

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCE DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre :

Série :

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ

Mathématiques

OPTION

Algèbre

Par

Mohamed KHALFAOUI

THÈME

**Variations sur la mesure de Mahler
de certaines familles de polynômes
à deux variables**

Soutenu le : 13/04/2013

Devant le Jury :

<i>Président :</i>	T. ZERZAIHI	Prof.	Université de Jijel
<i>Rapporteur :</i>	N. TOUAFEK	M.C.A	Université de Jijel
<i>Examineurs :</i>	N. TRABELSI	Prof.	Université de Sétif
	M. KERADA	M.C.A	Université de Jijel

Remerciements

Grâce à Dieu le tout puissant, j'ai pu terminer ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire Mr. Nouressadat TOUAFEK pour tout le temps qu'il m'a consacré, ainsi que pour son aide qu'il a patiemment apporté à la réalisation de ce mémoire.

Je suis très honoré que Mr. Tahar ZERZAIHI a accepté la présidence du jury et j'aimerais lui adresser de ce fait mes vifs remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Mr. Nadir TRABELSI qui m'a fait l'honneur d'avoir accepté d'être membre de mon jury et de faire le déplacement pour assister à ma soutenance.

Je remercie sincèrement Mr. Mohamed KERADA pour avoir accepté de faire partie du jury.

Tous mes remerciements à mes parents, mes frères, mes sœurs, et mes collègues.

Table des matières

Table des matières	i
INTRODUCTION	1
1 Généralités sur la mesure de Mahler	4
1.1 Mesure de Mahler	4
1.1.1 Premières Formules Explicites	6
1.2 Les courbes elliptiques	8
1.2.1 Loi de groupe	11
1.2.2 Série L et conducteur d'une courbe elliptique	12
1.2.3 Recherche d'une forme de Weierstrass	13
1.2.4 La famille des courbes $x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1) = 0$	14
1.2.5 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^2 = 0$	15
1.2.6 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 = 0$	16
1.2.7 La famille des courbes $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 = 0$	17
1.2.8 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1 = 0$	18
1.2.9 La famille des courbes $y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^3 = 0$	19
2 Mesure de Mahler de quelques polynômes non réciproques	20
2.1 Conjecture de Boyd	20
2.1.1 Polynôme tempérés	22
2.2 Mesure de Mahler de la famille $x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1)$	24
2.3 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^2$	35
2.4 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$	40
2.5 Mesure de Mahler de la famille $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$	48
2.6 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1$	51

2.7	Mesure de Mahler de la famille $y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^3$	57
3	Formules explicites de la dérivée de la mesure de Mahler	61
3.1	Les intégrales elliptiques	61
3.2	La famille $x(x + 1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1)$	62
3.3	La famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$	65
3.4	La famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1$	68
	Bibliographie	72

INTRODUCTION

La mesure de Mahler logarithmique d'un polynôme de Laurent $P \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ est, par définition,

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \dots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n}$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n / |x_1| = \dots = |x_n| = 1\}$$

et sa mesure de Mahler

$$M(P) = e^{m(P)}.$$

Celle-ci a été introduite en 1962 par Mahler [Mah62] pour montrer d'une manière simple l'inégalité de "Gel'fond-Mahler".

Si $P(x) = a_0 \prod_{j=1}^d (x - x_j) \in \mathbb{C}[x]$ est un polynôme d'une seule variable, la formule de Jensen donne

$$M(P) = |a_0| \prod_{j=1}^d \max(|x_j|, 1) = \Delta(P).$$

La quantité $\Delta(P)$ est la quantité considérée par D. H. Lehmer (1933) dans son fameux article [Leh33], où il pose sa célèbre question :

existe-t-il un polynôme P , unitaire à coefficients entiers, irréductible, non cyclotomique vérifiant

$$1 < \Delta(P) < \Delta(P_0) \simeq 1.1762\dots?$$

où P_0 est le polynôme de Lehmer

$$P_0(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1.$$

Cette question est toujours ouverte.

Le seul résultat partiel est dû à Smyth [Smy71] :

$$M(P) \geq M(x^3 - x - 1) \simeq 1.32\dots$$

si P est non réciproque.

L'intérêt pour le problème de Lehmer d'une meilleure connaissance de la mesure de Mahler de polynômes à plusieurs variables (indéterminés) a été mis en évidence par un résultat de Boyd [Boy81a] prouvant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P(x, x^n)) \longrightarrow m(P(x, y)).$$

La même année dans l'appendice d'un article de Boyd [Boy81b], Smyth donne les premières mesures de Mahler explicites.

Une vingtaine d'années plus tard, la mesure de Mahler de polynômes de deux variables suscita un regain d'intérêt grâce à une conjecture de Deninger [Den97]

$$m\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1\right) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2)$$

où $L(E, 2)$ est la série L de la courbe elliptique de conducteur 15 définie par

$$X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + 1 = 0$$

isomorphe à la courbe 15A8 = [1, 1, 1, 0, 0] des tables de Cremona [Cre97]. Cette formule a été obtenue en exprimant la mesure de Mahler comme une série d'Eisenstein-Kronecker d'une courbe elliptique et conjecturée à partir d'une conjecture de Belinson [Beï86].

Motivé par ce résultat Boyd [Boy98], s'intéressa au calcul numérique de la mesure de Mahler des polynômes de la forme

$$P_k(x, y) = k + Q(x, y), k \in \mathbb{Z}$$

où Q est un polynôme de Laurent à coefficients entiers en général de degré 2 au moins par rapport à l'une des variables. Il trouva des formules conjecturales du type

$$m(P_k) \stackrel{?}{=} r_k b_{E_k}$$

où $P_k = 0$ définit une courbe de genre 1, r_k un nombre rationnel et

$$b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2)$$

où N_k est le conducteur de la courbe elliptique E_k et $L(E_k, 2)$ sa série L.

Ainsi un nombre d'identités expérimentales entre mesures de Mahler ont été établies. Par exemple Boyd a trouvé que

$$\begin{cases} m((x + y + 1)(x + 1)(y + 1) + xy) & \stackrel{?}{=} 7b_{11} \\ m(y^2 + (x^2 + 2x - 1)y + x^3) & \stackrel{?}{=} 5b_{11} \end{cases}$$

avec, $b_{11} = \frac{11}{4\pi^2}L(E, 2)$ où E est la courbe $11A3 = [0, -1, 1, 0, 0]$ des tables de Cremona. $A \stackrel{?}{=} B$ veut dire : A et B sont numériquement égaux à au-moins 50 places décimales.

Le travail de Boyd a conduit à une conjecture connue maintenant sous le nom de conjecture de Boyd.

Selon une méthode initiée par Rodriguez-Villegas [Vil02], on peut relier la mesure de Mahler au régulateur elliptique, ce qui a permis de montrer quelques identités expérimentales, Rodriguez-Villegas [Vil02], Bertin [Ber04a], [Ber04b], [Tou08].

Dans notre mémoire, nous établissant le plan suivant.

Dans le chapitre 1, on donne quelques définitions et résultats sur la mesure de Mahler et l'arithmétique des courbes elliptiques. En particulier on s'intéresse à la recherche de la forme de Weierstrass des courbes définies par les polynômes non réciproques

$$P_{1,k}(x, y) = x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1),$$

$$P_{2,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^2,$$

$$P_{3,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1,$$

$$P_{4,k}(x, y) = x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1,$$

$$P_{5,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1,$$

$$P_{6,k}(x, y) = y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^3.$$

Dans le chapitre 2, on teste la conjecture de Boyd sur les polynômes

$$P_{1,k}, P_{2,k}, P_{3,k}, P_{4,k}, P_{5,k}, P_{6,k},$$

on donne aussi des formules explicites de leurs mesure de Mahler, en déduisant des identités globales entre mesures de Mahler des polynômes $P_{1,k}$, $P_{2,k}$ et \tilde{P}_k où

$$\tilde{P}_k(x, y) = (x+1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x+1).$$

Cette famille des polynômes a été étudiée par Boyd [Boy98].

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la dérivée de la mesure de Mahler, plus précisément on donne des formules explicites de la dérivée de la mesure de Mahler en fonction des intégrales elliptiques.

Chapitre 1

Généralités sur la mesure de Mahler

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats sur la mesure de Mahler et de l'arithmétique des courbes elliptiques. Un intérêt particulier a été accordé à la recherche de la forme de Weierstrass de certaines courbes définies par des polynômes de deux variables non réciproques qui feront l'objet de notre travail. On peut trouver plus de détails ainsi que les démonstrations des résultats dans de nombreux ouvrages, par exemple, Silverman [Sil09], Knapp [Kna92], Rolshausen [Rol96], Touafek [Tou08], Boyd [Boy98], Benferhat [Ben11] et Boughzala [Bou00].

1.1 Mesure de Mahler

Définition 1.1. Soit $P \in \mathbb{C}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm]$ un polynôme de Laurent en n variables. Sa mesure de Mahler logarithmique est, par définition,

$$m(P) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \dots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n},$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}$$

est le tore complexe de dimension n . La mesure de Mahler de P est

$$M(P) = e^{m(P)}.$$

Théorème 1.2 (Formule de Jensen). Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité vérifiant $f(0) \neq 0$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ désignent les zéros de $f(z)$

dans $\{z, |z| \leq 1\}$ comptés avec leurs multiplicités, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| - \sum_{j=1}^k \log |\alpha_j|.$$

Lemme 1.3. On a

$$m(ax + b) = \log(\max(|a|, |b|)), \quad a, b \in \mathbb{C}^*$$

et donc

$$M(ax + b) = |a| \max\left(1, \left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

Preuve. On a

$$m(ax + b) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log |ax + b| \frac{dx}{x}.$$

Posons $P(x) = ax + b$. P est analytique sur \mathbb{C} et $P(0) = b$ et admet pour racine $\alpha = \frac{-b}{a}$. Par le changement $x = e^{i\theta}$, on trouve

$$m(ax + b) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} \log |ae^{i\theta} + b| d\theta.$$

En appliquant la formule de Jensen, on aura :

1. Si $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$, i.e., $|b| > |a|$

$$m(ax + b) = \log |b| = \log(\max(|a|, |b|))$$

2. Si $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$, i.e., $|b| \leq |a|$

$$m(ax + b) = \log |b| - \log \left|\frac{b}{a}\right| = \log |a| = \log(\max(|a|, |b|))$$

□

Remarque 1.4. Si $n = 1$ et $P(x) = a_0 \prod_{j=1}^d (x - \alpha_j)$, par la formule précédente, on obtient

$$\int_{|x|=1} \log |P(x)| \frac{dx}{x} = \log |a_0| + \sum_{j=1}^d \log(\max(|\alpha_j|, 1)).$$

Plus généralement on a le résultat suivant

Proposition 1.5. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est donné par

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k), \quad a_0 \neq 0.$$

Alors

$$M(P) = |a_0| \prod_{j=1}^k \max(1, |\alpha_j|)$$

Remarque 1.6. Si $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme de deux variables on peut le regarder comme un polynôme d'une seule variable en y avec des coefficients qui sont des polynômes en x , en écrivant

$$P(x, y) = a_0(x) \prod_{j=1}^k (y - y_j(x))$$

avec $y_j(x)$, fonction algébrique a variable x . En intégrant et en utilisant la formule de Jensen, on obtient

$$m(P) = m(a_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \log^+ |y_j(x)| \frac{dx}{x}.$$

avec $\log^+ |y_j(x)| = \log(\max(1, |y_j(x)|))$

Proposition 1.7. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[x, y]$, on a

$$m(PQ) = m(P) + m(Q)$$

.

$$m(P(x, y)) = m(P(x^n y^m, x^q y^r))$$

avec $(n, m, q, r) \in \mathbb{Z}^4$.

1.1.1 Premières Formules Explicites

Dans [Smy81], Smyth donne l'une des premières mesures de Mahler explicites.

Proposition 1.8. On a

$$m(X + Y + 1) = d_3.$$

avec

$$d_f = \frac{f\sqrt{f}}{4\pi} L(\chi_{-f}, 2) = L'(\chi_{-f}, -1),$$

$$L(\chi_{-f}, 2) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_{-f}(n)}{n^2}$$

et

$$\chi_{-f}(n) = \left(\frac{-f}{n} \right)$$

est le caractère quadratique de Dirichlet de conducteur $f \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.9. Pour $f = 3$, on a

$$\chi_{-3}(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Aussi, par un résultat de Lewin [Lew81], on a

$$d_3 = \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

où

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^\theta \log |e^{it} - 1| dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2} \quad (\text{fonction de Clausen}).$$

Récemment, en 1997 Maillot [Mai97], et en termes du dilogarithme de Bloch et Wigner, a démontré une formule explicite pour la mesure de Mahler de $a_0x + a_1y + a_2$ lorsque $a_j \in \mathbb{C}$. Avant de donner ce résultat, on rappelle la définition du dilogarithme de Bloch et Wigner.

Définition 1.10. Dilogarithme de Bloch et Wigner

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, le dilogarithme de Bloch et Wigner est défini comme suit

$$\begin{aligned} D(z) &= \Im(L_{i_2}(z) + \log |z| \log(1 - z)) \\ &= \Im(L_{i_2}(z)) + \log |z| \arg(1 - z), \end{aligned}$$

avec $\arg(1 - z) \in [-\pi, \pi]$, où

$$\begin{aligned} L_{i_2}(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, |z| < 1 \\ &= - \int_0^z \log(1 - u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Théorème 1.11.

1. Si $|a_0|$, $|a_1|$ et $|a_2|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle plan, opposé aux angles α_0 , α_1 et α_2

$$m(a_0x + a_1y + a_2) = \frac{\alpha_0}{\pi} \log |a_0| + \frac{\alpha_1}{\pi} \log |a_1| + \frac{\alpha_2}{\pi} \log |a_2| + \frac{1}{\pi} D\left(\frac{|a_1|}{|a_0|} e^{i\alpha_2}\right)$$

2. Sinon

$$m(a_0x + a_1y + a_2) = \log(\max(|a_0|, |a_1|, |a_2|)).$$

1.2 Les courbes elliptiques

Soit K un corps.

Définition 1.12. Le **plan projectif** $\mathbb{P}_2(K)$ est l'ensemble des points $P = (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \in K^3$ modulo la relation d'équivalence \sim définie par :

Si $P, P' \in K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ alors $P \sim P' \Leftrightarrow \exists t \in K^* : P = tP'$.

i.e., $\mathbb{P}_2(K) = K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \sim$.

Remarque 1.13. Les éléments a, b et c du corps K , sont appelés les **coordonnés homogènes** du point P .

Plus généralement nous définissons $\mathbb{P}_n(K)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des $(n + 1)$ -uples suivants

$$\mathbb{P}_n(K) = \{(a_0, a_1, \dots, a_n) \in k^{n+1} \mid a_0, a_1, \dots, a_n \text{ non tous nul}\} / \sim$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (a'_0, a'_1, \dots, a'_n)$ s'il existe $t \in K^*$ tel que

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) = t(a'_0, a'_1, \dots, a'_n).$$

Un élément de $\mathbb{P}_n(K)$ sera noté par $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ ou $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$.

Définition 1.14. Un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme **homogène** de degré d si chacun de ses monômes est de degré d et on écrit $P \in K[X_1, \dots, X_n]_d$

Définition 1.15. Une courbe plane projective est l'ensemble de points $[X, Y, Z] \in \mathbb{P}_2(K)$ tel que

$$P(X, Y, Z) = 0$$

avec $P \in K[X, Y, Z]_d$ et $d \geq 1$. Le nombre d est appelé le degré de la courbe.

- Si $d = 1$, la courbe est appelée une droite.
- Si $d = 2$, une conique.
- Si $d = 3$, une cubique.

Définition 1.16. Le plan affine (usuel) noté $\mathbb{A}^2(K)$ est l'ensemble des points $(x, y) \in K^2$.

Remarque 1.17. Introduisons les coordonnés X, Y, Z telles que $x = X/Z$ et $y = Y/Z$, alors à tout point (x, y) de $\mathbb{A}_2(K)$ correspond le point (X, Y, Z) de $\mathbb{P}_2(K)$. Réciproquement, si $Z \neq 0$, alors à tout point (X, Y, Z) de $\mathbb{P}_2(K)$ correspond le point (x, y) de $\mathbb{A}_2(K)$. Voyons

à présent ce qui se passe quand $Z = 0$. Considérons, dans $\mathbb{A}_2(K)$, deux droites parallèles $L : ax + by + c = 0$ et $L' : a'x + b'y + c' = 0$ où $a' = ta$ et $b' = tb$. En coordonnées homogènes, ces droites s'écrivent $L : aX + bY + cZ = 0$ et $L' : a'X + b'Y + c'Z = 0$. L'intersection de ces droites aura lieu en un point pour lequel $Z = 0$. Un tel point est appelé point à l'infini.

Proposition 1.18. *Deux droites projective distinctes $L : aX + bY + cZ = 0$ et $L' : a'X + b'Y + c'Z = 0$ ont un unique point d'intersection. De plus deux points distincts de $\mathbb{P}_2(K)$ définissent une et une seule droite.*

Définition 1.19. Une courbe elliptique sur K , est une paire (E, \mathcal{O}) , où E est une cubique irréductible non singulière (lisse) et $\mathcal{O} \in E$, i.e.,

$$E : F(X, Y, Z) = aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 + eX^2Z + fXYZ + gY^2Z + hXZ^2 + jYZ^2 + kZ^3 = 0$$

avec les coefficient $a, b, c, \dots, k \in K$ et $F(\mathcal{O}) = 0$.

Définition 1.20. Un point P de la courbe E est dit point singulier, si et seulement si

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$

La courbe E est dite non singulière si elle n'admet pas des points singuliers.

Définition 1.21. L'ensemble

$$E(K) = \{P \in \mathbb{P}_2(K) / F(P) = 0\}$$

est appelé l'ensemble des points rationnels (ou K -rationnels) de E .

Théorème 1.22 ([Joy95]). *Soit E une courbe elliptique sur K , alors il existe une application*

$$\varphi : E(K) \rightarrow \mathbb{P}_2(K)$$

qui fournit un isomorphisme de $E(K)$ sur une courbe elliptique $C(K)$ donné par l'équation de Weierstrass

$$C : G(X, Y, Z) = Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 - X^3 - a_2X^2Z - a_4XZ^2 - a_6Z^3 = 0$$

où $a_1, a_2, \dots, a_6 \in K$, et tel que $\varphi(\mathcal{O}) = (0, 1, 0)$.

Remarque 1.23. Dans la suite, et pour alléger les notations, on définit une courbe elliptique E sur K par l'équation de Weierstrass (en coordonnées affines)

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

plus le point à l'infini $\mathcal{O} = [0, 1, 0]$, et on écrit $E = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_6]$.

Définition 1.24. Le discriminant Δ de E est la quantité

$$\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6,$$

et son j -invariant est la quantité

$$j(E) = \frac{c_4^3}{\Delta}$$

avec

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, & b_4 &= 2a_4 + a_1a_3, & b_6 &= a_3^3 + 4a_6, \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2, & c_4 &= b_2^2 - 24b_4 \end{aligned}$$

Remarque 1.25. E non singulière $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$.

Remarque 1.26. Soit E une courbe elliptique sur K .

$$\begin{aligned} y^2 + a_1xy + a_3y &= x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \\ Y^2 + A_1XY + A_3Y &= X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6. \end{aligned}$$

deux modèles de Weierstrass de E . Alors il existe $r, s, t \in K$ et $u \in K^*$ vérifiant

$$\begin{cases} x = u^2X + r \\ y = u^3Y + su^2X + t \end{cases}$$

et définissant entre les deux modèles un changement de coordonnées dit **admissible**.

Remarque 1.27. Toute courbe elliptique E admet un modèle de Weierstrass minimal (Δ minimal) unique avec $a_1, a_3 \in \{0, 1\}$, $a_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

Remarque 1.28. La quantité $j(E)$ est invariante par les changements des variables admissibles.

Définition 1.29 (Genre d'une courbe algébrique). Soit C une courbe algébrique de degré d et S l'ensemble des points singuliers ordinaires de C . Alors le genre g de la courbe C est donné par la formule

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in S} \frac{r_P(r_P-1)}{2}$$

avec r_P est la multiplicité du $P \in S$.

Remarque 1.30. Comme une courbe elliptique est une cubique non singulière alors son genre est égale à

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} = \frac{(3-1)(3-2)}{2} = 1$$

1.2.1 Loi de groupe

Règle de la sécante

Proposition 1.31. Soit C une cubique irréductible non singulière et une droite définie sur K . Si la cubique C a deux points d'intersection (comptés avec leur multiplicité) avec la droite, alors C a trois points d'intersection (comptés avec leur multiplicité) avec la droite.

Remarque 1.32. La proposition précédente permet de définir la loi de composition de la sécante tangente :

1. Si $P, Q \in C(K)$ et si $P \neq Q$, alors nous définissons $L = PQ$, la droite sécante qui passe par P et Q . Par la proposition précédente nous savons qu'il existe un troisième point unique (en comptant les multiplicités) qui appartient à $C \cap L$, nous notons ce troisième point $P * Q$.
2. Si $P \in C(K)$ alors nous définissons $L = PP$, la droite tangente à C qui passe par P . Par la proposition précédente nous savons qu'il existe un troisième point unique (en comptant les multiplicités) qui appartient à $C \cap L$, nous notons ce troisième point $P * P$.

Théorème 1.33 (Théorème de Poincaré). Soit (E, \mathcal{O}) une courbe elliptique définie sur K . Alors l'opération

$$P + Q = \mathcal{O} * (P * Q)$$

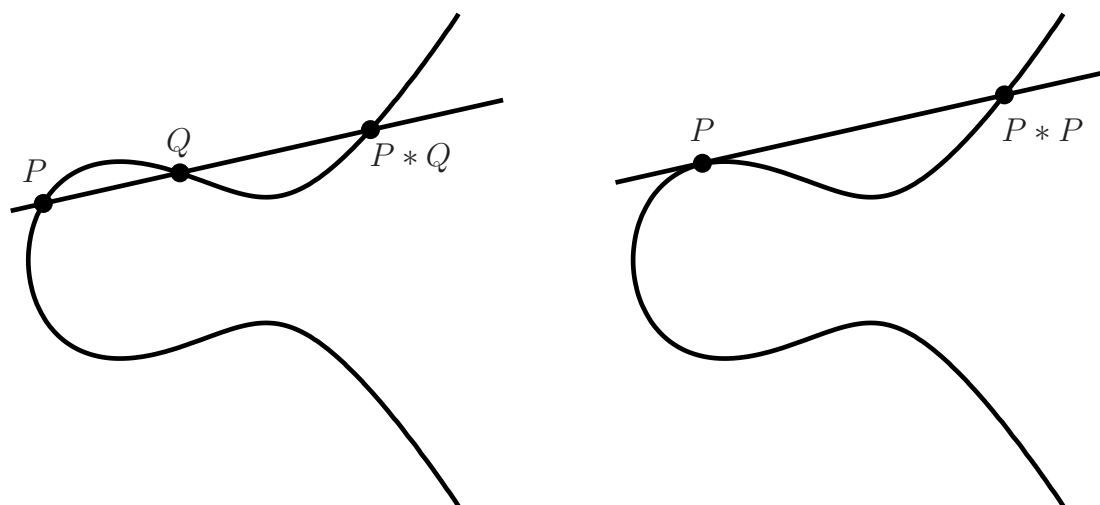


FIGURE 1.1 – Règle de la sécante tangente

définit une structure de groupe commutatif ayant \mathcal{O} comme élément neutre. De plus, si \mathcal{O}' est un autre point de la courbe elliptique, alors l'opération

$$P \oplus Q = \mathcal{O}' * (P * Q)$$

définit une structure de groupe isomorphe au premier.

1.2.2 Série L et conducteur d'une courbe elliptique

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} . On définit la fonction L de la courbe elliptique E , convergente pour $\Re(s) > \frac{3}{2}$ par

$$L(E, s) = \prod_{p \notin S} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} \prod_{p \in S} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}}$$

avec p nombre premier, S l'ensemble des nombres premiers de mauvaise réduction, i.e., la courbe $E \bmod (p)$ est une courbe singulière et

$$a_p = p + 1 - N_p$$

où $N_p = \text{card}(E(\mathbb{F}_p))$, nombre de points de $E \bmod (p)$.

Si $E \bmod (p)$ noté E_p est singulière, elle ne peut avoir qu'un seul point singulier et l'ensemble des point non singulier $\bmod (p)$ noté $E^{ns} \bmod (p)$ possède une structure de

groupe.

$$E^{ns} \bmod (p) = \begin{cases} \text{card}(E^{ns} \bmod (p)) & \text{card}(E \bmod (p)) & a_p \\ (\mathbb{F}_p, +) & p & p+1 & 0 \\ (\mathbb{F}_p^*, \cdot) & p-1 & p & 1 \\ (\mathbb{F}_{p^2}^*/\mathbb{F}_p^*, \cdot) & p+1 & p+2 & -1 \end{cases}$$

$$a_p = \begin{cases} 0; & \text{mauvaise reduction en } p, \text{ (point de reboursement : reduction additive)} \\ 1; & \text{mauvaise reduction en } p, \text{ (noeud : reduction multiplicative d\u00e9ploy\u00e9e)} \\ -1; & \text{mauvaise reduction en } p, \text{ (noeud : reduction multiplicative non d\u00e9ploy\u00e9e)}. \end{cases}$$

Le conducteur N de la courbe elliptique E est par d\u00e9finition un entier qui est le produit des diff\u00e9rences puissance des nombres premiers o\u00f9 E_p a des points singuliers ; i.e., ceux qui divisent le discriminant. Si f_p est la puissance d'un nombre premier p facteur de N , alors $f_p = 1$ si la r\u00e9duction est multiplicative en p , $2 + \delta_p$ si la r\u00e9duction est additive. Dans ce cas, si $p \neq 2, 3$ on a $\delta_p = 0$ sinon par une formule de Ogg, on a $\delta_p = \text{ord}(\Delta) + 1 - m_p$ o\u00f9 m_p est le nombre de composantes distinctes du mod\u00e8le de N\u00e9ron.

1.2.3 Recherche d'une forme de Weierstrass

Dans cette section, on s'int\u00e9resse \u00e0 la la recherche d'une forme de Weierstrass des courbes qu'on va \u00e9tudier dans la suite de notre m\u00e9moire.

Le Th\u00e9or\u00e8me suivant d\u00e9crit une m\u00e9thode pour trouver un mod\u00e8le de Weierstrass d'une quartique d'\u00e9quation

$$y^2 = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4$$

lorsque f_4 est carr\u00e9 sur Q , voir [Cas91].

Th\u00e9or\u00e8me 1.34. *La courbe d'\u00e9quation affine*

$$y^2 = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + x^4$$

est isomorphe \u00e0 la forme de Weierstrass d'\u00e9quation

$$Y^2 + 2g_1YX + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X$$

o\u00f9 g_1, g_0, h_1, h_0 v\u00e9rifiant

$$(x^2 + g_1x + g_0)^2 + h_1x + h_0 = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + x^4.$$

L'isomorphisme est donné par :

$$\begin{cases} X = 2y + 2(x^2 + g_1x + g_0) \\ Y = 2xX \end{cases}$$

Preuve. Posons

$$y^2 = [G(x)]^2 + H(x),$$

ainsi

$$(y - G(x))(y + G(x)) = H(x).$$

Posant $T = y + G(x)$, on aura

$$\begin{aligned} (y - G(x)) &= \frac{H(x)}{T} \\ 2G(x) &= T - \frac{H(x)}{T} \end{aligned} \tag{1.1}$$

en multipliant l'égalité (1.1) par T^2 et en posant $S = Tx$, on obtient

$$2S^2 + 2g_1TS + h_1S = T^3 - 2g_0T^2 - h_0T.$$

Multiplions par 8 et posons $X = 2T$ et $Y = 4S$, on obtient la forme de Weierstrass

$$Y^2 + 2g_1YX + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X.$$

L'isomorphisme est donné par

$$\begin{cases} X = 2y + 2(x^2 + g_1x + g_0) \\ Y = 2xX. \end{cases}$$

□

1.2.4 La famille des courbes $x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1) = 0$

Soit la famille des courbes $C_{1,k} = \{P_{1,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{1,k}(x, y) = x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1) \tag{1.2}$$

Lemme 1.35. *Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{1,k}$ est donné par l'équation*

$$E_{1,k} : Y^2 = X^3 + k^2X^2 + 8k(k-2)X + 16(k-2)^2 \tag{1.3}$$

avec $X = 4(k-2)x$, $Y = 4(k-2)(2x(x+1)y + 2x^2 + kx + 1)$.

Preuve. L'équation $P_{1,k}(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$y_1^2 = (4k - 8)x^3 + k^2x^2 + 2kx + 1$$

avec

$$y_1 = 2x(x + 1)y + 2x^2 + kx + 1.$$

Alors

$$[(4k - 8)y_1]^2 = [(4k - 8)x]^3 + k^2[(4k - 8)x]^2 + 2k(4k - 8)[(4k - 8)x]$$

Posons $X = 4(k - 2)x$, $Y = 4(k - 2)y_1$, on obtient la forme de Weierstrass

$$Y^2 = X^3 + k^2X^2 + 8k(k - 2)X + 16(k - 2)^2.$$

□

Remarque 1.36. On a $\Delta = 4096(k + 6)(k - 3)^2(k - 2)^3$ avec Δ est le discriminant de $E_{1,k}$. Il est clair que pour $k = -6, 2, 3$ le discriminant est nul.

1.2.5 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^2 = 0$

Soit la famille des courbes $C_{2,k} = \{P_{2,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{2,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^2. \quad (1.4)$$

Pour simplifier les calculs, on ordonne $P_{2,k}$ par rapport à x

$$P_{2,k}(x, y) = (y + 1)x^2 + (y^2 + ky + 2)x + x + y + 1$$

Lemme 1.37. Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{2,k}$ est donné par l'équation :

$$E_{2,k} : Y^2 + 2kXY + 8(k - 2)Y = X^3 \quad (1.5)$$

avec $X = 4[(y + 1)x + y^2 + ky + 1]$, $Y = 8y[(y + 1)x + y^2 + ky + 1]$.

Preuve. Par le changement de variable $x_1 = 2(y + 1)x + y^2 + ky + 2$, l'équation $P_{2,k}(x, y) = 0$ se transforme à l'équation quartique

$$x_1^2 = y^4 + 2ky^3 + k^2y^2 + (-8 + 4k)y$$

En utilisant le théorème 1.34 on a la forme de Weierstrass

$$E_{2,k} : \quad Y^2 + 2kXY + 8(k-2)Y = X^3$$

avec

$$\begin{cases} X = 2x_1 + 2y^2 + 2ky \\ Y = 2yX \end{cases}$$

et les fonctions G et H du théorème sont données

$$\begin{aligned} G(x) &= y^2 + ky \\ H(x) &= 4(k-2)y. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.38. On a $\Delta = 4096(k+6)(k-3)^2(k-2)^3$ avec Δ est le discriminant de $E_{2,k}$. Il est clair que pour $k = -6, 2, 3$ le discriminant est nul.

1.2.6 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 = 0$

Soit la famille des courbes $C_{3,k} = \{P_{3,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{3,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 \quad (1.6)$$

Pour simplifier les calculs, on ordonne $P_{3,k}$ par rapport à x

$$P_{3,k}(x, y) = (y+1)x^2 + (y^2 + ky)x + y + 1$$

Lemme 1.39. *Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{3,k}$ est donné par l'équation :*

$$E_{3,k} : \quad Y^2 + 2kXY + 8(k-2)Y = X^3 + 8X^2 + 32X \quad (1.7)$$

avec $X = 4[(y+1)x + y^2 + ky - 1]$, $Y = 8y[(y+1)x + y^2 + ky - 1]$.

Preuve. Par le changement de variable $x_1 = 2(y+1)x + y^2 + ky$, l'équation $P_{3,k}(x, y) = 0$ se transforme à l'équation quartique

$$x_1^2 = y^4 + 2ky^3 + (k^2 - 4)y^2 - 8y - 4$$

En utilisant le théorème 1.34 on a la forme de Weierstrass

$$E_{3,k} : \quad Y^2 + 2kXY + 8(k-2)Y = X^3 + 8X^2 + 32X$$

avec

$$\begin{cases} X = 2x_1 + 2y^2 + 2ky - 4 \\ Y = 2yX \end{cases}$$

et les fonctions G et H du théorème sont données

$$\begin{aligned} G(x) &= x^2 + kx - 2 \\ H(x) &= 4(k - 2)x - 8. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.40. On a $\Delta = 4096(k^2 + 4k - 4)(k^2 - 4k + 12)(k - 1)^2$ avec Δ est le discriminant de $E_{3,k}$. Il est clair que pour $k = 1$ le discriminant est nul.

1.2.7 La famille des courbes $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 = 0$

Soit la famille des courbes $C_{4,k} = \{P_{4,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{4,k}(x, y) = x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1 \quad (1.8)$$

Lemme 1.41. *Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{4,k}$ est donné par l'équation :*

$$E_{4,k}: \quad Y^2 = X^3 + k^2X^2 + 8k^2X + 16k^2 \quad (1.9)$$

avec $X = 4kx$, $Y = 4k[(2y + 2)x^2 + kx + 1]$.

Preuve. L'équation $P_{4,k}(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$y_1^2 = 4kx^3 + k^2x^2 + 2kx + 1$$

avec

$$y_1 = 2x^2y + 2x^2 + kx + 1.$$

Alors

$$[4ky_1]^2 = [4kx]^3 + k^2[4kx]^2 + 8k^2[4kx] + (4k)^2.$$

Posons $X = 4kx$, $Y = 4ky_1$, on obtient la forme de Weierstrass

$$Y^2 = X^3 + k^2X^2 + 8k^2X + 16k^2.$$

□

Remarque 1.42. On a $\Delta = 4096k^4(k^2 - 27)$ avec Δ est le discriminant de $E_{4,k}$. Il est clair que pour $k = 0$ le discriminant est nul.

1.2.8 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1 = 0$

Soit la famille des courbes $C_{5,k} = \{P_{5,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{5,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1. \quad (1.10)$$

Pour simplifier les calculs, on ordonne $P_{5,k}$ par rapport à x

$$P_{5,k}(x, y) = (y + 1)x^2 + (y^2 + ky + 1)x + y + 1$$

Lemme 1.43. *Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{5,k}$ est donné par l'équation :*

$$E_{5,k} : \quad Y^2 + 2kXY + 8(k - 2)Y = X^3 + 4X^2 + 16X \quad (1.11)$$

avec $X = 4[(y + 1)x + y^2 + ky]$, $Y = 8y[(y + 1)x + y^2 + ky]$.

Preuve. Par le changement de variable $x_1 = 2(y + 1)x + y^2 + ky + 1$, l'équation $P_{5,k}(x, y) = 0$ se transforme à l'équation quartique

$$x_1^2 = y^4 + 2ky^3 + (k^2 - 2)y^2 + 2(k - 4)y - 3$$

En utilisant le théorème 1.34 on a la forme de Weierstrass

$$E_{5,k} : \quad Y^2 + 2kXY + 8(k - 2)Y = X^3 + 4X^2 + 16X$$

avec

$$\begin{cases} X = 2x_1 + 2y^2 + 2ky - 2 \\ Y = 2yX \end{cases}$$

et les fonctions G et H du théorème sont données

$$\begin{aligned} G(x) &= x^2 + kx - 1 \\ H(x) &= 4(k - 2)x - 4. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.44. On a $\Delta = 4096(k^2 - 4k + 8)(k^2 + 4k - 8)(k - 2)^2$ avec Δ est le discriminant de $E_{5,k}$. Il est clair que pour $k = 2$ le discriminant est nul.

1.2.9 La famille des courbes $y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^3 = 0$

Soit la famille des courbes $C_{6,k} = \{P_{6,k}(x, y) = 0\}$ où

$$P_{6,k}(x, y) = y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^3 \quad (1.12)$$

Lemme 1.45. *Un modèle de Weierstrass de la famille des courbes $C_{6,k}$ est donné par l'équation :*

$$\begin{aligned} E_{6,k} : \quad Y^2 + 2(k-2)XY - 8(k^2 - 6k + 10)Y \\ = \\ X^3 - 4(2k-7)X^2 + 16(k^2 - 7k + 13)X \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec $X = 2(x^2 + y^2) + 2(2y + k)x + 2ky + 4k - 12$, $Y = 4x[x^2 + y^2 + (2y + k)x + ky + 2k - 6]$,
et de discriminant

$$\Delta_6(k) = -4096(k^3 + k^2 - 36k + 87)(k - 2)^4$$

Preuve. Par le changement de variable $y_1 = 2y + x^2 + kx + 1$, l'équation $P_{6,k}(x, y) = 0$ se transforme à l'équation quartique

$$y_1^2 = x^4 + 2(k-2)x^3 + (k^2 - 10)x^2 + 2(k-6)x - 3$$

En utilisant le théorème 1.34 on a la forme de Weierstrass

$$\begin{aligned} E_{6,k} : \quad Y^2 + 2(k-2)XY - 8(k^2 - 6k + 10)Y \\ = \\ X^3 - 4(2k-7)X^2 + 16(k^2 - 7k + 13)X \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} X = 2y_1 + 2x^2 + 2(k-2)x + 4k - 14 \\ Y = 2xX \end{cases}$$

et les fonctions G et H du théorème sont données

$$\begin{aligned} G(x) &= x^2 + (k-2)x + 2k - 7 \\ H(x) &= -4(k^2 - 6k + 10)x - 4(k^2 - 7k + 13) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.46. On a $\Delta = -4096(k^3 + k^2 - 36k + 87)(k - 2)^4$ avec Δ est le discriminant de $E_{6,k}$. Il est clair que pour $k = 2$ le discriminant est nul.

Chapitre 2

Mesure de Mahler de quelques polynômes non réciproques

Dans ce chapitre, on reprend les familles des polynômes non réciproques du chapitre précédent. On établit numériquement le lien entre mesure de Mahler et la série L correspondante, on donne des formules explicites pour la mesure de Mahler ce qui permet de déduire des identités globales entre mesure de Mahler de certaines familles.

2.1 Conjecture de Boyd

En 1997 Deninger a conjecturé l'égalité suivante

$$m\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2),$$

où $L(E, 2)$ est la série L de la courbe elliptique de conducteur 15 définie par

$$X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} = 0,$$

isomorphe à la courbe 15A8 = [1, 1, 1, 0, 0] des tables de Cremona [Cre97]. Cette relation a été obtenue en exprimant la mesure de Mahler comme une série d'Eisenstein-Kronecker d'une courbe elliptique et conjecturée à partir d'une conjecture de Beilinson.

Motivé par ce résultat, Boyd [Boy98] s'intéressa au calcul numérique de la mesure de Mahler des polynômes de la forme

$$P_k(x, y) = k + Q(x, y), \quad k \in \mathbb{Z}$$

où Q est un polynôme de Laurent à coefficient entiers. Il trouva une famille de formules conjecturales du type

$$m(P_k) \stackrel{?}{=} r_k b_{E_k}$$

avec $P_k = 0$ définissant une courbe elliptique E_k de genre 1, r_k un nombre rationnel et

$$b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2)$$

où N_k est le conducteur de la courbe elliptique E_k et $L(E_k, 2)$ sa série L .

Ainsi nombre d'identités expérimentales entre mesure de Mahler ont été établit. Par exemple, Boyd a trouvé que

$$\begin{cases} m((x+y+1)(x+1)(y+1)+xy) \stackrel{?}{=} 7b_{11} \\ m(y^2+(x^2+2x-1)y+x^3) \stackrel{?}{=} 5b_{11} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $b_{11} = \frac{11}{4\pi^2} L(E, 2)$ où E est la courbe 11A3 = [0, -1, 1, 0, 0] des tables de Cremona.

Il résulte de 2.1 que :

$$5m((x+y+1)(x+1)(y+1)+xy) \stackrel{?}{=} 7m(y^2+(x^2+2x-1)y+x^3)$$

cette identité a été démontrée par Bertin [Ber04a].

D'autres identités expérimentales ont été démontrées par Rodriguez-Villegas [Vil02], Bertin [Ber04b], Touafek [Tou08].

Le travail de Boyd a conduit à la conjecture suivante.

Conjecture 2.1 (Conjecture de Boyd). *Soit $P(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$, un polynôme à coefficients entiers, ne s'annulant pas sur la tore. On suppose que*

1. $D(x) = B^2(x) - 4A(x)C(x)$ soit de degré 3 ou 4,
2. Tous les polynômes P_f associés aux faces du polygone de Newton de P n'ont comme racines que des racine de l'unité. (Condition notée A par Boyd),
3. $m(P(x, y))$ s'exprime comme un multiple rationnel de l'intégrale de ω

$$\omega = \frac{1}{2\pi} (\log |y| d \log |x| - \log |x| d \log |y|)$$

le long des deux bords d'une coupure effectuée entre deux points de ramifications de $y(x)$, où $y(x)$ est la fonction algébrique définie par $P(x, y) = 0$. (Condition notée B par Boyd),

4. $P(x, y) = 0$ définit une courbe elliptique.

Alors, $m(P)$ est un multiple rationnel de b_E où

$$b_E = \frac{N}{4\pi^2} L(E, 2).$$

Remarque 2.2.

Si le polynôme P est un polynôme tempéré, alors la condition (2) de la conjecture de Boyd est satisfaite.

2.1.1 Polynôme tempérés

Définition 2.3. Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. On notera $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, avec $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Par suite

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m x^m$$

On appelle polygone de Newton Δ_P associé au polynôme P , l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{m \in \mathbb{Z}^n / a_m \neq 0\}$.

Définition 2.4 ([[Vil99](#)]). A une face τ du polygone de Newton on associe un polynôme P_τ d'une variable. Le degré de ce polynôme est égal au nombre de points du réseau situés sur la face moins un. On définit P_τ par

$$P_\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} t^k,$$

si

$$P(x, y) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{(n,m)} x^n y^m$$

où on a numéroté les points du réseau par $\tau(0), \tau(1), \dots$

Soit P le polynôme

$$P(x, y) = y^2 + a_1 xy + a_3 y - x^3 - a_2 x^2 - a_4 x - a_6.$$

Alors son polygone de Newton est un triangle avec un seul point intérieur (voir [FIGURE 2.1](#)).

Les polynômes de faces associées sont :

$$P_{\tau_1}(t) = -a_6 - a_4 t - a_2 t^2 - t^3$$

$$P_{\tau_2}(t) = -1 + t$$

$$P_{\tau_3}(t) = 1 + a_3 t - a_6 t^2$$

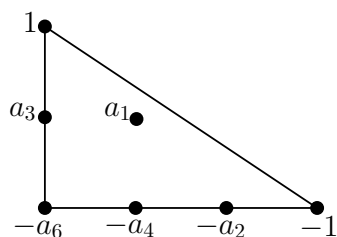


FIGURE 2.1 – Polygone de Newton

Définition 2.5. Un polynôme P est dit tempéré si les polynômes de faces associées au polygone de Newton n'ont pour racines que des racines de l'unité.

Dans la suite, et motivé par le travail de Boyd, on s'intéresse à la mesure de Mahler des polynômes non réciproques :

$$\begin{aligned}
 P_{1,k}(x, y) &= x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1), & k \in \mathbb{Z} \\
 P_{2,k}(x, y) &= xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^2, & k \in \mathbb{Z} \\
 P_{3,k}(x, y) &= xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1, & k \in \mathbb{Z} \\
 P_{4,k}(x, y) &= x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1, & k \in \mathbb{Z} \\
 P_{5,k}(x, y) &= xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1, & k \in \mathbb{Z} \\
 P_{6,k}(x, y) &= y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x+1)^3, & k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Définition 2.6. Un polynôme d'une variable serait réciproque si $x^d P(1/x) = P(x)$ pour un certain nombre entier d . Autrement le polynôme est non réciproque. Un polynôme P de n variable est dit réciproque si

$$\frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un monôme de la forme $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$, $b_i \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2.7.

- Les polynômes $P_{1,k}, \dots, P_{6,k}$ sont non réciproques.
- Les polynômes $P_{1,k}, \dots, P_{6,k}$ sont des polynômes tempérés.

2.2 Mesure de Mahler de la famille $x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1)$

Considérons le polynôme $P_{1,k}(x, y) = x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1)$. Pour simplifier les calculs, en ordonnant $P_{1,k}$ par rapport à x , on obtient

$$P_{1,k}(x, y) = (y^2 + 2y + 1)x^2 + (y^2 + 1 + ky)x + y.$$

Posons $y = e^{it}$, on obtient

$$P_{1,k}(x, e^{it}) = e^{it}Q(x, t)$$

avec

$$Q(x, t) = (2 + 2 \cos t)x^2 + (2 \cos t + k)x + 1$$

comme $|P_{1,k}(x, y)| = |Q(x, t)|$, il en résulte que

$$m(P_{1,k}) = m(Q).$$

On a

$$Q(x, t) = (2 + 2 \cos t)(x - x_1(t))(x - x_2(t)) \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \\ x_2(t) = -\frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \end{cases} \tag{2.3}$$

et

$$\Delta = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8).$$

Donc

$$m(P_{1,k}) = m(2 + 2 \cos t) + m(x - x_1(t)) + m(x - x_2(t)).$$

Mais

$$y^2 + 2y + 1 = y \underbrace{\left(2 + y + \frac{1}{y}\right)}_{2+2 \cos t},$$

$$m(y^2 + 2y + 1) = \underbrace{m[(y+1)^2]}_{=0} = \underbrace{m(y)}_{=0} + m(2 + 2 \cos t).$$

Ainsi $m(P_{1,k}) = m(x - x_1(t)) + m(x - x_2(t))$. Ainsi en appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$m(P_{1,k}) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |x_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |x_2(t)| dt \right],$$

le cosinus est une fonction paire alors x_1 et x_2 sont aussi des fonctions paires et donc

$$m(P_{1,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \log^+ \left| \frac{-k - 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \right| dt + \int_0^\pi \log^+ \left| \frac{-k - 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \right| dt \right] \quad (2.4)$$

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série L $L(E_{1,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.1.

Remarque 2.8.

- Grâce aux travaux de Deninger [Den97], Beilinson [Bei80], Scholl [Sch94], Deligne [Del79]; la mesure de Mahler d'un polynôme P ne s'annulant pas sur le tore peut être reliée à une valeur de la fonction L .

Ainsi il n'y a aucune raison pour espérer que la mesure de Mahler d'un polynôme P soit un multiple rationnel de $b_E = \frac{N}{4\pi^2} L(E, 2)$ si P s'annule sur le tore.

- Soit \mathbb{K}_1 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{1,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_1 = \{k \in \mathbb{C} / P_{1,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

\mathbb{K}_1 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{(y^2 + 2y + 1)x^2 + (y^2 + 1)x + y}{xy}$$

La FIGURE 2.2 donne l'ensemble \mathbb{K}_1 .

Remarque 2.9. Pour $k \in [-20, -7] \cup [4, 20]$ on a r_k un nombre rationnel ; pour $k \in [-5, 1]$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-5, 1] \subset \text{Int}(\mathbb{K}_1)$.

Proposition 2.10. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k = \arccos\left(\frac{-k-3}{4}\right)$, on a

1. Si $k \in]-\infty, -7]$:

$$m(P_{1,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

2. Si $k \in]-7, -1[$:

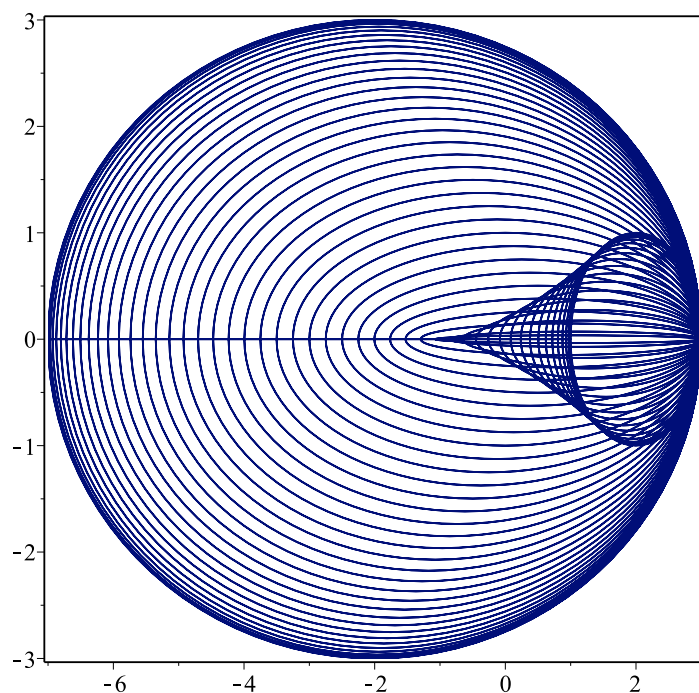
$$m(P_{1,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \beta_k) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

3. Si $k \in [-1, 1[$:

$$m(P_{1,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

k	courbe	$m(P_{1,k})$	r_k
0	36a1	0.766339819212515	1.1185495695
1	14a4	0.646131894438901	0.3520662344
2	$m(P_{1,2}) = 0.646131894438901 = 2 d_3, \text{ genre} = 0$		
3	$m(P_{1,3}) = 0.646131894438901 = 2 d_3, \text{ genre} = 0$		
4	20a2	1.19870141940204	1/3
5	66a1	1.49591134020493	1
6	36a2	1.71437814985983	1/2
7	130a1	1.88940007301019	1
8	420c1	2.03621338327418	6
9	630a1	2.16302051843453	6
10	14a6	2.27481223012351	1/10
11	102c1	2.37487690469817	1
12	180a3	2.46550724264717	2
13	2090e1	2.54837099201164	12
14	660c2	2.62472213198316	6
15	1638c1	2.69552896172759	12
16	4004b1	2.76155573973315	30
17	4830o1	2.82341685620712	42
18	90b2	2.88161400080965	1
19	170b1	2.93656239273131	1
20	2652f1	2.98860974406259	24
-1	30a1	0.939936886009002	0.6562897445
-2	20a1	1.11241431974241	0.3591891372
-3	90a1	1.26827839446439	1.5460621717
-4	84a1	1.41454509640823	1.6486899328
-5	14a1	1.5560567864883	0.1461908235
-6	$m(P_{1,-6}) = 1.69770245700177 \stackrel{?}{=} d_7, \text{ genre} = 0$		
-7	30a2	1.85061281636865	1/3
-8	220a1	2.01402374751916	2
-9	198d1	2.14876433753961	2
-10	156b2	2.26499821349302	2
-11	910c1	2.3677900144291	6
-12	1260b1	2.46020342027633	12
-13	210b1	2.54428879938089	2
-14	34a2	2.6215080379633	1/3
-15	306b3	2.69295021936907	2
-16	1140c1	2.75945351707843	12
-17	2090d1	2.82167949072659	12
-18	1260d2	2.88016099431175	12
-19	6006p1	2.93533444926954	48
-20	7084j1	2.98756235967719	48

TABLE 2.1 – Dans ce tableau $E_{1,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{1,k}}}{m(P_{1,k})}$.

FIGURE 2.2 – L'ensemble \mathbb{K}_1

4. Si $k \in [1, 3]$:

$$m(P_{1,k}) = \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 d_3$$

5. Si $k \in]3, +\infty[$:

$$m(P_{1,k}) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt$$

Preuve. On a

$$m(P_{1,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \right|}_{|x_1(t)|} dt + \int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \right|}_{|x_2(t)|} dt \right]$$

avec

$$\Delta = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8).$$

1. Pour $k \in]-\infty, -7]$, on a

$$\begin{cases} |x_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi[\\ |x_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |x_1(t)| dt \\ &= -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \end{aligned}$$

2. Si $k \in [-7, -1[$, on a

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \beta_k[\\ |x_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\beta_k, \pi[\\ |x_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[\end{cases} .$$

donc

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |x_1(t)| dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log 2 dt - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |2 \cos t + 2| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \\ &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |e^{it} + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = \pi - s$, on a

$$\int_a^\pi \log |e^{it} + 1| dt = \int_0^{\pi-a} \log |e^{is} - 1| ds = -\text{Cl}_2(\pi - a). \quad (2.5)$$

En utilisant le changement précédent, on obtient

$$m(P_{1,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \beta_k) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt.$$

3. Pour $k \in [-1, 1[$ on a

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}[\\ |x_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[\\ |x_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\frac{2\pi}{3}, \beta_k] \\ |x_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}[\cup]\beta_k, \pi[\end{cases} .$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi \log |x_1(t)| dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\beta_k} \log |x_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\beta_k} \log |x_1(t)| dt + \int_{\beta_k}^\pi \log |x_1(t)| dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\beta_k} \log |x_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\beta_k} \log |x_1(t) x_2(t)| dt + \int_{\beta_k}^\pi \log |x_1(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |x_1(t) x_2(t)| &= \frac{1}{|2 + 2 \cos t|} = \frac{1}{|e^{it} + 1|^2}. \\ \log |x_1(t) x_2(t)| &= \log \left[|e^{it} + 1|^{-2} \right] = -2 \log |e^{it} + 1|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

En utilisant (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\beta_k} \log |e^{it} + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |x_1(t)| dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\beta_k} \log |e^{it} + 1| dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left[\int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt - \int_{\beta_k}^{\pi} \log |4(\cos t + 1)| dt \right] \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\beta_k} \log |e^{it} + 1| dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left[\int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt - \int_{\beta_k}^{\pi} \log (2) dt - \int_{\beta_k}^{\pi} \log |2(\cos t + 1)| dt \right] \end{aligned}$$

et on a

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\beta_k} \log |e^{it} + 1| dt + \int_{\beta_k}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} \left[-2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt + 2 \int_{\beta_k}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left[-2 \int_{\beta_k}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt - (\pi - \beta_k) \log 2 + \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$m(P_{1,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt.$$

4. Pour $k \in [1, 3]$ on a

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}[\\ |x_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[\\ |x_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}[\\ |x_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\frac{2\pi}{3}, \pi[\end{cases} .$$

$$m(P_{1,k}) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |x_1(t) x_2(t)| dt.$$

En utilisant (2.5) et (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 d_3. \end{aligned}$$

5. Si $k \in]3, +\infty[$ on a

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[\\ |x_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{1,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |x_2(t)| dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |[2 + 2 \cos t]x_1(t)| dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |x_1(t)| dt - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |2 + 2 \cos t| dt}_{=0} \\ &= \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.11. D'où vient $\frac{2\pi}{3}$ et β_k , $k \in [-7, \dots, 1[$ dans la proposition 2.10 ?

Cherchons les racines de l'équation $|x_i(t)| = 1, i = 1, 2$ pour $t \in [0, \pi[$, avec

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)} \\ x_2(t) = -\frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{4(1 + \cos t)}. \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$, $|x_1(t)| = |x_2(t)| = 1$, nous donne

$$\begin{aligned} t &= \alpha_k = \arccos\left(\frac{k-4}{2}\right), & \text{racine refusé car complexe.} \\ t &= \lambda_k = \arccos\left(\frac{-k-4}{6}\right). \end{aligned}$$

Si $\Delta > 0$, $|x_1(t)| = |x_2(t)| = 1$, nous donne

$$\begin{aligned} t &= \pi, & \text{refusé.} \\ t &= \beta_k = \arccos\left(\frac{-k-3}{4}\right). \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$, x_1 et x_2 complexes conjugués et $|x_1(t)| = |x_2(t)| = 1$, nous donne

$$t = \frac{2\pi}{3}.$$

On a, pour

$$\begin{aligned} k \in [-7, -1] : & \quad 0 \leq \beta_k \leq \lambda_k \leq \frac{2\pi}{3} < \pi, \\ k \in [-1, 1] : & \quad \frac{2\pi}{3} \leq \lambda_k \leq \beta_k < \pi. \end{aligned}$$

Remarque 2.12. Considérons la famille, de Boyd, des polynômes réciproques

$$\tilde{P}_k(x, y) = (x+1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x+1). \quad (2.7)$$

Les polynômes $P_{1,k}, \tilde{P}_k$ définissent les mêmes courbes elliptique ($k \neq -6, 2, 3$). Nos calculs et ceux de Boyd montrent que $m(P_{1,k}) \stackrel{?}{=} m(\tilde{P}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \in [-20, -7] \cup [3, 20]$; voir TABLEAU (2.1), et TABLEAU (2) dans Boyd [Boy98].

Le résultat suivant donne une formule explicite de $m(\tilde{P}_k)$.

Posons $y = e^{it}$, on obtient

$$\tilde{P}_k(x, e^{it}) = e^{it} \tilde{Q}(x, t)$$

avec

$$\tilde{Q}(x, t) = (\cos t + 1 - i \sin t)x^2 + (2 \cos t + k)x + (\cos t + 1 + i \sin t)$$

comme $|\tilde{P}_k(x, y)| = |\tilde{Q}(x, t)|$, il en résulte que

$$m(\tilde{P}_k) = m(\tilde{Q}).$$

on a

$$\tilde{Q}(x, t) = (\cos t + 1 - i \sin t)(x - \tilde{x}_1(t))(x - \tilde{x}_2(t)) \quad (2.8)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = -\frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2(\cos t + 1 - i \sin t)} \\ \tilde{x}_2(t) = -\frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2(\cos t + 1 - i \sin t)} \end{cases} \quad (2.9)$$

et

$$\tilde{\Delta} = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8) = \Delta.$$

Donc

$$m(\tilde{P}_k) = m(\cos t + 1 - i \sin t) + m(x - \tilde{x}_1(t)) + m(x - \tilde{x}_2(t)).$$

Mais

$$m(\cos t + 1 - i \sin t) = m(2 \cos t + 2) = 0.$$

Donc $m(\tilde{P}_k) = m(x - \tilde{x}_1(t)) + m(x - \tilde{x}_2(t))$. Ainsi en appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} m(\tilde{P}_k) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |\tilde{x}_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |\tilde{x}_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| \frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right| dt \right] \end{aligned}$$

car $\tilde{x}_1(t)$ et $\tilde{x}_2(t)$ sont des fonctions paires, donc

$$m(\tilde{P}_k) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right| dt + \int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right| dt \right].$$

Proposition 2.13. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\alpha_{1,k} = \arccos(1 - \frac{k}{2} - \sqrt{3-k})$,

$\alpha_{2,k} = \arccos(1 - \frac{k}{2} + \sqrt{3-k})$. On a

1. Si $k \in]-\infty, -6]$:

$$m(\tilde{P}_k) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

2. Si $k \in]-6, 2]$:

$$m(\tilde{P}_k) = -\frac{\pi - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \alpha_{1,k}) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

3. Si $k \in]2, 3]$:

$$\begin{aligned} m(\tilde{P}_k) &= -\frac{\pi + \alpha_{2,k} - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} [\text{Cl}_2(\pi - \alpha_{1,k}) - \text{Cl}_2(\pi - \alpha_{2,k})] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_{2,k}} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \end{aligned}$$

4. Si $k \in]3, +\infty[$:

$$m(\tilde{P}_k) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

Preuve. On a

$$m(\tilde{P}_k) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \log^+ \underbrace{\left| \frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right|}_{|\tilde{x}_1(t)|} dt + \int_0^{\pi} \log^+ \underbrace{\left| \frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{2} + 2 \cos t} \right|}_{|\tilde{x}_2(t)|} dt \right]$$

avec

$$\Delta = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8).$$

1. Pour $k \in]-\infty, -6]$, on a

$$\begin{cases} |\tilde{x}_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi[\\ |\tilde{x}_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(\tilde{P}_k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |\tilde{x}_1(t)| dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log 2 dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| \sqrt{2 \cos t + 2} \right| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt \\ &= -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt. \end{aligned}$$

2. Si $k \in]-6, 2]$, on a

$$\begin{cases} |\tilde{x}_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \alpha_{1,k}[\\ |\tilde{x}_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\alpha_{1,k}, \pi[\\ |\tilde{x}_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[\quad . \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} m(\tilde{P}_k) &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log |\tilde{x}_1(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log \left| 2\sqrt{2 \cos t + 2} \right| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt \right] \\ &= -\frac{\pi - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log |e^{it} + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$m(\tilde{P}_k) = -\frac{\pi - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \alpha_{1,k}) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_{1,k}}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt.$$

3. Pour $k \in]2, 3]$ on a

$$\begin{cases} |\tilde{x}_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[\\ |\tilde{x}_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \alpha_{2,k}] \cup [\alpha_{1,k}, \pi[\\ |\tilde{x}_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\alpha_{2,k}, \alpha_{1,k}[\quad . \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 m(\tilde{P}_k) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_{2,k}} \log |\tilde{x}_2(t)| dt + \int_{\alpha_{2,k}}^{\pi} \log |\tilde{x}_2(t)| dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\alpha_{2,k}} \log |2\sqrt{2 \cos t} + 2| dt + \int_0^{\alpha_{2,k}} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \left[- \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |2\sqrt{2 \cos t} + 2| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\alpha_{2,k}}{\pi} \log 2 - \int_0^{\alpha_{2,k}} \log |e^{it} + 1| dt + \int_0^{\alpha_{2,k}} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\pi - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 - \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\alpha_{2,k}}{\pi} \log 2 + \int_{\alpha_{2,k}}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt + \int_0^{\alpha_{2,k}} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \left[- \frac{\pi - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 - \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
 m(\tilde{P}_k) &= - \frac{\pi + \alpha_{2,k} - \alpha_{1,k}}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} [\text{Cl}_2(\pi - \alpha_{1,k}) - \text{Cl}_2(\pi - \alpha_{2,k})] \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha_{2,k}} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt + \int_{\alpha_{1,k}}^{\pi} \log |k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}| dt \right].
 \end{aligned}$$

4. Si $k \in]3, +\infty[$ on a

$$\begin{cases} |\tilde{x}_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi[\\ |\tilde{x}_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

Et on a

$$|\tilde{x}_2(t)| = \frac{1}{|\tilde{x}_1(t)|}$$

alors

$$\begin{aligned}
 m(\tilde{P}_k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |\tilde{x}_2(t)| dt = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |\tilde{x}_1(t)| dt \\
 &= \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt.
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.14. On a

$$m(P_{1,k}) = m(\tilde{P}_k), \quad \forall k \in]-\infty, -7] \cup [3, +\infty[.$$

Preuve. Résulte des Proposition (2.13) et (2.10) □

2.3 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^2$

Considérons le polynôme $P_{2,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^2$. Posons $x = e^{it}$, on obtient

$$P_{2,k}(e^{it}, y) = e^{it}Q(t, y)$$

avec

$$Q(t, y) = y^2 + (2 \cos t + k)y + 2 \cos t + 2$$

comme $|P_{2,k}(x, y)| = |Q(t, y)|$, il en résulte que

$$m(P_{2,k}) = m(Q).$$

on a

$$Q(t, y) = (y - y_1(t))(y - y_2(t))$$

avec

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2} \\ y_2(t) = -\frac{k + 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

et

$$\Delta = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8).$$

Donc

$$m(P_{2,k}) = m(y - y_1(t)) + m(y - y_2(t)).$$

En appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{2 \cos t + k - \sqrt{\Delta}}{2} \right| dt + \int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{2 \cos t + k + \sqrt{\Delta}}{2} \right| dt \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série $L(E_{2,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.2.

k	courbe	$m(P_{2,k})$	r_k
0	36a1	0.766339819212515	1.1185495695
1	14a4	0.646131894438901	0.3520662344
2	$m(P_{2,2}) = 0.646131894438901 = 2 d_3, \text{ genre} = 0$		
3	$m(P_{2,3}) = 0.646131894438901 = 2 d_3, \text{ genre} = 0$		
4	20a2	1.19870141940204	1/3
5	66a1	1.49591134020493	1
6	36a2	1.71437814985983	1/2
7	130a1	1.88940007301019	1
8	420c1	2.03621338327418	6
9	630a1	2.16302051843453	6
10	14a6	2.27481223012351	1/10
11	102c1	2.37487690469817	1
12	180a3	2.46550724264717	2
13	2090e1	2.54837099201164	12
14	660c2	2.62472213198316	6
15	1638c1	2.69552896172759	12
16	4004b1	2.76155573973315	30
17	4830o1	2.82341685620712	42
18	90b2	2.88161400080965	1
19	170b1	2.93656239273131	1
20	2652f1	2.98860974406259	24
-1	30a1	0.939936886009002	0.6562897445
-2	20a1	1.11241431974241	0.3591891372
-3	90a1	1.26827839446439	1.5460621717
-4	84a1	1.41454509640823	1.6486899328
-5	14a1	1.5560567864883	0.1461908235
-6	$m(P_{2,-6}) = 1.69770245700177 \stackrel{?}{=} d_7, \text{ genre} = 0$		
-7	30a2	1.85061281636865	1/3
-8	220a1	2.01402374751916	2
-9	198d1	2.14876433753961	2
-10	156b2	2.26499821349302	2
-11	910c1	2.3677900144291	6
-12	1260b1	2.46020342027633	12
-13	210b1	2.54428879938089	2
-14	34a2	2.6215080379633	1/3
-15	306b3	2.69295021936907	2
-16	1140c1	2.75945351707843	12
-17	2090d1	2.82167949072659	12
-18	1260d2	2.88016099431175	12
-19	6006p1	2.93533444926954	48
-20	7084j1	2.98756235967719	48

TABLE 2.2 – Dans ce tableau $E_{2,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{2,k}}}{m(P_{2,k})}$.

Remarque 2.15. Soit \mathbb{K}_2 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{2,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_2 = \{k \in \mathbb{C} / P_{2,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

\mathbb{K}_2 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{xy^2 + (x^2 + 1)y + (x + 1)^2}{xy}$$

La FIGURE 2.3 donne l'ensemble \mathbb{K}_2 .

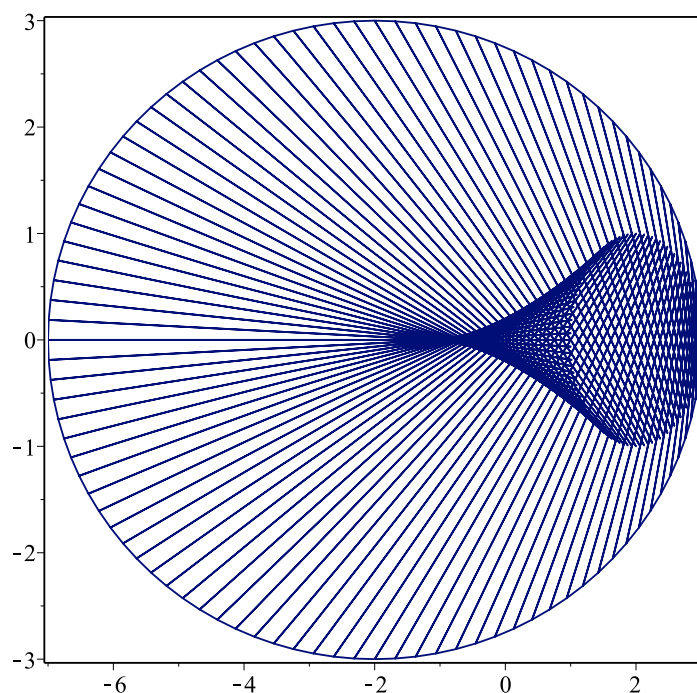


FIGURE 2.3 – L'ensemble \mathbb{K}_2

Remarque 2.16. Pour $k \in [-20, -7] \cup [4, 20]$ on a r_k un nombre rationnel ; pour $k \in [-5, 1]$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-5, 1] \subset \text{Int}(\mathbb{K}_2)$.

Proposition 2.17. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k = \arccos\left(\frac{-k-3}{4}\right)$, on a

1. Si $k \in]-\infty, -7]$:

$$m(P_{2,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

2. Si $k \in]-7, -1[$:

$$m(P_{2,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \beta_k) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt$$

3. Si $k \in [-1, 1[$:

$$m(P_{2,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt$$

4. Si $k \in [1, 3]$:

$$m(P_{2,k}) = \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 d_3$$

5. Si $k \in]3, +\infty[$:

$$m(P_{2,k}) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt$$

Preuve. On a

$$m(P_{2,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t + \sqrt{\Delta}}{2} \right|}_{|y_1(t)|} dt + \int_0^{\pi} \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2} \right|}_{|y_2(t)|} dt \right]$$

avec

$$\Delta = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 8).$$

1. Pour $k \in]-\infty, -7]$, on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt \\ &= -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt \end{aligned}$$

2. Si $k \in [-7, -1[$, on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \beta_k] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\beta_k, \pi] \end{cases} .$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_1(t) y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log \left| \frac{k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}}{2} \right| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_1(t) y_2(t)| dt \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |y_1(t) y_2(t)| &= |2 + 2 \cos t| = |e^{it} + 1|^2. \\ \log |y_1(t) y_2(t)| &= \log \left[|e^{it} + 1|^2 \right] = 2 \log |e^{it} + 1|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |e^{it} + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \\ &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$m(P_{2,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2(\pi - \beta_k) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt.$$

3. Pour $k \in [-1, 1]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{2\pi}{3}, \beta_k[\\ |y_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\beta_k, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases} .$$

Donc

$$m(P_{2,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \log |y_1(t) y_2(t)| dt + \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt \right].$$

En utilisant (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{1}{\pi} \left[2 \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \log |e^{it} + 1| dt - (\pi - \beta_k) \log 2 + \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-2 \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt - (\pi - \beta_k) \log 2 + \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5), on obtient

$$m(P_{2,k}) = -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt.$$

4. Pour $k \in [1, 3]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}] \\ |y_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{2\pi}{3}, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{2\pi}{3}] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases} .$$

$$m(P_{2,k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \log |y_1(t) y_2(t)| dt$$

En utilisant (2.5) et (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \log |e^{it} + 1| dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \log |e^{it} + 1| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 d_3. \end{aligned}$$

5. Si $k \in]3, +\infty[$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{2,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_2(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| \frac{[2 + 2 \cos t]}{y_1(t)} \right| dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |2 + 2 \cos t| dt}_{=0} \\ &= \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}| dt. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.18. *On a*

$$m(P_{2,k}) = m(P_{1,k}), \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Résulte des Propositions (2.17) et (2.10)

□

2.4 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$

Considérons le polynôme $P_{3,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$. Posons $x = e^{it}$, on obtient

$$P_{3,k}(e^{it}, y) = e^{it} Q(t, y)$$

avec

$$Q(t, y) = y^2 + (2 \cos t + k)y + 2 \cos t$$

comme $|P_{3,k}(x, y)| = |Q(t, y)|$, il en résulte que

$$m(P_{3,k}) = m(Q).$$

on a

$$Q(t, y) = (y - y_1(t))(y - y_2(t))$$

avec

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \\ y_2(t) = -\frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \end{cases} \quad (2.12)$$

et

$$D(t) = 4 \cos^2 t + 4(k - 2) \cos t + k^2.$$

Donc

$$m(P_{3,k}) = m(y - y_1(t)) + m(y - y_2(t)).$$

En appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\log^+ |y_1(t)| + \log^+ |y_2(t)|] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\log^+ \left| \frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \right| + \log^+ \left| \frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \right| \right] dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série $L(E_{3,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.3.

Remarque 2.19. Soit \mathbb{K}_3 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{3,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_3 = \{k \in \mathbb{C} / P_{3,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

\mathbb{K}_3 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{xy^2 + (x^2 + 1)y + x^2 + 1}{xy}$$

La FIGURE 2.4 donne l'ensemble \mathbb{K}_3 .

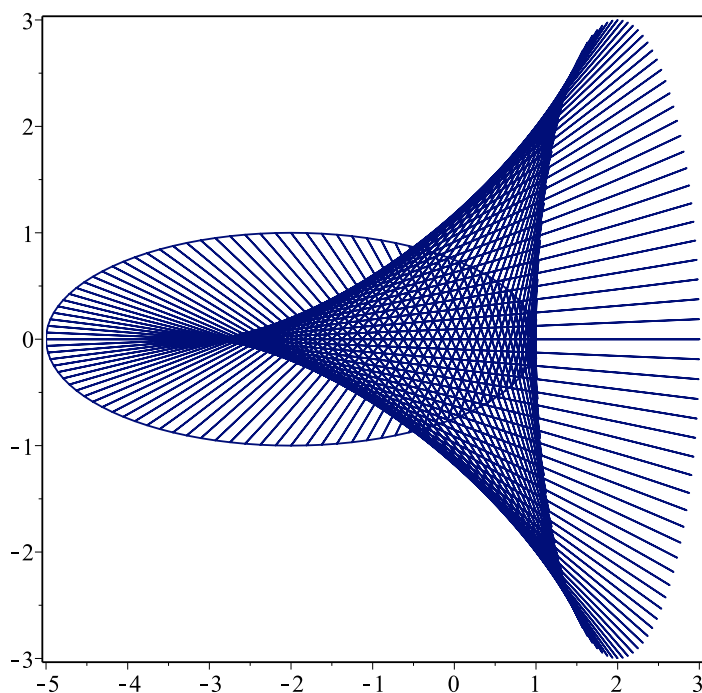
Remarque 2.20. Pour $k \in [-20, -5] \cup [3, 20]$ on a r_k un nombre rationnel; pour $k \in [-4, 0] \cup \{2\}$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-4, 0] \cup \{2\} \subset \text{Int}(\mathbb{K}_3)$.

Lemme 2.21. On a

$$m(P_{3,1}) = d_3$$

k	Courbe	$m(P_{3,k})$	r_k
0	24a4	0.466263409375137	1.0968565338
1	$m(P_{3,1}) = 0.32306594721945 = d_3, \text{ genre} = 0$		
2	32a2	0.797502758492185	0.9320760821
3	102a1	1.10131453914869	4/3
4	504e1	1.37653092364796	8
5	1394e1	1.59755185697137	16
6	3360a1	1.78059286990668	40
7	14454b1	1.93609674295623	128
8	14168j1	2.07097798227715	144
9	12882d1	2.18994336978374	96
10	4896o1	2.29629789743482	48
11	143290p1	2.3924335884743	1104
12	12408d1	2.48012996751761	104
13	167958r1	2.56074339301422	1056
14	245024	2.63532979660435	2008
15	696318	2.70472652655073	4160
16	483480	2.76960838232317	4160
17	164498c1	2.83052691649893	960
18	125664r1	2.88793860888497	832
19	85734j1	2.94222546448765	544
20	1501304	2.99371034148857	10496
-1	238b1	0.635129735929424	6.3528173249
-2	288a1	0.825098753206339	7.1043780556
-3	462c1	1.03788172193249	7.3774513214
-4	440b1	1.26092963148627	7.5671744039
-5	342e1	1.4974778208051	4
-6	672e1	1.73411766177935	8
-7	3026a1	1.9090194612475	24
-8	504f1	2.05357442682778	16/3
-9	52890a1	2.17802872108631	400
-10	46816c1	2.28775972370344	448
-11	77526a1	2.38609621699492	624
-12	121992r1	2.47529217520626	928
-13	368606	2.55696424474601	2672
-14	269280	2.63232009136077	2496
-15	10626a1	2.70228989708408	64
-16	530536	2.7676075598114	4160
-17	160146ba1	2.82886353100863	1024
-18	961248	2.88654063464713	6240
-19	1261690	2.94103916358389	7440
-20	1632456	2.99269494904247	12672

TABLE 2.3 – Dans ce tableau $E_{3,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{3,k}}}{m(P_{3,k})}$.

FIGURE 2.4 – L'ensemble \mathbb{K}_3

Preuve. Pour $k = 1$, on a

$$P_{3,1}(x, y) = xy^2 + (x^2 + x + 1)y + x^2 + 1 = (y + 1)(yx + x^2 + 1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{3,1}) &= m(yx + x^2 + 1) \\ &= m(y + x + 1) = d_3. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.22. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k = \arccos\left(\frac{-k-1}{4}\right)$. On a

1. Si $k \in]-\infty, -5]$:

$$m(P_{3,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

2. Si $k \in]-5, -3[$:

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_k\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} + \beta_k\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

3. Si $k \in [-3, 1[$:

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

4. Si $k \in [1, 3[$:

$$m(P_{3,k}) = \frac{\beta_k}{\pi} \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

5. Si $k \in [3, +\infty[$:

$$m(P_{3,k}) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

Avant de donner la démonstration de cette Proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.23.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\alpha} \log |2 \cos(t)| dt = \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \log |2 \cos(t)| dt &= \int_0^{\alpha} \log |e^{it} + e^{-it}| dt \\ &= \int_0^{\alpha} \log |e^{-it}(e^{i2t} + 1)| dt \\ &= \int_0^{\alpha} \log \left| e^{-it}(e^{i(t+\frac{\pi}{2})} + 1)(e^{i(t-\frac{\pi}{2})} + 1) \right| dt \\ &= \int_0^{\alpha} \log \left| e^{i(t+\frac{\pi}{2})} + 1 \right| dt + \int_0^{\alpha} \log \left| e^{i(t-\frac{\pi}{2})} + 1 \right| dt. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = t + \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \log \left| e^{i(t+\frac{\pi}{2})} + 1 \right| dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \log |e^{is} + 1| ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |e^{is} + 1| ds - \int_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\pi} \log |e^{is} + 1| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation 2.5, on obtient

$$\int_0^{\alpha} \log \left| e^{i(t+\frac{\pi}{2})} + 1 \right| dt = \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Par le changement de variable $s = -t + \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \log \left| e^{i(t-\frac{\pi}{2})} + 1 \right| dt &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log |e^{-is} + 1| ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log |e^{is} + 1| ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\pi} \log |e^{is} + 1| ds - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |e^{is} + 1| ds \\ &= -\text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^\alpha \log |2 \cos(t)| dt = \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right).$$

□

Maintenant on donne la démonstration de la Proposition 2.22.

Preuve de la Proposition 2.22.

On a

$$m(P_{3,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t + \sqrt{D(t)}}{2} \right|}_{|y_1(t)|} dt + \int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t - \sqrt{D(t)}}{2} \right|}_{|y_2(t)|} dt \right]$$

avec

$$D(t) = 4 \cos^2 t + 4(k-2) \cos t + k^2$$

1. Pour $k \in]-\infty, -5]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |y_1(t)| dt \\ &= -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

2. Si $k \in [-5, -3]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \beta_k] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\beta_k, \pi]. \end{cases}$$

Donc

$$m(P_{3,k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_2(t)| dt.$$

On a

$$|y_2| = \left| \frac{2 \cos t}{y_1} \right|$$

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |2 \cos t| dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_1(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |2 \cos t| dt \\ &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |2 \cos t| dt. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.23, on a

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta_k \right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2 \left(\frac{\pi}{2} + \beta_k \right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt. \end{aligned}$$

3. Pour $k \in [-3, 1[$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\beta_k, \pi] \\ |y_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{\pi}{3}, \beta_k[\\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{\pi}{3}, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log |2 \cos t| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |y_1(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log |2 \cos t| dt - \frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.23, on a

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt. \end{aligned}$$

4. Si $k \in [1, 3[$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in [0, \beta_k[\\ |y_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [\beta_k, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |2 \cos t| dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt. \end{aligned}$$

On a par le lemme 2.23

$$\int_0^{\pi} \log |2 \cos t| dt = \text{Cl}_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_1(t)| dt \\ &= \frac{\beta_k}{\pi} \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

5. Pour $k \in [3, +\infty[$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{3,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \log |2 \cos t| dt}_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt \\ &= \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

□

2.5 Mesure de Mahler de la famille $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$

Considérons le polynôme $P_{4,k}(x, y) = x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$. Pour simplifier les calculs en ordonnant $P_{4,k}$ par rapport à x , on obtient

$$P_{4,k}(x, y) = (y^2 + 2y + 1)x^2 + kyx + y + 1$$

Posons $y = e^{it}$, on obtient

$$P_{4,k}(x, e^{it}) = e^{it}Q(x, t)$$

avec

$$Q(x, t) = (2 \cos t + 2)x^2 + kx - i \sin t + \cos t + 1$$

comme $|P_{4,k}(x, y)| = |Q(x, t)|$, il en résulte que

$$m(P_{4,k}) = m(Q).$$

on a

$$Q(x, t) = (2 \cos t + 2)(x - x_1(t))(x - x_2(t))$$

avec

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{k - \sqrt{\Delta}}{4(\cos t + 1)} \\ x_2(t) = -\frac{k + \sqrt{\Delta}}{4(\cos t + 1)} \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\Delta = 8[-\cos t - 2] \cos t + k^2 - 8 + 8i[\cos t + 1] \sin t.$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{4,k}) &= \underbrace{m(2 + 2 \cos t)}_{=0} + m(x - x_1(t)) + m(x - x_2(t)) \\ &= m(x - x_1(t)) + m(x - x_2(t)). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$m(P_{4,k}) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |x_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |x_2(t)| dt \right],$$

le cosinus est une fonction paire alors x_1 et x_2 sont aussi des fonctions paires, et donc

$$m(P_{4,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{k - \sqrt{\Delta}}{4(\cos t + 1)} \right| dt + \int_0^{\pi} \log^+ \left| \frac{k + \sqrt{\Delta}}{4(\cos t + 1)} \right| dt \right] \quad (2.15)$$

Remarque 2.24. On a toujours $m(P_{4,-k}) = m(P_{4,k})$, pour tout k entier. En effet,

$$m(P_{4,-k}(x, y)) = m(P_{4,-k}(-x, y)) = m((-x)^2y^2 + (2(-x)^2 + kx + 1)y + (-x)^2 + 1) = m(P_{4,k}(x, y)).$$

On a aussi, d'après 1.9 que $E_{4,-k} = E_{4,k}$.

Alors il suffit de faire les calculs numériques pour k positif.

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série L $L(E_{4,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.4.

k	courbe	$m(P_{4,k})$	r_k
0	$m(P_{4,0}) = 0.32306594721945 = d_3, \text{ genre} = 0$		
1	26a3	0.677278455928812	0.7668399648
2	92a1	0.930161393318451	2.7703837465
3	162c1	1.13542605307159	3.0961225794
4	44a1	1.3195206615037	0.8446437659
5	50a1	1.4953724619936	0.7391215437
6	324c1	1.67967008219047	4
7	1078a1	1.87173802981007	12
8	37b3	2.02564616293738	4/9
9	486b2	2.15610225222303	4
10	7300f1	2.27000242305533	96
11	11374e1	2.37138338198954	96
12	4212b1	2.46288299398769	48
13	23998a1	2.54634615308465	204
14	2548c1	2.62312510224201	24
15	44550br1	2.69424600839332	324
16	916d1	2.76050887740211	8
17	75718d1	2.82255106664483	576
18	10692a2	2.8808895160489	96
19	120574b1	2.93594985956055	828
20	37300j1	2.988087096607	336

TABLE 2.4 – Dans ce tableau $E_{4,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{4,k}}}{m(P_{4,k})}$.

Remarque 2.25. Soit \mathbb{K}_4 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{4,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_4 = \{k \in \mathbb{C} / P_{4,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

\mathbb{K}_4 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{x^2y^2 + (2x^2 + 1)y + x^2 + 1}{xy}$$

La FIGURE 2.5 donne l'ensemble \mathbb{K}_4 .

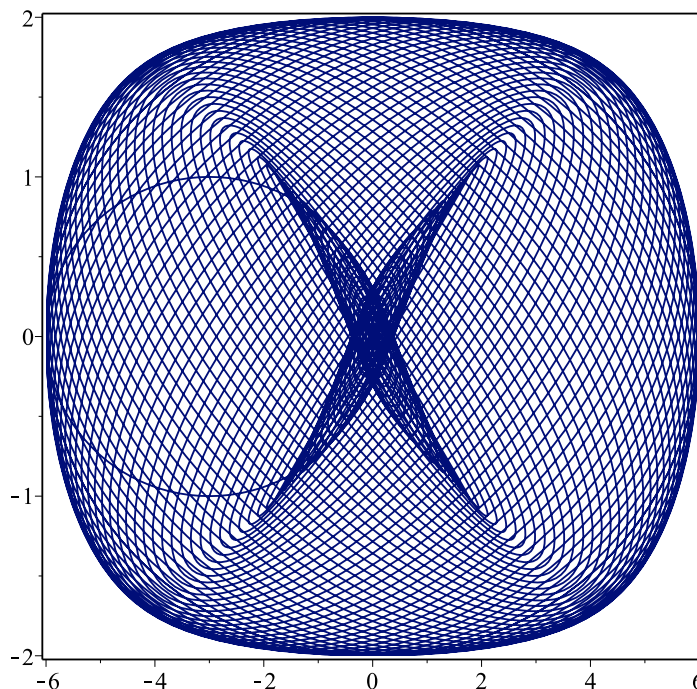


FIGURE 2.5 – L'ensemble \mathbb{K}_4

Remarque 2.26. Pour $k \in [-20, -6] \cup [6, 20]$ on a r_k un nombre rationnel; pour $k \in [-5, -1] \cup [1, 5]$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-5, -1] \cup [1, 5] \subset \text{Int}(\mathbb{K}_4)$.

Lemme 2.27. On a

$$m(P_{4,0}) = d_3.$$

Preuve. Pour $k = 0$, on a

$$P_{4,0}(x, y) = x^2y^2 + (2x^2 + 1)y + x^2 + 1 = (y + 1)(yx^2 + x^2 + 1)$$

ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{4,0}) &= m(yx^2 + x^2 + 1) \\ &= m(y + x + 1) = d_3. \end{aligned}$$

□

2.6 Mesure de Mahler de la famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1$

Considérons le polynôme $P_{5,k}(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1$.

Posons $x = e^{it}$, on obtient

$$P_{5,k}(e^{it}, y) = e^{it}Q(t, y)$$

avec

$$Q(t, y) = y^2 + (2 \cos t + k)y + (2 \cos t + 1)$$

comme $|P_{5,k}(x, y)| = |Q(t, y)|$, il en résulte que

$$m(P_{5,k}) = m(Q).$$

on a

$$Q(t, y) = (y - y_1(t))(y - y_2(t))$$

avec

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \\ y_2(t) = -\frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \end{cases} \quad (2.16)$$

et

$$D(t) = 4 \cos^2 t + 4(k - 2) \cos t + k^2 - 4.$$

Donc

$$m(P_{5,k}) = m(y - y_1(t)) + m(y - y_2(t)).$$

Ainsi en appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\log^+ \left| \frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \right| + \log^+ \left| \frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \right| \right] dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série L $L(E_{5,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.5.

Remarque 2.28. Soit \mathbb{K}_5 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{5,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_5 = \{k \in \mathbb{C} / P_{5,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

k	courbe	$m(P_{5,k})$	r_k
0	128a1	0.605391710972988	3.5599637855
1	15a8	0.466271375395243	0.5390217949
2	$m(P_{5,2}) = 0.388747872041091 = \frac{2}{3} d_4$, <i>genre</i> = 0		
3	65a1	0.964106145789031	6/7
4	384d1	1.30160446012659	6
5	1443c1	1.55121700198599	12
6	1040b1	1.74934320084913	12
7	10005f1	1.91365284627738	84
8	21120m1	2.05408845908203	228
9	40439a1	2.1767735247032	252
10	8976f1	2.28573879607601	72
11	40035a1	2.38377688831556	264
12	191360c1	2.47290241181623	1500
13	11715a1	2.55461685528603	72
14	108336a1	2.63006961923551	864
15	622973	2.70016043839341	2952
16	174720ex1	2.76560704140395	1392
17	1198815	2.82699130760586	6096
18	100880i1	2.88479163612631	672
19	2136849	2.93940619555452	10944
20	928896	2.99116997648952	6264
-1	429a1	0.774787443232656	8.8181516568
-2	240c1	0.964005689668917	4.7902108580
-3	1595c1	1.15303850720276	20.149102167
-4	1920r1	1.32990865287927	31.744681877
-5	1113b1	1.5029588881698	11.178272859
-6	272a1	1.68809442469323	3
-7	3315b1	1.88171336681923	24
-8	24960be1	2.03455422130086	288
-9	2035c1	2.16378085937566	12
-10	23088e1	2.27660141461341	192
-11	155181b1	2.37708285217741	1008
-12	49280c1	2.46784080282119	360
-13	374415	2.55069117786041	2544
-14	34320bo1	2.62696057762293	288
-15	782017	2.69765446202211	3936
-16	362112	2.76355658015031	2592
-17	1477155	2.82529161239933	7632
-18	492880	2.88336659406278	3240
-19	2588565	2.93819937609006	14160
-20	3349632	2.99013879694392	22704

TABLE 2.5 – Dans ce tableau $E_{5,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{5,k}}}{m(P_{5,k})}$.

\mathbb{K}_5 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{xy^2 + (x^2 + 1)y + x^2 + x + 1}{xy}$$

La FIGURE 2.6 donne l'ensemble \mathbb{K}_5 .

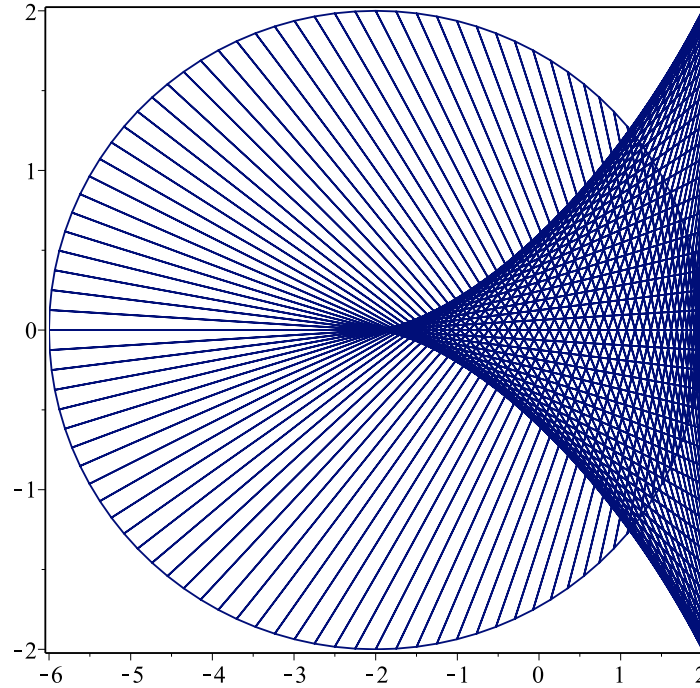


FIGURE 2.6 – L'ensemble \mathbb{K}_5

Remarque 2.29. Pour $k \in [-20, -6] \cup [3, 20]$ on a r_k un nombre rationnel ; pour $k \in [-5, 1]$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-5, 1] \subset \text{Int}(\mathbb{K}_5)$.

Lemme 2.30. On a

$$m(P_{5,2}) = \frac{2}{3} d_4.$$

Preuve. Pour $k = 2$, on a

$$P_{5,2}(x, y) = xy^2 + (x^2 + 2x + 1)y + x^2 + 1 = (y + 1)(yx + x^2 + x + 1).$$

Ainsi

$$m(P_{5,2}) = m(yx + x^2 + x + 1)$$

mais

$$m(yx + x^2 + x + 1) = \frac{2}{3} d_4,$$

voir [Boy98], donc

$$m(P_{5,2}) = \frac{2}{3} d_4.$$

□

Proposition 2.31. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\beta_k = \arccos\left(\frac{-k-2}{4}\right)$. Alors

1. Si $k \in]-\infty, -6]$:

$$m(P_{5,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

2. Si $k \in]-6, -2]$:

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} - \beta_k\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} + \beta_k\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

3. Si $k \in]-2, 2]$:

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

4. Si $k \in]2, +\infty[$:

$$m(P_{5,k}) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

Avant de donner la démonstration de cette Proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.32.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^\alpha \log |2 \cos t + 1| dt = \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \log |2 \cos t + 1| dt &= \int_0^\alpha \log |e^{it} + e^{-it} + 1| dt \\ &= \int_0^\alpha \log \left| e^{-it} [e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} - 1] [e^{i(t-\frac{2\pi}{3})} - 1] \right| dt \\ &= \underbrace{\int_0^\alpha \log \left| e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} - 1 \right| dt}_I + \underbrace{\int_0^\alpha \log \left| e^{i(t-\frac{2\pi}{3})} - 1 \right| dt}_J. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = t + \frac{2\pi}{3}$, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}+\alpha} \log |e^{is} - 1| ds \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}+\alpha} \log |e^{is} - 1| ds - \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \log |e^{is} - 1| ds \\ &= \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right). \end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = -t + \frac{2\pi}{3}$, on a

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha} \log |e^{-is} - 1| ds \\ &\quad - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha} \log |e^{is} - 1| ds \\ &= - \int_0^{\frac{2\pi}{3}-\alpha} \log |e^{is} - 1| ds + \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \log |e^{is} - 1| ds \\ &= \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^\alpha \log |2 \cos t + 1| dt = \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) - \text{Cl}_2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$$

□

Maintenant on donne la démonstration de la Proposition 2.31.

Preuve de la Proposition 2.31.

On a

$$m(P_{5,k}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t + \sqrt{D(t)}}{2} \right|}_{|y_1(t)|} dt + \int_0^\pi \log^+ \underbrace{\left| \frac{-k - 2 \cos t - \sqrt{D(t)}}{2} \right|}_{|y_2(t)|} dt \right]$$

avec

$$D(t) = 4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + (k^2 - 4).$$

1. Si $k \in]-\infty, -6]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |y_1(t)| dt \\ &= -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

2. Pour $k \in]-6, -2]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \beta_k] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\beta_k, \pi]. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |y_1(t) y_2(t)| dt \end{aligned}$$

On a

$$|y_1(t) y_2(t)| = |1 + 2 \cos t|. \quad (2.18)$$

Ainsi

$$m(P_{5,k}) = \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_k} \log |2 \cos t + 1| dt$$

En utilisant le lemme 2.32, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2 \left(\frac{2\pi}{3} - \beta_k \right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2 \left(\frac{2\pi}{3} + \beta_k \right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

3. Si $k \in]-2, 2]$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\beta_k, \pi] \\ |y_1(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2}, \beta_k[\\ |y_2(t)| \geq 1, & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ |y_2(t)| \leq 1, & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2(t)| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |2 \cos t + 1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log |y_1(t)| dt. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.32, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= -\frac{\pi - \beta_k}{\pi} \log 2 + \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{\pi} \text{Cl}_2\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_k}^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt \end{aligned}$$

4. Pour $k \in]2, +\infty[$ on a

$$\begin{cases} |y_1(t)| \leq 1, & \forall t \in [0, \pi] \\ |y_2(t)| \geq 1, & \forall t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Ainsi

$$m(P_{5,k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_2(t)| dt$$

par 2.18, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{5,k}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| \frac{2 \cos t + 1}{y_1(t)} \right| dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |2 \cos t + 1| dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1(t)| dt. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.32, on obtient

$$m(P_{5,k}) = \log 2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt.$$

□

2.7 Mesure de Mahler de la famille $y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^3$

Considérons le polynôme $P_{6,k}(x, y) = y^2 + (x^2 + kx + 1)y + (x + 1)^3$.

Posons $x = e^{it}$, on obtient

$$P_{6,k}(e^{it}, y) = e^{it} Q(t, y)$$

avec

$$Q(t, y) = [\cos t - i \sin t]y^2 + [2 \cos t + k]y + 2[\cos t + 1 + i \sin t][\cos t + 1]$$

comme $|P_{6,k}(x, y)| = |Q(t, y)|$, il en résulte que

$$m(P_{6,k}) = m(Q).$$

on a

$$Q(t, y) = (y - y_1(t))(y - y_2(t))$$

avec

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \\ y_2(t) = -\frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \end{cases} \quad (2.19)$$

et

$$D(t) = [2 \cos t + k]^2 - 8[\cos t - i \sin t][\cos t + 1 + i \sin t][\cos t + 1].$$

Donc

$$m(P_{6,k}) = m(y - y_1(t)) + m(y - y_2(t)).$$

Ainsi en appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} m(P_{6,k}) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_1(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |y_2(t)| dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\log^+ \left| \frac{2 \cos t + k - \sqrt{D(t)}}{2} \right| + \log^+ \left| \frac{2 \cos t + k + \sqrt{D(t)}}{2} \right| \right] dt. \end{aligned}$$

A l'aide de **Mathematica 8** (calcul numérique de la mesure) et **Pari** (calcul de la série L $L(E_{6,k}, 2)$) on obtient le TABLEAU 2.6.

Remarque 2.33. Soit \mathbb{K}_6 l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels $P_{6,k}$ s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{K}_6 = \{k \in \mathbb{C} / P_{6,k}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}.$$

\mathbb{K}_6 est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

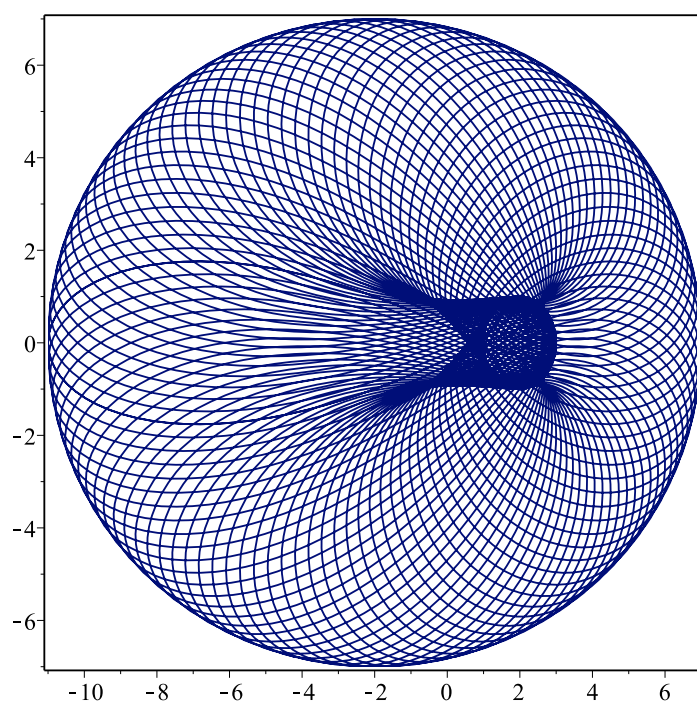
$$R(x, y) = -\frac{xy^2 + (x^2 + 1)y + x^2 + x + 1}{xy}$$

La FIGURE 2.7 donne l'ensemble \mathbb{K}_6 .

Remarque 2.34. Pour $k \in [-20, -11] \cup [7, 20]$ on a r_k un nombre rationnel; pour $k \in [-10, 1] \cup [3, 6]$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $[-10, 1] \cup [3, 6] \subset \text{Int}(\mathbb{K}_6)$.

k	courbe	$m(P_{6,k})$	r_k
0	348a1	1.14215642415008	6.1343446697
1	53a1	0.969197841658351	0.6489614787
2	$m(P_{6,2}) = 0.987359455022974, \text{ genre} = 0$		
3	15a8	1.10238600938488	0.2279876845
4	92b1	1.35751942214489	1.0407785752
5	513b1	1.39571114737312	6.3373392872
6	492a1	1.24932698581659	8.1507775550
7	5675e1	1.87585786466819	36
8	540b2	2.02536154124895	6
9	28077a1	2.15414803019974	198
10	827a1	2.2674266883148	6
11	10287b1	2.3686335993449	72
12	152700m1	2.4601595154034	1296
13	240185	2.54373824535826	1254
14	90828h1	2.62066927535063	720
15	531843	2.69195297887289	2988
16	757148	2.7583767139199	5274
17	1052325	2.8205718374038	6552
18	22380c1	2.8790527246394	168
19	1914047	2.93424423269009	6960
20	279612	2.98650150241366	2214
-1	1107a1	1.31266556693479	14.050539335
-2	620c1	1.45616672654143	7.7216361753
-3	4425g1	1.58250185132079	41.582060335
-4	6588c1	1.69683204901325	97.424773285
-5	8183b1	1.8023593313466	56.249122806
-6	123b1	1.82677993840153	1.1452674166
-7	405d1	1.72798715756998	4.0451162256
-8	7300g1	1.64399018901998	71.811802989
-9	28677b1	1.54271835081102	296.93152257
-10	16308a1	1.40461649591284	249.38884932
-11	122863b1	2.35321160297095	612
-12	208740y1	2.44881877836144	2016
-13	331425	2.53511614749323	2208
-14	7828b1	2.61394158673103	48
-15	729147	2.68659203904707	4356
-16	114372b1	2.75402973776724	900
-17	283385	2.81699464063954	1296
-18	477300	2.87607140321492	3660
-19	2525607	2.93173192762301	14508
-20	3287812	2.98436375285584	18492

TABLE 2.6 – Dans ce tableau $E_{6,k}$ est donnée en modèle minimal selon Cremona et $r_k = \frac{b_{E_{6,k}}}{m(P_{6,k})}$.

FIGURE 2.7 – L'ensemble \mathbb{K}_6

Chapitre 3

Formules explicites de la dérivée de la mesure de Mahler

Dans cette partie, on exprime la dérivée de la mesure de Mahler en fonction des intégrales elliptiques de première espèce.

3.1 Les intégrales elliptiques

Définition 3.1. On appelle intégrale elliptique, toute intégrale s'écrivant sous la forme $\int R(x, y)dx$, avec R fonction rationnelle de (y, x) et y^2 polynôme cubique ou quartique de x .

Dans le mémoire où il introduit la forme générale des intégrales elliptiques, Lagrange (1784) expose des méthodes de calcul numérique de ces intégrales, il commence par montrer qu'on peut toujours se ramener à une somme d'expressions élémentaires et d'une intégrale du type

$$\int \frac{N(x)dx}{\sqrt{(1 \pm p^2x^2)(1 \pm q^2x^2)}}$$

où N est une fraction rationnelle paire. Legendre (1793), qui avait en vue la construction de tables de valeurs numériques des intégrales elliptiques, va plus loin en écrivant toute intégrale elliptique comme somme d'une expression élémentaire et d'une combinaison des intégrales canoniques, de première, deuxième et troisième espèce, et définies, respectivement, par

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(1+n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

où k est appelé module de la fonction de Jacobi.

Pour plus de détails sur les intégrales elliptiques voir Lagrange [Lag92], Legendre [Leg93] et Boughzala [Bou00].

3.2 La famille $x(x+1)y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x+1)$

Proposition 3.2. *Soit $k \in]-\infty, -7]$. Alors*

$$\frac{dm(P_{1,k})}{dk} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8(3-k)}} K(l)$$

avec

$$l = \frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8\sqrt{3-k}}$$

et

$$K(l) = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1-X^2)(1-l^2X^2)}}$$

Preuve. De la proposition (2.10), on a pour $k \in]-\infty, -7]$

$$m(P_{1,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta} \right| dt$$

avec $\Delta = \sqrt{4 \cos^2 t + (4k-8) \cos t + k^2 - 8}$.

On note par $h(k) = k + 2 \cos t - \sqrt{\Delta}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{1,k})}{dk} &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{1}{h(k)} \left(\frac{dh(k)}{dk} \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k-8) \cos t + k^2 - 8}} dt \right]. \end{aligned}$$

Mais $\Delta > 0$, sur $[0, \pi[$, et donc

$$\frac{dm(P_{1,k})}{dk} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{-dt}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k-8) \cos t + k^2 - 8}}.$$

Avec le changement de variable $s = \cos t$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{1,k})}{dk} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(4s^2 + (k+8)s + k^2 - 8)}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(1-s)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)}}. \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_1 = 1 - \frac{k}{2} - \sqrt{3-k}, \quad \gamma_2 = 1 - \frac{k}{2} + \sqrt{3-k}.$$

Pour mettre l'intégrale précédent sous forme d'intégrale elliptique, il faut mettre la fonction $H = (1+s)(s-1)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)$ en forme standard de Jacobi $(1-X^2)(1-l^2X^2)$, où l est le module de la fonction de Jacobi (l compris entre 0 et 1), sera convenablement choisi. Pour cela, on détermine une transformation homographique $G(X) = \left[\frac{ab}{cd} \right]$ qui envoie les q_1, q_2, q_3, q_4 les zéros de $(1-X^2)(1-l^2X^2)$ sur les e_1, e_2, e_3, e_4 les zéros de H , et puisque le birapport est invariant par l'homographie, on aura

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)} = \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}.$$

On peut donc déterminer la valeur de l en fonction de k .

Suivant le choix des images respectives des e_i dans l'ensemble $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, il existe 6 birapports et pour chaque birapport 4 homographies possibles. Pour choisir l'homographie on doit fixer les q_i sachant qu'il valent $\pm 1, \pm l^{-1}$ et que le module de Jacobi l doit être compris entre 0 et 1.

Posons $s = \frac{aX+b}{cX+d}$ avec $ad - bc = 1$. En utilisant le fait que

$$e_i = \frac{aq_i + b}{cq_i + d}$$

on trouve

$$s - e_i = \frac{X - q_i}{(cX + d)(cq_i + d)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H &= \prod_{i=1}^4 (s - e_i) = \prod_{i=1}^4 \frac{(X - q_i)}{(cX + d)(cq_i + d)} \\ &= \frac{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}{(cX + d)^4 (d^2 - c^2)(d^2 l^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{-H}} = \sqrt{\frac{(cX + d)^4 (c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{1,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(cX + d)^4 (c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} \frac{dX}{(cX + d)^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} dX. \end{aligned}$$

Des égalités

$$1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad -1 = \frac{b-a}{d-c}, \quad \gamma_1 = \frac{a/l+b}{c/l+d}, \quad \gamma_2 = \frac{-a/l+b}{-c/l+d},$$

on obtient

$$\frac{d-b}{a-c} = 1, \quad -\frac{b+d}{a+c} = -1,$$

$$(c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2) = \frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8(3-k)}$$

quantité positive sur $] -\infty, -7]$.

Posons

$$e_1 = 1, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = \gamma_1, \quad e_4 = \gamma_2,$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = l^{-1}, \quad q_4 = -l^{-1},$$

et

$$R_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)},$$

$$R'_1 = \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}.$$

On obtient les différents birapports

$R_1 = \frac{4l}{(l+1)^2}$	$R'_1 = \frac{-16\sqrt{3-k}}{(-4+k+2\sqrt{3-k})(-k+2\sqrt{3-k})}$
$R_2 = 1 - R_1 = \frac{l^2 - 2l + 1}{(l+1)^2}$	$R'_2 = 1 - R'_1 = \frac{8\sqrt{3-k} - k^2 + 12}{(-4+k+2\sqrt{3-k})(-k+2\sqrt{3-k})}$
$R_3 = \frac{1}{1 - R_1} = \frac{(l+1)^2}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_3 = \frac{1}{1 - R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{3-k})(-k+2\sqrt{3-k})}{8\sqrt{3-k} - k^2 + 12}$
$R_4 = \frac{-R_1}{1 - R_1} = \frac{-4l}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_4 = \frac{-R'_1}{1 - R'_1} = \frac{16\sqrt{3-k}}{8\sqrt{3-k} - k^2 + 12}$
$R_5 = \frac{R_1 - 1}{R_1} = \frac{l^2 + 2l - 1}{4l}$	$R'_5 = \frac{R'_1 - 1}{R'_1} = \frac{8\sqrt{3-k} - k^2 + 12}{16\sqrt{3-k}}$
$R_6 = \frac{1}{R_1} = \frac{(l+1)^2}{4l}$	$R'_6 = \frac{1}{R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{3-k})(k-2\sqrt{3-k})}{16\sqrt{3-k}}$

On choisit $R_4 = R'_4$, d'où

$$\frac{-4l}{l^2 - 2l + 1} = \frac{16\sqrt{3-k}}{8\sqrt{3-k} - k^2 + 12}.$$

Seul la racine

$$l = \frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8\sqrt{3-k}}$$

vérifier la condition $0 < l < 1$.

Ainsi la dérivée de la mesure de Mahler prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{1,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} dX \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8(3-k)}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 12 - \sqrt{(k+6)(k-2)^3}}{8(3-k)}} K(l) \end{aligned}$$

□

3.3 La famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + 1$

Proposition 3.3. *Soit $k \in]-\infty, -5]$. Alors*

$$\frac{dm(P_{3,k})}{dk} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 4 - \sqrt{k^4 - 8k^2 + 64k - 48}}{8(1-k)}} K(l)$$

avec

$$l = \frac{k^2 - 4 - \sqrt{k^4 - 8k^2 + 64k - 48}}{8\sqrt{1-k}}$$

et

$$K(l) = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}}$$

Preuve. De la proposition (2.22), on a pour $k \in]-\infty, -5]$

$$m(P_{3,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

avec $D(t) = 4 \cos^2 t + 4(k - 2) \cos t + k^2$.

On note par $h(k) = k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{3,k})}{dk} &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{1}{h(k)} \left(\frac{dh(k)}{dk} \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{D(t)}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + k^2}} dt \right]. \end{aligned}$$

Mais $D(t) > 0$, sur $[0, \pi]$, et donc

$$\frac{dm(P_{3,k})}{dk} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{-dt}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + k^2}}.$$

Avec le changement de variable $s = \cos t$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{3,k})}{dk} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(4s^2 + (k+8)s + k^2)}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(1-s)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)}}. \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_1 = 1 - \frac{k}{2} - \sqrt{1-k}, \quad \gamma_2 = 1 - \frac{k}{2} + \sqrt{1-k}.$$

Pour mettre l'intégrale précédent sous forme d'intégrale elliptique, il faut mettre la fonction $H = (1+s)(s-1)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)$ en forme standard de Jacobi $(1-X^2)(1-l^2X^2)$, où l est le module de la fonction de Jacobi (l compris entre 0 et 1), sera convenablement choisi. Pour cela, on détermine une transformation homographique $G(X) = \left[\frac{ab}{cd} \right]$ qui envoie les q_1, q_2, q_3, q_4 les zéros de $(1-X^2)(1-l^2X^2)$ sur les e_1, e_2, e_3, e_4 les zéros de H , et puisque le birapport est invariant par l'homographie, on aura

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)} = \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}.$$

On peut donc déterminer la valeur de l en fonction de k .

Suivant le choix des images respectives des e_i dans l'ensemble $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, il existe 6 birapports et pour chaque birapport 4 homographies possibles. Pour choisir l'homographie on doit fixer les q_i sachant qu'il vaut $\pm 1, \pm l^{-1}$ et que le module de Jacobi l doit être compris entre 0 et 1.

Posons $s = \frac{aX + b}{cX + d}$ avec $ad - bc = 1$. En utilisant le fait que

$$e_i = \frac{aq_i + b}{cq_i + d}$$

on trouve

$$s - e_i = \frac{X - q_i}{(cX + d)(cq_i + d)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H &= \prod_{i=1}^4 (s - e_i) = \prod_{i=1}^4 \frac{X - q_i}{(cX + d)(cq_i + d)} \\ &= \frac{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}{(cX + d)^4 (d^2 - c^2) (d^2 l^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{-H}} = \sqrt{\frac{(cX + d)^4 (c^2 - d^2) (d^2 l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{3,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(cX+d)^4(c^2-d^2)(d^2l^2-c^2)}{(1-X^2)(1-l^2X^2)}} \frac{dX}{(cX+d)^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(c^2-d^2)(d^2l^2-c^2)}{(1-X^2)(1-l^2X^2)}} dX. \end{aligned}$$

Des égalités

$$1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad -1 = \frac{b-a}{d-c}, \quad \gamma_1 = \frac{a/l+b}{c/l+d}, \quad \gamma_2 = \frac{-a/l+b}{-c/l+d},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d-b}{a-c} &= 1, \quad -\frac{b+d}{a+c} = -1, \\ (c^2-d^2)(d^2l^2-c^2) &= \frac{k^2-4-\sqrt{k^4-8k^2+64k-48}}{8(1-k)} \end{aligned}$$

quantité positive sur $] -\infty, -5]$.

Posons

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = \gamma_1, \quad e_4 = \gamma_2, \\ q_1 &= 1, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = l^{-1}, \quad q_4 = -l^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}, \\ R'_1 &= \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}. \end{aligned}$$

On obtient les différent birapports

$R_1 = \frac{4l}{(l+1)^2}$	$R'_1 = \frac{-16\sqrt{1-k}}{(-4+k+2\sqrt{1-k})(-k+2\sqrt{1-k})}$
$R_2 = 1 - R_1 = \frac{l^2 - 2l + 1}{(l+1)^2}$	$R'_2 = 1 - R'_1 = \frac{8\sqrt{1-k} - k^2 + 4}{(-4+k+2\sqrt{1-k})(-k+2\sqrt{1-k})}$
$R_3 = \frac{1}{1-R_1} = \frac{(l+1)^2}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_3 = \frac{1}{1-R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{1-k})(-k+2\sqrt{1-k})}{8\sqrt{1-k} - k^2 + 4}$
$R_4 = \frac{-R_1}{1-R_1} = \frac{-4l}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_4 = \frac{-R'_1}{1-R'_1} = \frac{16\sqrt{1-k}}{8\sqrt{1-k} - k^2 + 4}$
$R_5 = \frac{R_1 - 1}{R_1} = \frac{l^2 + 2l - 1}{4l}$	$R'_5 = \frac{R'_1 - 1}{R'_1} = \frac{8\sqrt{1-k} - k^2 + 4}{16\sqrt{1-k}}$
$R_6 = \frac{1}{R_1} = \frac{(l+1)^2}{4l}$	$R'_6 = \frac{1}{R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{1-k})(k-2\sqrt{1-k})}{16\sqrt{1-k}}$

On choisit $R_4 = R'_4$, d'où

$$\frac{-4l}{l^2 - 2l + 1} = \frac{16\sqrt{1-k}}{8\sqrt{1-k} - k^2 + 4}.$$

Seul la racine

$$l = \frac{k^2 - 4 - \sqrt{k^4 - 8k^2 + 64k - 48}}{8\sqrt{1-k}}$$

vérifier la condition $0 < l < 1$.

Ainsi la dérivée de la mesure de Mahler prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{3,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} dX \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 4 - \sqrt{k^4 - 8k^2 + 64k - 48}}{8(1-k)}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 4 - \sqrt{k^4 - 8k^2 + 64k - 48}}{8(1-k)}} K(l) \end{aligned}$$

□

3.4 La famille $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 + x + 1$

Proposition 3.4. *Soit $k \in]-\infty, -6]$. Alors*

$$\frac{dm(P_{5,k})}{dk} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8(2-k)}} K(l)$$

avec

$$l = \frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8\sqrt{2-k}}$$

et

$$K(l) = \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}}$$

Preuve. De la proposition (2.31), on a pour $k \in]-\infty, -6]$

$$m(P_{5,k}) = -\log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)} \right| dt$$

avec $D(t) = 4 \cos^2 t + 4(k - 2) \cos t + k^2 - 4$.

On note par $h(k) = k + 2 \cos t - \sqrt{D(t)}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{5,k})}{dk} &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{1}{h(k)} \left(\frac{dh(k)}{dk} \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{D(t)}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left[\int_0^\pi \frac{-1}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + k^2 - 4}} dt \right]. \end{aligned}$$

Mais $D(t) > 0$, sur $[0, \pi]$, et donc

$$\frac{dm(P_{5,k})}{dk} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{-dt}{\sqrt{4 \cos^2 t + (4k - 8) \cos t + k^2 - 4}}.$$

Avec le changement de variable $s = \cos t$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{5,k})}{dk} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(4s^2 + (4k-8)s + k^2 - 4)}} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(1-s)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)}}. \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_1 = 1 - \frac{k}{2} - \sqrt{2-k}, \quad \gamma_2 = 1 - \frac{k}{2} + \sqrt{2-k}.$$

Pour mettre l'intégrale précédent sous forme d'intégrale elliptique, il faut mettre la fonction $H = (1+s)(s-1)(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)$ en forme standard de Jacobi $(1-X^2)(1-l^2X^2)$, où l est le module de la fonction de Jacobi (l compris entre 0 et 1), sera convenablement choisi. Pour cela, on détermine une transformation homographique $G(X) = \left[\frac{ab}{cd}\right]$ qui envoie les q_1, q_2, q_3, q_4 les zéros de $(1-X^2)(1-l^2X^2)$ sur les e_1, e_2, e_3, e_4 les zéros de H , et puisque le birapport est invariant par l'homographie, on aura

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)} = \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}.$$

On peut donc déterminer la valeur de l en fonction de k .

Suivant le choix des images respectives des e_i dans l'ensemble $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, il existe 6 birapports et pour chaque birapport 4 homographies possibles. Pour choisir l'homographie on doit fixer les q_i sachant qu'il valent $\pm 1, \pm l^{-1}$ et que le module de Jacobi l doit être compris entre 0 et 1.

Posons $s = \frac{aX + b}{cX + d}$ avec $ad - bc = 1$. En utilisant le fait que

$$e_i = \frac{aq_i + b}{cq_i + d}$$

on trouve

$$s - e_i = \frac{X - q_i}{(cX + d)(cq_i + d)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H &= \prod_{i=1}^4 (s - e_i) = \prod_{i=1}^4 \frac{X - q_i}{(cX + d)(cq_i + d)} \\ &= \frac{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}{(cX + d)^4 (d^2 - c^2)(d^2 l^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{-H}} = \sqrt{\frac{(cX + d)^4(c^2 - d^2)(d^2l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2X^2)}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{5,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(cX + d)^4(c^2 - d^2)(d^2l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2X^2)}} \frac{dX}{(cX + d)^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b+d}{a+c}}^{\frac{d-b}{a-c}} \sqrt{\frac{(c^2 - d^2)(d^2l^2 - c^2)}{(1 - X^2)(1 - l^2X^2)}} dX. \end{aligned}$$

Des égalités

$$1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad -1 = \frac{b-a}{d-c}, \quad \gamma_1 = \frac{a/l+b}{c/l+d}, \quad \gamma_2 = \frac{-a/l+b}{-c/l+d},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d-b}{a-c} &= 1, \quad -\frac{b+d}{a+c} = -1, \\ (c^2 - d^2)(d^2l^2 - c^2) &= \frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8(2-k)}, \end{aligned}$$

quantité positive sur $] -\infty, -6]$.

Posons

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \quad e_2 = -1, \quad e_3 = \gamma_1, \quad e_4 = \gamma_2, \\ q_1 &= 1, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = l^{-1}, \quad q_4 = -l^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_4)(e_3 - e_2)}, \\ R'_1 &= \frac{(q_1 - q_2)(q_3 - q_4)}{(q_1 - q_4)(q_3 - q_2)}. \end{aligned}$$

On obtient les différent birapports

$R_1 = \frac{4l}{(l+1)^2}$	$R'_1 = \frac{-16\sqrt{2-k}}{(-4+k+2\sqrt{2-k})(-k+2\sqrt{2-k})}$
$R_2 = 1 - R_1 = \frac{l^2 - 2l + 1}{(l+1)^2}$	$R'_2 = 1 - R'_1 = \frac{8\sqrt{2-k} - k^2 + 8}{(-4+k+2\sqrt{2-k})(-k+2\sqrt{2-k})}$
$R_3 = \frac{1}{1 - R_1} = \frac{(l+1)^2}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_3 = \frac{1}{1 - R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{2-k})(-k+2\sqrt{2-k})}{8\sqrt{2-k} - k^2 + 8}$
$R_4 = \frac{-R_1}{1 - R_1} = \frac{-4l}{l^2 - 2l + 1}$	$R'_4 = \frac{-R'_1}{1 - R'_1} = \frac{16\sqrt{2-k}}{8\sqrt{2-k} - k^2 + 8}$
$R_5 = \frac{R_1 - 1}{R_1} = \frac{l^2 + 2l - 1}{4l}$	$R'_5 = \frac{R'_1 - 1}{R'_1} = \frac{8\sqrt{2-k} - k^2 + 8}{16\sqrt{2-k}}$
$R_6 = \frac{1}{R_1} = \frac{(l+1)^2}{4l}$	$R'_6 = \frac{1}{R'_1} = \frac{(-4+k+2\sqrt{2-k})(k-2\sqrt{2-k})}{16\sqrt{2-k}}$

On choisit $R_4 = R'_4$, d'où

$$\frac{-4l}{l^2 - 2l + 1} = \frac{16\sqrt{2-k}}{8\sqrt{2-k} - k^2 + 8}.$$

Seul la racine

$$l = \frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8\sqrt{2-k}}$$

vérifier la condition $0 < l < 1$.

Ainsi la dérivée de la mesure de Mahler prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{dm(P_{5,k})}{dk} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(c^2 - d^2)(d^2 l^2 - c^2)}}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} dX \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8(2-k)}} \int_0^1 \frac{dX}{\sqrt{(1 - X^2)(1 - l^2 X^2)}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k^2 - 8 - \sqrt{k^4 - 16k^2 + 64k - 64}}{8(2-k)}} K(l) \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [Beř80] A. A. BEŘILINSON : Higher regulators and values of L -functions of curves. *Funktional. Anal. i Prilozhen.*, 14(2):46–47, 1980.
- [Beř86] A. A. BEŘILINSON : Higher regulators of modular curves , Application of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part I, II (Boulder, 1983), Contemp. Math. *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 55:1–34, 1986.
- [Ben11] L. BENFERHAT : *Variations sur la Mesure de Mahler de Polynômes de deux variables*. Thèse de doctorat, USTHB Alger, 2011.
- [Ber04a] M. J. BERTIN : Mesure de Mahler d’une famille de polynômes. *J. reine angew. Math.*, 569:175–188, 2004.
- [Ber04b] M. J. BERTIN : Mesure de Mahler et régulateur elliptique : Preuve de deux relations exotiques. *CRM Proc. Lecture Notes*, 36:1–12, 2004.
- [Bou00] S. BOUGHZALA : *Mesure de Mahler de polynômes de deux variables*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2000.
- [Boy81a] D. W. BOYD : Kronecker’s theorem and Lehmer’s problem for polynomials in several variables. *J. Number Theory*, 13:116–121, 1981.
- [Boy81b] D. W. BOYD : Speculation concerning the range of Mahler’s measure. *Canad. Math. Bull.*, 24 :4:453–469, 1981.
- [Boy98] D. W. BOYD : Mahler’s Measure and Spicial Value of L -functions. *Experimental Mathematics*, 7, 1998.
- [Cas91] J. W. S. CASSELS : *Lectures on elliptic curves*, volume 24 de London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Cre97] J. E. CREMONA : *Algorithms for modular elliptic curves*. Cambridge University Press, 2^{ème} édition, 1997. (Disponible gratuitement en ligne <http://www.warwick.ac.uk/~masgaj/book/amec.html>).

- [Del79] P. DELIGNE : Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. *In Automorphic forms, representations and L-functions (Corvallis, OR, 1977) éditer par A. Borel and W. Casselman*, volume 33, pages 313–346. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.
- [Den97] C. DENINGER : Deligne periods of mixed motives, K -theory and the entropy of certain \mathbb{Z}^n -actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(2):259–281, 1997.
- [Ful08] W. FULTON : *ALGEBRAIC CURVES, An Introduction to Algebraic Geometry*. January 2008.
- [Joy95] M. JOYE : *Introduction élémentaire à la théorie des courbes elliptiques*. Université catholique de Louvain, 1995. (Disponible gratuitement en ligne <http://www.dice.ucl.ac.be/crypto/>).
- [Kna92] A. W. KNAPP : *Elliptic curves*. Princeton University Press, 1992.
- [Lag92] J. LAGRANGE : Œuvres. *Gauthier-Villars*, vol. 14, Paris 1867-1892.
- [Leg93] A. M. LEGENDRE : Mémoire sur les transcendentes elliptiques. Paris 1793.
- [Leh33] D. H. LEHMER : Factorization of certain cyclotomic functions. *Ann. of Math.*, 34(2):461–479, 1933.
- [Lew81] L. LEWIN : Polylogarithms and associated functions. *North-Holland Publishing Co, New York*, 1981.
- [Mah62] K. MAHLER : On some inequalities for polynomials in several variables. *J. London Math. Soc.*, 37:341–344, 1962.
- [Mai97] V. MAILLOT : *Géométrie d'Arkelov des grassmanniennes, des variétés toriques et certaines hypersurfaces*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1997.
- [Rob] Á. L. ROBLEDO : *Elliptic Curves, Modular Forms and their L-functions*. Department of Mathematics, University of Connecticut, Storrs, CT 06269.
- [Rol96] K. ROLSHAUSEN : *Eléments explicites dans le k_2 d'une courbe elliptique*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg, 1996.
- [Sch94] A. J. SCHOLL : Height pairings and special values of L -functions. *In Motives (Seattle, WA, 1991) éditer par U. Jannsen et Al.*, volume 55, pages 571–598. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Sil09] J. H. SILVERMAN : *The Arithmetic of Elliptic Curves, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics 106, DOI 10.1007/978-0-387-09494-6. Springer, 2009.

-
- [Smy71] C. J. SMYTH : On the product of the conjugates outside the unit cercle of an algebraic integer. *Bull. London Math. Soc.*, 3:169–175, 1971.
- [Smy81] C. J. SMYTH : On measures of polynomials in several variables. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 23(1):49–63, 1981.
- [Tou08] N. TOUAFEK : *Mesure de Mahler et régulateur elliptique : Quelques nouvelles relations exotiques*. Thèse de doctorat, Université de Constantine, 2008.
- [Vil99] F. R. VILLEGAS : Modular Mahler measures I. *Topics in Number Theory (University Park, PA 1997)*, 467:17–48, Math. Appl., Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1999.
- [Vil02] F. R. VILLEGAS : Identities between Mahler measures. *Number theory for the millennium, III*(Urbana, IL, 2000):223–229. A K Peters, Natick, MA, 2002.

ملخص

في هذه المذكرة، نهتم بقياس ماهر لكثيرات حدود غير عكسية ذات متغيرين. في الفصل الأول، نذكر بالمفاهيم الأساسية حول قياس ماهر و المنحنيات الناقصية. كما نعطي نتائج تمهيدية ضرورية لبقية العمل. في الفصل الثاني، نجرب محققة بويد على عائلات جديدة من كثيرات حدود التي تعرف منحنيات ناقصية. كما نعطي عبارة صريحة لقياس ماهر لبعض من هاته العائلات. في الفصل الثالث، نبرهن عبارات تربط بين مشتقة قياس ماهر وتكاملات ناقصية من النوع الأول.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la mesure de Mahler de polynômes non réciproques à deux variables.

Dans le premier chapitre, on rappelle les notions de base sur la mesure de Mahler et les courbes elliptiques. On donne aussi des résultats préliminaires utiles à l'étude ultérieure.

Dans le deuxième chapitre, on teste la conjecture de Boyd sur des nouvelles familles de polynômes définissant des courbes elliptiques. On donne aussi des formules explicites de la mesure de Mahler de certaines de ces familles.

Dans le chapitre trois, on prouve des formules liant la dérivée de la mesure de Mahler à des intégrales elliptiques de première espèce.