

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
ET POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



Université de Jijel

***Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques***

N° d'ordre :

N° de série :

*Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de
Magister en Mathématiques*

Option : Algèbre

Par : Mounira Boulouh

Thème

**Contribution à l'étude de la mesure de Mahler de
certaines courbes de genre ≤ 3**

Soutenu le devant le jury composé de

Président : A. Gasmi M.C.A Université de M'sila

Rapporteur : N. Touafek M.C.A Université de Jijel

Examineur: L. Zedam M.C.A Université de M'sila

Invité : A. Bouchair M.C.B Université de Jijel

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience pour surmonter les obstacles et d'accomplir ce Modeste travail.

Je tiens à exprimer mes plus chaleureux remerciements à Mr. Nouressadat Touafek qui fut pour moi un directeur de mémoire attentif et disponible malgré ses nombreuses charges.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Messieurs A. Gasmí, L. Zedam et A. Bouchair.

J'adresse toute ma gratitude à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse tous mes remerciements à mes parents, mes frères, mes sœurs, mes collègues et toutes mes amies.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur la mesure de Mahler	6
1.1 Rappels et définitions	6
1.2 Minorations de la mesure de Mahler d'un polynôme à une seule indé-	
terminée	7
1.3 Mesure de Mahler d'ordre k et mesure de Mahler multiple	13
1.4 La q -mesure de Mahler	16
2 Mesure de Mahler et conjecture de Boyd	21
2.1 Rappels	21
2.1.1 Les courbes elliptiques	21
2.1.2 Dilogarithme de Block et Wigner et la fonction régulateur	26
2.1.3 Conjecture de Boyd	27
2.1.4 Polynômes tempérés et polynômes réciproques	28
2.2 La formule explicite de Smyth	29
2.3 Mesure de Mahler de deux nouvelles familles de polynômes de genre 1	31
2.3.1 La famille des courbes $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0$	32
2.3.2 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0$. .	37
2.3.3 La famille des courbes $(x^2 + 1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x = 0$. .	43
2.4 Sur la mesure de Mahler de la famille des courbes $y^2 + (x^2 + kx + 1)y +$	
$x^2 = 0$	52
2.5 Mesure de Mahler de $X + Y + 2 \sin(\pi x)$	58

3	Mesure de Mahler de certaines courbes hyper-elliptiques	64
3.1	Des familles des courbes de genre 2	64
3.1.1	La famille $P_k(x, y) = y^2 + (x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1)y + x^4$	65
3.1.2	La famille $Q_k(x, y) = (x - 1)^2 y^2 + (x^3 + kx^2 + kx + 1)y + x(x - 1)^2$	69
3.1.3	La famille $R_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + kx(x + 1)y + x(x^2 + x + 1)$	71
3.1.4	La famille $S_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + (x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1)y + x^2(x^2 + x + 1)$	73
3.2	Une famille des courbes de genre trois	75
3.2.1	Une forme de Weierstrass et la série L	75
3.2.2	Évaluation de la mesure de Mahler	77
3.2.3	Comparaison entre la mesure de Mahler et la série L	79
3.2.4	Formules explicites de la mesure de Mahler	79
	Bibliographie	82

Introduction

L'étude de la mesure de Mahler a attiré l'attention des chercheurs durant les dernières décennies et plusieurs papiers ont été destinés à ce sujet. La mesure de Mahler d'un polynôme de plusieurs variables a été introduite en 1962 par Mahler [20] pour donner une preuve simple de l'inégalité de Gel'fond -Mahler mesurant la taille des facteurs d'un polynôme. Si P désigne un polynôme de Laurent en n variables, sa mesure de Mahler logarithmique est définie par

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})| \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n},$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; |x_1| = \dots = |x_n| = 1\}, \text{ le tore complexe unité.}$$

Sa mesure de Mahler est la quantité

$$M(P) = e^{m(P)}.$$

La recherche de polynômes d'une seule variable de petite mesure de Mahler est l'une des premières motivations pour l'étude de la mesure de Mahler de polynômes de plusieurs variables.

Si

$$P(x) = a_0 \prod_{i=1}^d (x - x_i) \in \mathbb{C}[x],$$

alors et par la formule de Jensen

$$M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^d \max(|x_i|, 1).$$

Cette quantité intervient dans la question de Lehmer (1933) [19] d'existence d'un polynôme à coefficients entiers, unitaire, non cyclotomique et satisfaisant

$$1 < M(P) < M(P_0) = 1.1762\dots,$$

où P_0 est le polynôme de degré 10 de Lehmer

$$P_0(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1.$$

En 1971, Smyth [25] a donné une réponse partielle

$$M(P) \geq 1.32\dots,$$

si P est non réciproque.

La mesure de Mahler des polynômes à plusieurs indéterminées a un lien avec le problème de Lehmer grâce à un remarquable résultat de Boyd (1981) [8], à savoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P(x, x^n)) = m(P(x, y)),$$

lorsqu'on a effectivement une suite infinie de mesures distinctes.

En 1997, Deninger [12] conjectura la formule

$$\begin{aligned} m\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1\right) &= L'(E, 0) \\ &= \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2), \end{aligned}$$

où $L(E, 2)$ est la série L de la courbe elliptique de conducteur 15 définie par

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1 = 0.$$

Motivé par ce résultat Boyd [9], s'intéressa au lien entre la mesure de Mahler et la série L de certaines courbes de genre un et deux. En comparant entre mesures de Mahler des polynômes reliées à la même série L , un très grand nombre d'identités (conjecturales) ont été obtenues, mais peu de ces identités ont été démontrées, voir [4], [5], [26] et [28]. Le travail de Boyd a conduit à une conjecture connue maintenant sous le nom de la conjecture de Boyd.

Notre contribution personnelle est l'introduction de nouvelles familles de polynômes non réciproques (contrairement à Boyd) de genre un et trois, aussi on donne une explication de certains résultats numériques de Boyd sur des courbes de genre 2.

Notre mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on donne quelques résultats sur la mesure de Mahler des polynômes à une seule indéterminée. Nous commençons par minoration de la mesure de Mahler d'un polynôme à une variable, puis on s'intéresse à des extensions de la définition de la mesure de Mahler à savoir la mesure de Mahler d'ordre k , mesure de Mahler multiple et la q -mesure de Mahler.

Dans le deuxième chapitre, après des brefs rappels et un résultat de Smyth, on s'intéresse à la mesure de Mahler de deux nouvelles familles de polynômes non réciproques à deux indéterminées, à un intérêt particulier, sera accordée à la conjecture de Boyd.

Enfin dans le chapitre 3, on se propose d'étudier la mesure de Mahler de certaines courbes hyper-elliptiques. On donne une explication de certains résultats numériques de Boyd sur des familles de courbes de genre 2. On mettra en évidence le lien entre la mesure de Mahler de ces familles et la série L d'une courbe elliptique, qui est une composante du produit auquel la jacobienne est isogène. Dans la dernière partie de ce chapitre, on s'intéresse à la mesure de Mahler d'une famille de courbes de genre 3.

Chapitre 1

Généralités sur la mesure de Mahler

Ce chapitre est consacré à quelques résultats sur la mesure de Mahler en une dimension. Nous donnons des inégalités minorant la mesure de Mahler des polynômes totalement positifs et totalement réels. Puis on va étudier des généralisations de la mesure de Mahler : mesure de Mahler d'ordre k et q -mesure de Mahler. Pour plus de détails on pourra consulter [13], [15], [16], [18], [22].

1.1 Rappels et définitions

Definition 1 Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ un polynôme de Laurent en n variables. Sa mesure de Mahler logarithmique est définie par

$$m(P) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, \dots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n},$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : |x_1| = \dots = |x_n| = 1\}.$$

La mesure de Mahler est

$$M(P) = \exp(m(P)).$$

Lemme 2 (Jensen) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité avec $f(0) \neq 0$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les zéros de $f(z)$ dans $|z| \leq 1$ comptés avec leurs multiplicités, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| - \sum_{j=1}^k \log |\alpha_j|.$$

Corollaire 3 Si $P(z) = a_0(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_k)$, $a_0 \neq 0$, alors

$$M(P) = |a_0| \prod_{j=1}^k (\max(1, |\alpha_j|)).$$

Preuve. Résulte du lemme de Jensen. ■

Proposition 4 Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, alors

$$\begin{aligned} m(P.Q) &= m(P) + m(Q), \\ m(P(x, y)) &= m(P(\pm x^{\pm j} y^{\pm k}, \pm x^{\pm m} y^{\pm n})), \quad j, k, m, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Definition 5 Soit K un corps et L une extension de K . Soit α un élément de L . Le polynôme minimal de α est, s'il existe, le polynôme unitaire de plus bas degré à coefficients dans K admettant α pour racine. Si le polynôme minimal existe, l'élément α est dit algébrique sur K . De plus si les coefficients du polynôme minimal sont dans \mathbb{Z} , α est dit entier algébrique.

Definition 6 La mesure de Mahler d'un nombre algébrique α non nul est la mesure de Mahler de son polynôme minimal P dans $\mathbb{Z}[x]$.

Definition 7 Un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ est totalement positif (resp. totalement réel) si toutes ses racines sont réelles positives (resp. réelles).

1.2 Minorations de la mesure de Mahler d'un polynôme à une seule indéterminée

Dans cette partie, nous donnons des minorations de la mesure de Mahler en dimension 1.

Proposition 8 Soit c un réel, $0 < c < \frac{1}{2}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif non divisible par x et $x - 1$. Alors

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^d.$$

Preuve. Soient c , $0 < c < \frac{1}{2}$ et f la fonction définie pour $x > 0$, $x \neq 1$ par

$$f(x) = \log^+ x - (c \log x + (1-2c) \log |x-1|),$$

avec

$$\log^+ x = \log \max(1, x).$$

Supposons que $\min_{x>0} f(x) = m$. Soient $(\alpha_i)_{(1 \leq i \leq d)}$ les racines de P . Alors

$$f(\alpha_i) \geq m, \quad 1 \leq i \leq d,$$

d'où

$$\log^+ \alpha_i \geq c \log \alpha_i + (1 - 2c) \log |\alpha_i - 1| + m, \quad 1 \leq i \leq d.$$

En sommant sur i , on trouve

$$\sum_{i=1}^d \log^+ \alpha_i \geq \sum_{i=1}^d \log \alpha_i^c + \sum_{i=1}^d \log |\alpha_i - 1|^{1-2c} + dm,$$

d'où

$$\log \prod_{i=1}^d \max(1, \alpha_i) \geq \log \left(\prod_{i=1}^d \alpha_i \right)^c + \log \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i - 1| \right)^{1-2c} + dm,$$

donc

$$\prod_{i=1}^d \max(1, \alpha_i) \geq \left(\prod_{i=1}^d \alpha_i \right)^c \times \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i - 1| \right)^{1-2c} \times e^{dm}. \quad (1.1)$$

En écrivant P sous la forme

$$P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_d),$$

nous obtenons

$$|P(0)| = \prod_{i=1}^d \alpha_i, \quad |P(1)| = \prod_{i=1}^d |1 - \alpha_i|. \quad (1.2)$$

De (1.1) et (1.2) on obtient

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times e^{dm}. \quad (1.3)$$

Maintenant on détermine m . Pour $x > 0$, $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \log^+ \left(\frac{1}{x}\right) + c \log x - (1 - 2c) \log |1 - x| + (1 - 2c) \log x \\ &= -(1 - 2c) \log |1 - x| - c \log x + \log x + \log^+ \left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \log x + \log^+ \left(\frac{1}{x}\right) &= \log x + \log \max\left(1, \frac{1}{x}\right) \\ &= \begin{cases} \log x, & x > 1 \\ \log 1 = 0, & x < 1 \end{cases} \\ &= \log^+ x, \end{aligned}$$

donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

ce qui permet de restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0, 1[$. Sur $]0, 1[$, f s'écrit

$$f(x) = -(c \log x + (1 - 2c) \log(1 - x)).$$

On a

$$f'(x) = \frac{(1 - c)x - c}{x(1 - x)}.$$

Par conséquent f' admet une unique racine $\frac{c}{1-c} \in]0, 1[$ et f y atteint son minimum m , car $f''\left(\frac{c}{1-c}\right) = \frac{(1-c)^3}{c(1-2c)} > 0$. On a

$$\begin{aligned} m &= f\left(\frac{c}{1-c}\right) = -c \log\left(\frac{c}{1-c}\right) - (1 - 2c) \log\left(1 - \frac{c}{1-c}\right) \\ &= \log\left(\frac{(1-c)^c}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant par la valeur de m dans (1.3), nous obtenons

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1)|^{1-2c} \times \left(\frac{(1-c)^c}{c^c \cdot (1-2c)^{1-2c}}\right)^d.$$

■

Théorème 9 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif, non divisible par x et $x - 1$ et tel que $|P(1)| \geq 1$. Alors

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2}.$$

Preuve. La proposition précédente implique :

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}}\right)^d = \left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \cdot (1-c)}\right)^d\right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c}\right)^d. \quad (1.4)$$

On veut déterminer c de sorte que l'expression

$$\left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)}\right)^d\right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c}\right)^d,$$

soit la plus grande possible. Pour cela, nous étudions la fonction g définie sur $]0, \frac{1}{2}[$ par

$$g(c) = c \log |P(0)| + d((1-c) \log(1-c) - c \log c - (1-2c) \log(1-2c)).$$

Sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} g'(c) &= \log |P(0)| + d(-\log(1-c) - 1 - \log c - 1 + 2\log(1-2c) + 2) \\ &= \log \left(|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^d \right). \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$, l'équation $g'(c) = 0$, a seulement une racine

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}},$$

et g y atteint son maximum, car

$$g'' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}} \right) = \frac{-d}{c(1-c)(1-2c)} < 0, \quad \forall c \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$$

En remplaçant cette valeur de c dans l'expression(1.4) et en tenant compte du fait que

$$|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^d = 1, \quad c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}},$$

on obtient

$$M(P) \geq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}}}{\frac{1}{\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}}} \right)^d,$$

d'où

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}+1}}}{2}.$$

■

Remarque 10 Si P est à coefficients entiers, la condition $|P(1)| \geq 1$ est réalisée lorsque $(x-1)$ ne divise pas P .

Proposition 11 Soit c un réel, $0 < c < \frac{1}{2}$. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel. Alors

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(-1) \times P(1)|^{\frac{1-2c}{2}} \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^{\frac{d}{2}}.$$

Preuve. Soient c , $0 < c < \frac{1}{2}$ et h la fonction définie pour $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ par

$$h(x) = \frac{1}{2} f(x^2),$$

où f est la fonction définie dans la démonstration de la proposition 8. Supposons que $\min_{x \neq 0} h(x) = m'$. Soient $(\alpha_i)_{(1 \leq i \leq d)}$ les racines de P . Alors

$$h(\alpha_i) \geq m', \quad 1 \leq i \leq d,$$

ou

$$\log^+ |\alpha_i| \geq c \log |\alpha_i| + \frac{1}{2} (1 - 2c) \log |\alpha_i - 1| + \frac{1}{2} (1 - 2c) \log |\alpha_i + 1| + m'.$$

En sommant sur i on trouve

$$\sum_{i=1}^d \log^+ |\alpha_i| \geq \sum_{i=1}^d \log |\alpha_i|^c + \sum_{i=1}^d \log |\alpha_i + 1|^{\frac{1-2c}{2}} + \sum_{i=1}^d \log |\alpha_i - 1|^{\frac{1-2c}{2}} + dm',$$

donc

$$\log \prod_{i=1}^d \max(1, \alpha_i) \geq \log \left(\prod_{i=1}^d \alpha_i \right)^c + \log \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i + 1| \right)^{\frac{1-2c}{2}} + \log \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i - 1| \right)^{\frac{1-2c}{2}} + dm',$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} M(P) &\geq \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i| \right)^c \times \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i + 1| \right)^{\frac{1-2c}{2}} \times \left(\prod_{i=1}^d |\alpha_i - 1| \right)^{\frac{1-2c}{2}} \times e^{dm'}, \\ M(P) &\geq |P(0)|^c \times |P(-1) \times P(1)|^{\frac{1-2c}{2}} \times e^{dm'}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Déterminons m' . On vérifie facilement que

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\},$$

ce qui permet de restreindre l'étude de h à l'intervalle $] -1, 0[\cup] 0, 1[$. Sur $] -1, 0[\cup] 0, 1[$, h s'écrit

$$h(x) = -\frac{1}{2} (c \log x^2 + (1 - 2c) \log (1 - x^2)).$$

On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= x f'(x^2) \\ &= \frac{(1-c)x^2 - c}{x(1-x^2)}, \end{aligned}$$

h atteint son minimum en $\pm \sqrt{\frac{c}{1-c}}$. Alors

$$\begin{aligned} m' &= h\left(\pm \sqrt{\frac{c}{1-c}}\right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{c}{1-c}\right) = \log \left(\frac{(1-c)^c}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En remplaçant par la valeur de m' dans l'expression (1.5), nous obtenons

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times |P(1) \times P(-1)|^{\frac{1-2c}{2}} \times \left(\frac{(1-c)^c}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^{\frac{d}{2}}.$$

■

Théorème 12 Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel, non divisible par x , $x-1$ et $x+1$ et tel que $|P(\pm 1)| \geq 1$. Alors

$$M(P)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}}{2}.$$

Preuve. La proposition 11 implique que

$$M(P) \geq |P(0)|^c \times \left(\frac{(1-c)^{1-c}}{c^c \times (1-2c)^{1-2c}} \right)^{\frac{d}{2}} = \left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^{\frac{d}{2}} \right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c} \right)^{\frac{d}{2}}. \quad (1.6)$$

Comme dans la démonstration du théorème 9, on veut déterminer c de sorte que l'expression

$$\left[|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^{\frac{d}{2}} \right]^c \times \left(\frac{1-c}{1-2c} \right)^{\frac{d}{2}},$$

soit la meilleure possible. Pour cela, nous étudions la fonction g définie sur $]0, \frac{1}{2}[$ par

$$g(c) = c \log |P(0)| + \frac{d}{2} ((1-c) \log(1-c) - c \log c - (1-2c) \log(1-2c)).$$

Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} g'(c) &= \log |P(0)| + \frac{d}{2} (-\log(1-c) - 1 - \log c - 1 + 2 \log(1-2c) + 2) \\ &= \log \left(|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^{\frac{d}{2}} \right). \end{aligned}$$

Sur $]0, \frac{1}{2}[$, $g'(c)$ s'annule seulement en

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}},$$

et g y atteint son maximum, car

$$g'' \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}} \right) = \frac{-d}{2c(1-c)(1-2c)} < 0.$$

En remplaçant cette valeur de c dans l'expression (1.6) et en tenant compte du fait que

$$|P(0)| \times \left(\frac{(1-2c)^2}{c \times (1-c)} \right)^{\frac{d}{2}} = 1, \quad c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}},$$

nous obtenons

$$M(P) \geq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}}}{\frac{1}{\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}}} \right)^{\frac{d}{2}},$$

d'où

$$M(P)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}}{2}.$$

■

Remarque 13 Si P est à coefficients entiers, la condition $|P(\pm 1)| \geq 1$ est réalisée lorsque $(x+1)$ et $(x-1)$ ne divisent pas P .

Théorème 14 Soit α un entier algébrique totalement positif, $\alpha \neq 0, 1$ (resp. totalement réel, $\alpha \neq 0, 1, -1$). Alors

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \left(\text{resp. } M(\alpha)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Preuve. Soit α un entier algébrique totalement positif, $\alpha \neq 0, 1$ (resp. totalement réel, $\alpha \neq 0, 1, -1$), et soit P son polynôme minimal, on a par le théorème 9 (resp. par le théorème 12)

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} := M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2}, \quad \left(\text{resp. } M(\alpha)^{\frac{2}{d}} := M(P)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}} + 1}}{2} \right),$$

et comme $|P(0)| \geq 1$, on obtient

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \left(\text{resp. } M(\alpha)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

■

1.3 Mesure de Mahler d'ordre k et mesure de Mahler multiple

Dans cette partie on s'intéresse à la mesure de Mahler d'ordre k .

Definition 15 La mesure de Mahler multiple d'une suite de polynômes non nuls $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{C}[x]$ est définie par

$$m(P_1, \dots, P_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log |P_1(x)| \dots \log |P_m(x)| \frac{dx}{x}.$$

Definition 16 La mesure de Mahler d'ordre k d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[x]$ est par définition

$$m_k(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log^k |P(x)| \frac{dx}{x}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Remarque 17 Pour $k = 1$, $m_1(P)$ est la mesure de Mahler classique (logarithmique).

Théorème 18 Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, on a

$$m(1-x, 1-e^{2\pi i \alpha} x) = \frac{\pi^2}{2} \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6} \right).$$

Preuve. On a par définition

$$m(1-x, 1-e^{2\pi i \alpha} x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log |1-x| \cdot \log |1-e^{2\pi i \alpha} x| \frac{dx}{x}.$$

En posant $x = e^{2\pi i \theta}$, on trouve

$$\begin{aligned} m(1-e^{2\pi i \theta}, 1-e^{2\pi i(\alpha+\theta)}) &= \int_0^1 \log |1-e^{2\pi i \theta}| \cdot \log |1-e^{2\pi i(\alpha+\theta)}| d\theta \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \left(\log(1-e^{2\pi i \theta}) \right) \cdot \operatorname{Re} \left(\log(1-e^{2\pi i(\alpha+\theta)}) \right) d\theta \\ &= \int_0^1 \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k \theta)}{k} \right) \left(-\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi l(\theta+\alpha))}{l} \right) d\theta \\ &= \sum_{k, l \geq 1} \frac{1}{kl} \int_0^1 \cos(2\pi k \theta) \cdot \cos(2\pi l(\theta+\alpha)) d\theta, \end{aligned}$$

on a

$$\int_0^1 \cos(2\pi k \theta) \cdot \cos(2\pi l(\theta+\alpha)) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(2\pi k \alpha), & \text{si } k = l \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(voir [18]). D'où

$$m(1-x, 1-e^{2\pi i \alpha} x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi k \alpha)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6} \right).$$

■

Théorème 19 Si P est un polynôme de la forme

$$P(x) = \prod_{j=1}^n (x - e^{2\pi i \alpha_j}), \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1,$$

alors

$$m_2(P) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \left((\alpha_j - \alpha_k)^2 - |\alpha_j - \alpha_k| + \frac{1}{6} \right).$$

Preuve. Supposons P donné par

$$P(x) = \prod_{j=1}^n (x - e^{2\pi i \alpha_j}).$$

Alors

$$\begin{aligned} m_2(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log^2 |P(x)| \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log^2 \prod_{j=1}^n |x - e^{2\pi i \alpha_j}| \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \left(\sum_{j=1}^n \log |x - e^{2\pi i \alpha_j}| \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \log |x - e^{2\pi i \alpha_k}| \right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \sum_{1 \leq j, k \leq n} (\log |x - e^{2\pi i \alpha_j}| \cdot \log |x - e^{2\pi i \alpha_k}|) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \sum_{1 \leq j, k \leq n} (\log |x| + \log |1 - e^{2\pi i \alpha_j} x|) \cdot (\log |x| + \log |1 - e^{2\pi i \alpha_k} x|) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \log |1 - e^{2\pi i \alpha_j} x| \cdot \log |1 - e^{2\pi i \alpha_k} x| \frac{dx}{x} \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} m(1 - e^{2\pi i \alpha_j} x, 1 - e^{2\pi i \alpha_k} x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

En posant $X = e^{2\pi i \alpha_j} x$, on obtient

$$m_2(P) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} m(1 - X, 1 - e^{2\pi i(\alpha_k - \alpha_j)} X) \frac{dX}{X}.$$

Soient $1 \leq j, k \leq n$ deux indices. Supposons que

a) $\alpha_k \geq \alpha_j$, donc $|\alpha_k - \alpha_j| = \alpha_k - \alpha_j$. Ainsi

$$m(1 - X, 1 - e^{2\pi i(\alpha_k - \alpha_j)} X) = m(1 - X, 1 - e^{2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} X).$$

b) $\alpha_k \leq \alpha_j$, donc $|\alpha_k - \alpha_j| = \alpha_j - \alpha_k$. Ainsi

$$\begin{aligned} m\left(1 - X, 1 - e^{2\pi i(\alpha_k - \alpha_j)} X\right) &= m\left(1 - X, 1 - e^{-2\pi i(\alpha_j - \alpha_k)} X\right) \\ &= m\left(1 - X, 1 - e^{-2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} X\right) \\ &= m\left(1 - e^{2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} Y, 1 - Y\right), \quad Y = e^{-2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} X \\ &= m\left(1 - Y, 1 - e^{2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} Y\right). \end{aligned}$$

Par suite

$$m_2(P) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} m\left(1 - X, 1 - e^{2\pi i|\alpha_k - \alpha_j|} X\right) \frac{dX}{X}.$$

D'après le théorème précédent nous obtenons

$$m_2(P) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \left((\alpha_j - \alpha_k)^2 - |\alpha_j - \alpha_k| + \frac{1}{6} \right).$$

■

Exemple 20 On a

$$\begin{aligned} m(1 - x, 1 - x) &= \frac{\pi^2}{12}, \\ m(1 - x, 1 + x) &= \frac{-\pi^2}{24}, \\ m(1 - x, 1 \pm ix) &= -\frac{\pi^2}{96}. \end{aligned}$$

1.4 La q-mesure de Mahler

En utilisant un q-analogue du logarithme, Nobushige Kurokawa a construit un q-analogue de la mesure de Mahler.

Soit q un réel strictement supérieur à 1, on définit la fonction q -logarithme notée $l_q(x)$ par

$$l_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{[n]_q}, \quad |x-1| < q,$$

avec

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \dots + q^{n-1}.$$

Remarque 21 1. Si $q \downarrow 1$, alors

$$\lim_{q \downarrow 1} [n]_q = n,$$

et donc

$$\lim_{q \downarrow 1} l_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n} = \log x.$$

2. On a

$$l_q(x) = (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x-1+q^n}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} l_q(x) &= (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{q^n - 1} \\ &= (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^n \times \frac{1}{q^n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{q^n}}, \end{aligned}$$

comme $\frac{1}{q^n} < 1$, donc

$$\begin{aligned} l_q(x) &= (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^n}\right)^m \\ &= (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} ((x-1)q^{-m})^n, \end{aligned}$$

mais $\frac{|x-1|}{q} < 1$, donc

$$l_q(x) = (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x-1)q^{-m}}{1 + (x-1)q^{-m}},$$

d'où

$$l_q(x) = (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x-1}{x-1+q^m}.$$

Definition 22 Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme. La q -mesure de Mahler de f , notée $m_q(f)$ est définie par

$$\begin{aligned} m_q(f) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 l_q \left| f \left(e^{2\pi i \theta_1}, \dots, e^{2\pi i \theta_n} \right) \right| d\theta_1 \dots d\theta_n, \\ m_q(f) &= \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 l_q \left(f \left(e^{2\pi i \theta_1}, \dots, e^{2\pi i \theta_n} \right) \right) d\theta_1 \dots d\theta_n \right). \end{aligned}$$

Théorème 23 On a

$$m_q(x+a) = l_q(a), \quad a > 1.$$

Preuve. Par définition

$$m_q(x+a) = \operatorname{Re} \int_0^1 l_q \left(e^{2\pi i \theta} + a \right) d\theta = (q-1) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \theta} + a - 1}{e^{2\pi i \theta} + a - 1 + q^m} d\theta.$$

On pose

$$z = e^{2\pi i\theta},$$

ainsi

$$d\theta = \frac{dz}{2\pi iz},$$

et donc

$$m_q(x+a) = (q-1) \operatorname{Re} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)z} dz \right),$$

avec

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Notons que $a > 1$ implique que $z+a-1+q^m \neq 0$ dans $|z| \leq 1$. Alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)z} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z+a-1}{(z+a-1+q^m)z}, 0 \right) \\ &= \frac{a-1}{a-1+q^m}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$m_q(x+a) = (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a-1}{a-1+q^m} = l_q(a).$$

■

Lemme 24 L'équation

$$(z+a)(z+b) - 1 + q^m = 0, \tag{1.7}$$

avec

$$q > 1, m \geq 1 \text{ et } a, b > 1,$$

n'admet pas de racines dans

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Preuve. Les racines de l'équation (1.7) sont données par

$$z_1 = -\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a-b)^2 - 4(q^m-1)} \text{ et } z_2 = -\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a-b)^2 - 4(q^m-1)}.$$

Distinguons trois cas :

1. Si $(a-b)^2 = 4(q^m-1)$,

$$z_1 = z_2 = -\frac{a+b}{2} < -1.$$

2. Si $(a - b)^2 < 4(q^m - 1)$,

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{4(q^m - 1) - (a-b)^2}{4}} > 1.$$

3. Si $(a - b)^2 > 4(q^m - 1)$, on a $z_1 < -1$ et

$$z_2 < -\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2},$$

d'où

$$z_2 < -\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}|a-b| = \begin{cases} -a, & a < b \\ -b, & b < a \end{cases}$$

donc $z_2 < -1$. ■

Théorème 25 On a

$$m_q((x+a)(x+b)) = l_q(ab), \quad a, b > 1.$$

Preuve. Par définition

$$\begin{aligned} m_q((x+a)(x+b)) &= \operatorname{Re} \int_0^1 l_q\left(\left(e^{2\pi i\theta} + a\right)\left(e^{2\pi i\theta} + b\right)\right) d\theta \\ &= (q-1) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(e^{2\pi i\theta} + a)(e^{2\pi i\theta} + b) - 1}{(e^{2\pi i\theta} + a)(e^{2\pi i\theta} + b) - 1 + q^m} d\theta. \end{aligned}$$

On pose $z = e^{2\pi i\theta}$ c-à-d $d\theta = \frac{dz}{2\pi iz}$, et donc

$$m_q((x+a)(x+b)) = (q-1) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(z+a)(z+b) - 1}{(z+a)(z+b) - 1 + q^m} \frac{dz}{z}.$$

On a $(z+a)(z+b) - 1 + q^m \neq 0$ dans $|z| \leq 1$ (voir lemme 24). Alors, par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{(z+a)(z+b) - 1}{(z+a)(z+b) - 1 + q^m} \frac{dz}{z} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{(z+a)(z+b) - 1}{((z+a)(z+b) - 1 + q^m)z}, 0 \right) \\ &= \frac{ab-1}{ab-1+q^m}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m_q((x+a)(x+b)) &= (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ab-1}{ab-1+q^n} \\ &= l_q(ab). \end{aligned}$$

■

Théorème 26 1. Soit $|a| < q - 1$. Alors

$$m_q(ax) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} = l_q(0) < 0.$$

2. Si $q > 3$,

$$m_q(2x) < m_q(2) + m_q(x).$$

Preuve. 1. On a

$$m_q(ax) = (q-1) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{ae^{2\pi i\theta} - 1}{ae^{2\pi i\theta} - 1 + q^m} d\theta.$$

Posons $z = e^{2\pi i\theta}$, on obtient

$$m_q(ax) = (q-1) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{az-1}{(az-1+q^m)z} dz.$$

L'équation

$$az - 1 + q^m = 0,$$

a pour racine $z = \frac{1-q^m}{a}$. On a

$$|z| = \frac{q^m - 1}{|a|} > \frac{q^m - 1}{q - 1} \geq 1.$$

D'où $|z| > 1$. Alors par le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{az-1}{az-1+q^m} \frac{dz}{z} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{az-1}{(az-1+q^m)z}, 0 \right) \\ &= \frac{-2\pi i}{q^m - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$m_q(ax) = (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{q^m - 1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} < 0.$$

2. De 1,

$$m_q(2x) = m_q(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} < 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m_q(2) &= \int_0^1 l_q(2) d\theta = l_q(2) \\ &= (q-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{q^m + 1} > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$m_q(2x) < m_q(2) + m_q(x).$$

■

Chapitre 2

Mesure de Mahler et conjecture de Boyd

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la mesure de Mahler de certains polynômes à deux variables. Un intérêt particulier sera accordé à la mesure de Mahler de deux nouvelles familles de polynômes définissant des courbes de genre un. Avant tous ça on commence par des rappels sur les courbes elliptiques, le dilogarithme de Block et Wigner et la fonction régulateur. Pour plus de détails et d'autres résultats, on peut consulter [3], [6], [14], [17], [21], [24].

2.1 Rappels

2.1.1 Les courbes elliptiques

Soit K un corps commutatif.

Definition 27 *Le plan projectif noté $\mathbb{P}^2(K)$ est l'ensemble des points*

$$(a, b, c) \in K^3 - \{(0, 0, 0)\}$$

modulo la relation d'équivalence \sim définie par

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in K^3 - \{(0, 0, 0)\},$$

alors

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \iff \exists t \in K^* : a = ta', b = tb', c = tc'.$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}^2(K) = \frac{K^3 - \{(0, 0, 0)\}}{\sim}.$$

Definition 28 Le plan affine noté $\mathbb{A}^2(K)$ est l'ensemble des points $(x, y) \in K^2$.

Definition 29 Le degré d'un terme d'un polynôme $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ est la somme des exposants des variables X_i apparaissant dans ce terme. Le degré du polynôme P est le plus grande degré de ces termes.

Definition 30 Un polynôme est dit homogène de degré d si tout monôme de P est de degré d .

Definition 31 Une courbe C de $\mathbb{P}^2(K)$ (courbe plane projective) est l'ensemble des points $[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2(K)$ tel que

$$P(X, Y, Z) = 0,$$

avec P homogène de degré $d \geq 1$.

Si $d = 1$, la courbe C est appelée une droite.

Si $d = 2$, la courbe C est appelée une conique.

Si $d = 3$, la courbe C est appelée une cubique.

Definition 32 Un point $p = (a, b, c)$ d'une courbe plane projective F , est dit singulier si et seulement si

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z} \right)_{(a,b,c)} = (0, 0, 0),$$

sinon p est un point non singulier (simple).

Definition 33 Une courbe plane projective C est appelée courbe non singulière (lisse) si elle n'admet pas de points singuliers.

Definition 34 Le genre d'une courbe du plan projectif $\mathbb{P}^2(K)$ est donné par la formule

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_p \frac{r_p(r_p-1)}{2},$$

avec r_p est la multiplicité du point singulier p et d est le degré de la courbe.

Definition 35 Une courbe elliptique est une courbe projective, lisse (non singulière), de degré 3 dans le plan projectif, donnée par la forme de Weierstrass

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3, \quad a_i \in K.$$

Remarque 36 Dans la suite de notre travail et pour alléger les notations, on définit une courbe elliptique E sur K par l'équation de Weierstrass (affine)

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

plus le point à l'infini $\mathcal{O} = [0 : 1 : 0]$, et on écrit

$$E = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_6].$$

Les formules de passage de l'affine à l'homogène (projective) sont :

$$x = \frac{X}{Z}; y = \frac{Y}{Z}; z = \frac{Z}{Z}; Z \neq 0.$$

Si $Z = 0$, on a un seul point à l'infini, le point $(0 : 1 : 0)$.

Definition 37 Le discriminant Δ de E est la quantité

$$\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6,$$

et son j -invariant est la quantité donnée par

$$j = \frac{c_4^3}{\Delta},$$

avec

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, \\ b_4 &= 2a_4 + a_1a_3, \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6, \\ b_8 &= a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2, \\ c_4 &= b_2^2 - 24b_4, \\ c_6 &= -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6. \end{aligned}$$

Proposition 38 E non singulière $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$.

Remarque 39 Soit E une courbe elliptique sur K .

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

et

$$Y^2 + A_1XY + A_3Y = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6,$$

deux modèles de Weierstrass de E . Alors il existe r, s, t et $u \in \bar{K}$ et $u \neq 0$ vérifiant

$$\begin{cases} x = u^2X + r \\ y = u^3Y + su^2X + t, \end{cases}$$

et définissant entre les deux modèles un changement de coordonnées dit **admissible**.

Remarque 40 Toute courbe elliptique E admet un modèle de Weierstrass minimal (Δ minimal) unique avec des coefficients $a_1, a_3 \in \{0, 1\}$ et $a_2 \in \{-1, 0, 1\}$.

Remarque 41 La quantité $j(E)$ est invariante par les changements des variables admissibles.

2.1.1.1 Recherche d'une forme de Weierstrass

Dans cette partie, on s'intéresse à la recherche d'une forme de Weierstrass d'une quartique, voir [10].

Proposition 42 *La courbe affine*

$$y^2 = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4, \quad f_i \in \mathbb{Q}$$

a pour équation de Weierstrass,

$$Y^2 + 2g_1XY + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X,$$

où g_0, g_1, h_0, h_1 vérifient

$$(x^2 + g_1x + g_0)^2 + h_1x + h_0 = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4.$$

Preuve. Supposons que $f_4 = 1$, sinon on divise par f_4 . Posons

$$y^2 = G^2(x) + H(x),$$

ainsi

$$(y - G(x))(y + G(x)) = H(x).$$

Posons

$$T = y + G(x),$$

on obtient

$$y - G(x) = \frac{H(x)}{T},$$

d'où

$$2G(x) = T - \frac{H(x)}{T}, \tag{2.1}$$

en multipliant l'égalité (2.1) par T^2 et en posant

$$S = Tx,$$

on obtient

$$2S^2 + 2g_1TS + h_1S = T^3 - 2g_0T^2 - h_0T.$$

Multiplions par 2^3 et posons

$$X = 2T \text{ et } Y = 4S,$$

nous obtenons la forme de Weierstrass

$$Y^2 + 2g_1XY + 2h_1Y = X^3 - 4g_0X^2 - 4h_0X.$$

Les changements sont donnés par

$$\begin{cases} X = 2T = 2(y + G) = 2(y + x^2 + g_1x + g_0) \\ Y = 4S = 4x(y + G) = 4x(y + x^2 + g_1x + g_0) = 2xX. \end{cases}$$

■

2.1.1.2 Loi de groupe

Soit E la courbe elliptique définie sur K par

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad a_i \in K,$$

plus le point à l'infini $\mathcal{O} = (0 : 1 : 0)$.

Definition 43 On définit l'ensemble des points K -rationnels, noté $E(K)$ par

$$E(K) := \{(x, y) \in K^2 / y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Soient P et Q deux points de $E(K)$, et soit L la droite rationnel passant par P et Q , c'est à dire courbe de degré 1. Alors par le théorème de Bezout, la courbe E et la droite L s'intersectent en trois points, à savoir P , Q et un troisième point noté R (P , Q et R ne sont pas nécessairement différents). Soit L' la droite rationnel passant par R et \mathcal{O} . Alors L' intersecte E au points R , \mathcal{O} et un troisième point qu'on le note $P \oplus Q$.

Proposition 44 La loi de composition \oplus confère à $E(K)$ la structure d'un groupe abélien.

2.1.1.3 La série L d'une courbe elliptique

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} , donnée par la forme de Weierstrass

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

On définit la fonction L de la courbe E , convergente pour $\text{Re}(s) > \frac{3}{2}$, par la formule

$$L(E, s) = \prod_{p \notin S} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} \prod_{p \in S} (1 - a_p^{-s})^{-1},$$

avec p un nombre premier, S l'ensemble des nombres premiers de mauvaise réduction, i.e., la courbe $E \bmod(p)$ est une courbe singulière et

$$a_p = p + 1 - N_p,$$

où $N_p = \text{card}(E(\mathbb{F}_p))$, nombre de points de $E \bmod(p)$.

Si $E \bmod(p)$ noté E_p est singulière, elle ne peut avoir qu'un seul point singulier et l'ensemble des points non singuliers $\bmod(p)$ noté $E^{ns} \bmod(p)$ possède une structure de groupe.

$$E^{ns} \bmod(p) = \begin{cases} & \text{card}(E^{ns} \bmod(p)) & E \bmod(p) & a_p \\ (\mathbb{F}_p, +) & p & p + 1 & 0 \\ (\mathbb{F}_p^*, \cdot) & p - 1 & p & 1 \\ (\mathbb{F}_{p^2}^*/\mathbb{F}_p^*, \cdot) & p + 1 & p + 2 & -1 \end{cases}$$

$$a_p = \begin{cases} 0, & \text{mauvaise réduction en } p, \text{ (point de reboursement : réduction additive)} \\ 1, & \text{mauvaise réduction en } p, \text{ (noeud : réduction multiplicative déployée)} \\ -1, & \text{mauvaise réduction en } p, \text{ (noeud : réduction multiplicative non déployée)}. \end{cases}$$

Quand $s = 2$, on appellera la fonction $L(E, 2)$ série L de la courbe elliptique E .

Le conducteur N de la courbe elliptique E est par définition un entier qui est le produit de différentes puissances des nombres premiers où E_p a des points singuliers ; i.e., ceux qui divisent le discriminant. Si f_p est la puissance d'un nombre premier p facteur de N , alors $f_p = 1$ si la réduction est multimlicative en p , $2 + \delta_p$ si la réduction est additive. Dans ce cas, si $p \neq 2, 3$, on a $\delta_p = 0$, sinon par une formule de Ogg, on a

$$\delta_p = \text{ord}(\Delta) + 1 - m_p,$$

où m_p est le nombre de composantes distinctes du modèle de Néron.

2.1.2 Dilogarithme de Bloch et Wigner et la fonction régulateur

Definition 45 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, le dilogarithme de Bloch et Wigner est défini par

$$\begin{aligned} D(z) &= \text{Im}(L_{i_2}(z) + \log|z| \log(1-z)) \\ &= \text{Im}(L_{i_2}(z)) + \log|z| \arg(1-z), \quad \arg(1-z) \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L_{i_2}(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| < 1 \\ &= - \int_0^z \log(1-u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Remarque 46 Le dilogarithme de Bloch et Wigner s'étend en une fonction univaluée, analytique, réelle dans $P^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ et continue dans $P^1(\mathbb{C})$, avec

$$D(0) = D(1) = D(\infty) = 0.$$

Proposition 47 On a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} D(\bar{z}) &= -D(z), \\ D(z) &= D\left(\frac{z-1}{z}\right) = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = -D\left(\frac{1}{z}\right) = -D(1-z) = -D\left(\frac{z}{z-1}\right), \\ D(z^n) &= n \sum_{k=0}^{n-1} D\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}} z\right), \\ dD(z) &= -\log|1-z| d \arg z + \log|z| d \arg(1-z). \end{aligned}$$

Definition 48 La fonction régulateur notée $\eta_2(2)$, est la forme différentielle

$$\eta_2(2)(x, y) = i \log |x| d \arg y - i \log |y| d \arg x.$$

Proposition 49 On a les propriétés suivantes

$$\eta_2(2)(xy, z) = \eta_2(2)(x, z) + \eta_2(2)(y, z),$$

$$\eta_2(2)(y, x) = -\eta_2(2)(x, y),$$

$$\eta_2(2)\left(\frac{1}{x}, y\right) = -\eta_2(2)(x, y),$$

$$\eta_2(2)\left(x, \frac{1}{y}\right) = -\eta_2(2)(x, y),$$

$$\eta_2(2)(x, 1-x) = d\hat{D}(x),$$

$$\eta_2(2)(x, 1+x) = d\hat{D}(-x),$$

avec $\hat{D} = iD$.

2.1.3 Conjecture de Boyd

En 1997, Deninger a conjecturé l'égalité

$$m\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1\right) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2),$$

où $L(E, 2)$ est la série L de la courbe elliptique de conducteur 15 définie par

$$X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + 1 = 0.$$

Cette relation a été obtenue en exprimant la mesure de Mahler comme une série d'Eisenstein-Kronecker d'une courbe elliptique et conjecturée à partir d'une conjecture de Beilinson [2].

Motivé par ce résultat, Boyd [9] s'intéressa au calcul numérique de la mesure de Mahler des polynômes de la forme

$$P_k(x, y) = k + Q(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

où Q est un polynôme de Laurent à coefficients entiers. Il trouva une famille de formules conjecturales du type

$$m(P_k) \stackrel{?}{=} r_k b_{E_k},$$

avec $P_k = 0$ définit une courbe elliptique E_k de genre 1, r_k un nombre rationnel et

$$b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2),$$

où N_k est le conducteur de la courbe elliptique E_k et $L(E_k, 2)$ sa série L .

Ainsi nombre d'identités expérimentales entre mesure de Mahler ont été établies. Par exemple, Boyd a trouvé que

$$\begin{cases} m((x+y+1)(x+1)(y+1)+xy) \stackrel{?}{=} 7b_{11} \\ m(y^2+(x^2+2x-1)y+x^3) \stackrel{?}{=} 5b_{11}, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $b_{11} = \frac{11}{4\pi^2}L(E, 2)$ où E est la courbe $11A = [0, -1, 1, 0, 0]$.

Il résulte de (2.2) que

$$5m((x+y+1)(x+1)(y+1)+xy) = 7m(y^2+(x^2+2x-1)y+x^3),$$

cette inégalité a été démontrée par Bertin [4].

D'autres identités expérimentales ont été démontrées par Bertin [5], Touafek [26] et Rodrigas-Villegas [28].

Le travail de Boyd a conduit à la conjecture suivante

Conjecture (conjecture de Boyd). Soit

$$P(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + c(x),$$

un polynôme à coefficients entiers, ne s'annulant pas sur le tore. Supposons que

1. $D(x) = B^2(x) - 4A(x)C(x)$, soit de degré 3 ou 4.
2. Tous les polynômes P_f associés aux faces du polygone de Newton de P n'ont comme racines que des racines de l'unité.
3. $m(P(x, y))$ s'exprime comme un multiple rationnel de l'intégrale de

$$\omega = \frac{1}{2\pi} (\log |y| d \log |x| - \log |x| d \log |y|),$$

le long des deux bords d'une coupure effectuée entre deux points de ramification de $y(x)$, où $y(x)$ est la fonction algébrique définie par $P(x, y) = 0$.

4. $P(x, y) = 0$ définit une courbe elliptique.

Alors, $m(P)$ est un multiple rationnel de b_E où

$$b_E = \frac{N}{4\pi^2}L(E, 2).$$

2.1.4 Polynômes tempérés et polynômes réciproques

Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. On note $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, $m_i \in \mathbb{Z}$

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m x^m.$$

On appelle polygone de Newton Δ_P associé au polynôme P , l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $\{m \in \mathbb{Z}^n / a_m \neq 0\}$.

Definition 50 [27] Soit τ une face du polygone de Newton. On associe à τ un polynôme P_τ d'une variable. Le degré de ce polynôme est égal au nombre de points du réseau situés sur la face moins un. On définit P_τ par

$$P_\tau(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_\tau(k) t^k,$$

si

$$P(x, y) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} a_{(n, m)} x^n y^m,$$

où on a numéroté les points du réseau par $\tau(0), \tau(1), \dots$

Definition 51 Un polynôme est dit tempéré si les polynômes associés aux faces de son polygone de Newton n'ont pour racines que des racines de l'unité.

Definition 52 un polynôme $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est dit réciproque si

$$\frac{p(x_1, \dots, x_n)}{p\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)} \text{ est un monôme de la forme } \pm x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}, \quad t_i \in \mathbb{Z}.$$

2.2 La formule explicite de Smyth

Dans le résultat suivant, on démontre l'une des premières formules explicites de la mesure de Mahler en deux variables. Ce résultat est connue par la formule de Smyth.

Proposition 53 On a

$$m(1 + x + y) = d_3,$$

avec

$$\begin{aligned} d_3 &:= L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2), \\ L(\chi_{-3}, 2) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_{-3}(n)}{n^2}, \\ \chi_{-3}(n) &= \begin{cases} 0 & n \equiv 0 [3] \\ 1 & n \equiv 1 [3] \\ -1 & n \equiv 2 [3]. \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} m(1 + x + y) &= m(1 - x - y) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log|1 - x - y| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Jensen, on trouve

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log^+ |1-x| \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \log |y| \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \eta_2(2)(x, y), \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma = \{(x, y) / 1-x-y=0, |x|=1, |y| \geq 1\}.$$

Comme

$$y = 1-x,$$

alors

$$\eta_2(2)(x, 1-x) = d\hat{D}(x),$$

et donc

$$m(P) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\hat{D}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} dD(x), \quad (2.3)$$

et

$$\Gamma = \{x; |x|=1, |1-x| \geq 1\}.$$

C'est la portion du cercle unité allant du point $-\bar{j}$ au point $-j$. En effet en écrivant $x = a + ib$, on trouve que Γ est l'intersection des deux ensembles

$$\{a^2 + b^2 = 1\}, \{(a-1)^2 + b^2 \geq 1\}.$$

Ainsi l'expression (2.3) revient

$$\begin{aligned} m(P) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{j}}^{-j} dD(x) \\ &= -\frac{1}{2\pi} (D(-j) - D(\bar{-j})) \\ &= -\frac{1}{\pi} D(-j). \end{aligned} \quad (2.4)$$

On a

$$\begin{aligned} D(j^2) &= 2 \sum_{k=0}^1 D\left(e^{\frac{2\pi i k}{2}} j\right) \\ &= 2(D(j) + D(-j)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D(-j) &= \frac{1}{2} D(j^2) - D(j) \\ &= \frac{1}{2} D(\bar{j}) - D(j) \\ &= -\frac{3}{2} D(j). \end{aligned}$$

En remplaçant cette valeur dans (2.4) on obtient

$$m(P) = \frac{3}{2\pi} D(j).$$

Par la formule de Bloch on a

$$L'(\chi_{-3}, -1) = \frac{3}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \chi_{-3}(m) D(\zeta_3^m),$$

avec ζ_3 désigne la racine troisième de l'unité, i.e.,

$$j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ainsi

$$d_3 = \frac{3}{2\pi} D(j),$$

et donc

$$m(P) = d_3.$$

■

2.3 Mesure de Mahler de deux nouvelles familles de polynômes de genre 1

Dans ce qui suit on s'intéresse au calcul numérique des mesures de Mahler des familles de courbes de genre 1 définies par

$$P_k(x, y) = x^2 y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

$$Q_k(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

$$R_k(x, y) = (x^2 + 1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Remarque 54 Écrivons P_k , Q_k et R_k sous la forme

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

alors le choix de ces polynômes est justifié par le fait que

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x),$$

doit être de degré 3 ou 4, mais aussi on doit s'assurer que P_k , Q_k et R_k seront des polynômes tempérés.

2.3.1 La famille des courbes $x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0$

Avant de calculer la mesure de Mahler de notre famille, et afin de la comparer à la série L des courbes elliptiques (cas non singulier), on commence par donner une forme de Weierstrass de cette famille.

2.3.1.1 Une forme de Weierstrass et la série L

Lemme 55 *La famille des courbes (2.5) a pour forme de Weierstrass,*

$$Y^2 = X^3 + (k^2 + 4)X^2 + 8k(k - 1)X + 16(k - 1)^2, \quad (2.8)$$

avec le changement de variables

$$\begin{cases} x = \frac{X}{4(k-1)} \\ y = \frac{2(k-1)Y - X^2 - 2k(k-1)X - 8(k-1)^2}{X^2}. \end{cases}$$

Preuve. L'équation

$$x^2y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0$$

peut s'écrire

$$y_1^2 = (2x^2 + kx + 1)^2 - 4x^3(x + 1)$$

avec

$$y_1 = 2x^2y + 2x^2 + kx + 1.$$

En multipliant par $[4(k - 1)]^2$ et en posant

$$Y = 4(k - 1)y_1 \quad \text{et} \quad X = 4(k - 1)x,$$

on obtient la forme de Weierstrass

$$Y^2 = X^3 + (k^2 + 4)X^2 + 8k(k - 1)X + 16(k - 1)^2.$$

■

Remarque 56 *Le discriminant de la famille des courbes (2.5) est*

$$\Delta_k = -256(k^3 - k^2 - 18k + 43)(k - 1)^2,$$

pour $k = 1$, la courbe est singulière.

On obtient le tableau suivant (en utilisant la forme de Weierstrass (2.8) et les commandes de **Pari** `ellinit`, `ellminimalmodel` et `ellseries`),

k	la courbe	N_k	b_{E_k}
-20	[0, -1, 1, -3190, 70422]	167937	2009.5601990888
-19	[1, 1, 0, -2585, 49525]	68350	1104.8858978935
-18	[0, 1, 1, -2070, 35568]	109991	1372.6671594588
-17	[1, 1, 0, -1635, 24777]	29118	452, 1211010075
-16	[0, -1, 1, -1272, 17892]	68357	796.0669689075
-15	[1, 0, 1, -973, 11592]	6574	86.3471957057
-14	[0, -1, 1, -728, 7808]	39675	86.3471957057
-13	[1, 1, 0, -532, 4508]	29246	489.9458762860
-12	[0, 1, 1, -378, 2706]	20969	237.0518963573
-11	[1, 1, 0, -259, 1501]	7266	123.7096125651
-10	[0, -1, 1, -170, 912]	9647	100.2899241331
-9	[1, 0, 1, -106, 408]	550	8.6710108230
-8	[0, -1, 1, -60, 200]	1167	16.3262434786
-7	[1, 1, 0, -30, 52]	446	7.5704815020
-6	[0, 1, 1, -12, 12]	707	6.8491762431
-5	[1, 1, 0, -2, 0]	102	1.4684193855
-4	[0, -1, 1, 2, -2]	175	2.2577441092
-3	[1, 0, 1, 2, 0]	122	1.7585433699
-2	[0, -1, 1, 2, 0]	201	2.6121418154
-1	[1, 1, 0, 1, 1]	118	1.7427154025
0	[0, 1, 1, 0, 0]	43	0.4397447073
1	courbe singulière		
2	[0, -1, 1, 0, 0]	11	0.1521471417
3	[1, 0, 1, -1, 0]	14	0.2274812229
4	[0, -1, 1, -2, 2]	57	0.6361014661
5	[1, 1, 0, -7, 5]	106	1.5359533708
6	[0, 1, 1, -18, 24]	575	6.9622872919
7	[1, 1, 0, -37, 73]	1266	22.8979609776
8	[0, -1, 1, -68, 240]	2429	28.7059390641
9	[1, 0, 1, -115, 462]	1058	13.0452245329
10	[0, -1, 1, -180, 992]	2289	27.4063936038
11	[1, 1, 0, -270, 1600]	10550	171.5305738317
12	[0, 1, 1, -390, 2838]	15521	187.8580787492

13	[1, 1, 0, -545, 4677]	11022	178.7633255529
14	[0, -1, 1, -742, 8032]	30407	357.5962125962
15	[1, 0, 1, -988, 11862]	40922	572.3156243057
16	[0, -1, 1, -1288, 18228]	53925	674.6956534796
17	[1, 1, 0, -1652, 25168]	1246	22.6128510890
18	[0, 1, 1, -2088, 36036]	88859	969.1808561635
19	[1, 1, 0, -2604, 50076]	37194	564.3128798781
20	[0, -1, 1, -3210, 71082]	138377	1507, 4299539660

Tableau 1

où

$$b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2)$$

avec N_k est le conducteur et $L(E_k, 2)$ est la série L .

2.3.1.2 Calcul numérique de la mesure de Mahler

On a

$$P_k(x, y) = x^2 y^2 + (2x^2 + kx + 1)y + x(x + 1).$$

Pour $x = e^{it}$, on obtient

$$p_k(t, y) = e^{it} \{ (\cos t + i \sin t) y^2 + (3 \cos t + i \sin t + k) y + \cos t + i \sin t + 1 \}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |p_k(t, y)| &= |(\cos t + i \sin t) y^2 + (3 \cos t + i \sin t + k) y + \cos t + i \sin t + 1| \\ &= |(y - r_1(t))(y - r_2(t))|, \end{aligned}$$

avec

$$r_1(t) = \frac{-(3 \cos t + i \sin t + k) + \sqrt{\Delta_k}}{2(\cos t + i \sin t)}, \quad r_2(t) = \frac{-(3 \cos t + i \sin t + k) - \sqrt{\Delta_k}}{2(\cos t + i \sin t)}$$

et

$$\Delta_k = (3 \cos t + i \sin t + k)^2 - 4(\cos t + i \sin t)(\cos t + i \sin t + 1).$$

Par la formule de Jensen on obtient,

$$m(P_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(\max(1, |r_1(t)|)) + \log(\max(1, |r_2(t)|)) dt.$$

A l'aide de **Mathematica** on obtient le tableau suivant

k	$m(P_k)$	k	$m(P_k)$
-20	2.9904169629	0	0.7149861664
-19	2.9385263242	1	0.7124385232
-18	2.8837545367	2	0.7605831732
-17	2.8257568782	3	1.0108905678
-16	2.7641214199	4	1.2722029327
-15	2.6983498659	5	1.5359533708
-14	2.6278308194	6	1.7405718230
-13	2.5518014392	7	1.9081634148
-12	2.4692905871	8	2.0504242189
-11	2.3790310109	9	2.1742040888
-10	2.2793164576	10	2.2838661337
-9	2.1677527058	11	2.3823690812
-8	2.0407804348	12	2.4718168258
-7	1.8926203755	13	2.5537617937
-6	1.7122940634	14	2.6293839162
-5	1.5422626428	15	2.6996020015
-4	1.3830577434	16	2.7651461208
-3	1.2230923078	17	2.8266063861
-2	1.0585153157	18	2.8844668338
-1	0.8871255239	19	2.9391295827
.	.	20	2.9909324483

2.3.1.3 Comparaison entre la mesure de Mahler et la série L

Dans le tableau suivant on compare entre la mesure de Mahler et la serie L

k	$r_k = \frac{m(P_k)}{b_{E_k}}$	k	$r_k = \frac{m(P_k)}{b_{E_k}}$
-20	$\frac{1}{672}$	0	0.6150394618
-19	$\frac{1}{376}$	1	.
-18	$\frac{1}{476}$	2	0.2000401105
-17	$\frac{1}{160}$	3	0.2250305129
-16	$\frac{1}{288}$	4	$\frac{1}{2}$
-15	$\frac{1}{32}$	5	1
-14	$\frac{1}{208}$	6	$\frac{1}{4}$
-13	$\frac{1}{192}$	7	$\frac{1}{12}$
-12	$\frac{1}{96}$	8	$\frac{1}{14}$
-11	$\frac{1}{52}$	9	$\frac{1}{6}$
-10	$\frac{1}{44}$	10	$\frac{1}{12}$
-9	$\frac{1}{4}$	11	$\frac{1}{72}$
-8	$\frac{1}{8}$	12	$\frac{1}{76}$
-7	$\frac{1}{4}$	13	$\frac{1}{70}$
-6	$\frac{1}{4}$	14	$\frac{1}{136}$
-5	0.9521201798	15	$\frac{1}{212}$
-4	1.632429390	16	$\frac{1}{244}$
-3	1.437784669	17	$\frac{1}{8}$
-2	2.467741160	18	$\frac{1}{336}$
-1	1.964451879	19	$\frac{1}{192}$
.	.	20	$\frac{1}{504}$

Remarque 57 Grâce aux travaux de Beilinson [1], Deligne [11], Deninger [12] et Scholl [23], la mesure de Mahler d'un polynôme P ne s'annulant pas sur le tore peut être reliée à une valeur de la fonction L . Ainsi il n'y a aucune raison pour espérer que la mesure de Mahler d'un polynôme P soit un multiple rationnel de

$$b_E = \frac{N}{4\pi^2} L(E, 2)$$

si P s'annule sur le tore.

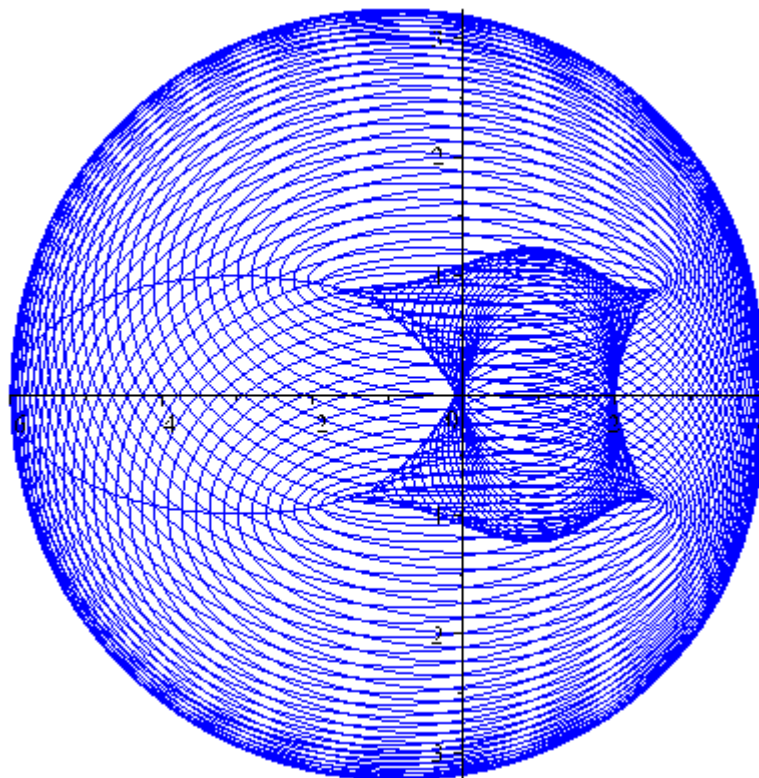
Soit \mathbb{k} l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels P_k s'annule sur le tore, i.e.,

$$\mathbb{k} = \{k \in \mathbb{C} / P_k(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\},$$

\mathbb{k} est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{(y+1)^2 x^2 + x + y}{xy}.$$

La figure suivante représente l'ensemble \mathbb{k} .



Remarque 58 Pour $k \in \{-20, \dots, -6\} \cup \{4, \dots, 20\}$, r_k est un nombre rationnel; pour $k \in \{-5, \dots, 0\} \cup \{2, 3\}$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $\{-5, \dots, 0\} \cup \{2, 3\} \subset \text{Int}(\mathbb{k})$.

2.3.2 La famille des courbes $xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x + 1) = 0$

Cette famille a été déjà étudiée par Touafek [26].

2.3.2.1 Une forme de Weierstrass et la série L

Lemme 59 La famille des courbes (2.6) a pour forme de Weierstrass

$$Y^2 + (2k - 4)XY + (-8k^2 + 32k - 24)Y = X^3 + (12 - 8k)X^2 + (16k^2 - 48k + 32)X, \quad (2.9)$$

avec le changement de variables

$$\begin{cases} X = 2(y + x^2 + (k - 2)x + 2k - 3) \\ Y = 4x(y + x^2 + (k - 2)x + 2k - 3) = 2xX. \end{cases}$$

Preuve. En appliquant la proposition 42. ■

Remarque 60 *Le discriminant de la famille des courbes (2.6) est*

$$\Delta_k = -256(k^3 - k^2 - 18k + 43)(k - 1)^2,$$

pour $k = 1$, la courbe est singulière.

En utilisant la forme de Weierstrass (2.9) et les commandes de **Pari**, `ellinit`, `ellminimalmodel` et `ellseries` on obtient le tableau suivant :

k	La courbe	N_k	b_{E_k}
-20	[0, -1, 1, -3190, 70422]	167937	2009.5601990888
-19	[1, 1, 0, -2585, 49525]	68350	1104.8858978935
-18	[0, 1, 1, -2070, 35568]	109991	1372.6671594588
-17	[1, 1, 0, -1635, 24777]	29118	452, 1211010075
-16	[0, -1, 1, -1272, 17892]	68357	796.0669689075
-15	[1, 0, 1, -973, 11592]	6574	86.3471957057
-14	[0, -1, 1, -728, 7808]	39675	546.5888104113
-13	[1, 1, 0, -532, 4508]	29246	489.9458762860
-12	[0, 1, 1, -378, 2706]	20969	237.0518963573
-11	[1, 1, 0, -259, 1501]	7266	123.7096125651
-10	[0, -1, 1, -170, 912]	9647	100.2899241331
-9	[1, 0, 1, -106, 408]	550	8.6710108230
-8	[0, -1, 1, -60, 200]	1167	16.3262434786
-7	[1, 1, 0, -30, 52]	446	7.5704815020
-6	[0, 1, 1, -12, 12]	707	6.8491762431
-5	[1, 1, 0, -2, 0]	102	1.4684193855
-4	[0, -1, 1, 2, -2]	175	2.2577441092
-3	[1, 0, 1, 2, 0]	122	1.75854336987
-2	[0, -1, 1, 2, 0]	201	2.6121418154
-1	[1, 1, 0, 1, 1]	118	1.7427154025
0	[0, 1, 1, 0, 0]	43	0.4397447073
1	courbe singulière		
2	[0, -1, 1, 0, 0]	11	0.1521471417
3	[1, 0, 1, -1, 0]	14	0.2274812230
4	[0, -1, 1, -2, 2]	57	0.6361014664

5	[1, 1, 0, -7, 5]	106	1.5359533708
6	[0, 1, 1, -18, 24]	575	6.9622872919
7	[1, 1, 0, -37, 73]	1266	22.8979609776
8	[0, -1, 1, -68, 240]	2429	28.7059390641
9	[1, 0, 1, -115, 462]	1058	13.0452245329
10	[0, -1, 1, -180, 992]	2289	27.4063936038
11	[1, 1, 0, -270, 1600]	10550	171.5305738317
12	[0, 1, 1, -390, 2838]	15521	187.8580787492
13	[1, 1, 0, -545, 4677]	11022	178.7633255529
14	[0, -1, 1, -742, 8032]	30407	357.5962125962
15	[1, 0, 1, -988, 11862]	40922	572.3156243057
16	[0, -1, 1, -1288, 18228]	53925	674.6956534793
17	[1, 1, 0, -1652, 25168]	1246	22.6128510890
18	[0, 1, 1, -2088, 36036]	88859	969.1808561635
19	[1, 1, 0, -2604, 50076]	37194	564.3128798781
20	[0, -1, 1, -3210, 71082]	138377	1507.4299539660

Tableau 2

2.3.2.2 Calcul numérique de la mesure de Mahler On a

$$Q_k(x, y) = xy^2 + (x^2 + kx + 1)y + x(x + 1).$$

Pour $x = e^{it}$, on obtient

$$Q_k(t, y) = e^{it} \{y^2 + (2 \cos t + k)y + \cos t + i \sin t + 1\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |Q_k(t, y)| &= |y^2 + (2 \cos t + k)y + \cos t + i \sin t + 1| \\ &= |(y - y_1(t))(y - y_2(t))|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{-(2 \cos t + k) + \sqrt{\Delta_k}}{2}, \\ y_2(t) &= \frac{-(2 \cos t + k) - \sqrt{\Delta_k}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\Delta_k = (2 \cos t + k)^2 - 4(\cos t + i \sin t + 1).$$

Par la formule de Jensen on obtient,

$$m(Q_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(\max(1, |y_1(t)|)) + \log(\max(1, |y_2(t)|)) dt.$$

A l'aide de **Mathematica** on obtient le tableau suivant

k	$m(Q_k)$	k	$m(Q_k)$
-20	2.9904169629	0	0.5083171456
-19	2.9385263242	1	0
-18	2.8837545367	2	0.5925426188
-17	2.8257568782	3	0.9099248921
-16	2.7641214198	4	1.2722029327
-15	2.6983498658	5	1.5359533709
-14	2.6278308193	6	1.7405718230
-13	2.5518014390	7	1.9081634148
-12	2.4692905871	8	2.0504242189
-11	2.3790310109	9	2.1742040888
-10	2.2793164576	10	2.2838661337
-9	2.1677527058	11	2.3823690810
-8	2.0407804349	12	2.4718168256
-7	1.8926203756	13	2.5537617936
-6	1.7122940608	14	2.6293839161
-5	1.4684193853	15	2.6996020014
-4	1.2433213249	16	2.7651461208
-3	1.0512415581	17	2.8266063861
-2	0.8688714195	18	2.8844668338
-1	0.6893028558	19	2.9391295827
.	.	20	2.9909324483

2.3.2.3 Comparaison entre la mesure de Mahler et la série L On a

k	$r_k = \frac{m(Q_k)}{b_{E_k}}$	k	$r_k = \frac{m(Q_k)}{b_{E_k}}$
-20	$\frac{1}{672}$	0	1.155936927
-19	$\frac{1}{376}$	1	.
-18	$\frac{1}{476}$	2	3.894536645
-17	$\frac{1}{160}$	3	4
-16	$\frac{1}{288}$	4	2
-15	$\frac{1}{32}$	5	1
-14	$\frac{1}{208}$	6	$\frac{1}{4}$
-13	$\frac{1}{192}$	7	$\frac{1}{12}$
-12	$\frac{1}{96}$	8	$\frac{1}{14}$
-11	$\frac{1}{52}$	9	$\frac{1}{6}$
-10	$\frac{1}{44}$	10	$\frac{1}{12}$
-9	$\frac{1}{4}$	11	$\frac{1}{72}$
-8	$\frac{1}{8}$	12	$\frac{1}{76}$
-7	$\frac{1}{4}$	13	$\frac{1}{70}$
-6	$\frac{1}{4}$	14	$\frac{1}{136}$
-5	1	15	$\frac{1}{212}$
-4	0.55069187	16	$\frac{1}{244}$
-3	0.59779109	17	$\frac{1}{8}$
-2	0.332627966	18	$\frac{1}{336}$
-1	0.395533806	19	$\frac{1}{192}$
.	.	20	$\frac{1}{504}$

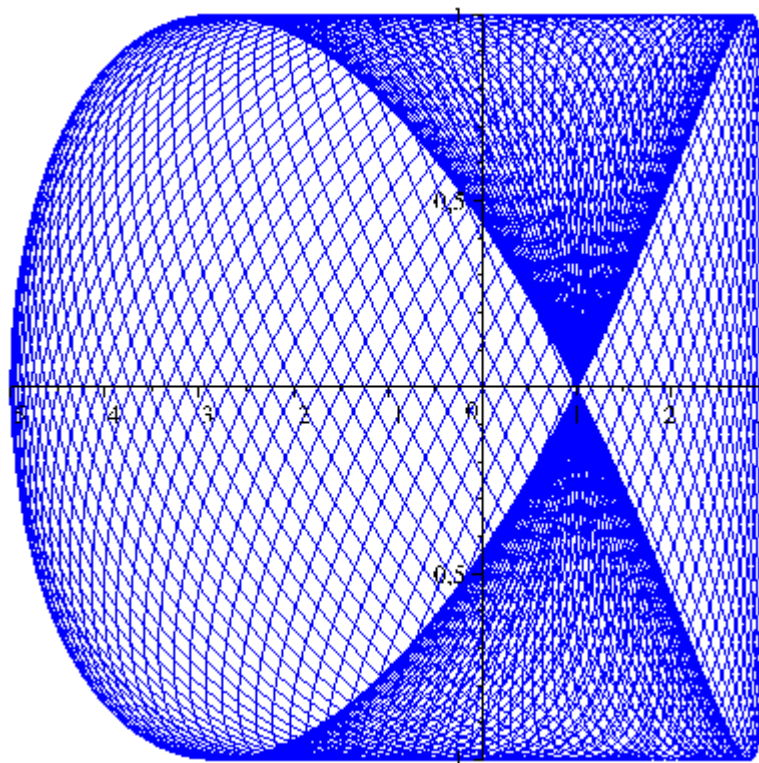
Remarque 61 Soit \mathbb{k} l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels Q_k s'annule sur le tore i.e.,

$$\mathbb{k} = \{k \in \mathbb{C} / Q_k(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\},$$

\mathbb{k} est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{(y+1)x^2 + (y^2+1)x + y}{xy}.$$

Cet ensemble est représenté par la figure suivante



Remarque 62 Pour $k \in \{-20, \dots, -5\} \cup \{3, \dots, 20\}$, r_k est un nombre rationnel; pour $k \in \{-4, \dots, 0\} \cup \{2\}$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $\{-5, \dots, 0\} \cup \{2\} \subset \text{Int}(\mathbb{k})$.

Remarque 63 On remarque qu'on a les mêmes courbes dans le tableau 1 et le tableau 2, cela s'explique par le fait que les deux familles en question définissent des courbes isomorphes.

Proposition 64 Les courbes E_1, E_2 d'équations respectives

$$E_1 : y_1^2 = x_1^3 + (k^2 + 4)x_1^2 + 8k(k-1)x_1 + 16(k-1)^2,$$

$$E_2 : y_2^2 + (2k-4)x_2y_2 + (-8k^2 + 32k - 24)y_2 = x_2^3 + (12-8k)x_2^2 + (16k^2 - 48k + 32)x_2,$$

avec $k \neq 1$, sont isomorphes avec le changement de variables admissible

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 4k + 4, \\ y_1 = y_2 + (k-2)x_2 - 4k^2 + 16k - 12. \end{cases}$$

Preuve. Posons

$$\begin{cases} x_1 = u^2 x_2 + r, \\ y_1 = u^3 y_2 + u^2 s x_2 + t. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de E_1 , on trouve

$$\begin{aligned} u^6 y_2^2 + 2su^5 x_2 y_2 + 2tu^3 y_2 &= u^6 x_2^3 + (3ru^4 + (k^2 + 4)u^4 - u^4 s^2)x_2^2 \\ &+ [3u^2 r^2 + 2k^2 u^2 r + (8k^2 - 8k + 8r)u^2 - 2u^2 st]x_2 \\ &+ r^3 + (k^2 + 4)r^2 + (8k^2 - 8k)r^2 + 16k^2 - 32k + 16 - t^2. \end{aligned}$$

Par identification avec l'équation de E_2 , on trouve

$$u = 1, \quad r = -4k + 4, \quad s = k - 2, \quad t = -4k^2 + 16k - 12.$$

Ainsi l'isomorphisme est donné par

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 4k + 4 \\ y_1 = y_2 + (k - 2)x_2 - 4k^2 + 16k - 12 \end{cases}$$

■

2.3.3 La famille des courbes $(x^2 + 1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x = 0$

2.3.3.1 Une forme de Weierstrass et la série L

Lemme 65 *La famille des courbes (2.7) admet une forme de Weierstrass donnée par*

$$Y^2 + 2(k - 2)XY - 8(k - 1)(k - 2)Y = X^3 - 4(2k - 1)X^2 - 16k(-k + 1)X, \quad (2.10)$$

avec le changement de variables

$$\begin{cases} X = 4((x^2 + 1)y + x^2 + (k - 1)x + k), \\ Y = 8x((x^2 + 1)y + x^2 + (k - 1)x + k). \end{cases}$$

Preuve. En appliquant la proposition 42. ■

Remarque 66 *La famille des courbes (2.7) a pour discriminant*

$$256(k^2 + 4k - 4)(k^2 - 4k + 12)(k - 1)^2,$$

pour $k = 1$, la courbe est singulière.

On obtient le tableau suivant (en utilisant la forme de Weierstrass (2.10) et les commandes de **Pari** `ellinit`, `ellminimalmodel` et `ellseries`),

k	La courbe	N_k	$b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2)$
-20	[0, 0, 0, -3246, 71181]	1632456	37923.4303942663
-19	[1, -1, 0, -2635, 52725]	1261690	21881.3313770642
-18	[0, -1, 0, -2114, 38124]	961248	18012.0135601981
-17	[1, -1, 0, -1674, 26784]	160146	2896.7562557528
-16	[0, 0, 0, -1306, 18165]	530536	11513.2474488155
-15	[1, 1, 0, -1001, 11781]	10626	172.9465534134
-14	[0, 0, 0, -753, 7952]	269280	6570.27094803649
-13	[1, -1, 0, -553, 5145]	368606	6832.2084619613
-12	[0, -1, 0, -395, 3156]	121992	2297.0711385914
-11	[1, -1, 0, -273, 1805]	77526	1488.9240394048
-10	[0, 0, 0, -181, 936]	46816	1024.9163562191
-9	[1, 1, 0, -113, 417]	52890	871.2114884345
-8	[0, 0, 0, -66, 205]	504	10.9523969431
-7	[1, -1, 0, -34, 84]	3026	45.8164670699
-6	[0, -1, 0, -14, 24]	672	13.8729412942
-5	[1, -1, 0, -3, 1]	342	5.9899112832
-4	[0, 0, 0, 2, -3]	440	9.5416744326
-3	[1, 1, 0, 4, 0]	462	7.6569218810
-2	[0, 0, 0, 3, 0]	288	5.8618134760
-1	[1, -1, 0, 2, 0]	238	4.0348631900
0	[0, -1, 0, 1, 0]	24	0.5114240671
1	Courbe singulière		
2	[0, 0, 0, -1, 0]	32	0.7433332466
3	[1, 1, 0, -2, 0]	102	1.4684193855
4	[0, 0, 0, -6, 5]	504	11.0122473892
5	[1, -1, 0, -13, 21]	1394	25.5608297115
6	[0, -1, 0, -26, 60]	3360	71.2237147963
7	[1, -1, 0, -48, 140]	14454	247.8203830984
8	[0, 0, 0, -82, 285]	14168	298.2208294479
9	[1, 1, 0, -131, 525]	12882	210.2345634992
10	[0, 0, 0, -201, 1096]	4896	110.2222990769
11	[1, -1, 0, -295, 2025]	143290	2641.2466816756
12	[0, -1, 0, -419, 3444]	12408	257.9335166218

13	[1, -1, 0, -579, 5509]	167958	2704.1450230230
14	[0, 0, 0, -781, 8400]	245024	5291.7422315815
15	[1, 1, 0, -1031, 12321]	696318	11251.6623504510
16	[0, 0, 0, -1338, 18837]	483480	11521.5708704644
17	[1, -1, 0, -1708, 27600]	164498	2717.3058398390
18	[0, -1, 0, -2150, 39096]	125664	2402.7649225923
19	[1, -1, 0, -2673, 53865]	85734	1600.5706526813
20	[0, 0, 0, -3286, 72501]	1501304	31421.9837442640

2.3.3.2 Calcul numérique de la mesure de Mahler On a

$$\begin{aligned} R_k(x, y) &= (x^2 + 1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x \\ &= x \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right)y^2 + \left(x + \frac{1}{x} + k\right)y + 1 \right\}, \end{aligned}$$

pour $x = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} |R_k(\theta, y)| &= |2 \cos(\theta) y^2 + (2 \cos \theta + k) y + 1| \\ &= |2 \cos \theta (y - y_1(\theta))(y - y_2(\theta))|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} y_1(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta}, \\ y_2(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \end{cases}$$

et

$$\Delta_k = (2 \cos \theta + k)^2 - 8 \cos \theta.$$

Ainsi, par la formule de Jensen,

$$\begin{aligned} m(R_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\log(\max(1, |y_1(\theta)|)) + \log(\max(1, |y_2(\theta)|))) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\log(\max(1, |y_1(\theta)|)) + \log(\max(1, |y_2(\theta)|))) d\theta. \end{aligned}$$

En utilisant le programme **Mathematica** on obtient le tableau suivant

k	$m(R_k)$	k	$m(R_k)$
-20	2.9926949466	0	0.46626340939
-19	2.9410391605	1	$0.3230659470 = d_3$
-18	2.8865406308	2	0.7975027582
-17	2.8288635261	3	1.101314539
-16	2.7676075535	4	1.3765309236
-15	2.7022898890	5	1.5975518568
-14	2.6323200811	6	1.7805928698
-13	2.5569642320	7	1.9360967429
-12	2.4752921603	8	2.0709779823
-11	2.3860962023	9	2.1899433703
-10	2.2877597237	10	2.2962978970
-9	2.1780287210	11	2.3924335877
-8	2.0535744264	12	2.4801299667
-7	1.9090199494	13	2.5607433923
-6	1.7341176609	14	2.6353297959
-5	1.4974778357	15	2.7047265260
-4	1.2609295688	16	2.7696083818
-3	1.0378857086	17	2.8305269161
-2	0.8250987531	18	2.8879386086
-1	0.6351297358	19	2.9422254642
.	.	20	2.9937103413

2.3.3.3 Comparaison entre la mesure de Mahler et la série L On a

k	$r_k = \frac{m(R_k)}{b_{E_k}}$	k	$r_k = \frac{m(R_k)}{b_{E_k}}$
-20	$\frac{1}{12672}$	0	1.096856533
-19	$\frac{1}{7440}$	1	.
-18	$\frac{1}{6240}$	2	0.9320760821
-17	$\frac{1}{1024}$	3	$\frac{5}{3}$
-16	$\frac{1}{4160}$	4	$\frac{1}{8}$
-15	$\frac{1}{64}$	5	$\frac{1}{16}$
-14	$\frac{1}{2496}$	6	$\frac{1}{40}$
-13	$\frac{1}{2672}$	7	$\frac{1}{128}$
-12	$\frac{1}{928}$	8	$\frac{1}{144}$
-11	$\frac{1}{624}$	9	$\frac{1}{96}$
-10	$\frac{1}{448}$	10	$\frac{1}{48}$
-9	$\frac{1}{400}$	11	$\frac{1}{1104}$
-8	$\frac{16}{3}$	12	$\frac{1}{104}$
-7	$\frac{1}{24}$	13	$\frac{1}{1056}$
-6	$\frac{1}{8}$	14	$\frac{1}{2008}$
-5	$\frac{1}{4}$	15	$\frac{1}{4160}$
-4	7.567174404	16	$\frac{1}{4160}$
-3	7.377451317	17	$\frac{1}{960}$
-2	7.104378053	18	$\frac{1}{832}$
-1	6.352817325	19	$\frac{1}{544}$
.	.	20	$\frac{1}{10496}$

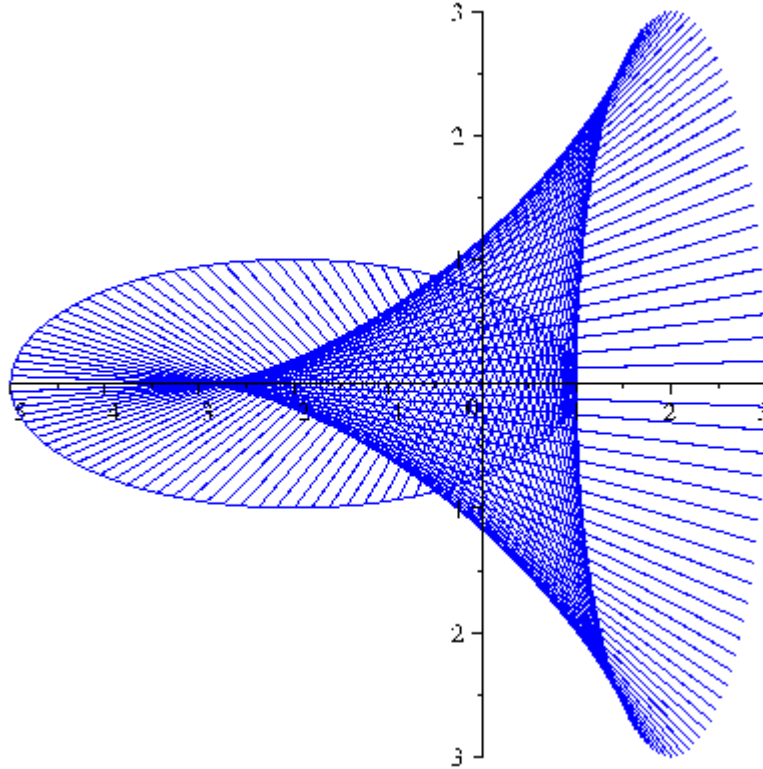
Remarque 67 Soit \mathbb{k} l'ensemble des nombres complexes k pour lesquels R_k s'annule sur le tore i.e.,

$$\mathbb{k} = \left\{ k \in \mathbb{C} / R_k(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2 \right\},$$

\mathbb{k} est l'image du tore par l'application rationnelle R définie par

$$R(x, y) = -\frac{y(y+1)x^2 + x + y^2 + y}{xy}.$$

Cet ensemble est représenté par la figure suivante



Remarque 68 Pour $k \in \{-20, \dots, -5\} \cup \{3, \dots, 20\}$, r_k est un nombre rationnel; pour $k \in \{-4, \dots, 0\} \cup \{2\}$, r_k ne peut être un nombre rationnel, car $\{-5, \dots, 0\} \cup \{2\} \subset \text{Int}(\mathbb{k})$.

Dans le résultat suivant, on donne des formules explicites pour la mesure de Mahler du polynôme donné par la formule (2.7).

Proposition 69 Soit $k \in \mathbb{R}$, posons

$$m_k = m((x^2 + 1)y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x)$$

et

$$\alpha_k = \arccos\left(\frac{-1-k}{4}\right), \quad k \in [-5, 3].$$

Alors

Si $k \leq -5$,

$$m_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \log 2.$$

Si $-5 < k \leq -3$,

$$m_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta \right) - \frac{\log 2}{2}.$$

Si $-3 < k \leq -1$,

$$m_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta + \alpha_k \log 2 \right) - \frac{5 \log 2}{6}.$$

Si $-1 < k < 1$,

$$m_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta + \alpha_k \log 2 \right) - \frac{5 \log 2}{6}.$$

Si $1 < k \leq 3$

$$m_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\alpha_k} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log (-4 \cos \theta) d\theta \right) - \frac{\log 2}{2}.$$

Si $k > 3$,

$$m_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \log 2.$$

Preuve. On a

$$m(P_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log(\max(1, |y_1|)) + \log(\max(1, |y_2|)) d\theta,$$

avec

$$\begin{cases} y_1(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta}, \\ y_2(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \end{cases}$$

et

$$\Delta_k = (2 \cos \theta + k)^2 - 8 \cos \theta.$$

Si $k \leq -5$, on a

$$|y_1| \leq 1 \leq |y_2|, \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_2| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \log 2. \end{aligned}$$

Si $-5 < k \leq -3$, on a

$$|y_1| \leq 1, \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

et

$$\begin{cases} |y_2| \geq 1, & \forall \theta \in \left[\alpha_k, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ |y_2| \leq 1, & \forall \theta \in [0, \alpha_k] \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_2| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta - \\ &\quad \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log (-4 \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta \right) - \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Si $-3 < k \leq -1$, on a

$$\begin{cases} |y_1| \geq 1, & \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \alpha_k \right] \\ |y_1| \leq 1, & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\alpha_k, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} |y_2| \geq 1, & \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ |y_2| \leq 1, & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha_k} \log |y_1| d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_2| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log (-4 \cos \theta) d\theta + \right. \\ &\quad \left. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha_k} \log \left| -(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha_k} \log (4 \cos \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta + \alpha_k \log 2 \right) - \frac{5 \log 2}{6}. \end{aligned}$$

Si $-1 < k < 1$, on a

$$\begin{cases} |y_1| \geq 1, & \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \alpha_k \right] \\ |y_1| \leq 1, & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\alpha_k, \pi \right] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} |y_2| \geq 1, & \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ |y_2| \leq 1, & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log |y_1| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log |y_1| d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_2| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-2 \cos \theta - k - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log \left| \frac{-2 \cos \theta - k - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \\ &\quad \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-2 \cos \theta - k + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \left| \frac{-2 \cos \theta - k + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\pi} \log \left| -2 \cos \theta - k + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta + \alpha_k \log 2 \right) - \frac{5 \log 2}{6}. \end{aligned}$$

Si $1 < k \leq 3$, on a

$$|y_2| \leq 1, \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

et

$$\begin{cases} |y_1| \geq 1, & \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \alpha_k \right] \\ |y_1| \leq 1, & \forall \theta \in \left[\alpha_k, \pi \right] \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_1| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log |y_1| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_k} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos \theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log (-4 \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\alpha_k} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_k} \log (-4 \cos \theta) d\theta \right) - \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Si $k > 3$, on a

$$|y_1| \geq 1 \geq |y_2|, \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

et donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_1| d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_1| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos \theta} \right| d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| -(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k} \right| d\theta - \log 2. \end{aligned}$$

■

Proposition 70 *On a*

$$m((x^2 + 1)y^2 + (x^2 + x + 1)y + x) = d_3.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} m((x^2 + 1)y^2 + (x^2 + x + 1)y + x) &= m((y + 1)(yx^2 + y + x)) \\ &= m(y + 1) + m(yx^2 + y + x) \\ &= m(yx^2 + y + x) \\ &= m\left(x\left(yx + \frac{y}{x} + 1\right)\right) \\ &= m(x) + m\left(yx + \frac{y}{x} + 1\right) \\ &= m\left(yx + \frac{y}{x} + 1\right) \\ &= m(Y + X + 1) \\ &= d_3. \end{aligned}$$

■

2.4 Sur la mesure de Mahler de la famille des courbes

$$y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2 = 0$$

Soit

$$P_k(x, y) = y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2.$$

Cette famille a été étudiée en premier lieu par Boyd. Ici on présente quelques résultats sur la mesure de Mahler de cette famille. Posons

$$x = e^{i\theta},$$

on obtient

$$m(P_k) = m(y^2 + (2\cos\theta + k)y + 1).$$

Remarque 71 *On remarque que $P_{-k}(x, y) = P_k(-x, y)$, donc il suffit d'étudier la mesure de Mahler de cette famille seulement pour les k positifs.*

Proposition 72 *Soit $k \in \mathbb{R}$, posons*

$$m_k = m(y^2 + (x^2 + kx + 1)y + x^2)$$

et

$$\alpha_k = \arccos\left(-\frac{k}{2} + 1\right), \quad 0 \leq k \leq 4.$$

On a

1. Si $k = 0$, alors

$$m_k = 0.$$

2. Si $0 < k \leq 4$, alors

$$m_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\alpha_k} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4} \right| d\theta - \alpha_k \log 2 \right).$$

3. Si $k > 4$, alors

$$m_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4} \right| d\theta - \log 2.$$

Preuve. Soient

$$y_1(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{\Delta_k}}{2} \text{ et } y_2(\theta) = \frac{-(2 \cos \theta + k) + \sqrt{\Delta_k}}{2}$$

les racines de

$$y^2 + (2 \cos \theta + k)y + 1 = 0,$$

avec

$$\Delta_k = (2 \cos \theta + k)^2 - 4.$$

Comme

$$y^2 + (2 \cos \theta + k)y + 1,$$

est à coefficients réels et

$$y_1 y_2 = 1,$$

donc si $\Delta \leq 0$, alors y_1 et y_2 sont conjugués ou égaux et on a

$$|y_1| = |y_2| = 1$$

et si $\Delta > 0$, on a

$$\max(|y_1|, |y_2|) > 1.$$

1. Si $k = 0$, on a

$$\begin{aligned} m_k &= m((y+1)(y+x^2)) \\ &= m(y+1) + m(y+x^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Si $0 < k \leq 4$, $\Delta > 0$ pour $\theta \in [0, \alpha_k]$ et on a

$$|y_1| > 1 > |y_2|,$$

alors

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_k} \log |y_1| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_k} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4}}{2} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\alpha_k} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4} \right| d\theta - \alpha_k \log 2 \right). \end{aligned}$$

3. Si $k > 4$, $\Delta > 0$, $\forall \theta \in [0, \pi]$ et

$$|y_1| > 1 > |y_2|,$$

donc,

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |y_1| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| \frac{-(2 \cos \theta + k) - \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4}}{2} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| 2 \cos \theta + k + \sqrt{(2 \cos \theta + k)^2 - 4} \right| d\theta - \log 2. \end{aligned}$$

■

Proposition 73 Soit F la fonction donnée par

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{(1-X)(1+X)(2X+k-2)(2X+k+2)}},$$

alors

$$\frac{dm_k}{dk} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{1-\frac{k}{2}}^1 F(X), & 0 < k \leq 4, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(X), & k > 4. \end{cases}$$

Preuve. 1. Pour $0 < k \leq 4$ la fonction $\log |y_1|$ est analytique sur $[0, \alpha_k]$ donc m_k est dérivable

$$\pi \frac{dm_k}{dk} = \operatorname{Re} \int_0^{\alpha_k} \frac{y_1'(\theta)}{y_1(\theta)} d\theta + \alpha_k' \log |y_1(\alpha_k)|,$$

mais

$$y_1(\alpha_k) = -1$$

et

$$\frac{y_1'(\theta)}{y_1(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{(k+2 \cos t)^2 - 4}},$$

d'où,

$$\pi \frac{dm_k}{dk} = \int_0^{\alpha_k} \frac{d\theta}{\sqrt{(k+2\cos\theta)^2 - 4}}.$$

Pour $X = \cos\theta$, on obtient

$$\begin{aligned} dX &= -\sin\theta d\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= -\sqrt{1-X^2} d\theta. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi \frac{dm_k}{dk} &= \int_1^{-\frac{k}{2}+1} \frac{-dX}{\sqrt{(1-X^2)((k+2X)^2-4)}} \\ &= \int_{-\frac{k}{2}+1}^1 \frac{dX}{\sqrt{(1-X)(1+X)(2X+k-2)(2X+k+2)}}. \end{aligned}$$

2. Pour $k > 4$, la fonction $\log|y_1|$ est analytique sur $[0, \pi]$ et donc m_k est dérivable et on a

$$\pi \frac{dm_k}{dk} = \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{y_1'}{y_1} d\theta.$$

Comme dans le cas précédent, posons

$$X = \cos\theta.$$

Ainsi

$$\pi \frac{dm_k}{dk} = \int_{-1}^1 \frac{dX}{\sqrt{(1-X)(1+X)(2X+k-2)(2X+k+2)}}.$$

■

Proposition 74 Soit $0 < k \leq 1$, donc on a

$$m\left(\frac{4}{k} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) = -\log\left(\frac{k}{1+\sqrt{1-k^2}}\right) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-k^2x^2}} dx.$$

Preuve. Soit $l \in \mathbb{C} - \{0\}$. Posons

$$X = \frac{x}{y} \text{ et } Y = xy,$$

on trouve

$$\begin{aligned} m\left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) &= m\left(\frac{4}{l} + \frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} + XY + \frac{1}{XY}\right) \\ &= m\left(\frac{4}{l} + \left(X + \frac{1}{X}\right) \left(Y + \frac{1}{Y}\right)\right) \\ &= m\left(X^2 + \frac{4}{l\left(Y + \frac{1}{Y}\right)} X + 1\right). \end{aligned}$$

Pour $y = e^{i\theta}$, on obtient

$$m\left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) = m\left(X^2 + \frac{2}{l \cos \theta} X + 1\right).$$

En appliquant la formule de Jensen, on obtient

$$m\left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |x_1(\theta)| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |x_2(\theta)| d\theta,$$

avec

$$x_1(\theta) = \frac{-1 - \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}{l \cos \theta}$$

et

$$\begin{aligned} x_2(\theta) &= \frac{-1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}{l \cos \theta} \\ &= \frac{-l \cos \theta}{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \frac{r}{1 + \sqrt{1 - r^2}} \right| \leq 1,$$

pour tout $r \in \mathbb{C}$, en particulier

$$\left| \frac{r}{1 + \sqrt{1 - r^2}} \right| = 1,$$

pour tout $r \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ donc

$$\begin{aligned} m\left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |x_1(\theta)| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}{l \cos \theta} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta} \right| d\theta - \log |l|. \end{aligned}$$

En posant

$$f(\theta) = \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta} \right|,$$

on obtient

$$m\left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(\theta) d\theta \right) - \log |l|.$$

Soit

$$I = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(\theta) d\theta \right).$$

Posons

$$t = \theta - \pi, \quad dt = d\theta$$

on trouve

$$f(t) = \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 t}}{\cos t} \right|,$$

ainsi

$$I = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) dt \right).$$

Mais la fonction f est une fonction paire sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 t}}{\cos t} \right| dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 \cos^2 t}}{\cos t} \right| dt \right). \end{aligned}$$

Posons

$$u = \cos t,$$

on obtient

$$\begin{aligned} du &= -\sin t dt = -\sqrt{1 - \cos^2 t} dt \\ &= -\sqrt{1 - u^2} dt, \end{aligned}$$

d'où

$$I = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^0 \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 u^2}}{u} \right| \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} + \int_0^1 \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 u^2}}{u} \right| \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \right),$$

et comme la fonction

$$\frac{\log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 u^2}}{u} \right|}{\sqrt{1 - u^2}},$$

est une fonction paire sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log \left| \frac{1 + \sqrt{1 - l^2 u^2}}{u} \right| \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \log \left| 1 + \sqrt{1 - u^2} \right| \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\log u}{\sqrt{1 - u^2}} du. \end{aligned}$$

En intégrant par partie on trouve

$$I = \log \left| 1 + \sqrt{1 - l^2} \right| - \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{-\arcsin^{-1} u \left(1 - \sqrt{1 - l^2 u^2} \right)}{u \sqrt{1 - u^2}} \right) + \log 2.$$

Mais

$$\int_0^1 \frac{\arcsin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \log 2,$$

alors

$$\begin{aligned} I &= \log \left| 1 + \sqrt{1 - l^2} \right| + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin^{-1} u \left(1 - \sqrt{1 - l^2 u^2} \right)}{u \sqrt{1 - l^2 u^2}} du \right) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin u}{u} du \\ &= \log \left| 1 + \sqrt{1 - l^2} \right| + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin^{-1} u}{u \sqrt{1 - l^2 u^2}} du \right), \end{aligned}$$

et donc

$$m \left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \right) = \log \left| 1 + \sqrt{1 - l^2} \right| + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin^{-1} u}{u \sqrt{1 - l^2 u^2}} du \right) - \log |l|.$$

Ainsi

$$m \left(\frac{4}{l} + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \right) = -\log \left| \frac{l}{1 + \sqrt{1 - l^2}} \right| + \operatorname{Re} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\arcsin^{-1} u}{u \sqrt{1 - l^2 u^2}} du \right).$$

■

2.5 Mesure de Mahler de $X + Y + 2 \sin(\pi x)$

Ici on donne des formules explicites pour la mesure de Mahler de

$$X + Y + 2 \sin(\pi x), 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

on déduit que

$$e^{m(X+Y+2\sin(\pi x))},$$

satisfait une équation différentielle que l'on précisera.

Proposition 75 Soient $r, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$m(x + y + re^{2\pi i \alpha}) = m(x + y + r).$$

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} m(x + y + re^{2\pi i \alpha}) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log |x + y + re^{2\pi i \alpha}| \frac{dx dy}{x y} \\ &= \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \log |xe^{-2\pi i \alpha} + ye^{-2\pi i \alpha} + r| \frac{dx dy}{x y}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} X = xe^{-2\pi i \alpha}, \\ Y = ye^{-2\pi i \alpha}. \end{cases}$$

Ainsi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dY}{Y}$$

et

$$\begin{aligned} m(x + y + re^{2\pi i\alpha}) &= \int_{|X|=1} \int_{|Y|=1} \log |X + Y + r| \frac{dX}{X} \frac{dY}{Y} \\ &= m(X + Y + r). \end{aligned}$$

■

Proposition 76 Soit $0 < x \leq \frac{1}{2}$, alors

$$m(X + Y + 2 \sin(\pi x)) = 2x \log(2 \sin(\pi x)) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n^2}.$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{R}$, $k \geq \frac{1}{2}$. On a

$$\begin{aligned} m(X + kY + k) &= \int_0^1 \int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta_1} + ke^{2\pi i\theta_2} + k| d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta_1} - ke^{2\pi i\theta_2} + k| d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta_1} + ke^{2\pi i(\theta_2 + \frac{1}{2})} + k| d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log |e^{2\pi i\theta_1} + ke^{2\pi i\theta_2} + k| d\theta_2 \right) d\theta_1 \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \left(\max \left(1, |ke^{2\pi i\theta_2} + k| \right) \right) d\theta_2. \end{aligned}$$

Soit $a(k) \in \mathbb{R}$, $0 \leq a(k) < \frac{1}{2}$ tel que

$$\left| e^{2\pi i a(k)} + 1 \right| = \frac{1}{k}, \quad a(k) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(-1 + \frac{1}{2k^2} \right).$$

On a

$$\left| ke^{2\pi i\theta_2} + k \right| > 1 \text{ si } -a(k) < \theta_2 < a(k)$$

et

$$\left| ke^{2\pi i\theta_2} + k \right| \leq 1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leq \theta_2 \leq -a(k) \text{ et } a(k) \leq \theta_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\log \left(\max \left(1, |ke^{2\pi i\theta_2} + k| \right) \right) = \begin{cases} \log |ke^{2\pi i\theta_2} + k|, & -a(k) < \theta_2 < a(k) \\ 0, & -\frac{1}{2} \leq \theta_2 \leq -a(k) \text{ et } a(k) \leq \theta_2 \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{aligned} m(X + kY + k) &= \int_{-a(k)}^{a(k)} \log \left| k \left(e^{2\pi i \theta_2} + 1 \right) \right| d\theta_2 \\ &= \int_{-a(k)}^{a(k)} \log k d\theta_2 + \int_{-a(k)}^{a(k)} \log \left| e^{2\pi i \theta_2} + 1 \right| d\theta_2, \end{aligned}$$

d'où

$$m(X + kY + k) = 2a(k) \log k + \int_{-a(k)}^{a(k)} \log \left| e^{2\pi i \theta_2} + 1 \right| d\theta_2,$$

et comme

$$\log |1 + z| = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} m(X + kY + k) &= 2a(k) \log k + \int_{-a(k)}^{a(k)} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{2\pi i n \theta_2} d\theta_2 \\ &= 2a(k) \log k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{-a(k)}^{a(k)} \operatorname{Re} \left(e^{2\pi i n \theta_2} \right) d\theta_2 \\ &= 2a(k) \log k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{-a(k)}^{a(k)} \cos(2\pi n \theta_2) d\theta_2, \end{aligned}$$

d'où

$$m(X + kY + k) = 2a(k) \log k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2\pi n a(k))}{\pi n^2}. \quad (2.11)$$

On a

$$m(X + kY + k) = \log k + m\left(\frac{1}{k}X + Y + 1\right),$$

de plus

$$\begin{aligned} m\left(\frac{X}{k} + Y + 1\right) &= m\left(X \left(\frac{1}{k} + \frac{Y}{X} + \frac{1}{X}\right)\right) \\ &= m(X) + m\left(\frac{1}{k} + \frac{Y}{X} + \frac{1}{X}\right) \\ &= m\left(\frac{1}{k} + Y + X\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$m\left(X + Y + \frac{1}{k}\right) = m(X + kY + k) - \log k. \quad (2.12)$$

En remplaçant (2.11) dans (2.12) on trouve

$$m\left(X + Y + \frac{1}{k}\right) = (1 - 2a(k)) \log\left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2\pi n a(k))}{\pi n^2}. \quad (2.13)$$

Soit $b(k) = \frac{1}{2} - a(k)$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} &= \left| e^{2\pi i(\frac{1}{2}-b(k))} + 1 \right|^2 \\ &= \left| -e^{2\pi i b(k)} + 1 \right|^2 \\ &= 4 \sin^2(\pi b(k)), \end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{1}{k} = 2 \sin(2\pi n b(k)), \quad 0 < b(k) \leq \frac{1}{2}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin(2\pi n a(k)) &= \sin(\pi n - 2\pi n b(k)) \\ &= \sin(\pi n) \cos(2\pi n b(k)) - \cos(\pi n) \sin(2\pi n b(k)) \\ &= (-1)^{n+1} \sin(2\pi n b(k)). \end{aligned}$$

Ainsi (2.13) s'écrit

$$m(X + Y + 2 \sin(\pi b(k))) = 2b(k) \log(2 \sin(\pi b(k))) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n b(k))}{\pi n^2}.$$

■

Théorème 77 Soit $0 < x \leq \frac{1}{2}$, alors

$$m'(x) = 2\pi x \cot(\pi x),$$

avec

$$m(x) = m(X + Y + 2 \sin(\pi x)).$$

Preuve. De la proposition précédente

$$m(x) = 2x \log(2 \sin(\pi x)) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n^2} \quad \text{pour } 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

donc

$$\begin{aligned} m'(x) &= 2 \log(2 \sin(\pi x)) + 2x \frac{2\pi \cos(\pi x)}{2 \sin(\pi x)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n \cos(2\pi n x)}{n^2} \\ &= 2 \log(2 \sin(\pi x)) + 2\pi x \cot(\pi x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} \right) \\
 &= -\operatorname{Re} (\log (1 - e^{2\pi i x})) \\
 &= -\log |1 - e^{2\pi i x}| = -\log |e^{-\pi i x} - e^{\pi i x}| + \log |e^{\pi i x}| \\
 &= -\log (2 \sin (\pi x)).
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 m'(x) &= 2 \log (2 \sin (\pi x)) + 2\pi x \cot (\pi x) - 2 \log (2 \sin (\pi x)) \\
 &= 2\pi x \cot (\pi x).
 \end{aligned}$$

■

Théorème 78 Soit $0 < x \leq \frac{1}{2}$

$$e^{m(x)} = e^{2x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right]^2.$$

Preuve. On a du théorème 76,

$$m'(x) = 2\pi x \cot (\pi x),$$

et comme

$$\pi \cot (\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

alors

$$\begin{aligned}
 m'(x) &= 2x \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right) \\
 &= 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 \frac{x^2}{n^2}}{\left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \\
 &= 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{1 - \frac{x}{n}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} + 2 \right).
 \end{aligned}$$

En intégrant on obtient,

$$\begin{aligned}
 m(x) &= 2x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \log \left(1 - \frac{x}{n} \right) - n \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) + 2x \right) \\
 &= 2x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(\frac{1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^n + 2x \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^{m(x)} &= e^{2x} \cdot \left(e^{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \right) + 2x \right)} \right)^2 \\ &= e^{2x} \cdot \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \right)^n \cdot e^{2x} \right)^2. \end{aligned}$$

■

Posons $M(x) = e^{m(x)}$.

Théorème 79 Soit $0 < x \leq \frac{1}{2}$, alors $M(x)$ satisfait l'équation différentielle

$$y'' + \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{(y')^2}{y} - \frac{1}{x} y' + 2\pi^2 xy = 0.$$

Preuve. On a

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = m'(x) = 2\pi x \cot(\pi x),$$

d'où

$$\frac{M'(x)}{2\pi x M(x)} = \cot(\pi x).$$

En dérivant par rapport à x , on obtient

$$\frac{2\pi x M''(x) M(x) - 2\pi M'(x) M(x) - 2\pi x (M'(x))^2}{(2\pi x M(x))^2} = -\pi (\cot^2(\pi x) + 1),$$

ainsi

$$\begin{aligned} 2\pi \left(x M''(x) M(x) - M'(x) M(x) - x (M'(x))^2 \right) &= -\pi (2\pi x M(x))^2 (\cot^2(\pi x) + 1) \\ &= -\pi \left[(2\pi x M(x) \cot(\pi x))^2 + (2\pi x M(x))^2 \right] \\ &= -\pi \left[(M'(x))^2 + (2\pi x M(x))^2 \right], \end{aligned}$$

d'où

$$M''(x) + \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{(M'(x))^2}{M(x)} - \frac{1}{x} M'(x) + 2\pi^2 x M(x) = 0.$$

■

Chapitre 3

Mesure de Mahler de certaines courbes hyper-elliptiques

Ce chapitre est composé de deux parties. Dans la première on s'intéresse au travail de Boyd sur la mesure de Mahler de certaines familles des courbes de genre 2. La deuxième partie est consacrée à la mesure de Mahler d'une nouvelle famille des courbes de genre 3.

3.1 Des familles des courbes de genre 2

Dans [9], Boyd s'intéressa à la mesure de Mahler des polynômes

$$P_k(x, y) = y^2 + (x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1)y + x^4, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

$$Q_k(x, y) = (x - 1)^2 y^2 + (x^3 + kx^2 + kx + 1)y + x(x - 1)^2, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

$$R_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + kx(x + 1)y + x(x^2 + x + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

$$S_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + (x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1)y + x^2(x^2 + x + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

définissant des courbes de genre deux. Il a vérifié numériquement que la mesure de Mahler de chacun de ces polynômes est reliée à la série- L d'une courbe elliptique, qui est, une composante du produit, auquel la Jacobienne est isogène.

Motivé par ce travail, on donne ici, une explication du fait que la mesure de Mahler est reliée à la série- L d'une composante du produit et non à celle de l'autre.

Notons qu'une courbe définie par

$$a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0,$$

peut être une courbe (hyper-elliptique) de genre deux si

$$d^\circ(b(x)^2 - 4a(x)b(x)) = 5 \text{ ou } 6$$

et de genre trois si

$$d^\circ(b(x)^2 - 4a(x)b(x)) = 7 \text{ ou } 8.$$

La forme générale d'une courbe hyper-elliptique de genre g sur un corps K est donnée par une équation du type

$$y^2 + h(x)y = f(x)$$

avec $h \in K[x]$ de degré au plus g et $f \in K[x]$ unitaire de degré $2g + 1$. En particulier, une courbe elliptique est aussi hyper-elliptique de genre 1.

Definition 80 Soient E et E' deux courbes d'éléments neutres \mathcal{O} et \mathcal{O}' respectivement. Une isogénie Φ de E dans E' est un morphisme de courbes algébriques tel que $\Phi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$.

3.1.1 La famille $P_k(x, y) = y^2 + (x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1)y + x^4$

Soit Z_k la courbe définie par

$$Z_k = \{P_k(x, y) = 0\}.$$

Posons $P_k(x, y) = 0$, ainsi

$$(2y + x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1)^2 = (x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1)^2 - 4x^4,$$

donc

$$Y^2 = D_k(x),$$

avec

$$Y = \frac{2y + x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1}{x + 1}$$

et

$$D_k(x) = (x^4 + kx^3 + (2k + 2)x^2 + kx + 1)(x^2 + (k - 2)x + 1).$$

D_k est un polynôme de degré 6, alors Z_k définit une courbe de genre 2 (courbe hyper-elliptique) sauf pour les valeurs de k pour lesquelles le discriminant (de $D_k(x) = 0$)

$$\Delta_k = 4096k^3(k + 1)(k - 4)(k - 8)^2,$$

s'annule. Lorsque $k = -1, 0, 4$, et 8 le genre est égal à 0 ou 1. On a

$$\frac{D_k(x)}{D_k(\frac{1}{x})} = \frac{(x^4 + kx^3 + (2k + 2)x^2 + kx + 1)(x^2 + (k - 2)x + 1)}{(\frac{1}{x^4} + k\frac{1}{x^3} + (2k + 2)\frac{1}{x^2} + k\frac{1}{x} + 1)(\frac{1}{x^2} + (k - 2)\frac{1}{x} + 1)} = x^6.$$

C'est-à-dire D_k est un polynôme réciproque, ainsi la Jacobienne est isogène au produit de deux courbes elliptiques E_k, F_k , voir [9], page 72.

En posant

$$x = \frac{X+1}{X-1} \text{ et } Y = \frac{W}{(X-1)^3},$$

on trouve

$$\left(\frac{W}{2}\right)^2 = (k^2+k)X^6 + (-2k^2+5k+4)X^4 + (k^2-5k+8)X^2 - k + 4.$$

En multipliant par $k^2(k+1)^2$ et en posant

$$T = k(k+1)X^2, \quad S = k(k+1)\frac{W}{2},$$

on obtient

$$E_k : S^2 = h(T) = T^3 + (-2k^2+5k+4)T^2 + k(k^2-5k+8)(k+1)T + k^2(k+1)^2(4-k),$$

c'est le premier facteur du produit. Pour trouver le deuxième facteur

$$F_k : \tilde{S}^2 = \tilde{T}^3 + (k^2-5k+8)(k^2+k)\tilde{T}^2 + k^2(-2k^2+5k+4)(k+1)^2(4-k)\tilde{T} + [k^2(k+1)^2(4-k)]^2,$$

on pose

$$S^2 = T^3 h\left(\frac{1}{T}\right),$$

puis

$$\tilde{S} = k^2(k+1)^2(4-k)S,$$

et

$$\tilde{T} = k^2(k+1)^2(4-k)T.$$

Dans [9], Boyd a vérifié numériquement que la mesure de Mahler $m(P_k)$ est reliée à la série L de la courbe elliptique E_k , $L(E_k, 2)$.

Dans le résultat suivant, on montre que la dérivée de la mesure de Mahler par rapport à k ($k \in \mathbb{R}$) de la famille de polynômes (3.1) est reliée à la courbe elliptique E_k .

Proposition 81 Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $\Delta_k \neq 0$, alors on a

Si $k \in]-\infty, -1[\cup]0, 4[\cup]4, 8[\cup]8, +\infty[$,

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2+5k+4)w^2 + (k^2-5k+8)(k^2+k)w + k^2(-k+4)(k+1)^2}} \right).$$

Si $k \in]-1, 0[$,

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\epsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 5k + 4)w^2 + (k^2 - 5k + 8)(k^2 + k)w + k^2(-k + 4)(k + 1)^2}} \right).$$

Preuve. En écrivant

$$P_k(x, y) = a(x)y^2 + b_k(x)y + c(x),$$

avec

$$a(x) = 1, \quad b_k(x) = x^4 + kx^3 + 2kx^2 + kx + 1 \quad \text{et} \quad c(x) = x^4(x^2 + x + 1),$$

on obtient

$$m(P_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \log |y_1| \frac{dx}{x},$$

avec

$$y_1 = \frac{-b_k(x) + \epsilon \sqrt{D_k}}{2a(x)},$$

la racine de $P_k(x, y) = 0$ qui vérifie $|y_1| \geq 1$ pour $|x| = 1$ et $\epsilon = \pm 1$. On a

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{|x|=1} \frac{y'_1}{y_1} \frac{dx}{x} \right).$$

En utilisant le fait que

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{\frac{1}{2a} \left(-b'_k + \epsilon \frac{D'_k}{2\sqrt{D_k}} \right)}{\frac{1}{2a} (-b_k + \epsilon \sqrt{D_k})} = \frac{\epsilon b'_k}{\sqrt{D_k}},$$

on trouve que

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{\epsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{|x|=1} \frac{x(x+1)^2 dx}{x \sqrt{x^8 + 2kx^7 + (k^2 + 4k)x^6 + (4k^2 + 2k)x^5 + (6k^2 - 2)x^4 + (4k^2 + 2k)x^3 + (k^2 + 4k)x^2 + 2kx + 1}} \right).$$

Posons

$$x = \frac{X + 1}{X - 1},$$

donc

$$dx = \frac{-2}{(X - 1)^2} dX,$$

ainsi

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{\epsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma(X)} \frac{2XdX}{\sqrt{k(k+1)X^6 + (-2k^2 + 5k + 4)X^4 + (k^2 - 5k + 8)X^2 + (-k + 4)}} \right).$$

En posant

$$u = X^2,$$

on trouve

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma(u)} \frac{k(k+1)dU}{\sqrt{V}} \right),$$

avec

$$V = [k(k+1)u]^3 + (-2k^2 + 5k + 4)[k(k+1)u]^2 + (k^2 - 5k + 8)(k^2 + k)[k(k+1)u] + k^2(-k+4)(k+1)^2.$$

Soit

$$w = k(k+1)u,$$

alors

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma(w)} \frac{dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 5k + 4)w^2 + (k^2 - 5k + 8)(k^2 + k)w + k^2(-k+4)(k+1)^2}} \right).$$

Déterminons $\gamma(X)$, $\gamma(u)$ et $\gamma(w)$.

On a

$$x = \frac{X+1}{X-1},$$

c'est-à-dire

$$X = \frac{x+1}{x-1},$$

mais

$$\{x \in \mathbb{C} / |x| = 1\} = \{x = e^{it}, t = 0 \dots 2\pi\} = \{(\cos t, \sin t), t = 0 \dots 2\pi\},$$

alors,

$$\begin{aligned} \gamma(X) &= \left\{ X, X = \frac{\cos t + i \sin t + 1}{\cos t + i \sin t - 1}, t \in [0, 2\pi] \right\} = \left\{ \frac{i \sin t}{\cos t - 1}, t \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \left\{ \left(0, \frac{\sin t}{\cos t - 1} \right), t \in [0, 2\pi] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \{u, u = X^2\} = \left\{ \frac{-\sin^2 t}{(\cos t - 1)^2}, t \in [0, 2\pi] \right\} = \left\{ \frac{\cos t + 1}{\cos(t) - 1}, t \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \left\{ -\cot^2 \left(\frac{t}{2} \right), t \in [0, 2\pi] \right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma(w) = \{-k(k+1)\cot^2(t), t \in [0, 2\pi]\}.$$

Ainsi, Si $k \in]-\infty, -1[\cup]0, 4[\cup]4, 8[\cup]8, +\infty[$

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 5k + 4)w^2 + (k^2 - 5k + 8)(k^2 + k)w + k^2(-k+4)(k+1)^2}} \right).$$

Si $k \in]-1, 0[$

$$\frac{dm(P_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\epsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 5k + 4)w^2 + (k^2 - 5k + 8)(k^2 + k)w + k^2(-k + 4)(k + 1)^2}} \right).$$

■

3.1.2 La famille $Q_k(x, y) = (x - 1)^2 y^2 + (x^3 + kx^2 + kx + 1)y + x(x - 1)^2$

Soit Z_k la courbe définie par

$$Z_k = \{Q_k(x, y) = 0\}.$$

Posons

$$Q_k(x, y) = 0,$$

ainsi

$$\left(2(x - 1)^2 y + x^3 + kx^2 + kx + 1\right)^2 = (x^3 + kx^2 + kx + 1)^2 - 4x(x - 1)^4,$$

donc

$$Y^2 = D_k(x),$$

avec

$$Y = 2(x - 1)^2 y + x^3 + kx^2 + kx + 1$$

et

$$D_k(x) = x^6 + (2k - 4)x^5 + (k^2 + 2k + 16)x^4 + (2k^2 - 22)x^3 + (k^2 + 2k + 16)x^2 + (2k - 4)x + 1.$$

Comme D_k est un polynôme de degré 6, alors Z_k définit une courbe de genre 2 (courbe hyper-elliptique) sauf pour les valeurs de k pour lesquelles le discriminant de $D_k(x) = 0$

$$\Delta_k = -65536(k - \alpha)^2 (k - \bar{\alpha})^2 (k + 1)^8, \quad \alpha = \frac{11}{2} + \frac{7\sqrt{7}}{2}i,$$

s'annule. Lorsque $k = -1$ le genre est égal à 0.

On a

$$\begin{aligned} \frac{D_k(x)}{D_k\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{x^6 + (2k - 4)x^5 + (k^2 + 2k + 16)x^4 + (2k^2 - 22)x^3 + (k^2 + 2k + 16)x^2 + (2k - 4)x + 1}{\frac{1}{x^6} + (2k - 4)\frac{1}{x^5} + (k^2 + 2k + 16)\frac{1}{x^4} + (2k^2 - 22)\frac{1}{x^3} + (k^2 + 2k + 16)\frac{1}{x^2} + (2k - 4)\frac{1}{x} + 1} \\ &= x^6. \end{aligned}$$

C'est-à-dire D_k est un polynôme réciproque, ainsi la Jacobienne est isogène au produit de deux courbes elliptiques E_k, F_k voir [9], page 70. En posant

$$x = \frac{X + 1}{X - 1} \text{ et } Y = \frac{W}{(X - 1)^3},$$

on trouve

$$\left(\frac{W}{2}\right)^2 = (k+1)^2 X^6 - 2(k-3)(k+1)X^4 + (k-7)(k+1)X^2 + 16.$$

En multipliant par $(k+1)^4$ et en posant

$$T = (k+1)^2 X^2 \text{ et } S = \frac{(k+1)^2}{2} W,$$

on trouve le premier facteur du produit

$$E_k : S^2 = h(T) = T^3 + 2(k+3)(k-1)T^2 + (k-7)(k+1)^3 T + 16(k+1)^4,$$

pour trouver le second facteur

$$F_k : \tilde{S}^2 = \tilde{T}^3 + (k-7)(k+1)^3 \tilde{T}^2 + 32(k+3)(k-1)(k+1)^4 \tilde{T} + [16(k+1)^4]^2,$$

on pose

$$S^2 = T^3 h\left(\frac{1}{T}\right),$$

puis

$$\tilde{S} = 16(k+1)^4 S$$

et

$$\tilde{T} = 16(k+1)^4 T.$$

Dans [9], Boyd a vérifié numériquement que la mesure de Mahler $m(Q_k)$ est reliée à la série L de la courbe elliptique E_k , $L(E_k, 2)$.

Dans le résultat suivant, on montre que la dérivée de la mesure de Mahler par rapport à k ($k \in \mathbb{R}$) de la famille de polynômes (3.2) est reliée à la courbe elliptique E_k .

Proposition 82 *Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $\Delta_k \neq 0$, alors si $k \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, on a*

$$\frac{dm(Q_k)}{dk} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon dw}{\sqrt{w^3 - 2(k-3)(k+1)w^2 + (k-7)(k+1)^3 w + 16(k+1)^4}} \right).$$

Preuve. On suit les mêmes étapes que dans la proposition 80. Les changements utilisés sont :

$$x = \frac{X+1}{X-1}, \quad u = X^2 \text{ et } w = (k+1)^2 u.$$

Les chemins $\gamma(X)$, $\gamma(u)$ sont les mêmes que dans la proposition 80 et $\gamma(w)$ est donné par

$$\gamma(w) = \left\{ -(k+1)^2 \cot^2(t), t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

■

3.1.3 La famille $R_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + kx(x + 1)y + x(x^2 + x + 1)$

Soit Z_k la courbe définie par

$$Z_k = \{R_k(x, y) = 0\}.$$

Posons

$$R_k(x, y) = 0,$$

ainsi

$$[2(x^2 + x + 1)y + kx(x + 1)]^2 = k^2x^2(x + 1)^2 - 4x(x^2 + x + 1)^2,$$

donc

$$Y^2 = D_k(x),$$

avec

$$Y = 2(x^2 + x + 1)y + kx(x + 1)$$

et

$$D_k(x) = -4x^5 + (k^2 - 8)x^4 + (2k^2 - 12)x^3 + (k^2 - 8)x^2 - 4x.$$

Comme D_k est un polynôme de degré 5, alors Z_k définit une courbe de genre 2 (courbe hyper-elliptique) sauf pour les valeurs de k pour lesquelles le discriminant de $D_k(x) = 0$

$$\Delta_k = -256k^4(k - 3)(k + 3)(k + 4i)^2(k - 4i)^2,$$

s'annule. Lorsque $k = -3, 0$, ou 3 le genre est égal à 0 ou 1.

On a

$$\frac{D_k(x)}{D_k(\frac{1}{x})} = \frac{x(-4x^4 + (k^2 - 8)x^3 + (2k^2 - 12)x^2 + (k^2 - 8)x - 4)}{\frac{1}{x}(-4\frac{1}{x^4} + (k^2 - 8)\frac{1}{x^3} + (2k^2 - 12)\frac{1}{x^2} + (k^2 - 8)\frac{1}{x} - 4)} = x^6.$$

C'est-à-dire D_k est un polynôme réciproque, ainsi la Jacobienne est isogène au produit de deux courbes elliptiques E_k, F_k , voir [9], page 68.

En posant

$$x = \frac{X + 1}{X - 1} \text{ et } Y = \frac{W}{(X - 1)^3},$$

on trouve

$$\left(\frac{W}{2}\right)^2 = (k^2 - 9)X^6 + (3 - 2k^2)X^4 + (k^2 + 5)X^2 + 1.$$

Soit $V = X^2$, alors

$$\left(\frac{W}{2}\right)^2 = (k^2 - 9)V^3 + (3 - 2k^2)V^2 + (k^2 + 5)V + 1.$$

Multiplions par $(k^2 - 9)^2$ et en posant

$$T = (k^2 - 9) V \text{ et } S = (k^2 - 9) \frac{W}{2},$$

on obtient le premier facteur du produit

$$S^2 = h(T) = T^3 + (3 - 2k^2) T^2 + (k^2 + 5) (k^2 - 9) T + (k^2 - 9)^2.$$

Pour trouver le deuxième facteur

$$F_k : \tilde{S}^2 = \tilde{T}^3 + (k^2 + 5) (k^2 - 9) \tilde{T}^2 + (3 - 2k^2) (k^2 - 9)^2 \tilde{T} + (k^2 - 9)^4,$$

on pose

$$S^2 = T^3 h\left(\frac{1}{T}\right),$$

puis

$$\tilde{S} = (k^2 - 9)^2 S$$

et

$$\tilde{T} = (k^2 - 9)^2 T.$$

Dans [9], Boyd a vérifié numériquement que la mesure de Mahler $m(R_k)$ est reliée à la série L de la courbe elliptique E_k , $L(E_k, 2)$.

Dans le résultat suivant on montre que la dérivée de la mesure de Mahler par rapport à k ($k \in \mathbb{R}$) de la famille de polynômes (3.3) est reliée à la courbe elliptique E_k .

Proposition 83 Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $\Delta_k \neq 0$, alors on a

$$\frac{dm(R_k)}{dk} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dw}{\sqrt{w^3 + (3-2k^2)w^2 + (k^2+5)(k^2-9)w + (k^2-9)^2}} \right), & k \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[\\ \frac{\varepsilon}{2\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dw}{\sqrt{w^3 + (3-2k^2)w^2 + (k^2+5)(k^2-9)w + (k^2-9)^2}} \right), & k \in]-3, 0[\cup]0, 3[. \end{cases}$$

Preuve. On suit les mêmes étapes que dans la proposition 80, en utilisant les changements suivants :

$$x = \frac{X+1}{X-1}, u = X^2 \text{ et } w = (k^2 - 9) u.$$

Les chemins $\gamma(X)$ et $\gamma(u)$ sont les mêmes que dans la proposition 80 et

$$\gamma(w) = \left\{ -(k^2 - 9) \cot^2 \left(\frac{t}{2} \right), t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

■

3.1.4 La famille $S_k(x, y) = (x^2 + x + 1)y^2 + (x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1)y + x^2(x^2 + x + 1)$

Soit Z_k la courbe définie par

$$Z_k = \{S_k(x, y) = 0\}.$$

Posons

$$S_k(x, y) = 0,$$

ainsi

$$\begin{aligned} ((2x^2 + x + 1)y + x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1)^2 &= (x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1)^2 \\ &\quad - 4x^2(x^2 + x + 1)^2, \end{aligned}$$

donc

$$Y^2 = D_k(x),$$

avec

$$Y = \frac{(2x^2 + x + 1)y + x^4 + kx^3 + (2k - 4)x^2 + kx + 1}{x + 1}$$

et

$$D_k(x) = (x^4 + (k + 2)x^3 + (2k - 2)x^2 + (k + 2)x + 1)(x^2 + (k - 4)x + 1).$$

Comme D_k est un polynôme de degré 6, alors Z_k définit une courbe de genre 2 (courbe hyper-elliptique) sauf pour les valeurs de k pour lesquelles le discriminant de $D_k(x) = 0$,

$$\Delta_k = -4096(k + 1)(k - 2)(k - 5)^4(k - 6)(k - \alpha)^2(k - \bar{\alpha})^2, \quad \alpha = 2 + 4i,$$

s'annule. Lorsque $k = -1, 2, 5$ ou 6 le genre est égal à 0 ou 1. On a

$$\frac{D_k(x)}{D_k(\frac{1}{x})} = \frac{(x^4 + (k + 2)x^3 + (2k - 2)x^2 + (k + 2)x + 1)(x^2 + (k - 4)x + 1)}{(\frac{1}{x^4} + (k + 2)\frac{1}{x^3} + (2k - 2)\frac{1}{x^2} + (k + 2)\frac{1}{x} + 1)(\frac{1}{x^2} + (k - 4)\frac{1}{x} + 1)} = x^6.$$

C'est-à-dire D_k est un polynôme réciproque, ainsi la Jacobienne est isogène au produit de deux courbes elliptiques E_k, F_k , voir [9], page 70.

En posant

$$x = \frac{X + 1}{X - 1} \text{ et } Y = \frac{W}{(X - 1)^3},$$

on trouve

$$\left(\frac{W}{2}\right)^2 = (k - 2)(k + 1)X^6 + (-2k^2 + 11k - 2)X^4 + (k^2 - 11k + 26)X^2 + k - 6.$$

Multiplions par $[(k-2)(k+1)]^2$ et en posant

$$S = (k-2)(k+1) \frac{W}{2} \text{ et } T = (k-2)(k+1) X^2,$$

on obtient le premier facteur du produit

$$E_k : S^2 = h(T) = T^3 + (-2k^2 + 11k - 2)T^2 + (k^2 - 11k + 26)(k-2)(k+1)T + (k-6)(k-2)^2(k+1)^2.$$

Le second facteur est

$$F_k : \tilde{S}^2 = \tilde{T}^3 + (k^2 - 11k + 26)(k-2)(k+1)\tilde{T}^2 + (-2k^2 + 11k - 2)(k-6)(k+1)^2(k-2)^2\tilde{T} + [(k-6)(k-2)^2(k+1)^2]^2,$$

on le trouve, en posant

$$S^2 = T^3 h\left(\frac{1}{T}\right),$$

puis

$$\tilde{S} = (k-6)(k-2)^2(k+1)^2 S$$

et

$$\tilde{T} = (k-6)(k-2)^2(k+1)^2 T.$$

Dans [9], Boyd a vérifié numériquement que la mesure de Mahler $m(S_k)$ est reliée à la série L de la courbe elliptique E_k , $L(E_k, 2)$.

Dans la suite on montre que la dérivée de la mesure de Mahler par rapport à k ($k \in \mathbb{R}$) de la famille de polynômes (3.4) est reliée à la courbe elliptique E_k .

Proposition 84 *Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $\Delta_k \neq 0$, alors*

$$Si \ k \in]-\infty, -1[\cup]2, 5[\cup]5, 6[\cup]6, +\infty[.$$

$$\frac{dm(S_k)}{dk} = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 11k - 2)w^2 + (k^2 - 11k + 26)(k^2 - k - 2)w + (k-6)(k+1)^2(k-2)^2}} \right).$$

$$Si \ k \in]-1, 2[$$

$$\frac{dm(S_k)}{dk} = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon dw}{\sqrt{w^3 + (-2k^2 + 11k - 2)w^2 + (k^2 - 11k + 26)(k^2 - k - 2)w + (k-6)(k+1)^2(k-2)^2}} \right).$$

Preuve. On suit les mêmes étapes que dans la proposition 80, et en utilisant les changements

$$x = \frac{X+1}{X-1}, \quad u = X^2 \text{ et } w = (k+1)(k-2)u.$$

Les chemins $\gamma(X)$ et $\gamma(u)$ sont les mêmes que dans la proposition 80 et

$$\gamma(w) = \left\{ -(k+1)(k-2) \cot^2(t), t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

■

3.2 Une famille des courbes de genre trois

Comme dans le chapitre 2, on s'intéresse à la vérification de la conjecture de Boyd sur la famille de courbes de genre 3 donnée par

$$P_k(x, y) = (x^3 + x)y^2 + (x^4 + kx^2 + 1)y + x^3 + x. \quad (3.5)$$

3.2.1 Une forme de Weierstrass et la série L

Lemme 85 *la famille des courbes (3.5) se ramène à la famille des courbes*

$$Y^2 + 2(k-2)XY + 8(-k^2 + 5k - 6)Y = X^3 - 4(2k-5)X^2 - 6(-k^2 + 5k - 6)X, \quad (3.6)$$

avec le changement de variables

$$\begin{cases} X = 2(y + x^2 + (k-2)x + 2k - 5) \\ Y = 4x(y + x^2 + (k-2)x + 2k - 5) = 2xX. \end{cases}$$

Preuve. On peut écrire l'équation

$$(x^3 + x)y^2 + (x^4 + kx^2 + 1)y + x^3 + x = 0,$$

sous la forme

$$\begin{aligned} y_1^2 &= (x^4 + kx^2 + 1)^2 - 4(x^3 + x)^2 \\ &= x^8 + (2k-4)x^6 + (k^2 - 6)x^4 + (2k-4)x^2 + 1, \end{aligned}$$

avec

$$y_1 = 2y(x^3 + x) + x^4 + kx^2 + 1.$$

Ainsi la famille des courbes

$$\{P_k(x, y) = 0\},$$

est une famille de genre 3. Posons

$$X_1 = x^2,$$

nous obtenons

$$y_1^2 = X_1^4 + (2k-4)X_1^3 + (k^2 - 6)X_1^2 + (2k-4)X_1 + 1.$$

Pour obtenir une forme de Weierstrass, nous appliquons la proposition 42. ■

Remarque 86 *Le changement*

$$\begin{cases} X = 2(y + x^2 + (k - 2)x + 2k - 5) \\ Y = 4x(y + x^2 + (k - 2)x + 2k - 5) = 2xX, \end{cases}$$

ne définit pas un isomorphisme.

Le discriminant de la famille des courbes (3.5) est

$$\Delta_k = 16777216(k + 6)^2(k - 3)^4(k - 2)^6.$$

Pour $k = -6, 2$ et 3 la courbe est singulière (non elliptique). En utilisant la forme de Weierstrass (3.6) et les commandes de **Pari** `ellinit`, `ellminimalmodel` et `ellseries` on obtient le tableau suivant

k	Courbe	N_k	b_{E_k}
-20	[0, 1, 0, -3113, 65824]	7084	143.4029932645
-19	[1, 0, 1, -2516, 48350]	6006	140.8960535649
-18	[0, 0, 0, -2007, 34606]	1260	34.5619319317
-17	[1, 0, 1, -1579, 24006]	2090	33.8601538887
-16	[0, 1, 0, -1221, 16020]	1140	33.1134422049
-15	[1, -1, 0, -927, 11097]	306	5.3859004387
-14	[1, 0, 0, -43, 105]	34	0.8738360127
-13	[1, 0, 1, -498, 4228]	210	5.0885775988
-12	[0, 0, 0, -348, 2497]	1260	29.5224410433
-11	[1, 0, 1, -234, 1352]	910	14.2067400866
-10	[0, 1, 0, -148, 644]	156	4.5299964270
-9	[1, -1, 0, -87, 333]	198	4.2975286751
-8	[0, 1, 0, -45, 100]	220	4.0280474950
-7	[1, 0, 1, -19, 26]	30	0.6168709388
-6	courbe singulière	.	.
-5	[1, 0, 1, 4, -6]	14	0.2274812230
-4	[0, 1, 0, 7, 0]	84	2.3321462600
-3	[1, -1, 0, 6, 0]	90	1.9608372489
-2	[0, 1, 0, 4, 4]	20	0.3995671398
-1	[1, 0, 1, 1, 2]	30	0.6168709388
0	[0, 0, 0, 0, 1]	36	0.8571890749
1	[1, 0, 1, -1, 0]	14	0.2274812230
2	courbe singulière	.	.
3	courbe singulière	.	.

4	[0, 1, 0, -1, 0]	20	0.3995671398
5	[1, 0, 1, -6, 4]	66	1.4959113402
6	[0, 0, 0, -15, 22]	36	0.8571890749
7	[1, 0, 1, -33, 68]	130	1.8894000730
8	[0, 1, 0, -61, 164]	420	12.2172802996
9	[1, -1, 0, -105, 441]	630	12.9781231106
10	[1, 0, 1, -11, 12]	14	0.2274812230
11	[1, 0, 1, -256, 1550]	102	2.3748769047
12	[0, 0, 0, -372, 2761]	180	4.9310144853
13	[1, 0, 1, -524, 4566]	2090	30.5804519041
14	[0, 1, 0, -716, 7140]	660	15.7483327919
15	[1, -1, 0, -957, 11637]	1638	32.3463475407
16	[0, 1, 0, -1253, 16660]	4004	82.8466721920
17	[1, 0, 1, -1613, 24788]	4830	118.5835079607
18	[1, -1, 1, -128, 587]	90	2.8816140008
19	[1, 0, 1, -2554, 49452]	170	2.9365623927
20	[0, 1, 0, -3153, 67104]	2652	71.7266338575

où N_k est le conducteur, $b_{E_k} = \frac{N_k}{4\pi^2} L(E_k, 2)$, $L(E_k, 2)$ est la série L associée à la courbe.

3.2.2 Évaluation de la mesure de Mahler

On a

$$\begin{aligned} P_k(x, y) &= (x^3 + x)y^2 + (x^4 + kx^2 + 1)y + x^3 + x \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x}\right) y^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + k\right) y + x + \frac{1}{x} \right\}, \end{aligned}$$

pour $x = e^{it}$,

$$p_k(t, y) = e^{2it} \{ 2 \cos t y^2 + (2 \cos(2t) + k) y + 2 \cos t \}.$$

D'où

$$\begin{aligned} |p_k(t, y)| &= |2 \cos(t) y^2 + (2 \cos(2t) + k) y + 2 \cos(t)| \\ &= |2 \cos t (y - y_1(t))(y - y_2(t))|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{-(2 \cos(2t) + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos(t)}, \\ y_2(t) = \frac{-(2 \cos(2t) + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos(t)} \end{cases}$$

et

$$\Delta_k = (2 \cos(2t) + k)^2 - 16 \cos^2(t).$$

Donc

$$m(P_k) = m(2 \cos t) + m((y - y_1(t))(y - y_2(t))).$$

Par la formule de Jensen,

$$\begin{aligned} m(P_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(\max(1, |y_1(t)|)) + \log(\max(1, |y_2(t)|)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log(\max(1, |y_1(t)|)) + \log(\max(1, |y_2(t)|)) dt. \end{aligned}$$

A l'aide de **Mathematica** on obtient le tableau suivant :

k	$m(P_k)$	k	$m(P_k)$
-20	2.9875623597	0	0.4285945375
-19	2.9353344493	1	0.2274812230
-18	2.8801609943	2	0
-17	2.8216794907	3	0.6461318944
-16	2.7594535171	4	1.1987014194
-15	2.6929502194	5	1.4959113402
-14	2.6215080380	6	1.7143781499
-13	2.5442887994	7	1.8894000730
-12	2.4602034203	8	2.0362133833
-11	2.3677900144	9	2.1630205184
-10	2.2649982135	10	2.2748122301
-9	2.1487643375	11	2.3748769047
-8	2.0140237475	12	2.4655072426
-7	1.8506128164	13	2.5483709920
-6	1.6153297361	14	2.6247221320
-5	1.3648873381	15	2.6955289617
-4	1.1660731300	16	2.7615557397
-3	0.9804186244	17	2.8234168562
-2	0.7991342796	18	2.8816140008
-1	0.6168709388	19	2.9365623927
		20	2.9886097441

3.2.3 Comparaison entre la mesure de Mahler et la série L

On a

k	$r_k = \frac{m(P_k)}{b_{E_k}}$	k	$r_k = \frac{m(P_k)}{b_{E_k}}$
-20	$\frac{1}{48}$	0	$\frac{1}{2}$
-19	$\frac{1}{48}$	1	1
-18	$\frac{1}{12}$	2	.
-17	$\frac{1}{12}$	3	.
-16	$\frac{1}{12}$	4	3
-15	$\frac{1}{2}$	5	1
-14	3	6	2
-13	$\frac{1}{2}$	7	1
-12	$\frac{1}{12}$	8	$\frac{1}{6}$
-11	$\frac{1}{6}$	9	$\frac{1}{6}$
-10	$\frac{1}{2}$	10	10
-9	$\frac{1}{2}$	11	1
-8	$\frac{1}{2}$	12	$\frac{1}{2}$
-7	3	13	$\frac{1}{12}$
-6	.	14	$\frac{1}{6}$
-5	6	15	$\frac{1}{12}$
-4	$\frac{1}{2}$	16	$\frac{1}{30}$
-3	$\frac{1}{2}$	17	$\frac{1}{42}$
-2	2	18	1
-1	1	19	1
		20	$\frac{1}{24}$

Remarque 87 Dans la vérification expérimentale, k est un entier relatif. La conjecture de Boyd sera vérifiée pour tout $k \in \{-20, -7\} \cup \{-5, 1\} \cup \{3, 20\}$.

3.2.4 Formules explicites de la mesure de Mahler

Dans le résultat suivant on donne des formules explicites pour la mesure de Mahler.

Proposition 88 Soient $k \in \mathbb{R}$, $m_k = m(P_k)$ et

$$\alpha_k = \arccos \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-k}}{2} \right), \quad -6 \leq k \leq 3.$$

Alors

Si $k \leq -6$, on a

$$m_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| - (2 \cos (2t) + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \log 2.$$

Si $-6 < k < 2$, on a

$$m_k = \frac{2}{\pi} \left(\int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| - (2 \cos (2t) + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log (4 \cos t) dt \right).$$

Si $k \geq 3$, on a

$$m_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| 2 \cos (2t) + k + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \log 2.$$

Preuve. On pose

$$Q_k(t, y) = 2 \cos (t) y^2 + (2 \cos 2t + k) y + 2 \cos t.$$

On a

$$m(P_k) = m(Q_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(\max(1, |y_1(t)|)) + \log(\max(1, |y_2(t)|)) dt,$$

avec

$$y_1(t) = \frac{-(2 \cos (2t) + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos t}, \quad y_2(t) = \frac{-(2 \cos (2t) + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos t}$$

et

$$\Delta_k = (2 \cos (2t) + k)^2 - 16 \cos^2 (t).$$

Q_k est à coefficients réels et $y_1 y_2 = 1$ donc si $\Delta_k \leq 0$, y_1 et y_2 sont conjugués ou égaux et on a $|y_1| = |y_2| = 1$ et si $\Delta_k > 0$, on a

$$\max(|y_1|, |y_2|) > 1.$$

Or, si $k \leq -6$, $\Delta_k > 0$, $\forall t \in [0, \pi]$ et on a

$$|y_1| < 1 < |y_2|,$$

alors

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log |y_2| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos (2t) + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos t} \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| - (2 \cos (2t) + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \log 2. \end{aligned}$$

Si $-6 < k < 2$, on a $\Delta_k > 0, \forall t \in [\alpha_k, \pi - \alpha_k]$ et

$$|y_2| > 1 > |y_1|,$$

donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log |y_2| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \alpha_k} \log |y_2| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos(2t) + k) + \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos(t)} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log \left| -(2 \cos(2t) + k) + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\frac{\pi}{2}} \log(4 \cos t) dt. \end{aligned}$$

Si $k \geq 3$, $\Delta_k > 0, \forall t \in [0, \pi]$, et on a

$$|y_1| > 1 > |y_2|,$$

donc

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |y_1| dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log |y_1| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| \frac{-(2 \cos(2t) + k) - \sqrt{\Delta_k}}{4 \cos(t)} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left| 2 \cos(2t) + k + \sqrt{\Delta_k} \right| dt - \log 2. \end{aligned}$$

■

Proposition 89 On a

$$m((x^3 + x)y^2 + (x^4 + 2x^2 + 1)y + x^3 + x) = 0.$$

Preuve. On a pour $k = 2$

$$P_2(x, y) = (x^3 + x)y^2 + (x^4 + 2x^2 + 1)y + x^3 + x,$$

alors

$$\begin{aligned} m(P_2(x, y)) &= m\left((x^3 + x)y^2 + (x^2 + 1)^2 y + x^3 + x\right) \\ &= m\left[(x^2 + 1)(y + x)(yx + 1)\right] \\ &= m(x^2 + 1) + m(y + x) + m(yx + 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Bibliographie

- [1] A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions of curves. Funktsional. Anal. i Prilozhen., **14(2)** : (1980) 46–47.
- [2] A. Beilinson, Higher regulators of modular curves, Application of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, part I, II, Contemp. Math., **55**, (1986), 1-34.
- [3] L. Benferhat, variations sur la mesure de Mahler de polynômes de deux variables, Thèse de doctorat, USTHB Alger, 2011.
- [4] M. J. Bertin, Mesure de Mahler d’une famille de polynômes, J. reine angew. Math., **569** (2004) : 175–188 .
- [5] M. J. Bertin, Mesure de Mahler et régulateur elliptique : Preuve de deux relations exotiques. CRM Proc. Lecture Notes, **36**, (2004) : 1–12 .
- [6] S. Boughzala, Mesure de Mahler de polynômes de deux variables, Thèse de Doctorat de l’Université Paris VI, (Décembre 2000).
- [7] D. W. Boyd, Kronecker’s Theorem and Lehmer’s Problem for Polynomials in several Variables, J. Number Theory, **13** (1981), 116-121.
- [8] D. W. Boyd, Speculations concerning the Range of Mahler’s Measure, Canad. Math. Bull., **24** (1981), 453-469.
- [9] D. W. Boyd, Mahler’s Measure and Special Values of L-functions. Experimental Mathematics, **7**, 1998.
- [10] J. W. S. Cassels, Lectures on elliptic curves, volume 24 de London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [11] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d’intégrales. In Automorphic forms, representations and L-functions (Corvallis, OR, 1977) éditer par A. Borel and W. Casselman, volume **33**, pages 313–346. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.
- [12] C. Deninger, Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain \mathbb{Z}^n -actions, J. Amer. Math. Soc., **10(2)** (1997), 259-281.

-
- [13] V. Flammang, Inégalités sur la mesure de Mahler d'un polynôme, *Journal théorie des nombres de Bordeaux*, **9** (1997), 69-74.
- [14] M. Khalfaoui, Variations sur la mesure de Mahler de certaines familles de polynômes de deux variables. Mémoire de magistère, Université de Jijel, 2013
- [15] N. Kurokawa, A q -Mahler measure, *Proc. Japan Acad.*, **80**, Ser. A, 2004, 70-73.
- [16] N. Kurokawa, M. Lalin and H. Ochiai, Higher Mahler measure and zeta functions, *Acta Arith.*, **135(3)** (2008), 269-297.
- [17] M. N. Lalin, M. D. Rogers, Functional equations for Mahler measures of genus-one curves, *Algebra Number Theory*, **1(1)**, (2007), 87-117.
- [18] M. Lalin and K. Sinha, Higher Mahler measure for cyclotomic polynomials and Lehmer's question, *Ramanujan J.*, **26**, (2011), 257-294.
- [19] D. H. Lehmer, Factorization of certain cyclotomic functions, *Ann. of Math.*, **34(2)**, (1933), 461-479.
- [20] K. Mahler, On some inequalities for polynomials in several variables, *J. London Math. Soc.*, **37**, (1962), 341-344, .
- [21] H. Oyanagi, Differential equations for Mahler measures, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **18(2)**, (2003), 181-194.
- [22] A. Schinzel, On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, *Acta Arith.*, **24** (1973), 385-399.
- [23] A. J. School, Height pairings and special values of L-functions, In *Motives* (Seattle, WA, 1991) éditer par U. Jannsen et Al., volume 55, pages 571-598. *Proc.*
- [24] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 106, DOI 10.1007/978-0-387-09494-6. Springer, 2009.
- [25] C. J. Smyth, On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, *Bull. London Math. Soc.*, **3**, (1971), 169-175.
- [26] N. Touafek, *Mesure de Mahler et régulateur elliptique : Quelques nouvelles relations exotiques*, Thèse de doctorat, Université de Constantine, 2008.
- [27] F. R. Villegas, *Modular Mahler measures I. Topics in Number Theory* (University Park, PA 1997), 467 : 17-48, *Math. Appl.*, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1999.
- [28] F. R. Villegas, *Identities between Mahler measures. Number theory for the millennium, III*(Urbana, IL, 2000) : 223-229. A K Peters, Natick, MA, 2002.

Résumé

Ce mémoire est consacré à la mesure de Mahler de polynômes non réciproques définissant des courbes (hyper-elliptiques) de genre 1, 2 et 3.

Dans le premier chapitre, on rappelle certains résultats sur la mesure de Mahler de certains polynômes à une indéterminée.

Dans le deuxième chapitre, après des brefs rappels sur les courbes elliptiques, le dilogarithme de Bloch et Wigner et la fonction régulateur, on donne une des premières formules explicites sur la mesure de Mahler en deux dimensions. Puis, on introduit deux nouvelles familles de polynômes à deux variables non réciproques définissant des courbes de genre un, sur lesquelles on teste la conjecture de Boyd. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous donnons des équations différentielles satisfaites par un polynôme de deux variables.

Enfin, dans le troisième chapitre, on donne une explication de certains résultats numériques de Boyd sur des familles de courbes de genre 2, puis on teste à nouveau la conjecture de Boyd sur une nouvelle famille de polynômes non réciproques définissant des courbes de genre 3.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بقياس ماهر لكثيرات حدود غير عكسية تعرف منحنيات (فوق ناقصية) من النوع 1، 2 و 3.

في الفصل الأول، نذكر ببعض النتائج حول قياس ماهر لكثيرات حدود وحيدة المتغير.

في الفصل الثاني، بعد تذكير مختصر حول المنحنيات الناقصية، ثنائي اللوغاريتم لبلوك وفيقنر والدالة المنظمة، نعطي واحدة من العبارات الصريحة الأولى حول قياس ماهر بمتغيرين. ثم نجرب محققة بويد على عائلتين جديدتين لكثيرات حدود بمتغيرين تعرفان منحنيات من النوع 1. في الجزء الأخير من هذا الفصل نعطي بعض المعادلات التفاضلية التي يحققها قياس ماهر لكثير حدود بمتغيرين.

أخيرا في الفصل الثالث، نعطي تفسيراً لنتائج عديدة لبويد حول عائلات لمنحنيات من النوع 2، ثم في نهاية هذا الفصل، نجرب محققة بويد على عائلة جديدة من المنحنيات من النوع 3.