REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'énseignement Supérieur et de la Recherche Scientifiquee

Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : ***Master***

Spécialité : ***Mathématique Fondamental***

Option : ***Analyse et applications***

Thème

Fonctions à variations bornées

Présenté par :

Massika DJERDIR

Abla CHAABENA

Devant le jury :

Président : ***S. IZZA***

Encadreur : ***S.MELIT***

Examinateur : ***F.SLAMNIA***

Promotion 2016 - 2017

Remerciements

Nous tenons à remercier Madame **Melit Samira** *pour la proposition du sujet de ce mémoire ainsi que pour ses conseils et sont soutien tou au long de notre travail.*

Nous remerciements vont aussi aux membres de jury **S. Izza** *et* **F. Slamnia** *sur nous avoir fait l'honneur de bien vouloir participer au jury de ce mémoire et pour toute l'attention qu'elles ont prêté au jugement de ce mémoire.*

Nous tenons à remercier vivement toutes les enseignants du département de mathématiques pour leurs efforts considérables.

Nous remerciements s'adressent également à **tous les amies** *qui ont contribué de prés ou de loin pour réaliser ce travail et creér une ambiance d'étude.*

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Les fonctions à variations bornées d'une variable unique ont été introduites par Camille Jordan, dans l'article (Jordan 1881) traitant de la convergence des séries de Fourier. La première étape réussie dans la généralisation de ce concept à des fonctions de plusieurs variables est réalisée par Leonida Tonelli, qui a introduit une classe de continues à variations bornées fonctions en 1926 (Cesari 1986), pour étendre sa méthode directe pour trouver des solutions aux problèmes dans le calcul des variations dans plus d'une variable.

Les fonctions à variations bornées, ainsi que les fonctions absolument continues jouent un rôle important dans l'analyse des fonctions de plusieurs variables, les équations différentielles partielles, calcul des variations...

Dans l'analyse mathématique, une fonction à variation bornée, également connue sous le nom de fonction VB, est une fonction à valeur réelle dont la variation totale est bornée (finie), le graphe d'une fonction ayant cette propriété est bien comporté dans un sens précis. Pour une fonction continue d'une seule variable, la variation linéaire signifie que la distance le long de la direction de l'axe y, en négligeant la contribution du mouvement sur l'axe x, parcourue par un point se déplaçant le long du graphique a une valeur finie.

Les fonctions à variations bornées sont précisément celles concernant lesquelles on peut trouver les intégrales de Riemann-Stieltjes de toutes les fonctions continues.

Une autre caractérisation indique que les fonctions f à variations bornées sur un intervalle compact sont exactement celles qui peuvent être écrites comme une différence $g - h$, où g et h ses fonctions bornés monotones.

Dans le cas de plusieurs variables, une fonction f définie sur un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est considérée comme ayant une variation bornée si sa dérivée de distribution est une mesure de radon finie à valeur vectorielle.

Notre mémoire est organisé sur un plan structuré par trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré essentiellement à des rappels et préliminaires sur les notions de base utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on présente les fonctions à variations bornées d'une seule variable et leurs propriétés.

Le dernier chapitre est consacré à une application sur les fonctions à variations bornées.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions de base utiliseés tout au lang du ce mémoire, en particulier les fonctions monotones, les fonctions continues et l'intégrale de Riemann et leurs propriétes. Pour plus de details, on réfère à [2] et [4].

Notations

- $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
- $sub([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.
- $V_a^b(f)$ la variation totale de f sur $[a, b]$.
- $VB([a, b])$ l'espace des fonctions à variations borneés.lk
- $C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des applications continue, $u : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1.1 Borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un élément de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que m est un majorant de A (resp. un minorant) dans $\mathbb{R}$ si pour tout $a \in A, a \leq m$ (resp. pour tout $a \in A, m \leq a$).*

- *On dit que A est majorée (resp. minorée) dans $\mathbb{R}$ si A admet au moins un majorant (resp. au moins un minorant) dans $\mathbb{R}$, c'est à dire si il exist $m \in \mathbb{R}$ pour tout $a \in A, a \leq m$ (resp. il existe $m \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in A, m \leq A$).*
- *On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*
- *On dit que x est le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de A si x est un majorant (resp. minorant) de A et si $x \in A$.*

Définition 1.2 (Borne supérieure). *Si l'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément M on dit que M est la borne supérieure de A et on note $M = \sup(A)$. Cette borne est alors unique.*

Si l'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A et on note $m = \inf(A)$. Cette borne est alors unique.

Caractérisation 1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. La borne supérieure de A est l'unique réel tel que

(i) Si $x_0 \in A$, alors $x_0 \leq \sup(A)$ $\quad$ *(c'est un majorant de A).*

(ii) Pour tout nombre $x < \sup(A), \exists\, x_0 \in A$ tel que $x < x_0$ (c'est le plus grand des majorants).

Caractérisation 2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, \sup(A) - \varepsilon < x_0 < \sup(A)$.

1.2 Fonctions monotones

Définition 1.3. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle sur un intervalle dans $\mathbb{R}$. On dit que f est*

- *Croissante si pour tout $x, y \in [a, b]$, $x < y \implies f(x) \leq f(y)$.*

  S'il est même vrai que pour tout $x, y \in [a, b]$, $x \leq y \implies f(x) < f(y)$, donc f est strictement croissante.

- *Décroissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $x, y \in [a, b]$, $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$. (résp. pour tout $x, y \in [a, b]$, $x < y \implies f(x) > f(y)$).*

- *Monotones si elle est soit croissante soit décroissante.*

Remarque 1.1. *Nous observons que si f est décroissante, alors $-f$ est une fonction croissante.*

Proposition 1.1.

• *Le produit de deux fonctions positives croissantes sur $[a, b]$ est une fonction croissante sur $[a, b]$.*

• *Le quotient d'une fonction positive et croissante sur $[a, b]$ par une fonction positive et décroissante sur $[a, b]$ est une fonction croissante sur $[a, b]$.*

• *La somme de deux fonctions croissantes sur $[a, b]$ est croissante sur $[a, b]$.*

• *La somme de deux fonctions décroissantes sur $[a, b]$ est décroissante sur $[a, b]$.*

• *La somme de deux fonctions monotones sur $[a, b]$ est monotone sur $[a, b]$.*

• *La composée de deux fonctions monotones est monotone.*

• *La composée de deux fonctions strictement monotones est strictement monotone.*

1.3 Fonctions continues

Définition 1.4 (Fonction continue). *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est*

- *Continue à droite en $x_0 \in [a, b]$, lorsque $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *Continue à gauche en $x_0 \in [a, b]$, lorsque $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *Continue en $x_0 \in [a, b]$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*
- *Continue sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue en tout point de $[a, b]$.*

On écrit aussi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ pour les limites à droite et à gauche.

On dite que f est continue en $x_0 \in [a, b]$ si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0

Remarque 1.2. *A l'aide des quantificateurs, la définition de la continuité en $x_0 \in [a, b]$ se traduit ainsi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \text{ et } x \in [a, b], \quad \textit{impliquent} \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Le nomber δ dépend à la fois de x_0 et ε, on le note donc $\delta(\varepsilon, x_0)$.

Proposition 1.2. *La continuité est stable par les opérations élémentaires.*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$, si les fonctions f et g sont continues en $x_0 \in [a, b]$, alors

1. *λf est continue en $x_0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;*
2. *$f \pm g$ est continue en x_0 ;*
3. *$f.g$ est continue en x_0 ;*
4. *$\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$;*
5. *Si une fonction g est continue au point x_0 et une fonction f est continue au point $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0.*

Proposition 1.3. *Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset [a, b]$ qui converge vers x_0 on a la limite de la suite $(f(x_n))_n$ existe et converge vers $f(x_0)$.*

Définition 1.5 (La fonction uniformément continue). *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que*

$$|x - y| < \delta \text{ et } x, y \in [a, b] \quad \text{impliquent} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La continuité uniforme est une propriété plus forte que la continuité usuelle.
Il existe un théorème très important qui assure que dans certains cas, une fonction continue est uniformément continue.

Théorème 1.1 (Théorème de Heine). *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle compact est uniformément continue.*

Définition 1.6 (Fonction borneé). *On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est majorée (resp minorée, bornée), si $f([a, b])$ est une partie majorée (resp.minorée, bornée) de $\mathbb{R}$, c'est à dire :*

1. *f est majorée sur $[a, b]$, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq M$. On dit alors que M est un majorant de f.*

2. *f est minorée sur $[a, b]$, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq m$. On dit alors que m est un minorant de f.*

3. *f est bornée sur $[a, b]$ si f est majorée et minorée.*

Théorème 1.2. *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors f est borneé sur $[a, b]$ et atteint ses bornes sur $[a, b]$.*

1.4 Fonctions dérivables

Définition 1.7. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $]a, b[$, et soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que f est dérivable en x_0 si le rapport*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$, ou de manière équivalente, si le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to x_0$. Cette limite est notée $f'(x_0)$ $\left(\text{ou aussi } \frac{df}{dx}(x_0)\right)$ et est appelée dérivée de f en x_0.

Définition 1.8. *On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ lorsque f est dérivable en tout point de $]a, b[$. Dans ce cas la fonction $x \mapsto f'(x)$, définie sur $]a, b[$, est appeleé fonction dériveé de f et est notée f'.*

Proposition 1.4. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Proposition 1.5. *Soit f et g deux fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en $x_0 \in]a, b[$. Alors $f + g$, $f - g$, et fg est aussi dérivables en x_0. Cela vant également pour $\frac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$ et $(g \circ f)$ les dérivées en x_0 sont donnés par les formules suivantes*

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

b) $(fg)'(x_0) = f(x_o)g'(x_o) + f'(x_0)g(x_0)$, *c)* $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, *tel que* $g(x_0) \neq 0$.

Théorème 1.3. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *si* f' *existe et est monotone sur* $]a,b[$. *Alors* f' *est continue sur* $]a,b[$.

Théorème 1.4 (Théorème des accroissements finis). *Soit* f *une fonction continue de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *dérivable dans* $]a,b[$. *Alors il existe (ou moins) un point* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.5 Intégral de Riemann

Définition 1.9. *Soit* $[a,b]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *l'ensemble* $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *satisfaisant les inégalités*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

est appelé une subdivision de $[a,b]$.
L'ensemble des subdivision de $[a,b]$ *est désigné par* $sub([a,b])$.

Définition 1.10. *Une subdivision* σ' *de* $[a,b]$ *est dite raffinement de* σ *si* $\sigma \subseteq \sigma'$.

Définition 1.11 (Sommes de Darboux). *Soit* $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *une subdivision de* $[a,b]$ *et soit* f *une fonction bornée, définie sur* $[a,b]$ *à valeurs réelles. On appelle somme de Darboux supérieure la somme*

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

On appelle somme de Darboux inférieure la somme

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Définition 1.12. *On dit que la fonction* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *au sens de Riemann (ou encore Riemann-intégrable) si* $I^-(f) = I^+(f)$.
On note alors

$$I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f(t)dt,$$

avec

$$I^+(f) = \inf_{\sigma \in sub([a,b])} S(f, \sigma),$$

est l'intégrale supérieure de f et

$$I^-(f) = \sup_{\sigma \in sub([a,b])} s(f, \sigma),$$

est l'intégrale inférieure.

Définition 1.13 (Somme de Riemann). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ et soit $t = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de points tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On appelle somme de Riemann de f le réel*

$$S(f, \sigma, t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

On dit que f est Riemann-intégrable si, ces sommes tendent vers une limite finie, indépendante du choix de σ et des points t_i, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Cette limite s'appelle alors intégrale de Riemann de f, et est noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Théorème 1.5 (Critère de Riemann). *Pour qu'une fonction f soit intégrable sur $[a, b]$, il faut et il suffit qu'il existe $I \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \sigma \in sub([a, b]), \mid \sigma \mid < \alpha, \forall t, \mid S(f, \sigma, t) - I \mid < \varepsilon.$$

Dans ce cas

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

Proposition 1.6.

- *Toute fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est bornée.*
- *Les fonctions continues sont Riemann-intégrables.*
- *Les fonctions monotones (croissantes ou décroissantes) sont Riemann-intégrables.*

Proposition 1.7 (Linéarité). *Si f et g deux fonctions définie sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ sont Riemann-intégrables alors leurs combinaisons linéaires le sont aussi et pour tout α, β réels, on a*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables est un espace vectoriel sur lequel l'intégrale définit une application linéaire.

Proposition 1.8 (Relation de Chasles). *Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$ alors f l'est encore sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposition 1.9. *Si f est positive et Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Corollaire 1.1. *Si f et g sont Riemann-intégrables et $f \leq g$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

C'est la propriété prcédente appliquée à $g - f$, fonction positive.

Proposition 1.10 (Intégrale et valeurs absolues). *Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Théorème 1.6 (Théorème fondamental de calcul I). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Théorème 1.7 (Théorème fondamental de calcul II). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable. Alors*

$$\int_a^b f'(t)dx = f(b) - f(a).$$

1.6 Topologie générale

Pour plus de détails sur cette section se référer à [3], [6] et [12].

Définition 1.14 (Topologie). *Soit X un ensemble, on appele topologie sur X une famille θ de partie de X vérifiant les propositions suivantes*

1. *θ et X sont des éléments de θ.*
2. *Toute intersection finie d'éléments de θ est un élément de θ.*
3. *Toute réunion quelconque d'éléments de θ est un élément de θ.*

Définition 1.15 (Espace vectoriel topologique). *Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une topologie pour laquelle les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont continues.*

Définition 1.16 (Espace normé). *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. *Pour tout $x \in E, k \in \mathbb{K} : \|kx\| = |k|\|x\|$;*
2. *Pour tout $x, y \in E$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;*
3. *Un élément x de E vérifie $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Le couple $(E, \|.\|)$ s'appelle espace vectoriel normé.

Définition 1.17 (Distance associée à une norme). *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et soit $\|.\|$ une norme sur E. On associe à cette norme une distance d sur E donnée par la formule*

$$\forall x, y \in E, d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.18 (Convergence simple). *On dit que (f_n) converge simplement vers f si pour tout $x \in E$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, et pour tout $n \geq n_0$ on ait $\|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon$. Autrement dit pour tout $x \in X$ on ait $\|f_n(x) - f(x)\|_F \longrightarrow 0, \quad$ quand $n \to \infty$. On note $f_n \to f$.*

Définition 1.19 (convergence uniforme). *Soit E et F deux espaces normés.*
On dit qu'une suite $(f_n)_n$ d'applications de E dans F converge uniformément vers une application $f : E \to F$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ et

pour tout $x \in E$, on ait $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$, c'est à dire

$$\sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 1.20 (Espace métrique). *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E toute application d définie de $E \times E$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vérifiant les propriétés suivantes*

1. $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x);$
3. $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Le coupe (E, d) s'appelle un espace métrique.

Définition 1.21 (Suite de Cauchy). *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) si elle vérifie,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, \forall p, q \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.22 (Espace complet). *On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy dans E converge.*

Définition 1.23 (Espace de Banach). *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

CHAPITRE 2

Fonctions à variations bornées

Dans ce chapitre, nous introduisons les fonctions à variations bornées d'une seule variable. On donnant la définition et quelques propriétés élémentaires relatives à ces fonctions.

2.1 Fonctions à variations bornées (définitions et propriétés)

Définition 2.1. *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *une subdivision de* $[a,b]$, *on note par*

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) |.$$

On pose

$$V_a^b(f) = \sup_{\sigma \in sub([a,b])} var_\sigma(f),$$

la quantité $V_a^b(f)$ *est appellée la variation totale de* f *sur* $[a,b]$.

Définition 2.2. *La fonction* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est à variation bornée sur* $[a,b]$, *si* $V_a^b(f)$ *est finie.*

Si f *est à variation bornée sur* $[a,b]$, *nous écrivons* $f \in VB[a,b]$.

Exemple 2.1.

La fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$, *mais n'est pas à variation bornée.*

En effet.

On considère la subdivision suivante de $[0,1]$,

$$\sigma_n = 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \ldots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} var_{\sigma_n}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| f(\frac{1}{(k+1)\pi}) - f(\frac{1}{k\pi}) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\cos(k+1)\pi}{(k+1)\pi} - \frac{\cos k\pi}{k\pi} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)} - \frac{(-1)^k}{k} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)} + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{k} \right) \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1}, \end{aligned}$$

donc, $var_{\sigma_n}(f) \geq \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+1}$.

Or la série $\sum \dfrac{1}{k+1}$ *est divergente, donc* f *n'est pas à variation bornée.*

Lemme 2.1. *(voir[9]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et σ une subdivision de $[a, b]$. Si σ' est un raffinement de σ, alors*

$$var_\sigma(f) \leq var_{\sigma'}(f).$$

Preuve.

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, en ajoutant le point c à σ on obtient $x_j < c < x_{j+1}$, pour un certain $0 \leq j \leq n-1$, alors $\sigma' = \{x_0, x_1, \ldots, x_j, c, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, et par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \mid f(x_{j+1}) - f(x_j) \mid &= \mid f(x_{j+1}) - f(c) + f(c) - f(x_j) \mid \\ &\leq \mid f(x_{j+1}) - f(c) \mid + \mid f(c) - f(x_j) \mid, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} var_\sigma(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\ &= \mid f(x_{j+1}) - f(x_j) \mid + \sum_{k=0, k\neq j}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\ &\leq \mid f(x_{j+1}) - f(c) \mid + \mid f(c) - f(x_j) \mid + \sum_{k=0, k\neq j}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\ &= var_{\sigma'}(f). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.1. *(voir[11]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c un point arbitraire dans $]a, b[$. Alors $f \in VB[a, b]$ si et seulement si $f \in VB[a, c]$ et on a $f \in VB[c, b]$ et*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Preuve.

On suppose que $f \in VB[a, b]$, soit σ une subdivision arbitraire de $[a, c]$, et en ajoutant le point b à σ, on obtient une subdivision σ' de $[a, b]$. Nous avons

$$\begin{aligned} var_{\sigma'}(f) &= var_\sigma(f) + |f(b) - f(c)| \\ &\leq V_a^b(f) \\ \Longleftrightarrow var_\sigma(f) &\leq V_a^b(f) - |f(b) - fc)|. \end{aligned}$$

Alors $V_a^c(f)$ est finie puisque f est à variation bornée, alors f est à variation bornée sur $[a,c]$, c'est à dire $f \in VB[a,c]$.

Réciproquement, suppose que $f \in VB[a,c]$ et $f \in VB[c,b]$. Soit σ une subdivision de $[a,b]$ en ajoutant le point c à σ on obtient une subdivision σ_1. Alors $\sigma_1 = \sigma' \cup \sigma''$, où σ' est une subdivision de $[a,c]$ et σ'' une subdivision de $[c,b]$. Alors nous avons par le Lemme 2.1

$$\begin{aligned} var_\sigma(f) &\leq var_{\sigma_1}(f) \\ &= var_{\sigma'}(f) + var_{\sigma''}(f) \\ &\leq V_a^c(f) + V_c^b(f), \end{aligned}$$

or cette inégalité est vraie pour toute subdivision σ de $[a,b]$, donc

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f). \tag{2.1.1}$$

Maintenant soient σ' et σ'' deux subdivision de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement et $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$, alors σ une subdivision de $[a,b]$.

Nous avons

$$\begin{aligned} var_{\sigma'}(f) + var_{\sigma''}(f) &= var_\sigma(f) \leq V_a^b(f) \\ \Longrightarrow var_{\sigma'}(f) &\leq V_a^b(f) - var_{\sigma''}(f). \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour toute subdivision σ' de $[a,c]$, donc

$$\begin{aligned} V_a^c(f) &\leq V_a^b(f) - var_{\sigma''}(f) \\ \Longleftrightarrow \quad var_{\sigma''}(f) &\leq V_a^b(f) - V_a^c(f) \end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned} &V_c^b(f) \leq V_a^b(f) - V_a^c(f) \\ \Longrightarrow\ &V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

et par les relations (2.1.1) et (2.1.2), on obtient

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f).$$

□

Théorème 2.2. *(Voir[5]) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone sur $[a,b]$, alors $f \in VB[a,b]$ et*

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Preuve.

On donne la preuve dans le cas où f est croissante, elle est similaire lorsque f est décroissante. Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$, alors

$$\mid f(b) - f(a) \mid = f(b) - f(a).$$

Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. Comme f est croissante, nous avons

$$\mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid = f(x_{k+1}) - f(x_k),$$

donc

$$\begin{aligned} var_\sigma(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \\ &= \big(f(x_1) - f(x_0)\big) + \big(f(x_2) - f(x_1)\big) + \ldots + \big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big) \\ &= f(x_n) - f(x_0) \\ &= f(b) - f(a), \end{aligned}$$

et puisque la somme $var_\sigma(f)$ est indépendante de la subdivision σ, nous concluons que

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

$\square$

Proposition 2.1. *(voir[10]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f), \ \forall x \in [a, b].$$

Preuve.

Soit $x \in [a, b]$, on utilisant la subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, x_2\}$ de $[a, b]$, telle que $x_0 = a, x_1 = x, x_2 = b$, alors nous avons

$$var_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \leq V_a^b(f)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid &= \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \mid f(x_2) - f(x_1) \mid \\ &= \mid f(x) - f(a) \mid + \mid f(b) - f(x) \mid \\ &\leq V_a^b(f),\end{aligned}$$

implique

$$\mid f(x) - f(a) \mid \leq V_a^b(f)$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}\mid f(x) \mid &\leq |f(a) + f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \\ &\leq |f(a) \mid + V_a^b(f),\end{aligned}$$

donc,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f), \forall x \in [a, b].$$

$\square$

Proposition 2.2. *(voir[5]) Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à variations bornées sur $[a, b]$ et k une constante. Alors*

1. *f est une fonction à variation bornée sur chaque sous intervalle fermé de $[a, b]$;*
2. *kf est à variation bornée sur $[a, b]$;*
3. *$f + g$ et $f - g$ sont à variations bornées sur $[a, b]$;*
4. *fg est à variation bornée sur $[a, b]$;*
5. *Si $\dfrac{1}{g}$ est bornée sur $[a, b]$, alors $\dfrac{f}{g}$ est à variation bornée sur $[a, b]$.*

Preuve.

1. Soit f est une fonction à variation bornée. Donc

$$V_a^b(f) = \sup_{\sigma \in sub([a,b])} var_\sigma(f) = r,$$

Où r est un nombre réel positif.

Soit $[c, d]$ un sous intervalle fermé de $[a, b]$ et $\sigma_1 = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ une subdivision de $[c, d]$, en ajoutant les points a et b à σ_1, on obtient $\sigma_2 = \{x_i : 0 \leq i \leq n+1\}$ est une subdivision de $[a,b]$, telle que $x_1 = c$ et $x_n = d$. Alors

$$\begin{aligned} var_{\sigma_1}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid \\ &\leq \mid f(x_1) - f(a) \mid + \sum_{i=2}^{n+1} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid + \mid f(x_{n+1}) - f(x_n) \mid \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid \\ &= var_{\sigma_2}(f) \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Et comme la subdivision de $[c,d]$ est arbitraire, on conclut que

$$V_c^d(f) \leq r,$$

donc f est à variation bornée sur $[c,d]$.

2. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On a

$$\begin{aligned} var_{\sigma}(kf) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid \big(kf\big)(x_{i+1}) - \big(kf\big)(x_i) \mid \\ &= \mid k \mid \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid \\ &= \mid k \mid var_{\sigma}(f). \end{aligned}$$

Et comme la subdivisionde $[a,b]$ est arbitraire, alors kf est à variation bornée. En plus

$$V_a^b(kf) = \mid k \mid V_a^b(f).$$

3. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ une subdivision arbitraire de $[a,b]$. On a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} var_{\sigma}(f+g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid (f+g)(x_{i+1}) - (f+g)(x_i) \mid \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) + g(x_{i+1}) - f(x_i) - g(x_i) \mid \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid + \sum_{i=0}^{n-1} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid \\ &= var_{\sigma}(f) + var_{\sigma}(g) \\ &\leq V_a^b(f) + V_a^b(g). \end{aligned}$$

On a f et g sont à variations bornées, donc $V_a^b(f)+V_a^b(g)$ est finie et la subdivision que nous avons choisie est arbitraire, alors $f+g$ est à variation bornée, (même preuve pour $f-g$).

4. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, on pose $h = fg$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mid h(x_{i+1} - h(x_i) \mid &= \mid f(x_i+1)g(x_i+1) - f(x_i)g(x_i) \mid \\
&= \mid f(x_i+1)g(x_i+1) - f(x_i)g(x_i+1) + f(x_i)g(x_i+1) - f(x_i)g(x_i) \mid \\
&\leq \mid f(x_i+1)g(x_i+1) - f(x_i)g(x_i+1) \mid + \mid f(x_i)g(x_i+1) - f(x_i)g(x_i) \mid \\
&= \mid g(x_i+1) \mid\mid f(x_i+1) - f(x_i) \mid + \mid f(x_i) \mid\mid g(x_i+1) - g(x_i) \mid \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} \mid g(x) \mid\mid f(x_i+1) - f(x_i) \mid + \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid\mid g(x_i+1) - g(x_i) \mid .
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
var_\sigma(h) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid h(x_{i+1}) - h(x_i) \mid \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} \mid g(x) \mid \sum_{i=0}^{n-1} \mid f(x_{i+1}) - f(x_i) \mid + \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid \sum_{i=0}^{n-1} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \mid g(x) \mid var_\sigma(f) + \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid var_\sigma(g) \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} \mid g(x) \mid V_a^b(f) + \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid V_a^b(g)
\end{aligned}$$

Donc

$$var_\sigma(fg) \leq AV_a^b(f) + BV_a^b(g),$$

avec $A = \sup\limits_{x\in[a,b]} \mid g(x) \mid$ et $B = \sup\limits_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid$, et comme σ est une subdivision arbitraire, on conclut que fg est à variation bornée, et

$$V_a^b(fg) = AV_a^b + BV_a^b(g).$$

5. Par la propriété précédente, il suffit de montrer que $\dfrac{1}{g}$ est à variation bornée.

On a $\dfrac{1}{g}$ est bornée sur $[a,b]$, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in [a,b]$, on a

$\left|\dfrac{1}{g(x)}\right| \leq M$. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
var_\sigma\Big(\frac{1}{g}\Big) &= \sum_{i=0}^{n-1}\Big|\frac{1}{g(x_{i+1})} - \frac{1}{g(x_i)}\Big| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\Big|\frac{g(x_i) - g(x_{i+1})}{g(x_{i+1})g(x_i)}\Big| \\
&\leq M^2 \sum_{i=0}^{n-1} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid \\
&= M^2 var_\sigma(g) \\
&\leq M^2 V_a^b(g),
\end{aligned}$$

et comme σ est une subdivision arbitraire, on conclut que $\dfrac{1}{g}$ est à variation bornée. □

2.2 Théorème de Jordan

Dans cette section, nous examinons le fait qu'une fonction à variation bornée peut être écrite comme la différence de deux fonctions croissantes.

Théorème 2.3. *(voir[7]) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, si et seulement si'l existe deux fonctions croissantes f_1 et f_2, telle que $f = f_1 - f_2$.*

Avant de commencer la preuve du Théorème 2.3, nous avons besoin les deux Lemmes suivantes.

Lemme 2.2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, on a $V_a^b(f) = 0$ si et seulement si f est une constante dans $[a,b]$.*

Preuve.

On suppose que f est une constante. Alors f est une fonction monotone, donc par le Théorème 2.2

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|,$$

et comme $f(a) = f(b)$, donc

$$V_a^b(f) = 0.$$

Réciproquement, supposons que f n'est pas une constante sur $[a,b]$, donc il existe x_1 et x_2 entre a et b telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si on suppose que $\sigma = \{x_0 = a, x_1, x_2 = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &\geq var_\sigma(f) \\ &= \sum_{i=0}^{1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &= \mid f(x_1) - f(a) \mid + \mid f(b) - f(x_1) \mid, \end{aligned}$$

et comme $\mid f(x_2) - f(x_1) \mid > 0$. On conclut que $V_a^b(f) > 0$ et $V_a^b(f) \neq 0$. □

Lemme 2.3. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur $[a,b]$, alors la fonction*

$$\begin{aligned} v(x) : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto v(x) = V_a^x(f), \end{aligned}$$

est croissante.

Preuve.

Soit $x_1, x_2 \in [a,b]$, avec $x_1 < x_2$. Comme f est à variation bornée sur $[a,b]$, on a d'après le Théorème 2.1,

$$V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f),$$

implique

$$V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f),$$

alors

$$v(x_2) - v(x_1) = V_{x_1}^{x_2}(f),$$

et puisque $V_{x_1}^{x_2}(f) \geq 0$, on obtient $v(x_2) \geq v(x_1)$.

En plus par le Lemme 2.2, nous avons l'égalité si f est une constante sur $[x_1, x_2]$. □

Maintenenante nous démontrons le Théorème 2.3.

Preuve.

Soit $f_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f_1(x) = V_a^x(f)$, pour $x \in]a,b]$ et $f_1(a) = 0$.

Par le Lemme 2.3, la fonction f_1 est croissante, et on pose $f_2 = f_1 - f$. Alors $f = f_1 - f_2$, il suffit de montrer que f_2 est croissante.

Suppossons que $a \leq x < y \leq b$, en utilisant le Théorème 2.1, on obtient

$$\begin{aligned} & V_a^y(f) &&= V_a^x(f) + V_x^y(f) \\ \Longleftrightarrow \quad & f_1(y) &&= f_1(x) + V_x^y(f) \\ \Longleftrightarrow \quad & f_1(y) - f_1(x) &&= V_x^y(f) \\ & &&\geq |f(y) - f(x)| \\ & &&\geq f(y) - f(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & f_1(y) - f_1(x) &\geq \quad & f(y) - f(x) \\ \Longrightarrow \quad & f_1(y) - f(y) &\geq \quad & f_1(x) - f(x) \\ \Longrightarrow \quad & f_2(y) &\geq \quad & f_2(x). \end{aligned}$$

On conclut que f_2 est croissante sur $[a, b]$.

Réciproqument supposons que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ avec f_1 et f_2 croissante, comme f_2 est croissante $-f_2$ est décroissante et donc

$$f(x) = f_1(x) + (-f_2(x))$$

est la somme de deux fonctions monotones, alors d'aprés le Théorème 2.2 et Proposition 1.1 donc f est à variation bornée sur $[a, b]$. $\square$

Exemple 2.2. *Soit* $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définit par*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \\ 1 & si \quad 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

alors f *est la difference de deux fonctions croissantes* f_1 *et* f_2*.*

En effet.

On a la fonction f *est décroissante sur* $[0, 1[$*, alors si* $x \in [0, 1[$*, on a par le Théorème 2.2*

$$\begin{aligned} V_0^x(f) &= |f(x) - f(0)| \\ &= | -x^2 - 0 | \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Pour déterminer $V_0^1(f)$, *soit* $\sigma = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n = 1\}$ *une subdivision de* $[0,1]$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
var_\sigma(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\
&= \mid f(x_n) - f(x_{n-1}) \mid + \sum_{k=0}^{n-2} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\
&= \mid f(1) - f(x_{n-1}) \mid + \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\
&= x_{n-1}^2 + \sum_{k=0}^{n-2} (x_{k+1}^2 - x_k^2) \\
&= 2x_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

En prenant le point x_{n-1} *tel que* $\lim_{n \to +\infty} x_{n-1} = 1$, *donc* $var_\sigma(f)$ *assez proch à* 1.

Ainsi $V_0^1(f) = 2$.

Finalement, si $x \in]1,2]$, *nous avons par le Théorème 2.1*

$$\begin{aligned}
V_0^x(f) &= V_0^1(f) + V_1^x(f) \\
&= 2 + V_1^x(f).
\end{aligned}$$

Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *une partition de* $[1,x]$, *donc*

$$\begin{aligned}
var_\sigma(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\
&= \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \sum_{k=1}^{n-1} \mid f(x_{k+1}) - f(x_k) \mid \\
&= \mid 1 - 0 \mid \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Il est claire que $var_\sigma(f)$ *est indépendant de la subdivision* σ, *donc* $V_1^x(f) = 1$, *donc si* $x \in]1,2]$, *on a* $V_0^x(f) = 3$.

Par conséquent

$$f_1(x) = V_0^x(f) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ 3 & si \quad 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= V_0^x(f) - \Big(V_0^x(f) - f(x)\Big) \\
&= f_1(x) - f_2(x),
\end{aligned}$$

où

$$f_2(x) = V_0^x(f) - f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Corollaire 2.1. *(voir[7]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, alors f est la différence de deux fonctions strictement croissantes.*

Preuve.

Par le Théorème de Jordan (Théorème 2.3), on peut écrire f comme la différence de deux fonctions croissantes f_1 et f_2, c'est à dire $f = f_1 - f_2$.
On considère deux fonctions $g_1(x) = f_1(x)+x$ et $g_2(x) = f_2(x)+x$, et comme f_i $(i = \overline{1, 2}\ )$ et la fonction identité Id sont des fonctions croissantes, alors leur somme est aussi croissante. Cependant, puisque Id est une fonction strictement croissante, on conclut que g_i $(i = \overline{1, 2})$ est strictement croissante. Et nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad &= \big(f_1(x) + x\big) - \big(f_2(x) + x\big) \\ &= g_1(x) - g_2(x). \end{aligned}$$

Où g_1 et g_2 sont deux fonctions straictements croissantes. □

Proposition 2.3. *(voir[9]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ et $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telle que g est à variation bornée sur $[c, d]$ et f est monotone sur $[a, b]$, alors*
$(g \circ f)$ est à variation bornée sur $[a, b]$.

Preuve.

Supposons que f est une fonction croissante et puisque g est à variation bornée, alors d'après le Théorème 2.3 il existe φ et ψ deux fonctions croissantes telle que $g = \varphi - \psi$, alors

$$\begin{aligned} g \circ f \quad &= (\varphi - \psi) \circ f \\ &= (\varphi \circ f) - (\psi \circ f). \end{aligned}$$

Et comme $(\varphi \circ f)$ et $(\psi \circ f)$ sont des fonctions croissantes, donc d'aprés le Théorème de Jordan (Théorème 2.3) $(g \circ f)$ est à variation bornée. □

2.3 Conditions de variation bornée

Définition 2.3. *On dit que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschizinne s'il existe une constante $L > 0$, tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, nous avons*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Théorème 2.4. *(voir[8]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschizinne de rapport L sur $[a, b]$, alors f est à variation bornée sur $[a, b]$ et*

$$V_a^b(f) \leq L(b - a).$$

Preuve.

Supposons que

$$| f(x) - f(y) |\leq L | x - y |, \ \forall\ x, y \in [a, b]$$

et soit $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$\begin{aligned} var_\sigma(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) | \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} L | x_{k+1} - x_k | \\ &= L\big((x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\big) \\ &= L(b - a). \end{aligned}$$

Puisque σ est une subdivision arbitraire, alors l'inégalité-ci-dessus est valable pour toute subdivision de $[a, b]$, donc f est à variation bornée et

$$V_a^b(f) \leq L(b - a).$$

$\square$

Théorème 2.5. *(voir[8]) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ et s'il existe $M > 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$ sur $[a, b]$, alors $f \in VB[a, b]$ et*

$$V_a^b(f) \leq M(b - a).$$

Preuve.

Pour tout $x, y \in [a, b]$, on a par le Théorème des accroissements finis (Théorème 1.4), il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mid f(x) - f(y) \mid &= \mid f'(c) \mid\mid x - y \mid \\ &\leq M \mid x - y \mid, \end{aligned}$$

pour toute $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$, c'est à dire f une fonction Lipschitzienne de rapport M, et par le Théorème 2.4, on conclut que $f \in VB[a, b]$ et $V_a^b \leq M(b - a)$. $\square$

Exemple 2.3.

1. *Soit* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

alors $f \in VB[0, 1]$.

En effet.

Pour tout $x \in]0, 1]$*, la fonction* f *est dérivable et*

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) + \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{\sqrt{x}}),$$

et si $x = 0$*, on a*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $x \in [0, 1]$*, nous avons*

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) + \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) \right| \\ &\leq \left| \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) \right| + \left| \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{\sqrt{x}}) \right| \\ &\leq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

alors,

$$\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}$$

donc, nous avons par le Théorème 2.5, f est à variation bornée sur $[0,1]$ et $V_0^1(f) \leq \left(\frac{3}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$.

2. *Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

alors f est à variation borneé sur $[0,1]$.

En effet.

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

On a $|f'(x)| \leq 3$, pour tout $x \in [0,1]$, donc par le Théorème 2.5 f est à variation boneé et $V_0^1(f) \leq 3$.

Théorème 2.6. *(voir[7]) Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable, alors g est à variation bornée et*

$$V_a^b(g) = \int_a^b \mid g'(t) \mid dt.$$

Preuve.

Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par le Théorème 1.7

$$\begin{aligned} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid &= \Big| \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(t)dt \Big| \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mid g'(t) \mid dt, \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} var_\sigma(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mid g'(t) \mid dt \\ &= \int_a^b \mid g'(t) \mid dt, \end{aligned}$$

et cette relation est vrais pour toute subdivision σ de $[a,b]$, donc g est à variation bornée et

$$V_a^b(g) \leq \int_a^b \mid g'(t) \mid dt. \tag{2.3.1}$$

D'autre part, soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, alors par le Théorème des accroissements finis (Théorème 1.4), on a

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = (x_{i+1} - x_i)g'(\theta_i), \text{ avec } x_i < \theta_i < x_{i+1},$$

alors

$$\begin{aligned} var_\sigma(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mid g(x_{i+1}) - g(x_i) \mid \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \mid g'(\theta_i) \mid . \end{aligned}$$

cette dernière expression est la somme de Riemann associée à $\mid g' \mid$ relativement à la subdivision σ, donc

$$var_\sigma(g) \longrightarrow \int_a^b \mid g'(t) \mid dt, \text{quand } |\sigma| \to 0$$

où $\mid \sigma \mid$ représente le pas de la subdivision σ, doù

$$V_a^b(g) \geq \int_a^b \mid g'(t) \mid dt. \tag{2.3.2}$$

Donc par les relation 2.3.1 et 2.3.2, on a

$$V_a^b(g) = \int_a^b |g'(t)| dt.$$

□

Corollaire 2.2. *(voir[1]) Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, si $f \in VB[a,c]$ pour toute $a < c < b$ et s'il existe $M > 0$, telle que $V_a^c(f) \leq M$, pour toute $a < c < b$, alors $f \in VB[a,b]$.*

Preuve.

Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision arbitraire de $[a,b]$, et $\sigma' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, alors σ' est une subdivision de $[a, x_{n-1}]$, et comme $V_a^{x_{n-1}}(f) \leq M$, nous avons

$$
\begin{aligned}
var_\sigma(f) &= var_{\sigma'} + \mid f(b) - f(x_{n-1}) \mid \\
&\leq V_a^{x_{n-1}}(f) + \mid f(b) - f(x_{n-1}) \mid \\
&\leq M + \mid f(b) - f(x_{n-1}) \mid \\
&= M + \mid f(b) + (f(a) - f(a)) - f(x_{n-1}) \mid \\
&\leq M + \mid f(b) - f(a) \mid + \mid f(a) - f(x_{n-1}) \mid \\
&\leq M + \mid f(b) - f(a) \mid + V_a^{x_{n-1}}(f) \\
&\leq 2M + \mid f(b) - f(a) \mid,
\end{aligned}
$$

donc $f \in VB[a,b]$. $\square$

Exemple 2.4. *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction définie par*

$$
f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \cos(\frac{\pi}{x}) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}
$$

alors, $f \in VB[0,1]$.

En effet.

Pour tout $x \in]0,1]$, *on a* f' *défini par*

$$
f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\cos(\frac{\pi}{x}) + \frac{\pi}{\sqrt{x}}\sin(\frac{\pi}{x}).
$$

Pour tout $0 < a < 1$, *la fonction* $|f'(.)|$ *est continue sur* $[a,1]$ *et donc par le Théorème 2.6* $f \in VB[a,1]$ *et la variation totale de* f *sur* $[a,1]$ *est donnée par*

$$
V_a^1(f) = \int_a^1 |f'(x)| dx.
$$

En plus

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= \Big| \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\pi}{x}) + \frac{\pi}{\sqrt{x}} \sin(\frac{\pi}{x}) \Big| \\
&\leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{\pi}{\sqrt{x}},
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned} V_a^1(f) &= \int_a^1 |f'(x)|dx \\ &\leq \int_a^1 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &< 1 + 2\pi, \end{aligned}$$

donc $V_a^1(f) \leq 1 + 2\pi$, *pour tout* $a > 0$. *Alors par le corollaire 2.2,* f *est à variation bornée sur* $[0, 1]$.

2.4 Fonctions absolument continue

Définition 2.4. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *on dit que* f *est une fonction absolement continue sur* $[a, b]$, *si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, *tel que pour toute subdivision dénombrable de l'intervalle* $[a, b]$ *par des intervalles disjoints* $[x_i, y_i]$,$1 \leq i \leq n$ *vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

Théorème 2.7. *(voir[7]) Une fonction absolument continue est uniformément continue.*

Preuve.

Ce résultat est une conséquence de la définition 2.4, si nous choisissons $n = 1$. □

Théorème 2.8. *(voir[7]) Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction Lipschizienne de rapport* $L > 0$, *alors* f *est absolument continue sur* $[a, b]$.

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, et $\{[x_i, y_i] : 1 \leq i \leq n\}$ une subdivision dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[x_i, y_i]$ tel que $\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta$. En utilisant la condition de

Lipschitz on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mid f(y_i) - f(x_i) \mid &\leq \sum_{i=1}^{n} L(y_i - x_i)\\ &< L\frac{\varepsilon}{L}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi f est absolument continue sur $[a, b]$. $\square$

Théorème 2.9. *(voir[7]) Si la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue sur $[a, b]$, alor f est à variation bornée sur $[a, b]$.*

Preuve.

Si f est une fonction absolument continue sur $[a, b]$, alors par définition il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_i (y_i - x_i) < \delta \Rightarrow \sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < 1,$$

Pour toute subdivision dénombrale de l'intervalle $[a, b]$ par les intervalles disjoints $[x_i, y_i]$.
On pose $r = \left[\dfrac{b-a}{\delta}\right] + 1$, maintenant, construire une subdivision de $[a, b]$ comme suit

$$\Big\{x_i = a + \frac{i(b-a)}{r} : \quad 0 \leq i \leq r\Big\},$$

donc $V_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq 1$, par la condition de la continuité absolue, et par le Théorème 2.1, on obtient $V_a^b(f) \leq r$, donc f est à variation borneé. $\square$

Théorème 2.10. *(voir[7]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue alors, on peut écrit la fonction f comme la différence de deux fonctions croissantes et continues.*

Preuve.

Comme f est absolument continue sur $[a, b]$, donc d'aprés le Théorème 2.9, f est à variation bornée.
Ainsi d'après le Téorème de Jordan (Théorème 2.3) on peut ecrit f comme la différence de deux fonctions continues croissantes. $\square$

Théorème 2.11. *(voir[7]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et f' existe et bornée sur $]a, b[$, alors f est absolument continue sur $[a, b]$.*

Preuve.

On suppose qu'il existe $M > 0$, telle que $|f'(x)| < M$, pour tout $x \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$ et on considère $\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)|$ où $\{[x_i, y_i] : 1 \le i \le n\}$ une subdivision dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[x_i, y_i]$, telle que $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Alors, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(y_i) - f(x_i)|}{|y_i - x_i|} |y_i - x_i|.$$

Par le Théorème des accroissements finis (Théorème 1.4) pour tous $i = \overline{1, n}$, il existe $c_i \in [x_i, y_i]$ telle que

$$\frac{|f(y_i) - f(x_i)|}{|y_i - x_i|} = |f'(c_i)| < M.$$

implique

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(y_i) - f(x_i)|}{|y_i - x_i|} |y_i - x_i| \quad &< \sum_{i=1}^{n} M |y_i - x_i| \\ &= M \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \\ &= M \frac{\varepsilon}{M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, f est absolument continue sur $[a, b]$. □

2.5 La fonction $v(x)$

Dans la preuve de Théorème de Jordan, nous avons introduit la fonction de variation totale $v(x) = V_a^x(f)$, pour tout $x \in]a, b]$ et $v(a) = 0$. Dans cette section, nous étudierons certaines propriétés de cette fonction, plus specifiquement la continuité et la dérivée.

Théorème 2.12. *(voir [10]) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée , alors la fonction $v(.)$ est continue en $c \in [a, b]$ si et seulement si f est continue en c.*

Preuve.

• Supposons que $v(.)$ est continue en $c \in [a, b]$, c'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$

tel que si

$$|x-c|<\delta,$$

impliquent

$$|v(x)-v(c)|<\varepsilon.$$

Par la définition de la variation borneé, soit $\sigma=\{a=x_0,x_1=b\}$ une subdivision de $[a,b]$, nous avons

$$|f(b)-f(a)|\leq V_a^b(f).$$

Ainsi, si $x<c$,

$$|f(c)-f(x)|\leq V_x^c(f),$$

d'autre part, par le Théorème 2.1, on a

$$\begin{aligned} V_a^c(f) &= V_a^x(f)+V_x^c(f) \\ \Longrightarrow \quad V_x^c(f) &= V_a^c(f)-V_a^x(f) \\ &= v(c)-v(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |f(c)-f(x)| &\leq V_x^c(f) \\ &= v(c)-v(x), \end{aligned}$$

et si $c<x$, alors

$$|f(c)-f(x)|\leq V_c^x(f).$$

De même, par le Théorème 2.1, on a

$$\begin{aligned} V_a^x(f) &= V_a^c(f)+V_c^x(f) \\ \Longrightarrow \quad V_c^x(f) &= V_a^x(f)-V_a^c(f) \\ &= v(x)-v(c), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |f(c)-f(x)| &\leq V_c^x(f) \\ &= v(x)-v(c). \end{aligned}$$

Cela montre que quand $|x-c|<\delta$, on a

$$|f(x)-f(c)|\leq|v(x)-v(c)|<\varepsilon.$$

Donc, la continiuté de $v(.)$ implique la continuité de f.

• Supposons maintenant que f est continue en $c \in [a,b[$, soit $\varepsilon > 0$, alors existe $\delta > 0$ telle que

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour ce ε, il existe $\sigma \in sub([c,b])$, tel que

$$\sigma = \{c = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$$

et

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid .$$

Si $x_1 - x_0 \geq \delta$, en ajoutant un point $x_{\frac{1}{2}}$ à σ tel que $x_{\frac{1}{2}} - x_0 < \delta$.

Alors

$$\begin{aligned} V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} &< \mid f(x_1) - f(x_0) \mid + \sum_{k=2}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid \\ &\leq \mid f(x_1) - f(x_{\frac{1}{2}}) \mid + \mid f(x_{\frac{1}{2}}) - f(x_0) \mid + \sum_{k=2}^{n} \mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid \\ &< \mid f(x_1) - f(x_{\frac{1}{2}}) \mid + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^{n} \mid f(x_k) - f x_{k-1}) \mid . \end{aligned}$$

Comme $\{x_{\frac{1}{2}}, x_1, \ldots, x_n\}$ est une subdivision de $[x_{\frac{1}{2}}, b]$, nous avons

$$V_c^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f).$$

Par conséquent

$$V_c^b(f) - V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f) < \varepsilon,$$

d'autre part, on a par le Théorème 2.1

$$V_c^b(f) = V_c^{x_{\frac{1}{2}}}(f) + V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow V_c^b(f) - V_{x_{\frac{1}{2}}}^b(f) &= V_c^{x_{\frac{1}{2}}}(f) \\ &= V_a^{x_{\frac{1}{2}}}(f) - V_a^c(f) \\ &= v(x_{\frac{1}{2}}) - v(c). \end{aligned}$$

Ainsi, si $x_{\frac{1}{2}} - c < \delta$, alors $v(x_{\frac{1}{2}}) - v(c) < \varepsilon$. Donc, Par conséquent $v(.)$ est continue à droite en c. De même, on peut montrer que si $x \in]a, b]$, $v(.)$ est continue à gauche en c. Donc $v(.)$ est continue en c □

Corollaire 2.3. *(voir[7]) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $f \in BV[a, b]$ si et seulement s'il peut exprimé comme la différence de deux fonctions continues croissantes.*

Preuve.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Alors par le Théorème 2.12, $v(.)$ est continue sur $[a, b]$. Comme la différence de deux fonctions continues est une fonction continue, alors $v - f$ est continue.

On peut ecrit $f = v - (v - f)$ avec v et $v - f$ deux fonctions continues croissantes. □

Corollaire 2.4. *(voir [10]) Si f est une fonction continuement dérivable sur $[a, b]$, alors la fonction $v(.)$ est continuement dérivable sur $[a, b]$.*

Preuve.

On a comme f' est continue sur $[a, b]$, alors f' est bornée sur $[a, b]$, donc par le Théorème 2.5, $f \in VB[a, b]$. En plus, par le Théorème 2.6

$$v(x) = V_a^b(f) = \int_a^x \mid f'(t) \mid dt,$$

et d'aprés le Théorème fondamental du calcul (Théorème 1.6) $v'(x) = \mid f'(t) \mid$, qui est continue sur $[a, b]$. □

Corollaire 2.5. *(Voir [8]) Soit $f \in VB[a, b]$ est dérivable sur $[a, b]$. Si f' est continue à un point $x_0 \in [a, b]$, alors $v(.)$ est dérivable à x_0.*

Preuve.

La continuité de f' en x_0 implique que $\mid f' \mid$ est continue en x_0, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \mid x - x_0 \mid < \delta_1, \Longrightarrow \Big| |f'(x)| - |f'(x_0)| \Big| < \varepsilon,$$

donc

$$-\varepsilon < |f'(x)| - |f'(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |f'(x_0)| - \varepsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \varepsilon$$

On prend $\delta = \dfrac{\delta_1}{2}$, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, nous avons $\mid f'(x) \mid < \mid f'(x_0) \mid + \varepsilon$, c'est à dire f admet une dérivé borneé sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, par le Théorème des accroissements finis (Théorème 1.4), pour tout $x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, il existe $c \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, telle que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f'(c)(x - y) \\ \Longrightarrow |f(x) - f(y)| &= |f'(c)||x - y| \\ &\leq \big(|f'(x_0)| + \varepsilon\big)|x - y|, \end{aligned}$$

c'est à dire f est lipschizienne sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ de rapport $|f'(x_0)| + \varepsilon$.

Si $x_0 < x < x_0 + \delta$, alors par le Théorème 2.1, on a

$$V_a^x(f) = V_a^{x_0}(f) + V_{x_0}^x(f)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow V_a^x(f) - V_a^{x_0}(f) &= V_{x_0}^x(f) \\ \Longrightarrow v(x) - v(x_0) &= V_{x_0}^x(f), \end{aligned}$$

est puisque f est lipschizienne sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on obtient par le Théorème 2.4

$$\begin{aligned} v(x) - v(x_0) &= V_{x_0}^x(f) \\ &\leq \big(|f'(x_0)| + \varepsilon\big)(x - x_0) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \leq \mid f'(x_0) \mid + \varepsilon \tag{2.5.1}$$

De même manière, on montre que l'inégalité ci-dessus tient également pour x tel que $x_0 - \delta < x < x_0$. Dautre parte, si $x > x_0$ nous avons

$$\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{\mid f(x) - f(x_0) \mid}{\mid x - x_0 \mid} = \mid f'(x_1) \mid$$

pour un certain x_1 entre x et x_0 (par le Théorème des acroissements finis). Comme $|x_1 - x_0| < \delta$, nous avons $\mid f'(x_1) \mid > \mid f'(x_0) \mid - \varepsilon$, et donc

$$\mid f'(x_0) \mid - \varepsilon < \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}. \tag{2.5.2}$$

Par les l'inégalités (2.5.1) et (2.5.2), nous avons

$$0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \left| \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} - |f'(x_0)| \right| < \varepsilon$$

donc v est dérivable en x_0, et $v'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Théorème 2.13. *Soit $\{f_n\}$ est une suite des fonctions à variations bornées sur $[a,b]$, si $V_a^b(f_n) \leq M < +\infty$, pour tout n, et $f_n \to f$ sur $[a,b]$. Alors f est à variation bornée et $V_a^b(f) \leq M$.*

Preuve.

Soit $\sigma = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_k = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. On a

$$\begin{aligned} V_a^b(f_n) &= \sup_{\sigma \in sub([a,b])} var_\sigma(f_n) \\ &= \sup_{\sigma \in sub([a,b])} \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \\ &\leq M. \end{aligned}$$

D'autre part, On a $f_n \to f$, donc pour tout n nous avons

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= \sup_{\sigma \in sub([a,b])} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sup_{\sigma \in sub([a,b])} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{\sigma \in sub([a,b])} \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Donc f est à variation bornée et

$$V_a^b(f) \leq M.$$

□

Exemple 2.5. *Soient $a, b > 0$, alors la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & si \quad x \in]0,1] \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

est à variation bornée si $a > b$.

En effet.

Soit $\sigma = \{x_n\} = \{(n\pi + \frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{b}}\}$. On a

$$\sin(x_n^{-b}) = \begin{cases} 1 & si \quad n \text{ paire} \\ -1 & si \quad n \text{ impaire} \end{cases}$$

alors

$$f(x_n)=\begin{cases} x_n^a & si \quad n \quad paire \\ \\ -x_n^a & si \quad n \ impaire \end{cases}.$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}|f(x_n)-f(x_{n-1})| &= \sum_{n=1}^{m}\left|(-1)^n\left(x_n^a+x_{n-1}^a\right)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{m}\left(x_n^a+x_{n-1}^a\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{m-1}x_n^a+x_m^a+x_0^a \\
&\geq \sum_{n=1}^{m-1}x_n^a \\
&= \sum_{n=1}^{m-1}(n\pi+\frac{\pi}{2})^{\frac{-a}{b}}
\end{aligned}$$

quand $m\longrightarrow\infty$,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}(n\pi+\frac{\pi}{2})^{\frac{-a}{b}}<\infty \Leftrightarrow a>b.$$

D'oú f est à variation bornée, si $a>b$.

CHAPITRE 3

Intégrale de Stieltjes

Comme une application de variation bornée, nous considérons maintenant une généralisation de l'intégral de Riemann appeleé l'intégrale de Stieltjes. Cette intégrale implique deux fonctions f et g. L'intégrale (s'il existe) est désigneé par

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Et nous l'appelons l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à g.

3.1 Intégrale de Stieltjes

Définition 3.1. *Soit f et g deux fonctions bornées définies sur un intervalle $[a,b]$. Soit*

$$\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\},$$

une subdivision de $[a,b]$ et $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, on cosidère la somme

$$S(\sigma, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

Le nomber I est l'intégrale de stieltjes de f par rapport à g, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ_ε de $[a,b]$, tel que pour chaque subdivision σ rafinement de σ_ε et pour chaque $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, nous avons

$$|S(\sigma, f, g) - I| < \varepsilon.$$

On dit que $f \in R(g)$ sur $[a, b]$.

Lorsque le nombre I existe, il est déterminé de façon unique et est désigné par $\int_a^b fdg$ ou $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Théorème 3.1 (Voir [1]). *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $g \in VB[a, b]$, alors l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)dg(x),$$

existe.

Preuve.

Comme g est à variation borneé, on peut supposer que g est croissante.

Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, et

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

et

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

On pose

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

et

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

Avec s et S sont les sommes inférieure et supérieure respectivement associeés a la subdivision σ. Alors

$$s \leq S(\sigma, f, g) \leq S, \tag{3.1.1}$$

Pour tous les choix des points $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. En ajoutant le point x' a σ, on obtient une subdivision σ_0 de $[a, b]$. Alors $x' \in [x_{j-1}, x_j]$. Soit

$$m' = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x']\},$$

et

$$m'' = \inf\{f(x) : x \in [x', x_j]\}.$$

Alors $m_j \leq m'$ et $m_j \leq m''$, ainsi

$$\begin{aligned} m_j[g(x_j) - g(x_{j-1})] &= m_j[g(x_j) - g(x') + g(x') - g(x_{j-1})] \\ &= m_j[g(x_j) - g(x')] + m_j[g(x') - g(x_{j-1})] \\ &\leq m''[g(x_j) - g(x')] + m'[g(x') - g(x_{j-1})], \end{aligned}$$

Donc, si s_0 est la somme inférieure associeé à la subdivisin σ_0, alors $s \leq s_0$, de même si S_0 est la somme supérieure associeé à la subdivision σ_0, alors $S \geq S_0$.

Par conséquent, si S est la somme supérieure associeé à toute la subdivision de $[a, b]$, et s la somme inférieure associeé à n'importe quelle subdivision (éventuellement différent), alors $s \leq S$.

Soit I la plus petit borne supérieure de toutes les sommes inférieures. Alors par la relation (3.1.1), nous avons

$$|S(\sigma, f, g) - I| \leq S - s.$$

Comme f est uniformément continue sur $[a, b]$ (Théorème 1.1), alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]}.$$

Nous avons

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]}, (k = \overline{1, n}),$$

ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k) - g(x_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k) - g(x_{k-1}] &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]} \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} S - s &\leq \frac{\varepsilon}{2[g(b) - g(a)]} \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

Donc

$$|S(\sigma, f, g) - I| \leq S - s < \varepsilon,$$

et comme ε est arbitraire, on obtient

$$I = \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\square$

Théorème 3.2. *(voir[10]) Si $f_1, f_2 \in R(g)$ sur $[a,b]$ et c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, alors $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in R(g)$ sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x)dg(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + c_2 \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

Preuve.

On pose $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$. Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_k = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ et $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
S(\sigma, h, g) &= \sum_{i=1}^{n} h(t_k)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(c_1 f_1(t_k) + c_2 f_2(t_k)\right)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_1 f_1(t_k)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum_{i=1}^{n} c_2 f_2(t_k)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= c_1 \sum_{i=1}^{n} f_1(t_k)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + c_2 \sum_{i=1}^{n} f_2(t_k)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= c_1 S(\sigma, f_1, g) + c_2 S(\sigma, f_2, g).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, choisir σ'_ε tel que $\sigma'_\varepsilon \subseteq \sigma$ implique $|S(\sigma, f_1, g) - \int_a^b f_1 dg| < \varepsilon$, et choisir σ''_ε tel que $\sigma''_\varepsilon \subseteq \sigma$ implique $|S(\sigma, f_2, g) - \int_a^b f_2 dg| < \varepsilon$. Sinons prenons $\sigma_\varepsilon = \sigma'_\varepsilon \bigcup \sigma''_\varepsilon$, alors pour σ

plus fin que σ_ε, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|S(\sigma,h,g)-c_1\int_a^b f_1dg-c_2\int_a^b f_2dg\right| &= \Big|c_1S(\sigma,f_1,g)+c_2S(\sigma,f_2,g)- \\
&\qquad c_1\int_a^b f_1dg-c_2\int_a^b f_2dg\Big| \\
&= \Big|c_1\left(S(\sigma,f_1,g)-\int_a^b f_1dg\right)+ \\
&\qquad c_2\left(S(\sigma,f_2,g)-\int_a^b f_2dg\right)\Big| \\
&\le |c_1|\left|\left(S(\sigma,f_1,g)-\int_a^b f_1dg\right)\right|+ \\
&\qquad |c_2|\left|\left(S(\sigma,f_2,g)-\int_a^b f_1dg\right)\right| \\
&\le |c_1|\varepsilon+|c_2|\varepsilon,
\end{aligned}$$

alors

$$\int_a^b (c_1f_1+c_2f_2)dg=c_1\int_a^b f_1dg+c_2\int_a^b f_2dg.$$

□

Théorème 3.3. *(voir[5]) Si $f\in R(g_1)$ et $f\in R(g_2)$ sur $[a,b]$ et $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ alors $f\in R(c_1g_1+c_2g_2)$ sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)d(c_1g_1+c_2g_2)(x)=c_1\int_a^b f(x)dg_1(x)+c_2\int_a^b f(x)dg_2(x).$$

Preuve.

On pose $w=c_1g_1+c_2g_2$. Soit $\sigma=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ une subdivision de $[a,b]$ et $t_k\in[x_{k-1},x_k]$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
S(\sigma,f,w) &= \sum_{i=1}^n f(t_k)[w(x_i)-w(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^n f(t_k)\left[(c_1g_1+c_2g_2)(x_i)-(c_1g_1+c_2g_2)(x_{i-1})\right] \\
&= \sum_{i=1}^n f(t_k)[c_1g_1(x_i)-c_1g_1(x_{i-1})]+\sum_{i=1}^n f(t_k)[c_2g_2(x_i)-c_2g_2(x_{i-1})] \\
&= c_1\sum_{i=1}^n f(t_k)[g_1(x_i)-g_1(x_{i-1})]+c_2\sum_{i=1}^n f(t_k)[g_2(x_i)-g_2(x_{i-1})] \\
&= c_1S(\sigma,f,g_1)+c_2S(\sigma,f,g_2).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$, choisir σ'_ε tel que $\sigma'_\varepsilon\subseteq\sigma$, implique $\left|S(\sigma,f,g_1)-\int_a^b fdg_1\right|<\varepsilon$ et choisir σ''_ε tel que $\sigma''_\varepsilon\subseteq\sigma$ implique que $\left|S(\sigma,f,g_2)-\int_a^b fdg_2\right|<\varepsilon$, on prendre $\sigma_\varepsilon=\sigma'_\varepsilon\bigcup\sigma''_\varepsilon$ alors σ_ε est une rafinement de σ. On a

$$\begin{aligned}\left|S(\sigma,f,w)-c_1\int_a^b fdg_1-c_2\int_a^b fdg_2\right| &= \Big|c_1S(\sigma,f,g_1)+c_2S(\sigma,f,g_2)-c_1\int_a^b fdg_1\\ &\quad -c_2\int_a^b fdg_2\Big|\\ &\leq \Big|c_1S(\sigma,f,g_1)-c_1\int_a^b fdg_1\Big|+\Big|c_2S(\sigma,f,g_2)\\ &\quad -c_1\int_a^b fdg_2\Big|\\ &\leq |c_1|\varepsilon+|c_2|\varepsilon,\end{aligned}$$

donc

$$\int_a^b fd(c_1g_1+c_2g_2)=c_1\int_a^b fdg_1+c_2\int_a^b fdg_2.$$

□

Théorème 3.4. *(voir[1]) Soit $c\in]a,b[$. Si deux des intégrales suivantes existe alors le troisieme est également existe et on a*

$$\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)dg(x).$$

Preuve.

Si σ une subdivision de $[a,b]$ telle que $c\in\sigma$, soit

$$\sigma'=\sigma\cap[a,c] \text{ et } \sigma''=\sigma\cap[c,b],$$

désignent les subdivision de $[a,c]$ et $[c,b]$ respectivement. Alors

$$S(\sigma,f,g)=S(\sigma',f,g)+S(\sigma'',f,g).$$

Supposons que $\int_a^c fdg$ et $\int_c^b fdg$ existe. Alors pour $\varepsilon>0$, il existe une subdivision σ'_ε de $[a,c]$ tel que

$$\left|S(\sigma',f,g)-\int_a^c fdg\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

pour chaque σ' est une rafinement de σ'_ε,

et une subdivision σ''_ε de $[c,b]$ tel que

$$\left|S(\sigma'',f,g)-\int_c^b fdg\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

pour chaque σ'' est une rafinement de σ''_ε .

Alors $\sigma_\varepsilon = \sigma'_\varepsilon \cup \sigma''_\varepsilon$ est une subdivision de $[a,b]$, tel que σ est une rafinement de σ_ε, implique que, $\sigma'_\varepsilon \subseteq \sigma'$ et $\sigma''_\varepsilon \subseteq \sigma''$. Par conséquent si σ est une rafinement de σ_ε, on a

$$\begin{aligned}
\left|S(\sigma,f,g) - \int_a^c fdg - \int_c^b fdg\right| &= \left|S(\sigma',f,g) + S(\sigma'',f,g) - \int_a^c fdg - \int_c^b fdg\right| \\
&\leq \left|S(\sigma',f,g) - \int_a^c fdg\right| + \left|S(\sigma'',f,g) - \int_c^b fdg\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b fdg$ existe et on a

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg.$$

□

Définition 3.2. *Si $a < b$, nous définissons $\int_b^a fdg = -\int_a^b fdg$, si $\int_a^b fdg$ existe, et $\int_a^a fdg = 0$.*

Théorème 3.5. *(voir[10]) Si $f \in R(g)$ sur $[a,b]$, alors $g \in R(f)$ sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Remarque : cette équation est connue comme la formule d'intégration par parties.

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_a^b fdg$ existe, donc il existe une subdivision σ_ε de $[a,b]$, tel que pour tout σ' une rafinement de σ_ε, nous avons

$$\left|S(\sigma',f,g) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Soit $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ est une rafinement de σ_ε, nous avons

$$\begin{aligned}
S(\sigma,g,f) &= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)[f(x_k) - f(x_{k-1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[g(t_k)f(x_k) - g(t_k)f(x_{k-1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_{k-1}).
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})g(x_{k-1}) &= f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a),\end{aligned}$$

on pose $A = f(b)g(b) - f(a)g(a)$, donc

$$\begin{aligned}A - S(\sigma, g, f) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})g(x_{k-1}) \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} g(t_k)f(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[g(x_k) - g(t_k)] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})[g(t_k) - g(x_{k-1})] \\ &= S(\sigma', f, g),\end{aligned}$$

où σ' est une subdivision de $[a, b]$, si en prenant les points x_k et t_k ensemble. Alors σ' est une rafinement de σ et donc est une raffinement de σ_ε. Par conséquent l'inégalité (3.1.2) est valable et nous avons

$$|A - S(\sigma, g, f) - \int_a^b f dg| = |S(\sigma', g, f) - \int_a^b f dg| < \varepsilon,$$

pour σ est une raffinement de σ_ε.

Donc l'intégrale $\int_a^b gdf$ existe et

$$\int_a^b gdf = A - \int_a^b f dg.$$

□

Théorème 3.6 (Voir[10]). *Soit $f \in R(g)$ sur $[a, b]$, et g a une dériveé continue g' sur $[a, b]$. Alors l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ existe est nous avons*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Preuve.

Soit $v(x) = f(x)g'(x)$, et $\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, donc la somme de Riemann de v est donné par

$$\begin{aligned}S(\sigma, v) &= \sum_{k=1}^{n} v(t_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g'(t_k)(x_k - x_{k-1}), \quad t_k \in [x_{k-1}, x_k]\end{aligned}$$

et

$$S(\sigma, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

On applique le Théorème des accroisements finis (Théorème1.4), on obtient

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(v_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{où } v_k \in]x_{k-1}, x_k[,$$

et donc

$$\begin{aligned} S(\sigma, f, g) - S(\sigma, g) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g'(v_k)(x_k - x_{k-1})] - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g'(t_k)(x_k - x_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g'(v_k) - g'(t_k)](x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Comme f est borneé, nous avons $|f(x)| \leq M, \forall t \in [a, b]$ où $M > 0$, et la continuité de g' sur $[a, b]$ implique la continuité uniformément sur $[a, b]$. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que

$$0 \leq |x - y| < \delta \Rightarrow |g'(x) - g'(y)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Si nous prenous une subdivision σ'_ε de $[a, b]$, alors pour toute rafinement σ, nous avons

$$|g'(v_k) - g'(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

donc nous avons

$$\begin{aligned} |S(\sigma, f, g) - S(\sigma, v)| &= |\sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g'(v_k) - g'(t_k)](x_k - x_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)||g'(v_k) - g'(t_k)|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, $f \in R(g)$, donc il existe une subdivision σ''_ε telle que σ une rafinement de σ''_ε, implique

$$|S(\sigma, f, g) - \int_a^b f dg| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a lorsque σ est une rafinement de $\sigma_\varepsilon = \sigma'_\varepsilon \bigcup \sigma''_\varepsilon$, nous avons $|S(\sigma, v) - \int_a^b f dg| < \varepsilon.$ $\square$

Théorème 3.7. *(Voir[10]) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et g une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq M(f)V_a^b(g), \tag{3.1.3}$$

où $M(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Preuve.

Soit $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ une subdivision arbitraire de $[a, b]$, et $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Big|S(\sigma, f, g)\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\big[g(x_{k+1}) - g(x_k)\big]\Big| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \sum_{k=0}^{n-1} \Big|g(x_{k+1}) - g(x_k)\Big| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| var_\sigma(g) \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| V_a^b(g).
\end{aligned}$$

On pose $M(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, on obtient

$$\big|S(\sigma, f, g)\big| \leq M(f)V_a^b(g).$$

□

Théorème 3.8. *(Voir[10]) Soit g une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions continues sur $[a, b]$, qui convergent uniformément vers une fonction continue f, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Preuve.

Soit

$$M(f_n - f) = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Alors, d'aprés la relation (3.1.3)de Théorème 3.7, nous avons

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq M(f_n - f)V_a^b(g).$$

Et puisque $f_n \to f$ quand $n \to +\infty$, donc $M(f_n - f) \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\square$

Théorème 3.9. *(voir [10]) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions qui convergent vers g. Si*

$$V_a^b(g_n) < L$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Preuve.

On montre que

$$V_a^b(g) \leq L.$$

Soit

$$\sigma = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_m = b\}$$

une subdivision de $[a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout x_k, $k \leq m$, il existe un noumbre entier $N_k > 0$, tel que

$$n \geq N_k \implies \mid g_n(x_k) - g(x_k) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Soit $N = max\{N_k : k \leq m\}$. Alors pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\mid g(x_k) - g(x_{k-1}) \mid &\leq \mid g(x_k) - g_n(x_k) \mid + \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid + \mid g_n(x_{k-1}) - g(x_{k-1}) \mid \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2m} + \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid + \frac{\varepsilon}{2m} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{m} + \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \mid g(x_k) - g(x_{k-1}) \mid \ &\leq \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{\varepsilon}{m} + \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid \Big) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} + \sum_{k=1}^{m} \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid \\ &= \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \mid g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \mid \\ &\leq V_a^b(g_n) + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + L.\end{aligned}$$

Comme ε et la subdivision sont arbirtres, on obtient que $V_a^b(g) \leq L$.

Maintenant pour $\varepsilon > 0$, et $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_m = b\}$ une subdivision de $[a, b]$, tel que $[f(x) - f(x_k)] < \dfrac{\varepsilon}{3L}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dg(x) \ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dg(x) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big[f(x) - f(x_k) + f(x_k)\big] dg(x) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)]dg(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)dg(x) \\ &< \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{3L} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x) + \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{3L}[g(x_k) - g(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3L} L + \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] + \theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big), \quad \mid \theta \mid \leq 1.$$

De même,

$$\int_a^b f(x)dg_n(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)[g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})] + \theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big), \quad \mid \theta_n \mid \leq 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)dg_n(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\big[g_n(x_k)-g_n(x_{k-1})\big]-\sum_{k=1}^{m} f(x_k)\big[g(x_k)-g(x_{k-1})\big]\\
&\qquad +\theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)-\theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)\Big|\\
&\le \sum_{k=1}^{m}\Big|f(x_k)\big[g_n(x_k)-g_n(x_{k-1})\big]-f(x_k)\big[g(x_k)-g(x_{k-1})\big]\Big|\\
&\qquad +\Big|\theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)-\theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)\Big|\\
&= \sum_{k=1}^{m}\Big|f(x_k)\big[g_n(x_k)-g_n(x_{k-1})-g(x_k)+g(x_{k-1})\big]\Big|\\
&\qquad +\Big|\theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)-\theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)\Big|\\
&\le \sum_{k=1}^{m}\Big|f(x_k)\Big|\Big|\big[g_n(x_k)-g(x_k)+g(x_{k-1})-g_n(x_{k-1})\big]\Big|\\
&\qquad +\Big|\theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)-\theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)\Big|\\
&\le \max_{x\in[a,b]}\Big|f(x_k)\Big|\Big(\sum_{k=1}^{m}\Big|g_n(x_k)-g(x_k)\Big|+\Big|g_n(x_{k-1})-\\
&\qquad g(x_{k-1})\Big|\Big)+\Big|\theta_n\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)-\theta\big(\frac{\varepsilon}{3}\big)\Big|\\
&\le M\Big(\sum_{k=1}^{m}\big[\mid g_n(x_k)-g(x_k)\mid+\mid g_n(x_{k-1})-g(x_{k-1})\mid\big]\Big)\\
&\qquad +\frac{2\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

où

$$M=\max_{x\in[a,b]}\mid f(x)\mid.$$

Pour tout x_k, $k\le m$, il existe un noumbre entier positive N_k^* telle que

$$n\ge N_k^*\implies \mid g_n(x_k)-g(x_k)\mid\le\frac{\varepsilon}{6Mm}.$$

Soit $N^*=\max\{N_k^*: k\le m\}$. Alors, si $n\ge N^*$, nous avons

$$M\sum_{k=1}^{m}\big[\mid g_n(x_k)-g(x_k)\mid+\mid g_n(x_{k-1})-g(x_{k-1})\mid\big]\le M\sum_{k=1}^{m}\frac{2\varepsilon}{6Mm}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc

$$\Big|\int_a^b f(x)dg_n(x)-\int_a^b f(x)dg(x)\Big|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Si $n \geq N^*$. Alors
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\square$

Remarque 3.1. *Si $a < b$, nous définissons*
$$\int_a^b f(x)dg(x) = -\int_b^a f(x)dg(x).$$

Exemple 3.1. *Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x + [x]$*

En effet.

• *Première méthode.*

Soit $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{10n}{n} = 10\}$ une subdivision de $[0, 10]$, alors nous avons
$$\begin{aligned}
S(\sigma, f, g) &= \sum_{i=1}^{10n} f(t_i)\Big(g(x_i) - g(x_{i-1})\Big),\ t_k \in [x_{i-1}, x_i] \\
&= \sum_{i=1}^{10n} t_i\Big[\Big(g(\frac{i}{n}) - g(\frac{i-1}{n})\Big)\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{10n} t_i\Big[\Big(\frac{i}{n} + \Big[\frac{i}{n}\Big]\Big) - \Big(\frac{i-1}{n} + \Big[\frac{i-1}{n}\Big]\Big)\Big] \quad . \\
&= \sum_{i=1}^{10n} t_i\left(\frac{1}{n} + \Big(\Big[\frac{i}{n}\Big] - \Big[\frac{i-1}{n}\Big]\Big)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{10n} \frac{t_i}{n} + \sum_{i=1}^{10n} t_i\Big(\Big[\frac{i}{n}\Big] - \Big[\frac{i-1}{n}\Big]\Big)
\end{aligned}$$

On a
$$\begin{aligned}
\int_0^{10} xdx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{10n} t_i(x_k - x_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{10n} \frac{t_i}{n},
\end{aligned}$$

donc
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{10n} t_i(x_i - x_{i-1}) = \int_0^{10} xdx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{10} = \frac{1}{2}10^2 = 50,$$

et
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{10n} t_i\Big(\Big[\frac{i}{n}\Big] - \Big[\frac{i-1}{n}\Big]\Big) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{9} t_{(i+1)n}\big((i+1) - i\big) = 55,$$

donc, quand $n \longrightarrow +\infty$, nous avons

$$\int_0^{10} f(x)dg(x) = 50 + 55 = 105.$$

- *deuxième méthode.*

On a $f(x) = x$ et $g(x) = x + [x]$. Alors par le Théorème 3.5, nous avons

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{10} f(x)dg(x) &= f(10)g(10) - f(0)g(0) - \int_0^{10} g(x)df(x) \\
&= 10 \times 20 - \int_0^{10} (x + [x])dx \\
&= 200 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{10} - \sum_{i=0}^{9} \int_i^{i+1} [x]dx \\
&= 150 - \sum_{i=0}^{9} \int_i^{i+1} idx \\
&= 150 - \sum_{i=0}^{9} i \\
&= 150 - 45 \\
&= 105.
\end{aligned}$$

3.2 Espace $VB[a,b]$

Théorème 3.10. *(voir[1]) L'espace des fonctions à variations borneés $VB[a,b]$, muni de la norme*

$$\|f\| =\mid f(a) \mid + V_a^b(f),$$

est un espace de Banach.

Preuve.

Soit (f_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $VB[a,b]$, donc si $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$, tel que si $n, m \geq N$, alors

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

c'est à dire

$$|f_n(a) - f_m(a)| + V_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $(f_n(a))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in [a,b]$, et $\sigma = \{a, x, b\}$ est une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\begin{aligned} var_\sigma(f_n - f_m) &= \left|f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(a) - f_m(a)\big)\right| + \left|f_n(b) - f_m(b) - \big(f_n(x) - f_m(x)\big)\right| \\ &\leq V_a^b(f_n - f_m). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| - |f_n(a) - f_m(a)| &\leq \left|f_n(x) - f_m(x) - \big(f_n(a) - f_m(a)\big)\right| \\ &\leq V_a^b(f_n - f_m), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| - |f_n(a) - f_m(a)| &\leq V_a^b(f_n - f_m) \\ \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(a) - f_n(a)| + V_a^b(f_n - f_m), \end{aligned}$$

les termes à droite peuvent être arbitrairement petits pour n et m assez grand. Alors $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy pour tout $x \in [a,b]$. Soit $\{a,b\}$ une subdivision de $[a,b]$, nous povons montrer que $(f_n(b))$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

existe pour tout $x \in [a,b]$.

Comme (f_n) est une suite de Cauchy, alors pour $\varepsilon > 0$ et une subdivision $\sigma = \{a = x_0, x_1, \dots \varepsilon, x_k = b\}$ de $[a,b]$, il existe $N^* > 0$ tel que

$$|f_{N^*}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \text{pour tout} \quad x \in [a,b].$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{k} \big[|f(x_i) - f_{N^*}(x_i)| + |f_{N^*}(x_i) - f_{N^*}(x_{i-1})| + |f_{N^*}(x_{i-1}) - f(x_{i-1})|\big] \\ &< \sum_{i=1}^{k} \big[|f_{N^*}(x_i) - f_{N^*}(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{k}\big] \\ &\leq V_{f_{N^*}}[a,b] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme σ et ε sont arbitraires, alors

$$V_f[a,b] \leq V_{f_{N^*}}[a,b].$$

Donc $f \in VB[a,b]$. □

Définition 3.3. *Soit V un espace linéaire normé et $\phi : V \to \mathbb{R}$, on dit que*

- *ϕ est linéaire si pour tout $f, g \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g),$$

- *ϕ est linéaire bornée s'il existe $M > 0$, tel que*

$$|\phi(f)| \leq M\|f\|_V,$$

pour tout $f \in V$.

Théorème 3.11. *(voir[1]) Soit ϕ une fonction linéaire bornée sur l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$. Alors il existe $g \in VB[a,b]$ tel que*

$$\phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x),$$

pour tout $f \in C([a,b])$ et

$$\|\phi\| = V_a^b(g).$$

Preuve.

Pour chaque $x \in [a,b]$, on définit

$$u_x(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq x \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Soit $g(x) = \phi(u_x)$. On montre que $g \in VB[a,b]$ et $V_a^b(g) \leq \|\phi\|$.

Soit $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision arbitraire de $[a,b]$. Soit

$$\varepsilon_i = sgn[g(x_i) - g(x_{i-1})], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i[g(x_i) - g(x_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i[\phi(u_{x_i}) - \phi(u_{x_{i-1}})] \\
&= \phi\Big[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(u_{x_i} - u_{x_{i-1}})\Big] \\
&\leq \|\phi\|\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(u_{x_i} - u_{x_{i-1}})\Big\| \\
&\leq \|\phi\|.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{x_i} - u_{x_{i-1}}) \Big\| \leq 1.$$

Comme la subdivision est arbitraire, on obtient que $V_a^b(g) \leq \|\phi\|$ et $g \in VB[a,b]$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

est défini pour tout $f \in C([a,b])$. Maintenant, on montre que

$$\phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Supposons que $f \in C([a,b])$. Soit

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

On pose

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[u_{x_i}(x) - u_{x_{i-1}}(x)].$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| &= \sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [a,b]\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup\{|f(x) - f(x_i)| : x_{i-1} < x \leq x_i\} \end{aligned}$$

Comme f est une uniformément continue sur $[a,b]$, nous avons $|f(x) - f(x_i)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Ainsi, $\|f - f_n\| \to 0$, donc $f_n \to f$. Car une fonction linéaire borneé et nécessairement continue, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \lim_{n \to +\infty} \phi(f_n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \phi\Big[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\big(u_{x_i}(x) - u_{x_{i-1}}(x)\big)\Big] \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\big[\phi(u_{x_i}) - \phi(u_{x_{i-1}})\big] \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\big[g(x_i) - g(x_{i-1})\big] \\ &= \int_a^b f(x)dg(x). \end{aligned}$$

Donc, nous avons

$$|\phi(f)| \leq V_a^b(g)\|f\|$$

par conséquent,

$$\|\phi\| \leq V_a^b(g).$$

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Apostol and Tom M**, Mathmatical Analysis, Adison-Westey, Resly, Reading, MA, 1974.

[2] **Bernard Gostiaux**. Cours de Mathématiques spèciales, tome 2 : topologie, analyse. PUF, 1993.

[3] **N.Bourbaki**, Espace Vectoriels Topologiques, Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[4] **Jean-Marie Arnaudiès, Henri Fraysse**. Cours de Mathématiques, tome 2, Analyse. Dunod, 1991.

[5] **Jones and Frank**, Lebesgue Integration on Euclidean Space, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1993.

[6] **G.Gilles, A.Got et M-C. Marle**, Topologie, ellipese, éditionnmarketing S.A, 1997 32 rue bargue, Paris (15).

[7] **X.Gourdon**, Analyse, Ellipses, 1994.

[8] **R.Kannan and C.K.Krenger**. Adranced analysis on the real line, Springer-Verlag, 1996.

[9] **S.MĂRCUŞ**, "Mathematical Analysis" (in Romanian), Vol. 2, 1968.

[10] **Natanson, T.P.**, Theoryof function of a Real Variable, Vol.1, rev-ed., Frederick Ungar Publishing, New York, 1991.

[11] **W.Rudin**, Principles of mathematical analysis, Third edition, Mc Gaw-Hill, 1976.

[12] **Y. Sonntag**, Topologie et Analyse fonctionnelle, ellepse, édition marketing S.A, 1998.