \in E \\
\Rightarrow &\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle, \ \forall v \in E \\
\Rightarrow &f'(x_0, v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle, \ \forall v \in E.
\end{aligned}$$

D'où, $f'(x_0, v)$ existe pour tout $v \in E$.

2.1.3 Sous différentiabilité

Définition 2.1.6. *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, propre et soient $x_0, v \in E$.*
On appelle sous différentiel de f au point x_0 et est noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E', \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in E\}.$$

- *On dit que f est sous différentiable au point x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*
- *On peut regarder ∂f comme une multifonction de E dans E', c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}
\partial f : E &\rightrightarrows E' \\
u &\rightarrow \partial f(u)
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.7. *Soit la fonction*

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = |x|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial f(0) &= \{x' \in \mathbb{R},\ f(x) - f(0) \geq \langle x', x - 0\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x' \in \mathbb{R},\ |x| - |0| \geq \langle x', x\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x' \in \mathbb{R},\ |x| \geq x'x,\ \forall x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x' \in \mathbb{R},\ |x| \geq x'x,\ \forall x \geq 0\} \cap \{x' \in \mathbb{R},\ |x| \geq x'x,\ \forall x \leq 0\} \\
&= \{x' \in \mathbb{R},\ x \geq x'x,\ \forall x \geq 0\} \cap \{x' \in \mathbb{R},\ -x \geq x'x,\ \forall x \leq 0\} \\
&= \{x' \in \mathbb{R},\ 1 \geq x'\} \cap \{x' \in \mathbb{R},\ -1 \geq x'\} \\
&=]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[\\
&= [-1, 1].
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.8. *Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et $x_0 \in E$.*

1) *Si $f(x_0) = +\infty$ alors, $\partial f(x_0) = \emptyset$.*

En effet, soit

$$\begin{aligned}
x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E \\
&\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) + f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle + f(x_0),\ \forall x \in E \\
&\Leftrightarrow f(x) \geq \langle x', x - x_0\rangle + f(x_0),\ \forall x \in E \\
&\Leftrightarrow f(x) \geq +\infty,\ \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Contradiction avec f propre, donc $\partial f(x_0) = \emptyset$.

2) *$x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \langle x', v\rangle \leq f'(x_0, v),\ \forall v \in E$.*

En effet,

$\Rightarrow$) *Supposons que $x' \in \partial f(x_0)$ et montrons que $\langle x', v\rangle \leq f'(x_0, v),\ \forall v \in E$.*

On a, $x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E$.

Posons $x = x_0 + tv,\ \forall v \in E,\ \forall t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&f(x_0 + tv) - f(x_0) \geq \langle x', x_0 + tv - x_0\rangle,\ \forall v \in E,\ \forall t > 0 \\
&\Rightarrow \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E,\ \forall t > 0 \\
&\Rightarrow \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E,\ \forall t > 0.
\end{aligned}$$

D'où, $f'(x_0, v) \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E$.

$\Leftarrow$) *Supposons que* $f'(x_0, v) \geq \langle x', v\rangle,\ \forall v \in E$ *et montrons que* $x' \in \partial f(x_0)$.*On a*

$$f'(x_0, v) \geq \langle x', v\rangle \Leftrightarrow \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x', v\rangle \geq 0,\ \forall v \in E.$$

Soient $x \in E,\ t > 0$ *et prenons* $v = \dfrac{x - x_0}{t}$ *alors,*

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + t\frac{x-x_0}{t}) - f(x_0)}{t} - \langle x', \frac{x - x_0}{t}\rangle \right) \geq 0,\ \forall x \in E\\
\Rightarrow &\lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0\rangle}{t} \right) \geq 0\\
\Rightarrow &f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0\rangle \geq 0\\
\Rightarrow &f(x) \geq f(x_0) + \langle x', x - x_0\rangle\\
\Rightarrow &x' \in \partial f(x_0),\ \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.9. *Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction et soit* $x_0 \in E$ *tel que* $f(x_0) \in \mathbb{R}$, *on a* $\partial f(x_0)$ *est un sous ensemble convexe fermé de* E'.

Démonstration

i) Montons que $\partial f(x_0)$ est convexe.

Soient $x', y' \in \partial f(x_0), \lambda \in]0, 1[$, montrons que $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in \partial f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E\\
&\Leftrightarrow \lambda(f(x) - f(x_0)) \geq \langle \lambda x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E. && (2.1.5)\\
y' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle y', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E\\
&\Leftrightarrow (1 - \lambda)(f(x) - f(x_0)) \geq \langle (1 - \lambda)y', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E. && (2.1.6)
\end{aligned}$$

la somme de (2.1.5) et (2.1.6) donne

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \lambda x' + (1 - \lambda)y', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E.$$

Donc, $\lambda x' + (1 - \lambda)y' \in \partial f(x_0)$.

D'où, $\partial f(x_0)$ est convexe.

ii) Montrons que $\partial f(x_0)$ est fermé.

Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\partial f(x_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = x'$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x'_n - x'\|_{E'} = 0$.

Montrons que $x' \in \partial f(x_0)$. On a

$$\begin{aligned}(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x_0) &\Leftrightarrow \forall n, x'_n \in \partial f(x_0)\\ &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x'_n, x - x_0\rangle,\ \forall x \in E\end{aligned}$$

alors,

$$f(x) - f(x_0) \geq \lim_{n\to+\infty} \langle x'_n, x - x_0\rangle,\ \forall x \in E. \tag{2.1.7}$$

D'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \|x'_n - x'\|_{E'} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in E\backslash\{0\}} \frac{\langle x'_n - x', y\rangle}{\|y\|_E} = 0.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x'_n - x', y\rangle = 0,\ \forall y \in E\backslash\{0\}.$$

En particulier pour $y = x - x_0$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x'_n - x', x - x_0\rangle = 0,\ \forall x \in E.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \langle x'_n, x - x_0\rangle = \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E.$$

D'après (2.1.7), on obtient

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall x \in E.$$

C'est-à-dire

$$x' \in \partial f(x_0).$$

D'où, $\partial f(x_0)$ est fermé.

■

Théorème 2.1.10. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe .*

Si f est finie et continue au point x_0 alors, f est sous différentiable en ce point, i.e.,

$$\partial f(x_0) \neq \emptyset$$

Proposition 2.1.11. *Soient $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres convexes et $x_0 \in E$. Alors*

$$\partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subset \partial(f+g)(x_0).$$

De plus si f au bien g est continue en un point $x_0 \in E$, alors

$$\partial(f+g)(x_0) = \partial f(x_0) + \partial g(x_0).$$

Proposition 2.1.12. *Soient $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, $\lambda > 0$ et $x_0 \in D(f)$. Alors,*

a) f admet un minimum globale au point $x_0 \in E$ si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.

b) $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$.

Démonstration

a) On a

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \geq \langle 0, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \geq 0, \ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \quad f \textit{ admet un minimum globale en } x_0. \end{aligned}$$

b) On distingue deux cas

i) Si $\lambda = 0$, montrons que $\partial(0f)(x_0) = 0\partial f(x_0)$

on a

$$\begin{aligned} \partial(0f)(x_0) = \partial 0(x_0) &= \{x' \in E', \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0(x) - 0(x_0), \ \forall x \in E\} \\ &= \{x' \in E', \ \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \ \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

Soit $x' \in \partial(0f)(x_0)$ alors,

$$\langle x', x - x_0 \rangle \leq 0, \ \forall x \in E. \tag{2.1.8}$$

Montrons que $x' = 0$

Soit $v \in E$, on a $(v + x_0) \in E$ alors, (2.1.8) donne

$$\langle x', v + x_0 - x_0 \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x', v \rangle \leq 0, \ \forall v \in E. \tag{2.1.9}$$

Rèste à montrer que $\langle x', v\rangle \geq 0,\ \forall v \in E$. Soit $v \in E$, on a $(-v) \in E$ alors, (2.1.9) implique

$$\begin{aligned}\langle x', -v\rangle \leq 0 &\Rightarrow -\langle x', v\rangle \leq 0\\ &\Rightarrow \langle x', v\rangle \geq 0,\ \forall v \in E.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

De (2.1.9) et (2.1.10) on trouve $\langle x', v\rangle = 0,\ \forall v \in E$. Alors, $x' = 0$.

D'où, $x' \in 0\partial f(x_0) = \{0\}$ et donc,

$$\partial(0f)(x_0) = \partial 0(x_0) \subset 0\partial f(x_0) = \{0\}. \tag{2.1.11}$$

Et comme $0 \in \partial 0(x_0)$ alors,

$$0\partial f(x_0) = \{0\} \subset \partial(0f)(x_0) = \partial 0(x_0). \tag{2.1.12}$$

De (2.1.11) et (2.1.12) on trouve

$$\partial(0f)(x_0) = 0\partial f(x_0) = \{0\}.$$

ii) Si $\lambda \neq 0$, pour tout $x' \in \partial(\lambda f)(x_0)$ on a

$$\begin{aligned}x' \in \partial(\lambda f)(x_0) &\Leftrightarrow \langle x', x - x_0\rangle \leq (\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0),\ \forall x \in E\\ &\Leftrightarrow \langle x', x - x_0\rangle \leq \lambda f(x) - \lambda f(x_0),\ \forall x \in E\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0),\ \forall x \in E\\ &\Leftrightarrow \langle \frac{x'}{\lambda}, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0),\ \forall x \in E\\ &\Leftrightarrow \frac{x'}{\lambda} \in \partial f(x_0)\\ &\Leftrightarrow x' \in \lambda\partial f(x_0).\end{aligned}$$

De (i) et (ii) on a, $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda\partial f(x_0),\ \forall \lambda \geq 0.$ ■

2.1.4 Relation entre sous différentiel et fonctions conjuguées

Proposition 2.1.13. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) $x' \in \partial f(x_0)$.

b) $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0 \rangle$.

c) $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle$.

Où f^* *est la fonction conjuguée de* f*, définie par*

$$f^*(x') = \sup_{x \in E}[\langle x', x \rangle - f(x)] \leq \langle x', x \rangle,\ x' \in E'.$$

Démonstration

1) Montrons que $a) \Leftrightarrow b)$. On a

$$\begin{aligned} x' \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0 \rangle,\ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x \rangle - \langle x', x_0 \rangle,\ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x', x_0 \rangle \geq f(x_0) - f(x) + \langle x', x \rangle,\ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x', x_0 \rangle \geq f(x_0) + \sup_{x \in E}\left(\langle x', x \rangle - f(x)\right),\ \forall x \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x', x_0 \rangle \geq f(x_0) + f^*(x'). \end{aligned}$$

D'où, $a) \Leftrightarrow b)$.

2) Montrons que $b) \Rightarrow c)$. On a

$$f^*(x') = \sup_{x \in E}\left(\langle x', x \rangle - f(x)\right),\ \forall x' \in E'.$$

Alors,

$$f^*(x') \geq \langle x', x \rangle - f(x),\ \forall x \in E.$$

En particulier pour $x = x_0$, on trouve

$$f^*(x') \geq \langle x', x_0 \rangle - f(x_0) \Leftrightarrow f^*(x') + f(x_0) \geq \langle x', x_0 \rangle.$$

D'où, (d'après $b)$), on obtient

$$f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0 \rangle.$$

D'où, $b) \Rightarrow c)$.

3) $c) \Rightarrow b)$ (évident).

■

Proposition 2.1.14. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Si f est G-différentiable au point x_0 alors, $\partial f(x_0)$ est un singleton et est égal à $\nabla f(x_0)$, i.e.,*

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

Inversement si f est continue au point x_0 et si $\partial f(x_0)$ est un singleton alors, f est G-différentiable au point x_0 et $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

2.2 Opérateurs maximaux monotones

En mathématique un opérateur monotone est une multifonction définie entre espaces préhilbertiens, qui possède une propriété de monotonie que nous précissons dans la définition ci-dessous. Lorsque cet opérateur est une (simple) fonction réelle d'une variable réelle cette propriété de monotonie revient à supposer la croissance (non nécessairement stricte) de cette fonction. Lorsque cet opérateur est une application linéaire (non nécessairement auto-adjoint), cette propriété de monotonie revient à supposer la semi-définie positive de l'application.

2.2.1 Opérateurs monotones

Pour plus de détails on peut référer à [9]
Soit H un espace préhilbertien muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$.

Définition 2.2.1. *Siot $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ une multifonction*

- *On dit que A est monotone si*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \ \forall x_1, \ x_2 \in D(A).$$

  Ou plus précisément

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \ \forall y_1 \in A(x_1), \ \forall y_1 \in A(x_2).$$

- *On dit que A est strictement monotone si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $x_1 \neq x_2$.*

- *On dit que A est fortement monotone de module $\alpha > 0$ si*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq \alpha \|x_1 - x_2\|^2,\ \forall y_1 \in A(x_1),\ \forall y_2 \in A(x_2).$$

Exemple 2.2.2. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone. Les opérateurs suivants construits à partir de A sont monotones*

- $\lambda A,\ \forall \lambda \geq 0$ *tel que*

$$\lambda A(x) = \{\lambda y,\ y \in A(x)\}.$$

- A^{-1} *tel que*

$$A^{-1}(y) = \{x \in H,\ y \in A(x)\}.$$

- *Si A et B sont monotones alors, $A + B$ et $A \times B$ sont monotones.*

Exemple 2.2.3. *Soit A une contraction de $D \subset H$ c'est-à-dire*

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|,\ \forall x, y \in D.$$

Alors, l'opérateur $(I - A)$ est monotone où I est l'identité de A.

En effet, $\forall x_1,\ x_2 \in H,\ \forall y_1 \in A(x_1),\ y_2 \in A(x_2)$

$$\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, x_1 - y_1 - (x_2 - y_2) \rangle &= \langle x_1 - x_2, x_1 - y_1 - x_2 + y_2 \rangle \\
&= \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle - \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \\
&\geq \|x_1 - x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|\,\|y_1 - y_2\| \\
&\geq \|x_1 - x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où, $(I - A)$ est monotone.

Exemple 2.2.4. *Soit φ une fonction convexe propre sur H, i.e., une application de H dans $]-\infty, +\infty]$ tel que $\varphi \not\equiv +\infty$ et $\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y),\ \forall x,\ y \in H$ et $\forall t \in [0, 1]$. L'ensemble $D(\varphi) = \{x \in H,\ \varphi(x) < +\infty\}$ est convexe.*
Le sous différentiel $\partial\varphi$ de φ défini par

$$y \in \partial\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x') \geq \varphi(x) + \langle y, x' - x \rangle,\ \forall x' \in H$$

est monotone dans H.

En effet, si $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ et $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$ on a

$$y_1 \in \partial\varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1\rangle,$$

$$y_2 \in \partial\varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2\rangle,$$

par additionn on obtient $\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1\rangle \leq 0$.

D'où, $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$.

Exemple 2.2.5. *Etant donné un convexe fermé C de H. L'opérateur $Proj_C$ est monotone.*

En effet, en utilisant l'ingalité variationnelle (1.8.1) du Théorème 1.8.4, on trouve que

$$\langle x_1 - Proj_C(x_1), z - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0, \ \forall z \in C.$$

$$\langle x_2 - Proj_C(x_2), z' - Proj_C(x_2)\rangle \leq 0, \ \forall z' \in C.$$

Pour $z = Proj_C(x_2) \in C, \ z' = Proj_C(x_1) \in C$.

On obtient

$$\langle x_1 - Proj_C(x_1), Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0,$$

et

$$\langle x_2 - Proj_C(x_2), Proj_C(x_1) - Proj_C(x_2)\rangle \leq 0.$$

D'où,

$$\langle x_1 - Proj_C(x_1) + Proj_C(x_2) - x_2, Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\rangle \leq 0.$$

On conclut que

$$\langle x_1 - x_2, Proj_C(x_1) - Proj_C(x_2)\rangle \geq \|Proj_C(x_2) - Proj_C(x_1)\|^2 \geq 0.$$

D'où, l'opérateur $Proj_C$ est monotone.

Définition 2.2.6. *Soit X un espace de Banach et A un opérateur de X, on dit que A est accrétive si*

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|_X, \ \forall y_1 \in A(x_1), \ \forall y_2 \in A(x_2), \ \forall\lambda > 0.$$

Remarque 2.2.7.

- *La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert est un cas particulier de celle d'opérateur monotone d'un espace vectoriel dans son dual (dans notre cas H est identifié à son dual).*
- *La notion d'opérateur monotone dans un espace de Hilbert est aussi un cas particulier de celle d'opérateur accrétif dans un espace de Banach.*
- *Accrétif et monotone sont deux notions équivalentes dans un espace de Hilbert.*

Proposition 2.2.8. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur, A est monotone si et seulement si*

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(Ax_1 - Ax_2)\|, \ \forall x_1, x_2 \in D(A) \ et \ \forall \lambda > 0. \tag{2.2.1}$$

Ou plus précisément

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \ \forall x_1, x_2 \in D(A), \ \forall \lambda > 0, \ \forall y_1 \in A(x_1), \ y_2 \in A(x_2). \tag{2.2.2}$$

Démonstration

$\Rightarrow$) Supposons que A est monotone et montrons que

$$\forall x_1, \ x_2 \in D(A), \ y_1 \in A(x_1), y_2 \in A(x_2), \|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|.$$

Soient $x_1, \ x_2 \in D(A), \ y_1 \in A(x_1), \ y_2 \in A(x_2)$, alors

$$\begin{aligned} \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 &= \langle (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2), (x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2) \rangle \\ &= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 + 2\lambda \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Puisque A est monotone on a

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 &\geq \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 \\ &\geq \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

D'où, $\|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|$.

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que

$\|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\| \ \forall x_1, x_2 \in D(A), \ \forall y_1 \in A(x_1), y_2 \in A(x_2), \ \forall \lambda > 0$

et montrons que A est monotone.

Nous avons

$$\begin{aligned}\|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 &= \|x_1 - x_2\|^2 + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \\ &\geq \|x_1 - x_2\|^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$\lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0, \text{ et } \lambda > 0.$$

Alors,

$$\lambda\|y_1 - y_2\|^2 + 2\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0, \quad y_1 \in A(x_1), y_2 \in A(x_2).$$

Faissant tendre λ vers 0, nous obtenons

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0, \ y_1 \in A(x_1), \ y_2 \in A(x_2).$$

D'où, la monotonie de l'opérateur A.

Remarque 2.2.9. *La condition d'accrétivité exprime que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I + \lambda A) = D(I + \lambda A)^{-1}$ dans H.*
Autrement dit, pour tout $y \in H$, l'équation $x + \lambda Ax \ni y$ admet au plus une solution et si $x_1, \ x_2$ sont les solutions correspondant à $y_1, \ y_2$ on a $\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\|$.

2.2.2 Opérateurs maximaux monotones

L'ensemble des opérateurs monotones de H est inductif pour l'inclusion des graphes, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.2.10. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur, on dit que A est maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*
A est maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $(x, y) \in H \times H$ tel que

$$\langle y - A\xi, x - \xi\rangle \geq 0, \ \forall \xi \in D(A),$$

ou plus précisément

$$\langle y - \eta, x - \xi\rangle \geq 0, \ \forall (\xi, \eta) \in gph(A).$$

alors, $y \in A(x)$

La caractérisation suivante est fondamentale dans l'étude des opérateurs maximaux monotones.

Proposition 2.2.11. *Soit A un opérateur définie sur H, il ya équivalence entre les trois propriétés suivantes*

i) A est maximal monotone.

ii) A est monotone et $R(I+A)=H$.

iii) pour tout $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier .

Démonstration

iii)$\Rightarrow$ **ii)**

- Montrons que A est monotone

Soient $x_1,\ x_2 \in H,\ y_1 \in A(x_1),\ y_2 \in A(x_2)$.

Comme $(I+\lambda A)^{-1}$ est une contraction, par définition on a

$$\|(I+\lambda A)^{-1}(y_1)-(I+\lambda A)^{-1}(y_2)\| \leq \|y_1-y_2\|. \tag{2.2.3}$$

D'autre part on a

$$y_i=(I+\lambda A)(x_i) \Leftrightarrow x_i=(I+\lambda A)^{-1}(y_i),\ \forall i=\overline{1,2}. \tag{2.2.4}$$

En remplaçant (2.2.4) dans (2.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\| &\leq \|(I+\lambda A)(x_1)-(I+\lambda A)(x_2)\| \\ &= \|(I+\lambda A)(x_1-x_2)\| \\ &= \|(x_1-x_2)+\lambda(A(x_1)-A(x_2))\|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|x_1-x_2\| \leq \|(x_1-x_2)+\lambda(y_1-y_2)\|.$$

D'après la relation (2.2.1) A est monotone.

- Montrons que $R(I + A) = H$

La propriété *iii*) donne que pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier, c'est-à-dire

$$D(I + \lambda A)^{-1} = H.$$

D'autre part on a A est monotone qui est équivalent à A est accrétive et donc, d'après la Remarque 2.2.9 on a

$$D(I + \lambda A)^{-1} = R(I + \lambda A),\ \forall \lambda > 0$$

dans H.

On présicer pour $\lambda = 1$ on obtient

$$D(I + A)^{-1} = R(I + A).$$

Et par suite

$$R(I + A) = H.$$

D'où, **iii**)$\Rightarrow$ **ii**)

ii)$\Rightarrow$ **i** Supposons A est monotone et $R(I + A) = H$ et montrons que A est maximal monotone.

On a A est monotone c'est-à-dire

$$\langle z - z', \xi - \xi' \rangle \geq 0,\ \forall (z, \xi) \in gph(A),\ \forall (z', \xi') \in gph(A).$$

Pour montrer que A est maximal monotone il suffit de montrer que

$$(x, y) \in gph(A) \Leftrightarrow y \in A(x).$$

Supposons que $A \subset B$ avec B monotone et $y \in B(x)$.

De l'hypothèse $R(I + A) = H$, on trouve

$$x + y \in R(I + A) = H.$$

Donc, il existe $x' \in D(I + A)$ tel que

$$x + y \in (I + A)(x') = x' + A(x').$$

Puisque $A \subset B$, on obtient

$$x + y \in x' + B(x').$$

Puisque $y \in B(x)$, on obtient

$$x + y \in x + B(x).$$

Alors,

$$x = x'.$$

Donc,

$$y \in A(x') = A(x).$$

D'où, A est maximal monotone. Alors, **ii**)$\Rightarrow$ **i**)

i)$\Rightarrow$ **iii**) Pour montrer cette implication, on utilise le théorème suivant

Théorème 2.2.12. *Soient C un convexe fermé de H et $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur monotone. Alors, pour tout $y \in H$, il existe $x \in C$ tel que*

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle, \ \forall (\xi, \eta) \in gph(A).$$

Démonstration

On peut toujours se ramener au cas où $y = 0$.

Pour tout $(\xi, \eta) \in gph(A)$, on pose

$$C(\xi, \eta) = \{x \in C, \ \langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq 0\}.$$

Il est claire que $C(\xi, \eta)$ est un convexe, fermé et borné de H.

- $C(\xi, \eta)$ est convexe

Soient $x_1, x_2 \in C(\xi, \eta), \lambda \in]0, 1[$.

On a

$$x_1 \in C(\xi, \eta) \Leftrightarrow \langle \eta + x_1, \xi - x_1 \rangle \geq 0,$$

$$x_2 \in C(\xi, \eta) \Leftrightarrow \langle \eta + x_2, \xi - x_2 \rangle \geq 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\langle \eta + \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \xi - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 \rangle = \\
&\langle \lambda\eta + (1-\lambda)\eta + \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\xi + (1-\lambda)\xi - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 \rangle = \\
&\langle \lambda(\eta + x_1) + (1-\lambda)(\eta + x_2), \lambda(\xi - x_1) + (1-\lambda)(\xi - x_2) \rangle = \\
&\langle \lambda(\eta + x_1), \lambda(\xi - x_1) \rangle + \langle (1-\lambda)(\eta + x_2), (1-\lambda)(\xi - x_2) \rangle = \\
&\lambda^2 \langle \eta + x_1, \xi - x_1 \rangle + (1-\lambda)^2 \langle \eta + x_2, \xi - x_2 \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\langle \eta + (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \xi - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\rangle \geq 0.$$

Donc,

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C(\xi, \eta).$$

D'où, $C(\xi, \eta)$ est convexe.

- $C(\xi, \eta)$ est fermé

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(\xi, \eta)$, tel que $x_n \to x$.

On doit montrer que $x \in C(\xi, \eta)$.

On a

$$(x_n)_n \subset C(\xi, \eta) \Leftrightarrow \langle \eta + x_n, \xi - x_n\rangle \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\langle \eta + x, \xi - x\rangle \geq 0.$$

Par conséquent

$$x \in C(\xi, \eta).$$

D'où, $C(\xi, \eta)$ est fermé.

- $C(\xi, \eta)$ est borné

On doit montrer qu'il existe $c > 0$, tel que pour tout $x \in C(\xi, \eta)$, $\|x\| \leq c$.

pour tout $x \in C(\xi, \eta)$ on a

$$\langle \eta + x, \xi - x\rangle = \langle \eta, \xi\rangle - \langle \eta, x\rangle + \langle x, \xi\rangle - \|x\|^2 \geq 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &\leq \langle \eta, \xi\rangle - \langle \eta, x\rangle + \langle x, \xi\rangle \\
&= \langle x, \xi\rangle + \langle \eta, \xi - x\rangle \\
&\leq |\langle x, \xi\rangle| + |\langle \eta, \xi - x\rangle| \\
&\leq \|\eta\|\|\xi\| + (\|\eta\| + \|\xi\|)\|x\|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|x\|^2 - \|x\|(\|\xi\| + \|\eta\|) - \|\xi\|\|\eta\| \leq 0.$$

Possons $a = 1$ et $b = -(\|\xi\| + \|\eta\|) < 0,\ c = -\|\xi\|\|\eta\| < 0,\ \Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Donc,

$$\|x\| \leq \max\{r_1, r_2\} = r_1 \text{ où } r_1 = \frac{\|\xi\| + \|\eta\| + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{\|\xi\| + \|\eta\| - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

C'est-à-dire il existe $c = r_1$, tel que $\|x\| \leq c$.

D'où, $C(\xi, \eta)$ et borné.

- L'existence d'un $x \in C(\xi, \eta)$

On doit montrer que $\bigcap\limits_{\xi\in C, \eta\in A(\xi)} C(\xi, \eta) \neq \emptyset$.

D'après le Corollaire 1.8.6, $C(\xi, \eta)$ est faiblement compact.

Alors, il suffit de montrer que pour toute famille finie $\xi_i \in C,\ \eta_i \in A(\xi_i),\ i = \overline{1, n}$

$$\bigcap_{i=1}^{n} C(\xi_i, \eta_i) \neq \emptyset.$$

Soit Δ_n le simplexe de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\Delta_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\},$$

et soit $f : \Delta_n \times \Delta_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle x(\lambda) + \eta_i, x(\lambda) - \xi_i \rangle \text{ où } x(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j.$$

La fonction f est continue, convexe en λ, linéaire en μ. En effet,

- f est convexe en λ

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta_n$ et $t \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
f(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle x(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) + \eta_i, x(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) - \xi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)_j \xi_j + t\eta_i + (1-t)\eta_i, \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)_j \xi_j \\
&\quad - t\xi_i - (1-t)\xi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1)_j \xi_j + t\eta_i + \sum_{j=1}^{n} (1-t)(\lambda_2)_j \xi_j + (1-t)\eta_i, \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1)_j \xi_j - t\xi_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} (1-t)(\lambda_2)_j \xi_j - (1-t)\xi_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1)_j \xi_j + t\eta_i, \sum_{j=1}^{n} (t\lambda_1)_j \xi_j - t\xi_i \rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \langle \sum_{j=1}^{n} (1-t)(\lambda_2)_j \xi_j + (1-t)\eta_i, \sum_{j=1}^{n} (1-t)(\lambda_2)_j \xi_j - (1-t)\xi_i \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(t\lambda_1+(1-t)\lambda_2,\mu) &= \sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle t(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j+\eta_i), t(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j-\xi_i)\rangle \\
&+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle(1-t)(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j+\eta_i),(1-t)(\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j-\xi_i)\rangle \\
&\leq t^2\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j+\eta_i,\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j-\xi_i\rangle \\
&+(1-t)^2\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j+\eta_i,\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j-\xi_i\rangle \\
&\leq t\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j+\eta_i,\sum_{j=1}^{n}(\lambda_1)_j\xi_j-\xi_i\rangle \\
&+(1-t)\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j+\eta_i,\sum_{j=1}^{n}(\lambda_2)_j\xi_j-\xi_i\rangle \\
&\leq tf(\lambda_1,\mu)+(1-t)f(\lambda_2,\mu).
\end{aligned}
$$

Donc, la fonction f est convexe en λ.

- f est linéaire en μ

Soient $\mu_1,\ \mu_2\in\Delta_n$ et $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f(\lambda,\alpha\mu_1+\beta\mu_2) =&\sum_{i=1}^{n}(\alpha\mu_1+\beta\mu_2)_i\langle x(\lambda)+\eta_i,x(\lambda)-\xi_i\rangle \\
=&\sum_{i=1}^{n}((\alpha\mu_1)_i+(\beta\mu_2)_i)\langle x(\lambda)+\eta_i,x(\lambda)-\xi_i\rangle \\
=&\alpha\sum_{i=1}^{n}(\mu_1)_i\langle x(\lambda)_i+\eta_i,x(\lambda)-\xi_i\rangle+\beta\sum_{i=1}^{n}(\mu_2)_i\langle x(\lambda)+\eta_i,x(\lambda)-\xi_i\rangle \\
=&\alpha f(\lambda,\mu_1)+\beta f(\lambda,\mu_2).
\end{aligned}
$$

Donc, la fonction f est linéaire en μ.

D'après le Théorème 1.8.5, il existe $\lambda_0\in\Delta_n$ tel que pour tout $\mu\in\Delta_n$

$$f(\lambda_0,\mu)\leq\max_{\lambda\in K}f(\lambda,\lambda),\ \forall\lambda\in\Delta_n.$$

Tel que

$$f(\lambda,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\langle\eta_i,\xi_j-\xi_i\rangle=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\langle\eta_i-\eta_j,\xi_j-\xi_i\rangle.$$

Donc, pour tout $\mu\in\Delta_n$ on a $f(\lambda_0,\mu)\leq 0$. C'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle x(\lambda_0)+\eta_i,x(\lambda_0)-\xi_i\rangle\leq 0.$$

Ce qui donne

$$x(\lambda_0) \in \bigcap_{i=1}^{n} C(\xi, \eta_i).$$

Donc,

$$\bigcap_{i=1}^{n} C(\xi, \eta_i) \neq \emptyset.$$

D'oú,

$$\bigcap_{\xi \in C, \eta \in A(\xi)} C(\xi, \eta) \neq \emptyset.$$

Lemme 2.2.13. *Soit $\mathcal{F}$ la famille des opérateurs monotones dont le domaine est contenu dans C et soit A un élément de $\mathcal{F}$ alors, $R(I + A) = H$.*

Démonstration

Soit $y \in H$, il existe $x \in C$ tel que pour tout $(\xi, \eta) \in gph(A)$. On obtient

$$\langle \eta - (y - x), \xi - x \rangle \geq 0.$$

Alors,

$$y - x \in A(x).$$

Donc,

$$y \in x + A(x).$$

D'oú, $R(I + A) = H$. ■

En prenant $C = H$ et en remerquant que si A maximal monotone, il en est de même de λA pour tout $\lambda > 0$.

D'oú,

$$R(I + \lambda A) = H.$$

Donc,

$$D(I + \lambda A)^{-1} = H.$$

Et de la Remarque 2.2.9, nous aurons **i**)$\Rightarrow$ **iii**). ■

Exemple 2.2.14. *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.*

Par contre A et B peuvent être maximaux monotones sans qu'il en soit ainsi de $A + B$ car on peut avoir $D(A) \cap D(B) = \emptyset$.

Proposition 2.2.15. *Soit A une application monotone univoque de $D(A)$ dans H, on suppose que A est hémicontinu, c'est-à-dire pour tout $x \in H$ et tout $\xi \in H$*

$$A((1-t)x + t\xi) \to Ax, \ \textit{lorsque}\, t \to 0.$$

Alors, A est maximal monotone.

Démonstration

Soit $x, y \in H$ tel que $\langle Ax' - y, x' - x\rangle \geq 0$ pour tout $x' \in H$.

Alors, pour tout $\xi \in H$ et $t \in]0,1[$

$$\langle A((1-t)x + t\xi) - y, (1-t)x + t\xi - x\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle A((1-t)x + t\xi) - y, t(\xi - x)\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t\langle A((1-t)x + t\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0$$

dévisant par t (car $t > 0$), on obtient

$$\langle A((1-t)x + t\xi) - y, \xi - x\rangle \geq 0$$

faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\langle Ax - y, \xi - x\rangle \geq 0, \text{ pour tout } \xi \in H.$$

Donc, $y = Ax$. ■

Proposition 2.2.16. *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur monotone de H. On a, si A est maximal alors, Ax est fermé pour tout $x \in D(A)$.*

Démonstration

Supposons A maximal et montrons que Ax est fermé.

(Ax fermé) $\Leftrightarrow \left(\forall (y_n)_n \subset Ax, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y \Rightarrow y \in Ax\right)$.

Soit $(y_n)_n \subset Ax \Leftrightarrow \forall n \geq 1, \ y_n \in Ax$.

Montrons que $y \in Ax$

comme A est maximal, il suffit de démontrer que

$$\langle y - z_2, x - z_1\rangle \geq 0, \ \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Puisque A est monotone, on a pour tout $n \geq 1$

$$\langle y_n - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0,\ \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Par passage à la limite quand n tend vers à $+\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \langle y_n - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0,\ \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Il en result, de la continuété du produit scalaire, que

$$\langle \lim_{n\to+\infty} y_n - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0,\ \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

Donc, on obtient

$$\langle\ y - z_2, x - z_1 \rangle \geq 0,\ \forall z_1 \in D(A) \text{ et } \forall z_2 \in Az_1.$$

D'ou, $y \in Ax$ c'est à dire Ax est fermé. ■

Lemme 2.2.17. *Soit φ une fonction convexe propre sur H et $\alpha \geq 0$. La fonction convexe $x \mapsto \varphi(x) + \dfrac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$ atteint son minimum en x_0 si et seulement si*

$$\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0).$$

Théorème 2.2.18. *Si φ est s.c.i. propre convexe définie sur H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors, $\partial\varphi$ est un opérateur maximal monotone sur H à valeurs dans H.*

Démonstration

Par la propriété $ii)$ de la Proposition 2.2.11 $\partial\varphi$ est maximal monotone si et seulement si

$$\partial\varphi \text{ est monotone et } R(\partial\varphi + I) = H.$$

D'après l'Exemple 2.2.4 $\partial\varphi$ est monotone.

1. Montrons que $R(I + \partial\varphi) = H$

Soit $x' \in H$ fixé, on montre que l'équation $x' \in \partial\varphi(x) + I(x)$, admet au moins une solution $x_0 \in D(\partial\varphi)$.

Il est claire que

$$R(I + \partial\varphi) \subset H. \tag{2.2.5}$$

Maintenant on montre que $H \subset R(I + \partial\varphi)$.

Soit $y \in H$, montrons que $y \in R(I + \partial\varphi)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& y \in \bigcup_{x \in D(I+\partial\varphi)} (I + \partial\varphi)(x) \\
& \Rightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial\varphi) \text{ tq } y \in (I + \partial\varphi)(x_0) \\
& \Rightarrow \exists x_0 \in D(I + \partial\varphi) \text{ tq } y \in x_0 + \partial\varphi(x_0).
\end{aligned}$$

La fonction $f : H \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2$ est une fonction convexe, s.c.i. et tend vers $+\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ pour tout $x \in H$.

- Montrons que f est convexe.

Il est claire que f est convexe (la somme de deux fonctions convexes).

- Montrons que f est s.c.i.

Pour cela nous allons montrer que $\liminf\limits_{z \to x} f(z) \geq f(x), \forall x \in H$.

Puisque φ est s.c.i, on a

$$\begin{aligned}
\liminf_{z \to x} f(z) =& \liminf_{z \to x} \left(\frac{1}{2}\|z - y\|^2 + \varphi(z) \right) \\
\geq& \liminf_{z \to x} \frac{1}{2}\|z - y\|^2 + \liminf_{z \to x} \varphi(z) \\
=& \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \varphi(x) \\
=& f(x).
\end{aligned}$$

Donc, f est s.c.i.

- Montrons que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) + \dfrac{1}{2}\|x - y\|^2 = +\infty$

Soit $x' \in D(\varphi^*)$, tel que

$$\varphi^*(x') = \sup_{x \in H} \left[\langle x', x \rangle - \varphi(x) \right].$$

Ce qui donne

$$\varphi^*(x') \geq \langle x', x \rangle - \varphi(x), \ \forall x \in H.$$

Alors,

$$\varphi(x) \geq \langle x', x \rangle - \varphi^*(x), \ \forall x \in H.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 &\geq \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \|x'\|\|x\| - |\varphi^*(x')| \\
&\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|\|y\| - \|x'\|\|x\| - |\varphi^*(x')| \\
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 - (\|y\| + \|x'\|)\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|^2 - |\varphi^*(x')|.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\|x\| \to +\infty$ on obtient

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = \lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = +\infty.$$

- La fonction $f(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{2}\|x-y\|^2$ est convexe, s.c.i. et tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ et φ minoré par une fonction affine atteint donc son minimum en $x_0 \in H$.

On a d'après le théorème de Hahn-Banach (Théorème 1.8.7), φ est minoré par une fonction affine. Ce qui donne f atteint son minimum en $x_0 \in H$ et d'après le Lemme 2.2.17 on trouve $y - x_0 \in \partial\varphi(x_0)$ i.e., $y \in \partial\varphi(x_0) + x_0$, donc

$$H \subset R(I + \partial\varphi). \tag{2.2.6}$$

De (2.2.5) et (2.2.6) on aura $R(I + \partial\varphi) = H$.

D'où, $\partial\varphi$ est maximal monotone. ■

CHAPITRE 3

Existence et unicité d'une solution d'un problème d'évolution

Dans ce chapitre, on s'intérèsse à l'étude de l'existence et l'unicité de solution anti-périodique d'un problème d'évolution non linéaire.

Ce chapitre est partagé en deux sections. Dans la première on va étudier l'existence et l'unicité de la solution anti-périodique de l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t), \text{ p.p } t \geq 0 \qquad (E, \varphi, f)$$

où φ est une fonction propre s.c.i. convexe sur H (c'est-à-dire $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$), $\partial\varphi$ est le sous differentielle de φ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$.

Dans la deuxième on va donner un exemple très important en physique car cette équation elle modélise la distribution de la température u dans le domaine Ω à l'instant t .

Pour plus de détails on peut référer à [17]

3.1 Existence et unicité de solution anti-périodique

Théorème 3.1.1. *Supposons*

1. *φ est paire i.e., $\varphi(-x) = \varphi(x)$.*
2. *f est T-anti-périodique.*

Alors, il existe une unique solution T-anti-périodique à (E).

Corollaire 3.1.2. *Sous les conditions* (1) *et* (2)*, il existe une solution $2T$-périodique de* (E).

En effet, d'après les condition (1) et (2) on a, (E) admet une solution T-anti-périodique, cést-à-dire, il existe $u \in W^{1,1}_{loc}(]0,+\infty[,H) \bigcap C^0([0,+\infty[,H)$ tel que $u(T+t) = -u(t)$. Et par conséquent u est $2T$-périodique (d'après la Remarque 1.7.14).

Remarque 3.1.3. *On sait que la solution périodique de* (E) *est unique si φ est strictement convexe.*

La condition (1) du Théorème 3.1.1 diffère de la condition topologique donnée en [13]. Donc le Théorème 3.1.1 est le plus utile pour le cas d'équation de la Chaleur non linéaire définies sur des domaines non bornés de $\mathbb{R}^n$ (voir la section 2).

Maintenant, nous donnons quelques remarques sur les conditions (1) et (2).

- **Première remarque sur la condition (1) du Théorème 3.1.1**

$$\text{Il existe une constante } c > 0 \text{ tel que } \ \varphi(-cx) \leq \varphi(x),\ \forall x \in H. \tag{3.1.1}$$

En effet, si on suppose $\varphi(0) = 0$ et $c \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(-cx) &= \varphi(c(-x)),\ \forall x \in H \\
&= \varphi(c(-x) + (1-c)0) \\
&\overset{\varphi\text{convexe}}{\leq} c\varphi(-x) + (1-c)\varphi(0) \\
&= c\varphi(-x) + \varphi(0) - c\varphi(0) \\
&= c(\varphi(-x) - \varphi(0))
\end{aligned}$$

d'aprés la Proposition 1.8.2, on obtient

$$\begin{aligned}
c(\varphi(-x) - \varphi(0)) &\leq \varphi(-x) - \varphi(0) \\
&= \varphi(-x) \\
&= \varphi(x),\ \text{(car } \varphi \text{ et paire)}.
\end{aligned}$$

D'où, $\varphi(-cx) \leq \varphi(x),\ \forall x \in H$.
On sait que le Corollaire 3.1.2 ne satisfait pas sous les conditions (3.1.1) et (2) (car la condition (1) n'est pas vérifée).

Proposition 3.1.4. *Il existe une fonction φ_1 s.c.i., convexe et $f_1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R},H)$ telle que*

(i) φ_1, f_1 satisfait (3.1.1) *et* (2) *(respectivement),*

(ii) Il n'existe pas de solution périodique de (E, φ_1, f_1).

- **Deuxième remarque sur la condition** (2) **du Théorème 3.1.1**

Proposition 3.1.5. *Supposons que*

$f(.)$ *est* $2T$*-périodique et que* (E, φ, f) *admet une solution* $2T$*-périodique, alors*

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)dt \;\in\; \overline{R(\partial\varphi)}. \tag{3.1.2}$$

On obtient (3.1.2) dirèctement sous les hypothèses (1) et (2).

En effet, de (E) on a $u'(t) \in f(t) - \partial\varphi(u(t))$, alors il existe $\xi(u) \in \partial\varphi(u(t))$ telle que

$$u'(t) = f(t) - \xi(u). \tag{3.1.3}$$

On intégrons (3.1.3) de 0 à $2T$ et on dévise sur $2T$, on obtient

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} u'(t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)dt - \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt.$$

Comme $u(t)$ est $2T$-périodique, alors

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)dt = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt.$$

Mais on sait que $\frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt \in \overline{co}(\partial\varphi(u(t)))$.

En effet, si on suppose le contraire, i.e.,

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt \notin \overline{co}(\partial\varphi(u(t))).$$

En utilisant le Théorème 1.4.23, il existe $x' \in H,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle x', \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt\rangle \leq \alpha < \langle x', y\rangle,\ \forall y \in \overline{co}(\partial\varphi(u(t))),$$

en particulier pour $\xi(u) \in \overline{\partial\varphi}(u(t))$, on trouve

$$\langle x', \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \xi(u)dt\rangle < \langle x', \xi(u)\rangle,\ \forall \xi(u) \in \overline{\partial\varphi}(u(t)),$$

alors,

$$\int_0^{2T} \langle x', \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \xi(u)dt \rangle ds < \int_0^{2T} \langle x', \xi(u) \rangle ds,$$

donc,

$$\langle x', \int_0^{2T} \xi(u)dt \rangle = \int_0^{2T} \langle x', \xi(u) \rangle ds < \int_0^{2T} \langle x', \xi(u) \rangle ds,$$

absurde, et par suite

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(t)dt \in \overline{co}(\partial\varphi(u(t))),$$

- Montrons que $\overline{co}(\partial\varphi(u(t))) \subset \overline{R(\partial\varphi)}$

Comme $\overline{co(\partial\varphi(u(t)))} = \overline{co}(\partial\varphi(u(t)))$ alors, il suffit de montrer que $co(\partial\varphi(u(t))) \subset R(\partial\varphi)$. On a

$$y \in co(\partial\varphi(u(t))) \Rightarrow \exists k \geq 0,\ y = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i y_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,\ y_i \in \partial\varphi(u(t)),$$

de plus

$$y_i \in \partial\varphi(u(t)) \Rightarrow y_i \in R(\partial\varphi), \forall i = 1, \ldots, k+1,$$

alors,

$$y \in \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\, R(\partial\varphi) = R(\partial\varphi),$$

c'est-à-dire

$$y \in R(\partial\varphi),$$

ce qui implique

$$co(\partial\varphi(u(t))) \subset R(\partial\varphi),$$

donc,

$$\overline{co}((\partial\varphi(u(t))) \subset \overline{R(\partial\varphi)}.$$

Et par suite

$$\frac{1}{2T} \int_0^{2T} f(t)dt \in \overline{R(\partial\varphi)}.$$

- **Troisième remarque sur la condition** (1) **du Théorème 3.1.1**

D'après (1) on a

$$0 \in \partial\varphi(0) \subset R(\partial\varphi). \tag{3.1.4}$$

En effet, soit

$$y \in \partial\varphi(0) \;\; \Leftrightarrow \;\; \varphi(x) - \varphi(0) \geq \; \langle y, x-0\rangle, \; \forall x \in D(\varphi) \tag{3.1.5}$$

$$y \in \partial\varphi(0) \;\; \Leftrightarrow \;\; \varphi(-x) - \varphi(0) \geq \; \langle y, -x\rangle, \; \forall -x \in D(\varphi) \tag{3.1.6}$$

par addition de (3.1.5) et (3.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0) \geq \; \langle y, x\rangle + \langle y, -x\rangle, \; \forall x \in D(\varphi)\\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2[\varphi(x) - \varphi(0)] \geq \langle y, x-x\rangle\\
&\Leftrightarrow 2[\varphi(x) - \varphi(0)] \geq \langle y, 0\rangle\\
&\Leftrightarrow 2[\varphi(x) - \varphi(0)] \geq 0\\
&\Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(0)\\
&\Leftrightarrow 0 \in \partial\varphi(0).
\end{aligned}$$

- **Quatrième remarque sur la condition** (2) **du Théorème 3.1.1**

Par (2) on a

$$\int_0^{2T} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt + \int_T^{2T} f(t)dt = 0$$

Nous faissons le changement de variable suivant sur l'intègrale $\int_T^{2T} f(t)dt$

on pose $s = t - T$ alors,

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} f(t)dt \;\; &= \;\; \int_0^{T} f(s+T)ds\\
&= \;\; -\int_0^{T} f(s)ds \; (f \text{ est } T\text{-anti-périodique}),
\end{aligned}$$

donc,

$$\int_0^{2T} f(t)dt = \int_0^{T} f(t)dt - \int_0^{T} f(t)dt = 0,$$

ce qui donne

$$\int_0^{2T} f(t)dt = 0. \tag{3.1.7}$$

D'après les relations (3.1.4) et (3.1.7), on obtient (3.1.2).
Par (3.1.7) on a

$$\int_0^{2T} f(t)dt = 0 \overset{(3.1.4)}{\in} \partial\varphi(0) \subset R(\partial\varphi) \subset \overline{R(\partial\varphi)},$$

d'où,

$$\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)dt = 0 \in \partial\varphi(0) \subset R(\partial\varphi) \subset \overline{R(\partial\varphi)},$$

on peut donc s'attendre à ce que le Corollaire 3.1.2 satisfait si (3.1.7) est supposé au lieu de (2), mais nous avons

Proposition 3.1.6. *Il existe une fonction φ_2 s.c.i., convexe et une fonction $f_2 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ telle que*

(i) φ_2, f_2 satisfait (1) *et* (3.1.7) *(respectivement),*

(ii) Il n'existe pas de solution périodique à (E, φ_2, f_2).

Car les relations (3.1.4) et (3.1.7) donnent (3.1.2), et la relation (3.1.4) n'est pas vérifiée, donc la relation (3.1.2) n'est pas satisfait, ce qu'il result qu'il n'existe pas de solution périodique pour (E, φ_2, f_2).
On conclut que les deux conditions (1) et (2) du Théorème 3.1.1 sont nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution anti-périodique à (E).

Démonstration du Théorème 3.1.1

Etape 1 : l'existence de la solution

Pour chaque $a \in \overline{D(\varphi)}$, il existe une solution unique $u_a \in W^{1,1}_{loc}([0, +\infty[, H) \bigcap C^0([0, +\infty[, H)$ à (E) avec $u(0) = a$.
On définit une application univoque S par $S_a = -u_a(T)$ pour tout $a \in \overline{D(\varphi)}$. Pour montrer que S admet un piont fixe dans $(\overline{D(\varphi)})$, on utilise le théorème de points fixes (Théorème 1.8.3).

Soit u la solution de (E) avec une valeur initiale arbitraire $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$. Alors, on suppose une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n u(nT),\ n \in \mathbb{N}.$$

- On montre par récurrence que $u_{n+1} = Su_n$.

Pour $n = 0$, on a $u(0) = u_0 = a$,

pour $n = 1$, on a $u_1 = (-1)^1 u(T) = -u(T + 0T) = -\left((-1)^0 u(T + 0T)\right) = Su_0$,

pour $n = 2$, on a $u_2 = (-1)^2 u(2T) = u(T + T) = -\left((-1)^1 u(T + 1.T)\right) = Su_1$,

on suppose que la relation est vraie pour n i.e., $u_n = Su_{n-1}$ et on montre qu'elle vraie pour $n + 1$, i.e., on montre que $u_{n+1} = Su_n$

$u_{n+1} = (-1)^{n+1} u((n + 1)T) = (-1)^{n+1} u(T + nT) = -\left((-1)^n u(T + nT)\right) = Su_n$. D'où $u_{n+1} = Su_n$.

Dans la suite nous montrons que l'ensemble $\{u(t),\ t \geq 0\}$ est bornée.

D'après la condition (1), on obtient que $\partial\varphi(-x) = -\partial\varphi(x),\ \forall x \in D(\partial\varphi)$.

En effet, soit $\xi \in -\partial\varphi(x)$

$$\begin{aligned}
\xi \in -\partial\varphi(x) &\Leftrightarrow -\xi \in \partial\varphi(x) \\
&\Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle -\xi, y - x\rangle, \forall y \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) \geq -\langle \xi, y - x\rangle, \forall y \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(-y) - \varphi(x) \geq -\langle \xi, -y - x\rangle, \forall -y \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle \xi, y + x\rangle, \forall y \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(y) - \varphi(-x) \geq \langle \xi, y - (-x)\rangle, \forall y \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \xi \in \partial\varphi(-x)
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\text{(E)} \Leftrightarrow &\frac{d}{dt}(u(t)) - f(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \\
\Leftrightarrow &u'(t) - f(t) \in -\partial\varphi(u(t)) \text{ avec } u'(t) = \frac{d}{dt}(u(t)) \\
\Leftrightarrow &u'(t) - f(t) \in \partial\varphi(-u(t))\ ,\ \text{p.p} \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t+T)+u(t)\|^2 =& 2\frac{d}{dt}\|u(t+T)+u(t)\|\ \|u(t+T)+u(t)\| \\
=& 2\left(\sqrt{\langle u(t+T)+u(t), u(t+T)+u(t)\rangle}\right)'\ \| u(t+T)+u(t)\| \\
=& 2\frac{(\langle u(t+T)+u(t), u(t+T)+u(t)\rangle)'}{2\|u(t+T)+u(t)\|}\ \|u(t+T)+u(t)\| \\
=& \langle \frac{d}{dt}(u(t+T)+u(t)), u(t+T)+u(t)\rangle \\
& + \langle u(t+T)+u(t), \frac{d}{dt}(u(t+T)+u(t))\rangle \\
=& \langle 2(u'(t+T)+u'(t)), u(t+T)+u(t)\rangle \\
=& 2\langle u'(t+T)+u'(t), u(t+T)+u(t)\rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, la relation (2) du Théorème 3.1.1 donne que f est T-anti-périodique i.e.,

$$f(t+T) = -f(t) \ \Leftrightarrow\ -f(t) - f(t+T) = 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t+T)+u(t)\|^2 &= 2\langle u'(t+T)+u'(t), u(t+T)+u(t)\rangle \\
&= 2\langle u'(t+T)-f(t+T)+u'(t)-f(t), u(t+T)+u(t)\rangle.
\end{aligned}$$

De plus, par (3.1.8), on obtient aussi

$$u'(t+T) - f(t+T) \in -\partial\varphi(u(t+T)) = \partial\varphi(-u(t+T)).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t+T)+u(t)\|^2 &= 2\langle \partial\varphi(-u(t+T)) + \partial\varphi(-u(t)), u(t+T)+u(t)\rangle \\
&= 2\langle -\partial\varphi(u(t+T)) + \partial\varphi(-u(t)), u(t+T)-(-u(t))\rangle \\
&= 2\langle -(\partial\varphi(u(t+T)) - \partial\varphi(-u(t))), u(t+T)-(-u(t))\rangle \\
&= -2\langle \partial\varphi(u(t+T)) - \partial\varphi(-u(t)), u(t+T)-(-u(t))\rangle \\
&\leq 0,\ \text{p.p} \quad t \geq 0,\ (\text{car } \partial\varphi \text{ est monotone}).
\end{aligned}$$

Et par conséquent on a

$$\frac{d}{dt}\|u(t+T)+u(t)\|^2 \leq 0,\ \text{p.p} \quad t \geq 0.$$

On intégrons sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient que

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|u(s+T)+u(s)\|^2 \mathrm{d}s \leq \int_0^t 0\, ds = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u(t+T)+u(t)\|^2 - \|u(T)+u(0)\|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \|u(t+T)+u(t)\|^2 \leq \|u(T)+u(0)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|u(t+T)+u(t)\| \leq \|u(T)+u(0)\|, \text{ (car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ estcroissante).}$$

Alors,

$$\|u(t+T)+u(t)\| \leq \|u(T)+u(0)\| \ (= c_1), \ t \geq 0. \tag{3.1.9}$$

D'autre part, la condidtion (1) du Théorème 3.1.1 donne aussi que $0 \in \partial\varphi(0)$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\| &= \frac{d}{dt}\sqrt{\langle u(t), u(t)\rangle} \\
&= \frac{(\langle u(t), u(t)\rangle)'}{2\|u(t)\|} \\
&= \frac{\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t)\rangle + \langle u(t), \frac{d}{dt}u(t)\rangle}{2\|u(t)\|} \\
&= \frac{2\langle u(t)', u(t)\rangle}{2\|u(t)\|} \\
&= \|u(t)\|^{-1}\langle u'(t), u(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

On a, $u'(t) \in \partial\varphi(-u(t)) + f(t)$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u(t)\| &= \|u(t)\|^{-1}\left(\langle \partial\varphi(-u(t)) + f(t), u(t)\rangle\right) \\
&= \|u(t)\|^{-1}(\langle \partial\varphi(-u(t)), u(t)\rangle + \langle f(t), u(t)\rangle) \\
&= \|u(t)\|^{-1}(\langle \partial\varphi(-u(t)) + \partial\varphi(0), u(t) - 0\rangle + \langle f(t), u(t)\rangle) \\
&= \|u(t)\|^{-1}(\langle -(\partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(0)), u(t) - 0\rangle + \langle f(t), u(t)\rangle) \\
&= \|u(t)\|^{-1}(-\langle \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(0), u(t) - 0\rangle + \langle f(t), u(t)\rangle) \\
&\overset{\partial\varphi \text{ est momotone}}{\leq} \|u(t)\|^{-1}(0 + \|f(t)\|\|u(t)\|), \text{ (Inégalité de Cauchy Schwarz)} \\
&= \|f(t)\|, \text{ p.p} \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

On intégrons de t à $t+T$, on obtient

$$\int_t^{t+T} \frac{d}{ds}\|u(s)\| ds \leq \int_t^{t+T} \|f(s)\| ds,$$

et d'après le Lemme 1.7.11, nous avons

$$\|u(t+T)\| - \|u(t)\| \leq \int_{t}^{t+T} \|f(s)\|ds = \int_{0}^{T} \|f(s)\|ds \quad (= c_2),\ t \geq 0. \tag{3.1.12}$$

- Maintenant supposons que l'ensemble $\{u(t),\ t \geq 0\}$ est non bornée

Alors, il existe une suite $\{t_n\}$ dans $[0, +\infty[$ définie par

$$t_n = \inf\{t \geq 0,\ \|u(t)\| \geq n\},\ n \geq N, \tag{3.1.13}$$

où N est un entier assez grand.

Notez par définition que

$$\|u(s)\| \leq \|u(t_n)\| = n,\ 0 \leq s \leq t_n,\ n \geq N. \tag{3.1.14}$$

De (3.1.13) on obtient $t_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$,

fixer un arbitraire $n \geq N$ avec $t_n \geq T$.

Soit $v(t),\ t \in [t_n - T,\ +\infty[$ est une solution du problème de valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t) + \partial\varphi(v(t)) \ni 0, \quad t \geq t_n - T, \\ v(t_n - T) = u(t_n - T). \end{cases} \tag{E'}$$

Alors, on obtient les estimations suivantes

par la relation (3.1.10) et les deux equations (E) et (E'), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|v(t) - u(t)\| &= \left\{\|v(t) - u(t)\|^{-1}\langle v'(t) - u'(t), v(t) - u(t)\rangle\right\} \\
&= \|v(t) - u(t)\|^{-1}\left\{\langle -\partial\varphi(v(t)) - (-\partial\varphi(u(t)) + f(t)), v(t) - u(t)\rangle\right\} \\
&= \|v(t) - u(t)\|^{-1}\left\{\langle -\partial\varphi(v(t)) + \partial\varphi(u(t)), v(t) - u(t)\rangle - \langle f(t)), v(t) - u(t)\rangle\right\} \\
&= \|v(t) - u(t)\|^{-1}\left\{\langle -(\partial\varphi(v(t)) - \partial\varphi(u(t))), v(t) - u(t)\rangle + \langle f(t)), u(t) - v(t)\rangle\right\} \\
&= \|v(t) - u(t)\|^{-1}\left\{-\langle \partial\varphi(v(t)) - \partial\varphi(u(t)), v(t) - u(t)\rangle + \langle f(t)), u(t) - v(t)\rangle\right\} \\
&\leq \|v(t) - u(t)\|^{-1}\left\{0 + \|f(t)\|\,\|u(t) - v(t)\|\right\} \\
&= \|f(t)\|.
\end{aligned}$$

Puis on intégrons de $t_n - T$ à t_n, on obtient

$$\|v(t_n) - u(t_n)\| - \|v(t_n - T) - u(t_n - T)\| \leq \int_{t_n - T}^{t_n} \|f(t)\|dt.$$

Alors,

$$\|v(t_n)-u(t_n)\| \leq \int_{t_n-T}^{t_n} \|f(t)\|dt = \int_0^T \|f(t)\|dt, \ (=c_2). \tag{3.1.15}$$

Supposons que

$$\varphi(v(t_n)) \leq \varphi(v(t)), \ t \in [t_n - T, \ t_n[\tag{3.1.16}$$

On a

$$\frac{d}{dt}v(t) + \partial\varphi(v(t)) \ni 0 \Leftrightarrow v'(t) \in -\partial\varphi(v(t)) = \partial\varphi(-v(t)).$$

Alors, d'après la définition de sous-differentiel de φ, on aura

$$v'(s) \in -\partial\varphi(v(s)) \Leftrightarrow \varphi(-v(t_n)) - \varphi(-v(s)) \geq \langle v'(s), -v(t_n) + v(s)\rangle, \ \forall(-v(t_n)) \in D(\varphi),$$

et par (3.1.16), on a

$$\varphi(v(t_n)) - \varphi(v(t)) \leq 0, \ t \in [t_n - T, t_n[.$$

Comme φ est paire, on donne

$$\begin{aligned}
&0 \geq \varphi(v(t_n)) - \varphi(v(s)) \geq \langle v'(s), -v(t_n) + v(s)\rangle, \ \forall(-v(t_n)) \in D(\varphi), \ s \in [t_n - T, t_n[\\
&\Rightarrow \langle v'(s), -v(t_n) + v(s)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle v'(s), -v(t_n)\rangle + \langle v'(s), v(s)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle -v(t_n), v'(s)\rangle \leq -\langle v'(s), v(s)\rangle, \ \text{p.p } s \in [t_n - T, t_n[.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

De même, on utilisons la définition de sous-différentiel de φ, on trouve

$$\begin{aligned}
-v'(s) \in \partial\varphi(v(s)) &\Leftrightarrow \varphi(-v(t_n)) - \varphi(v(s)) \geq \langle -v'(s), -v(t_n) - v(s)\rangle, \ \forall(-v(t_n)) \in D(\varphi) \\
&\Leftrightarrow \varphi(v(t_n)) - \varphi(v(s)) \geq \langle -v'(s), -v(t_n) - v(s)\rangle.
\end{aligned}$$

D'après (3.1.16), on a

$$\begin{aligned}
&0 \geq \varphi(v(t_n)) - \varphi(v(s)) \geq \langle -v'(s), -v(t_n) - v(s)\rangle, \ s \in [t_n - T, t_n[\\
&\Rightarrow \langle -v'(s), -v(t_n) - v(s)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle -v'(s), -v(t_n)\rangle + \langle -v'(s), -v(s)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle v(t_n), v'(s)\rangle \leq -\langle v'(s), v(s)\rangle \leq 0 \\
&\Rightarrow \langle v(t_n), v'(s)\rangle \leq -\langle v'(s), v(s)\rangle \\
&\Rightarrow \langle v(t_n), v'(s)\rangle \leq \langle -v'(s), v(s)\rangle, \ \text{p.p } s \in [t_n - T, t_n[.
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Par (3.1.14) et (3.1.18), nous avons

$$\begin{aligned}
\langle v(t_n), v(t_n) - v(t_n - T)\rangle &= \langle v(t_n), \int_{t_n-T}^{t_n} v'(s)\rangle ds \\
&= \int_{t_n-T}^{t_n} \langle v(t_n), v'(s)\rangle ds \\
&\overset{(3.1.18)}{\leq} \int_{t_n-T}^{t_n} \langle -v(s), v'(s)\rangle ds \\
&= \int_{t_n-T}^{t_n} \langle -v'(s), v(s)\rangle ds \\
&= \int_{t_n}^{t_n-T} \langle v'(s), v(s)\rangle ds.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle = \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\langle v(t_n), v(t_n) - v(t_n - T) > &= \int_{t_n}^{t_n-T} \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|v(s)\|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}[\|v(t_n - T)\|^2 - \|v(t_n)\|^2] \\
&\leq \frac{1}{2}\|v(t_n - T)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}n^2. \qquad (3.1.19)
\end{aligned}$$

On pose $y = v(t_n) - u(t_n)$, et $z = v(t_n - T) + u(t_n)$ $(= u(t_n - T) + u(t_n))$. On a les estimations (3.1.9) et (3.1.15) signifient que $\|y\| \leq c_2$ et $\|z\| \leq c_1$ (respectivement).

Alors,

$$\begin{aligned}
\langle v(t_n), v(t_n) - v(t_n - T)\rangle &= \langle u(t_n) + y, u(t_n) + y + u(t_n) - z\rangle \\
&= \langle u(t_n), u(t_n)\rangle + \langle u(t_n), y\rangle + \langle u(t_n), u(t_n)\rangle \\
&- \langle u(t_n), z\rangle + \langle y, u(t_n)\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, u(t_n)\rangle - \langle y, z\rangle \\
&\geq 2\|u(t_n)\|^2 - 3\|u(t_n)\|\|y\| - \|u(t_n)\|\|z\| - \|y\|\|z\| + \|y\|^2 \\
&= 2\|u(t_n)\|^2 - 3\|u(t_n)\|c_2 - \|u(t_n)\|c_1 - c_1c_2 + c_2^2 \\
&= 2n^2 - n(3c_2 + c_1) + c_2(c_2 - c_1). \qquad (3.1.20)
\end{aligned}$$

D'après, les relations (3.1.19) et (3.1.20) donnent

$$2n^2 - n(3c_2 + c_1) + c_2(c_2 - c_1) \leq 2^{-1}n^2$$

et puisque c_1 et c_2 sont indépendants de n, cette estimation est une contradiction, donc l'ensemble $\{u(t),\ t \geq 0\}$ est borné. En utilisant le théorème de point fixe (Théorème 1.8.3), on conclut que (E) ademt une solution T-anti-périodique.

Etape 2 : l'unicité de la solution

On utilissons la Proposition 1.8.2, l'unicité de la solution anti-périodique à (E) est obtenue comme suit.

Soient u, v deux solutions T-anti-périodiques différents de (E), alors

$$\frac{d}{dt}u(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t), \tag{3.1.21}$$

$$\frac{d}{dt}v(t) + \partial\varphi(v(t)) \ni f(t), \tag{3.1.22}$$

par la soustraction entre les deux équations (3.1.21) et (3.1.22), on trouve

$$\frac{d}{dt}u(t) - \frac{d}{dt}v(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)) \ni 0, \tag{3.1.23}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)) \ni 0, \tag{3.1.24}$$

puis, multiplions les relations (3.1.23) et (3.1.24) par $(u(t) - v(t))$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t)\rangle + \langle \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \ni 0 \\
\Rightarrow\ &\langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t)\rangle \in -\langle \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \\
\Rightarrow\ &\langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t)\rangle \leq 0,\ \text{(car } \partial\varphi \text{ monotone)} \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 \leq 0,\ t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Ce qui donne que $t \mapsto \|u(t) - v(t)\|^2$ est décroissante et donc nous avons

$$\|u(0) - v(0)\| \geq \|u(t) - v(t)\| \geq \|u(2T) - v(2T)\|.$$

Puisque $u,\ v$ sont T-anti-périodiques nous avons

$$\|u(0) - v(0)\| = \|u(T) - v(T)\|.$$

Ce qui implique que $\|u(t) - v(t)\|$ est une constante pour tout $t \in [0, T]$, et ainsi

$$\langle \partial\varphi(u(t)) - \partial\varphi(v(t)), u(t) - v(t)\rangle = 0,\ \forall t \in [0, T].$$

Donc, l'unicité découle de la suit monotonie de $\partial\varphi$.

3.2 Une application à une équation de Lin's généralisée

L'équation de la chaleur

Puisque la condition (1) de Théorème 3.1.1 diffère de la coercive, le Théoreme 3.1.1 semble plus utile dans le cas équations de la chaleur non linéaire définies sur des domaines non bornés de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette section nous montrons l'éxistence d'une solution à l'équation suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{dt}(x,t) - \Delta v(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ \\ \dfrac{\partial v}{dn} + g[v(x,t) - h(x,t)] = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

avec

$$- v(x,t+T) = v(x,t), \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.2.2}$$

Où Ω est un domaine extérieur de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière compacte lisse Γ, et n désigne le vecteur normale éxtérieur sur Γ.

Dans la plupart des situations physiques g et h sont continues et $h(t)$ est périodique.

Notre résultat est le suivant

Théorème 3.2.1. *Supposons*

(g_1) *g est une fonction mesurable non dégénérée sur $\mathbb{R}$.*

(g_2) *g est impaire i.e., $g(-r) = -g(r), \ r \in \mathbb{R}$.*

(h_1) $h(.,t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, C^2(\Gamma))$.

(h_2) $h(.,t+T) = -h(.,t), \ t \in \mathbb{R}$.

Alors, il existe une solution unique $v \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ à (3.2.1) et (3.2.2).

Pour montrer ceci on exprime l'équation sous la forme de sous différentielle

$$\frac{d}{\mathrm{dt}} u(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{3.2.3}$$

qui est défini dans l'espace $L^2(\Omega)$ comme suivant.

La fonction h définie sur $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} h(.,t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}, H^2(\Omega)). \\ h(.,t+T) = -h(.,t), \ t \in \mathbb{R}. \\ \dfrac{\partial h}{\partial n}(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} u(x,t) = v(x,t) - h(x,t), \\ f(x,t) = \Delta h(x,t) - \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t). \end{cases}$$

On a

$$u(x,t) = v(x,t) - h(x,t.)$$

Donc,

$$v(x,t) = u(x,t) + h(x,t).$$

Sera implique que

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \frac{\partial h}{\partial n}(x,t).$$

Comme $\dfrac{\partial h}{\partial n}(x,t) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x,t).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} g(v(x,t) - h(x,t)) &= g(u(x,t) + h(x,t) - h(x,t)) \\ &= g(u(x,t)). \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) \\ \Delta v(x,t) &= \Delta u(x,t) + \Delta h(x,t). \end{aligned}$$

Alors,

$$(3.2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta h(x,t) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) + g(u(x,t)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = -\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) + \Delta h(x,t) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) + g(u(x,t)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) + g(u(x,t)) = 0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

En suite, nous avons

$$f(.,t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \text{ avec } f(.,t+T) = -f(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.2.5}$$

$$v(.,t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \ \Leftrightarrow u(.,t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega)). \tag{3.2.6}$$

$$v \ \text{ satisfait (3.2.1)} \ \Leftrightarrow \ u \text{ satisfait (3.2.4)}. \tag{3.2.7}$$

Posons

$$\varphi(u) = \begin{cases} 2^{-1}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Gamma G(u(s))ds & \text{si } u \in H(\Omega) \text{et le } 2^{\text{ème}}\text{terme est finie}, \\ \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Où G est la fonction définie par

$$G(r) = \int_0^r g(s)ds,\ r \in \mathbb{R}.$$

De puis (g_1), g est positive alors, G est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ (d'après le Théorème 1.4.9) .

Donc, φ est une fonction s.c.i. convexe sur $L^2(\Omega)$.

Par définition

$$D(\partial\varphi) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}(s) + g(u(s)) = 0, \ \text{ sur } \Gamma \right\} \tag{3.2.9}$$

$$\partial\varphi(u) = \{-\Delta u\}, \ \text{ pour } u \in D(\partial\varphi). \tag{3.2.10}$$

D'aprés, les relations (3.2.6),(3.2.7),(3.2.9) et (3.2.10) nous avons

Lemme 3.2.2. $v \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ *est une solution à* (3.2.1) *si et seulement si* u *est une solution à* (3.2.3) *avec* φ *définie par* (3.2.8).

Alors, les relations (3.2.6), (3.2.7), (3.2.9) et (3.2.10), et par suite le lemme 3.2.2 sont obtenus sous les hypothèses (g_1) et (h_1) du Théorème 3.2.1.

En suit, par (g_2) et (h_2), on obtient le Lemme suivante

Lemme 3.2.3. *On a*

(i) φ *est paire.*

(ii) $f(.,t+T) = -f(.,t),\ t \in \mathbb{R}$

- **Montrons que φ est paire**

  On montre que $\varphi(-u) = \varphi(u),\ \forall u \in H(\Omega)$, on a par définition

$$\varphi(-u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla(-u)(x)|^2 \, dx + \int_{\Omega} G(-u(s))ds.$$

On sait que

$$G(r) = \int_0^r g(s)ds,$$

$$\Rightarrow G(-u(s)) = \int_0^{-u(s)} g(\nu)d\nu.$$

Nous faissons le changement de variable suivant

posons

$$\begin{cases} \nu = -t \\ d\nu = -dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \nu = -u(s) \Rightarrow t = u(s). \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} G(-u(s)) &= \int_0^{u(s)} g(-t) - dt \\ &= -\int_0^{u(s)} g(-t)dt \\ &= -\int_0^{u(s)} -g(t)dt, \ (g \text{ impaire}) \\ &= \int_0^{u(s)} g(t)dtt \\ &= G(u(s)). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\nabla(-u(x)) = -\nabla(u(x)), \ (\nabla \text{ est un opérateur linéaire})$$

donc,

$$\begin{aligned} \varphi(-u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} |-\nabla u(x)|^2 dt + \int_{\Gamma} G(u(s))ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 ds + \int_{\Gamma} G(u(s))ds \\ &= \varphi(u), \ \forall u \in H(\Omega). \end{aligned}$$

d'où, φ est paire.

- **Montrons maintanant que** $f(.,t+T) = -f(.,t),\ \forall t \in \mathbb{R}$

on a

$$f(x,t) = -\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) + \Delta h(x,t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

donc,

$$f(x,t+T) = -\frac{\partial h}{\partial t}(x,t+T) + \Delta h(x,t+T),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

d'aprés, (h_2) du Théorème 3.2.1 on a,

$$\begin{aligned} h(x,t+T) &= -h(x,t) \\ \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t}(x,t+T) &= \frac{\partial}{\partial t}(-h(x,t)) \\ &= -\frac{\partial h}{\partial t}(x,t). \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

D'autre part, on a

$$\Delta h(x,t) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t),$$

alors,

$$\begin{aligned} \Delta h(x,t+T) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t+T) + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t+T) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-h(x,t)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-h(x,t)) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x,t)) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h(x,t)) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t)\right) \\ &= -\Delta h(x,t), \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

De (3.2.11) et (3.2.12), on obtient

$$\begin{aligned} f(x,t+T) &= -\frac{\partial h}{\partial t}(x,t+T) + \Delta h(x,t+T) \\ f(x,t+T) &= \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) - \Delta h(x,t) \\ &= -\left(-\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) + \Delta h(x,t)\right) \\ &= -f(x,t). \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant le Théorème 3.1.1, nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.2.1) et (3.2.2) donc, nous avons prouvé le Théorème 3.2.1.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le sous difféfentiel d'une fonction convexe propre, les opérateurs monotones et les opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert. Nous avons aussi étudier l'existence et l'unicité d'une solution anti-périodique d'un problème d'évolution non linéaire du premier ordre gouverné par le sous différentiel d'une fonction convexe, propre et s.c.i. et pour ce là nous avons présenter le travail de H. Okochi [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin, *Analyse Fonctionnelle Appliqué*, (1987).

[2] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours d'optimisation, Université de Jijel* (2016).

[3] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, cours de Topologie des espaces métriques, Université de Jijel* (2013).

[4] J. B. Baillon and A. Haraux, *Conpoertement a l'infini pour les équations d'évolution avec frocing periodic*, Arch.Rational Mech. Anal.,67(1977), 101-109.

[5] V. Bannet, *Cours de mathématiques*, Première S, Lycée Pontus de Tyard, 2088-2009.

[6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equation in Banach spaces*, Editura Academei Republicii Socialiste Române, Bucureşti celea Victorie 125, (1976).

[7] F. Bayen et Ch. Margaria, *Problème de mathématiques appliquées, Tome 2, Espaces de Hilbert et opérateurs*, 1986.

[8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, (1983).

[9] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et Semi-Groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Mathématics Studies, Notas de Mathématica N°50 (1973).

[10] N. El hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*, Dunod, Paris, (2011).

[11] G. Gripenberg, *On the asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups*, Math. Scand., 44(1979), 385-397.

[12] A. Haraux, *Equations d'volution nonlinéars, solutions bornées et periodiques*, Ann. Inst. Fourie, tome 28, $n^0 2$ (1978), p 201-220 .

[13] A. Haraux, *Equations d'volution nonlinéars, solutions linéaires et periodiques*, Ann. Inst. Fourie, 28(1978), 201-220 .

[14] J. V. Tiel, *Convex Analysis An Introductory Text*, New York, Singapore, (1984).

[15] T. Lepoint, *Théorie de la mesure et de l'intégration, Thierry Gallay,* université Joseph Fourier Grenoble, 2099.

[16] H. Okochi, *A note on Asymptotic Strong Convergence of Nonlinear Contraction Semigroups,* Proc. Japan Acad., 56, Ser. A (1980).

[17] H. Okochi, *On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations,* J. Math. Soc. Japan, Vol. 40, No. 3, 1988.

[18] A. Trenoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, *Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle,* traduction Française, Edition Mir, (1987).

[19] D. Wagner, *Survey of mesurable selection theorem,* Control Optimal. SIAM.J. Vol 15, (1977), p. 859-903.