REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse et Applications

Thème

Etude d'une inclusion différentielle gouvernée par un cône normal

Présenté par :

Karima Atrih

Devant le Jury :

Président :	M. Yarou	Prof	Univ. Jijel
Encadreur :	I. Boutana	M.A.A	Univ. Jijel
Examinateur :	F. Slamnia	M.A.A	Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

Remerciements

*D'abord, je tiens à remercier mon **Dieu** qui m'a donnée la volonté et la santé pour finir ce mémoire.*

Je tiens à remercier vivement et chaleureusement ma chère famille pour son soutien, sa patience, ses encouragement et tout ce qu'elle a fait pour moi tout au long de cette période.

*Je remercie chaleureusement mon encadreur **Madame I. Boutana**, pour avoir assumé la responsabilité de m' encadrer, m'orienter et de me conseiller tout au long de la réalisation de ce travail, Je la remercie très sincèrement pour sa compétence. Ses remarquables conseils divers et riches, qui m'a été d'une grande utilité pour mener à bien ce travail.*

*Je tiens à formuler mes remerciements les plus sincères à **Monsieur M. Yarou**, professeur à l'université de Jijel pour avoir accepter la présidence du jury de ce mémoire et pour l'honneur qu'il m'a fait par son présence ainsi que **Madame F. Slamnia**, maitre assistant à l'université de Jijel pour avoir accepter d'être membre du jury, examiner et corriger mon mémoire et je les remercie aussi pour l'intérêt qu'ils sont porter à mon travail.*

Un grand merci à tous les enseignants du département de Mathématiques qui m'ont enseigné tout au long de ces années.

A Tous, un grand Merci

Karima

Table des matières

Introduction

La modélisation mathématique a apporté d'importantes contributions aux différentes sciences et disciplines. Un problème donné que ce soit en physique, chimie, médecine, économie ou même en socciologie ne peut échapper à la formulation mathématique via ce que l'on appelle équations différentielles. Cependant, à travers l'évolution, ces dernières ne suffisent plus à résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Un aspect plus généralisé des équations différentielles a donc apparu : il s'agit des inclusions différentielles dont le second membre est un ensemble, plus précisément une multi-application. C'est à dire, on a introduit une multi-application pour pouvoir contourner cette difficulté.

Plu tard, dans les années 70, J. J. Moreau donne naissance à un nouveau type d'inclusions différentielles où le second membre cette fois est un cône normal, qu'on appela **processus de la rafle**. Nous avons été conduit à ce type de problèmes par la théorie des systèmes mécaniques élasto-plastiques (voir [13]).

Moreau a donné le premier résultat d'existence pour les problèmes dévolutions dans le cas lipschitzien. Ensuite, d'après les travaux préliminaires de H. Tanaka (voir [18]) et C. Castaing (voir [6]), M. D. P. Monteiro Marques (voir [12]) a résolu le problème lorsque la multi-application est semicontinue inférieurement (s. c. i) à droite et contient une boule.

Le sujet principale de ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un processus de la rafle dans un espace de Hilbert H, de la forme suivante

$$(P_N)\begin{cases} u(0) \in C(0), & \\ u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T], \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t),\, C(t)\big), & \text{p.p. } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Où $N\big(u(t),\, C(t)\big)$ est le cône normal à $C(t)$ au point $u(t)$.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Dans le chapitre 1, nous énonçons tous les résultats et définitions dont nous avons eu besoin, c'est à dire, des rappels d'analyse fonctionnelle et des multi-applications ...

Dans le chapitre 2, nous présentons dans la première partie quelques dérivées directionnelles pour ensuite donner quelques propriétés et résultats classiques sur la différentiabilité et la sous-différentiabilité. Dans la deuxième partie nous donnons les définitions du cône normal propriétés et résultats que nous avons utilisé dans le chapitre 3, enfin nous étudions d'autres types des cônes normaux et donnons un résultat qui met en évidence la relation entre les différents types de cônes normaux.

Le chapitre 3 comporte deux sections : Dans la première section, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un cône normal dans un espace de Hilbert séparable H de la forme (P_N) dans le cas ou C est une multi-application définie de $[0, T]$ dans H , T et k sont des réels positifs, C est lipschitzienne de rapport $\leq k$ à valeurs convexes fermées. Dans la deuxième section, en utilisant les résultats obtenus dans la première section pour démontrer une relation entre deux solutions de deux inclusions différentielles. Enfin, on donne un exemple où nous démontrons qu'une fonction u est la solution d'une inclusion différentielle (P_N).

Notations

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{R}^n$	L'ensemble des vecteurs de dimension n, à coordonnées réelles.
$\mathbb{R}_+$	L'ensemble des nombres réels positive $= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$[0, T]$	Un intervalle de $\mathbb{R}$.
$B\big(0, r\big)$	La boule ouverte de centre 0 et de rayon r.
$\overline{B}\big(0, r\big)$	La boule fermée de centre 0 et de rayon r.
$S(0, r)$	Le sphère de centre 0 et de rayon r.
E	Un espace topologique.
E'	Le dual topologique de E.
$\sigma(E, E')$	La topologie faible définie sur E.
$\sigma(E', E)$	La topologie faible* définie sur E'.
H	Un espace de Hilbert muni de la norme $\Vert . \Vert$ et du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
$\overline{A}$	L'adhérence de A.
int(A)	L'intérieure de l'ensemble A.
$\mathcal{V}(a)$	L'ensemble des voisinages de point a.
$Fr(A)$	La frontière de l'ensemble A.
C_X^A	Le complémentaire de l'ensemble A dans X.
$\mathcal{P}(X)$	L'ensemble de tous les sous ensembles de X.
$D(f)$	Le domaine effectif de la fonction f.
$dom(F)$	Le domaine effectif de la multi-application F.
$Im(F)$	L'image de la multi-application F.
$\mathtt{gph}(F)$	Le graphe de la multi-application F.

$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}(t)$	La dérivée de x par rapport à t.
$\mathrm{proj}_A(a)$	La projection de point a sur l'ensemble A.
$N(a, A)$	Le cône normal à l'ensemble A au point a.
$\delta(., A)$	La fonction indicatrice de l'ensemble A.
$\delta^*(., A)$	La fonction support de l'ensemble A.
f^*	La fonction polaire associée à la fonction f.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\rightharpoonup^*$	La convergence faible*.
s.c.s.	Semicontinue supérieurement.
s.c.i.	Semicontinue inférieurement.
ssi	Si et seulement si.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et quelques résultats de base que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris des références [2], [4], [9] et [17].

1.1.1 Espace topologique

Définition 1.1 [*17*] *Soient E une ensemble non vide et Θ une famille de sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$. On dit que Θ est une topologie sur E si Θ vérifie les propriétés suivantes*
1) *$\emptyset$ et E sont des éléments de Θ.*
2) *Θ est stable par l'intersection finie. C'est à dire,*

$$\forall\, o_1, o_2, \ldots, o_n \in \Theta,\ \bigcap_{i=1}^{n} o_i \in \Theta.$$

3) *Θ est stable par l'union (quelconque). C'est à dire,*

$$\forall\, (o_i)_{i\in I} \in \Theta,\ \bigcup_{i=1}^{n} o_i \in \Theta.$$

Définition 1.2 [17] *On appelle espace topologique le couple* (E, Θ) *constitué par un ensemble* E *et par une topologie* Θ *sur cet ensemble. Les éléments de* Θ *sont appelés les ouverts de la topologie* Θ.

Proposition 1.1 [17] *Soient* E *un espace topologique. Alors*
1) *Toute intersection de fermés est un fermé.*
2) *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Ces propriétés des parties fermées découlent directement des propriétés vérifiées par les parties ouvertes d'une topologie et des égalités suivantes

$$E \setminus (\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} (E \setminus U_i), \quad E \setminus (\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus U_i).$$

Remarquez qu'une partie est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé.

Définition 1.3 [17] *Soit* (E, Θ) *un espace topologique et soient* $A, B \subset E$. *On dit que* A *est dense dans* B *ssi* $A \subset B \subset \overline{A}$.
• *On dit que* A *est dense dans* E *ou que* A *est partout dense si* $A \subset E \subset \overline{A}$, *et comme nous avons toujours* $\overline{A} \subset E$, *alors* A *est partout dense ssi* $\overline{A} = E$.

Définition 1.4 (Espace séparable) [17]
Soit E *un espace topologique. On dit que* E *est séparable si et seulement s'il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.*

Exemple 1.1 [17] $\mathbb{R}^n$ *est séparable.*

1.1.2 Espace métrique

Définition 1.5 [17] *Soit* X *un ensemble non vide. On dit que* d *est une distance sur* X *si et seulement si* d *est une application de* X^2 *dans* $\mathbb{R}_+$ *qui vérifie les trois propriétés suivantes*
1) $\forall\, x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y.$
2) $\forall\, x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x).$
3) $\forall\, x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*
• *On appelle espace métrique tout couple* (X, d) *constitué d'un ensemble* X *et d'une distance sur* X.

Définition 1.6 [17] *Soient* (X, d) *un espace métrique et* A *une partie non vide de* X*. La distance d'un point* $x \in X$ *à l'ensemble* A *est donnée par*

$$D(x, A) \;=\; \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition 1.2 [17] *Soient* (X, d) *un espace métrique et* A *un ensemble non vide de* X*. Alors,*
• *A est fermé si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *qui converge vers* $x \in X$*, alors* $x \in A$*.*
• $x \in \overline{A}$ *si et seulement si* x *est la limite d'une suite de point de* A*.*

1.1.3 Espace complet

Définition 1.7 [17] *Soit* (X, d) *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\circ \in \mathbb{N},\ \forall\, p,\ q \in \mathbb{N} :\ p, q \geqslant n_\circ \ \Rightarrow\ d(x_p,\, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.8 [17] *Soit* (X, d) *un espace métrique. On dit que* X *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy de* X *converge dans* X*.*

Définition 1.9 [17] *Soit* X *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*.*
Une norme sur X *est une fonction* $N : X \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall\, x \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3) $\forall\, x \in X,\ \forall\, y \in X\ ,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

• *Le couple* (X, N) *où* X *est un espace vectoriel et* N *définit une norme sur* X *est appelé espace normé vectoriel et on note souvent* $\|\ .\ \|$ *au lieu de* N*.*

Définition 1.10 [17] *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.11 [17] *Soit* X *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}\,(= \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C})$*.*
Un produit scalaire sur X *est une application* $\varphi\ :\ X \times X\ \longrightarrow\ \mathbb{K}$ *tel que*
$\forall\, x,\, x',\, y \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on a*

i) $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (*ou* $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ *si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

ii) $\varphi(x+x',y)=\varphi(x,y)+\varphi(x',y)$.

iii) $\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)$.

iv) $\varphi(x,x)\geqslant 0$ *et* $\varphi(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ *(définie positive).*

On note $\varphi(x,y)$ *par* $\langle x,y\rangle$.

Définition 1.12 [17] *Soit* X *un espace vectoriel et* $\langle .,. \rangle$ *un produit scalaire sur* X. *On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.13 [17] *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.*

1.1.5 Espace compact

Définition 1.14 (Espace de Hausdorff) [17]
Soit E *un espace topologique. On dit que* E *est un espace de Hausdorff (ou espace séparé) si*

$$\forall\, x,\, y\in E,\ x\neq y:\ \exists\, v\in\mathcal{V}(x), \exists\, w\in\mathcal{V}(y)\ \text{ telle que }\ v\cap w=\emptyset.$$

Définition 1.15 (Recouvrement d'un ensemble) [17]
Soit (E,Θ) *un espace topologique,* $I\subset\mathbb{N}$ *et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de sous ensemble de* E. *On dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* $B\subset E$ *si* $B\subset\bigcup\limits_{i\in I}A_i$.

- *Soit* $B=E$, $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* E *si* $E\subset\bigcup\limits_{i\in I}A_i$, *et comme* $\bigcup\limits_{i\in I}A_i\subset E$ *on aura* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement de* E *si* $E=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$.
- *Si de plus* I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement fini de* E.
- *Si* $(A_i)_{i\in I}\subset\Theta$ *on dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert.*

Définition 1.16 (Sous-recouvrement) [17]
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* $B\subset E$. *Si* $J\subset I$ *et* $(A_j)_{j\in J}$ *est un recouvrement de* B, *alors* $(A_j)_{j\in J}$ *est appelé un sous-recouvrement du recouvrement* $(A_i)_{i\in I}$ *de* B.

Définition 1.17 [17] *Soit* (E,Θ) *un espace topologique. On dit que* E *est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de* E, *on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.18 (Ensemble compact) [17]
Soit (E,Θ) *un espace topologique et* S *un sous ensemble de* E, S *est dit compact si de tout recouvrement ouvert de* S *on peut extraire un sous recouvrement fini, c'est à dire,* $S\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}O_\alpha, \exists\, J\subset I$ *(*J *fini), tel que* $S\subset\bigcup\limits_{\alpha\in J}O_\alpha$.

Théorème 1.1 [17] *Soit (X,d) un espace métrique, alors X et compact si et seulement si de toute suite de point de X, on peut extraire une sous suite qui converge, i.e.*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X,\ \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \textit{ sous suite de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ t.q } \lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_0 \in X.$$

1.1.6 Notions de mesurabilité

Définition 1.19 [9] *Soit T un ensemble non vide. On appelle tribu ou σ-algèbre sur T une famille Σ de parties de T possédant les propriétés suivantes :*

1. $T \in \Sigma$.
2. *Si* $A \in \Sigma$, *alors* $T \setminus A \in \Sigma$.
3. *Si* $A_n \in \Sigma$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

• *On appelle espace mesurable tout couple (T,Σ) formé par un ensemble T et une tribu Σ sur T.*
• *Si la troisième relation est vraie pour les unions finie seulement, on dit que Σ est une algèbre sur T.*
• *Si T est un espace topologique, la tribu Borélienne sur T notée $\mathcal{B}(T)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de T.*

Définition 1.20 (Fonction mesurable) [9]
Soit (T,Σ) un espace mesurable et soient X un espace métrique, $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X et $f : T \to X$. On dit que f est Σ-mesurable si et seulement si $\forall A \in \mathcal{B}(X)$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Corollaire 1.1 [9] *Soit $f : T \to X$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications Σ-mesurables définies sur T à valeurs dans X telles que, pour chaque $t \in T$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ alors f est Σ-mesurable.*

Corollaire 1.2 [9] *Soit (T,Σ) un espace mesurable et $f : T \to \mathbb{R}$. Alors f est Σ-mesurable si est seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur T à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in T$, $f_n(t) \to f(t)$, quand $n \to \infty$.*

Définition 1.21 [9] *Soit (T,Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur T si*
1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) μ *est* σ*-additive, c'est à dire que pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Σ *disjoints deux à deux (i.e.,* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, si* $n \neq m$*), on a*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet (T, Σ, μ) *est appelé espace mesuré.*

• *Si* $\mu(A) \geq 0$*, pour tout* $A \in \Sigma$*, on dit que* μ *est une mesure positive et on note* $\mu \geq 0$*, ou que l'espace* (T, Σ, μ) *est positif.*

Définition 1.22 [9] *Soit* T *est un espace topologique. La mesure* $\mu : \mathcal{B}(T) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.23 [9] *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré.*

• *On dit que* μ *est finie (ou que* (T, Σ, μ) *est finie) si* $\mu(T) < +\infty$*.*

• *On dit que* μ *est* σ*-finie (ou que* (T, Σ, μ) *est* σ*-finie) si*

$$\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \mu(A_n) < +\infty,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Définition 1.24 [9] *Soient* (T, Σ, μ) *un espace mesuré et* $A \in \Sigma$*.*

• *On dit que* A *est* μ*-négligeable si*

$$\exists\, B \in \Sigma :\ A \subset B \ \text{ et } \ \mu(B) = 0.$$

• *On dit que* μ *est complet (ou que* (T, Σ, μ) *est complet) si tous les ensembles* μ*-négligeable sont mesurables i.e,*

$$\forall A,\ B \in \mathcal{P}(T),\ (A \subset B,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0) \ \Rightarrow\ A \in \Sigma.$$

Définition 1.25 [9] *Soit* (T, Σ, μ) *un espace mesuré positif. On définie la tribu* μ*-complétée de* Σ *l'ensemble*

$$\Sigma_\mu = [\Sigma \cup \mathcal{N}] = \{A \cup N /\, A \in \Sigma \text{ et } N \in \mathcal{N}\},$$

avec

$$\mathcal{N} = \{N \in T /\, \exists\, B \in \Sigma \text{ et} \mu(B) = 0\},$$

est l'ensemble des parties μ*-négligeables de* T*.*

Théorème 1.2 (Théorème fondamental) [9]

Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}$ *munie des boréliens telle que*

$$\mu([a, b]) = b - a, \quad \text{pour } b > a.$$

μ *s'appelle mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$*.*

1.1.7 Ensembles convexes

Définition 1.26 [20] *Soient X un espace vectoriel, A un sous ensemble de X. On dit que A est convexe ssi*

$$\forall x,\ y \in A, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

Autrement dit pour tout $a, b \in A$ le segment de droite

$$[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda) \ / \ \forall \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.27 [20] *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors A est un intervalle ssi*

$$\forall\, x,\ y \in A\ (x < y),\ \forall\, z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Rightarrow z \in A.$$

Proposition 1.3 [20] *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors A est convexe si et seulement si A est un intervalle.*

Théorème 1.3 (Projection sur un convexe fermé non vide) [9]
Soient H un espace de Hilbert réel et A un sous ensemble convexe fermé non vide de H. Soit $a \in H$. Alors, il existe un et un seul point $x \in A$ t.q

$$D(a, A) = \inf_{y \in A} d(a, y) = d(a, x),$$

s'appelle la projection de a sur A, on la note $x = \operatorname{proj}_A(a)$.

Proposition 1.4 [9] *Soient H un espace de Hilbert réel et A un sous ensemble convexe fermé non vide de H. Soient $a \in H$ et $x \in A$. Alors*

$$x = \operatorname{proj}_A(a) \Leftrightarrow \langle a - x, x - y \rangle \geq 0, \text{ pour tout } y \in A.$$

1.1.8 Fonctions convexes

Définition 1.28 [20] *Soient X un espace vectoriel et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction convexe si et seulement si*

$$\forall\, x,\ y \in X,\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Définition 1.29 [20] *Soient X un espace vectoriel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

- *On appelle domaine effectif de f qu'on note par $D(f)$, l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{a \in X \text{ t.q } f(a) < +\infty\}.$$

- *On dit que $f : X \to]-\infty, +\infty]$ est propre s'il existe $a \in X$ tel que $f(a) \neq +\infty$.*

Définition 1.30 [20] *Soient X un espace vectoriel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors f est convexe si et seulement si*

$$\forall\, x, y \in D(f),\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1.1.9 Fonctions continues

Définition 1.31 [2] *Soient E un espace topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.*

- *On dit que f est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $a \in E$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(a)$, il existe un voisinage V_a de a tel que $h < f(x)$, pour tout $x \in V_a$.*
- *On dit que f est semicontinue inférieurement sur E si et seulement si elle est semicontinue inférieurement en tout point de E.*
- *On dit que f est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $a \in E$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > f(a)$, il existe un voisinage V_a de a tel que $h > f(x)$, pour tout $x \in V_a$.*
- *On dit que f est semicontinue supérieurement sur E si et seulement si elle est semicontinue supérieurement en tout point de E.*

Définition 1.32 [2] *f est continue au point a si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $a \in E$.*

Remarque 1.1 [2] *Soient E un espace topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in D(f)$. Alors,*

- *f est s.c.i au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon.$$

- *f est s.c.s au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

- *f est continue au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.33 [17] *Soient E un espace topologique, $f : E \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Alors*

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \inf_{W \in \mathcal{V}(a)} \{\sup_{x \in W} f(x)\},$$
$$\liminf_{x \to a} f(x) = \sup_{W \in \mathcal{V}(a)} \{\inf_{x \in W} f(x)\}.$$

Proposition 1.5 [2] *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombres réels. Alors,*

- $\limsup(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \limsup(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \le \limsup(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\liminf(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \liminf(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \le \liminf(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Alors,

- $\limsup(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \limsup(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \limsup(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\liminf(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \liminf(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \liminf(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.6 [2] *Soient (X, d) un espace métrique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $a \in X$. Alors*

1. *f est s.c.s au point a si et seulement si $\limsup_{x \to a} f(x) \geq f(a)$,*
2. *f est s.c.i au point a si et seulement si $\liminf_{x \to a} f(x) \geq f(a)$.*

Définition 1.34 (Fonction continue par morceaux) [19]
une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dit continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ vérifiant,
$\forall\, 1 \leq i \leq n$, f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et $\lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x)$, $\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x)$ existes et sont finies.

Définition 1.35 (Fonction intégrable) [19]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to K$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux. Alors f est intégrable sur I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que pour tout segment J contenu dans I, on ait $\int_J |f| \leq M$.

Théorème 1.4 [19] *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to K$ ($\mathbb{R}$), on a*

- *Si f est intégrable et $f \geq 0$ alors $\int_I |f| \geq 0$.*
- *Si f et g sont intégrables et $f \leq g$ alors $\int_I |f| \leq \int_I |g|$.*
- *Si f est continue et positive, alors*

$$\int_I |f| = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, \quad \forall\, t \in I.$$

Définition 1.36 (Une fonction absolument continue) [2]
Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue ssi $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant, $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ on a $\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon$.

Théorème 1.5 [2] *Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue ssi elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire,*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Remarque 1.2 *Tout fonction absolument continue est continue.*

Définition 1.37 (Application Lipschitzienne) [2]
Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Une application $f : X \to Y$ est dite Lipschitzienne si

$$\exists\, k > 0,\ \forall\, x,\, y \in X,\ \|f(x) - f(y)\|_Y \leq k \|x - y\|_X .$$

Proposition 1.7 [2] *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si f est Lipschitzienne alors f est absolument continue.*

Définition 1.38 (Application localement Lipschitzienne)
Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Une application $f : X \to Y$ est dite localement Lipschitzienne si pour tout $x_0 \in X$ il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f est Lipschitzienne.

1.1.10 Fonctions polaires

Définition 1.39 [2] *Soient E un espace topologique, E' son dual topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On appelle fonction polaire associée à la fonction f qu'on note f^*, la fonction définie sur E' par*

$$\begin{aligned} f^* : E' &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x' &\mapsto f^*(x') = \sup_{x \in E} \left[\langle x', x\rangle - f(x)\right]. \end{aligned}$$

Définition 1.40 [2] *Soient E un espace topologique et $A \subset E$. On appelle fonction indicatrice de A, qu'on note $\delta(., A)$, la fonction définie par*

$$\begin{aligned} \delta(., A) : E &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \delta(x, A) = \begin{cases} 0, & si\ x \in A, \\ +\infty, & si\ x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.8 [2] *Soient E un espace topologique et $A \subset E$. Alors A est convexe si et seulement si $\delta(., A)$ est convexe.*

Proposition 1.9 [2] *Soient E un espace topologique, E' son dual topologique et $A \subset E$. On appelle fonction support de A, qu'on note $\delta^*(., A)$, la fonction définie sur E' par*

$$\begin{aligned} \delta^*(., A) : E' &\to \overline{\mathbb{R}} \\ x' &\mapsto \delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle. \end{aligned}$$

C'est la fonction polaire associée à $\delta(., A)$.

Démonstration.

Montrons que $\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x\rangle$.

En effet,

$$\begin{aligned}
\delta^*(x', A) &= \sup_{x\in E}[\langle x', x\rangle - \delta(x, A)] \\
&= \sup\big[\sup_{x\in A}\big(\langle x', x\rangle - \delta(x, A)\big),\ \sup_{x\in C_E^A}\big(\langle x', x\rangle - \delta(x, A)\big)\big] \\
&= \sup\big[\sup_{x\in A}\langle x', x\rangle,\ \sup_{x\in C_E^A}\big(\langle x', x\rangle - \infty\big)\big] \\
&= \sup\big[\sup_{x\in A}\big(\langle x', x\rangle,\ -\infty\big)\big] \\
&= \sup_{x\in A}\langle x', x\rangle.
\end{aligned}$$

D'où $\delta^*(x', A) = \sup_{x\in A}\langle x', x\rangle$. ■

1.1.11 Les espaces L^P

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue sur E.

Définition 1.41 [2] *Si $1 \le p < +\infty$, Ω un ouvert de E, on définit l'espace $\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^d}(\Omega)$ par*

$$\mathbf{L}^p_{\mathbb{R}^d}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/\ f \ \textit{mesurable et} \int_\Omega \|f(x)\|^p\, d\mu(x) < \infty\}.$$

On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on définit l'espace $\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(\Omega)$ par

$$\mathbf{L}^\infty_{\mathbb{R}^d}(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d/\, f \ \textit{est mesurable et}\ \exists\, c > 0\ \ \textit{tel que}\ \|f(x)\| \le c\ \ \textit{presque partout sur}\ \Omega\}.$$

On définit alors la norme

$$\|f\|_\infty = \inf\{c > 0,\ \|f(x)\| \le C \ \textit{presque partout sur}\, \Omega\}.$$

Théorème 1.6 (Fischer-Riesz) [4]
$\mathbf{L}^p$ est un espace de Banach pour tout $1 \le p \le \infty$.

Théorème 1.7 (Théorème de la représentation de Riez.) [2]
Soient $1 < p, q < \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\varphi \in (L^p(\mathbb{R}^n))'$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} uf d\mu,\ \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

De plus, $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

Remarque 1.3 [*2*]
On a $(L^p)' = L^q$ *telle que* $1 < p,\, q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$
De plus $(L^1)' = L^\infty$, *mais* $L^1 \subsetneqq (L^\infty)'$.

1.2 Rappels sur la topologie faible et la topologie faible*

Pour plus des résultats sur la topologies faible et faible* voir [2] et [4].

Définition 1.42 (Topologie faible) [*4*]
Soient E *un espace de Banach réel,* E' *son dual topologique et* $f \in E'$.
Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle. \end{array}$$

Lorsque f *décrit* E' *nous obtenons une famille d'applications* $(\varphi_f)_{f\in E'}$ *définies sur* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

On appelle topologie faible sur E *qu' on note* $\sigma(E, E')$ *la topologie la moins fine sur* E *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

- *On désigne par* $x_n \rightharpoonup x$ *la convergence de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* x *pour la topologie faible* $\sigma(E, E')$.
- *On désigne par* $x_n \rightarrow x$ *la convergence forte de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* x, *i.e.,* $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Proposition 1.10 [*4*] *Soient* E *un espace de Banach réel et* $(x_x)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E. *Alors*

(1) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle\,,\ \forall f \in E'$.

(2) $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

(3) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (\| x_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et* $\| x \| \leqslant \underset{n\longrightarrow\infty}{lim\,inf} \| x_n \|$.

(4) $(x_n \rightharpoonup x \text{ et } f_n \rightarrow f) \Rightarrow \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Proposition 1.11 [*4*] *Lorsque* E *est de dimension finie, la topologie forte de* E *et la topologie faible* $\sigma(E, E')$ *coïncident.*

Définition 1.43 (La topologie faible*) [*4*]
Soit E *un espace de Banach réel,* E' *son dual topologique et* $x \in E$.

considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle_{E',E}. \end{aligned}$$

Lorsque x parcourt E on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in E}$ définies sur E' à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*La topologie faible * sur E' qu'on note $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

• *On désigne par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergence de $(f_x)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f pour la topologie faible* $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.12 [4] *Soient E un espace de Banach réel, E' son dual topologique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E'. Nous avons*

(i) *$f_n \rightharpoonup^* f$ ((f_n) converge $\sigma(E', E)$ vers f) $\Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, pour tout $x \in E$.*

(ii) *$f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.*

(iii) *$f_n \rightharpoonup f$ ((f_n) converge $\sigma(E', E'')$) $\Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.*

(iv) *Si $f_n \rightharpoonup^* f$ alors $(\|f_n\|)$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.*

(v) *$f_n \rightharpoonup^* f$ et $x_n \to x$ fortement, alors*

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Proposition 1.13 [4] *Si E est de dimension finie, les topologies forte, faible $\sigma(E', E'')$ et faible* $\sigma(E', E)$ coincident sur E'.*

Théorème 1.8 (Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki) [4]
Soient E un espace de Banach réel et E' son dual topologique, alors

$$\overline{B}_{E'}(0,1) = \{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1\},$$

est faiblement compact.*

1.3 Les multi-applications

Pour plus des résultats sur Les multi-applications voir [1], [2] et [11] .

1.3.1 La distance de Hausdorff

Soit (X,d) un espace métrique, supposons $d(x,y) < \infty, \forall\, x,\, y \in X$.

Définition 1.44 [2] *Soient A, B deux sous ensembles de X. On appelle écart entre A et B et on le note $e(A,B)$, la quantité définie par*

$$e(A,B) = \sup_{x\in A} D(x,B) = \sup_{x\in A}(\inf_{y\in B} d(x,y)),$$

avec $\sup \emptyset = 0$ *et* $\inf \emptyset = \infty$.

Définition 1.45 [2] *On appelle distance de Hausdorff entre A et B et on note $h(A,B)$ ou $\mathcal{H}(A,B)$, la quantité définie par*

$$\mathcal{H}(A,B) = max(e(A,B),\, e(B,A)).$$

Proprieté 1.1 [2] *Soient A, B et C des sous ensembles de X alors,*

1. $e(A,\emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset, B) = 0$.
3. $e(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
5. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.
6. $\mathcal{H}(A,C) \leq \mathcal{H}(A,B) + \mathcal{H}(B,C)$.

Corollaire 1.3 [2] *Soit X un espace métrique et soit C un sous ensemble convexe fermé de X. Alors $D(x,C) = \sup\limits_{x'\in \overline{B}_{X'}} [\langle x',x\rangle - \delta^*(x',C)]$ tel que $\overline{B}_{X'}$ est la boule unité de espace dual X'.*

Corollaire 1.4 [2] *Soient X un espace métrique et A, B deux sous ensembles convexes fermés bornés de X, alors*

1. $e(A,B) = \sup\limits_{x'\in \overline{B}_{X'}} [\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)]$.
2. $\mathcal{H}(A,B) = \sup\limits_{x'\in \overline{B}_{X'}} |\delta^*(x',\, A) - \delta^*(x',B)|$.

Démonstration.

1. Montrons que $e(A,B) = \sup\limits_{x' \in \overline{B}_{X'}} [\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)]$.

   Nous avons
$$e(A,B) = \sup_{x \in A} D(x,B).$$
   Par **le Corollaire 1.3**, on a
$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sup_{x \in A} [\sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} (\langle x', x\rangle - \delta^*(x',B))] \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} [\sup_{x \in A} \langle x', x\rangle - \delta^*(x',B)] \\ &= \sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} [\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)]. \end{aligned}$$

2. Montrons que $\mathcal{H}(A,B) = \sup\limits_{x' \in \overline{B}_{X'}} |\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)|$.

Nous avons
$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{e(A,B),\, e(B,A)\}.$$
• Si $\max\{e(A,B),\, e(B,A)\} = e(A,B)$,

alors d'après **1**.
$$\mathcal{H}(A,B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} [\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)]. \tag{1.1}$$
• Si $\max\{e(A,B),\, e(B,A)\} = e(B,A)$,

alors d'après **1**.
$$\mathcal{H}(A,B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} [\delta^*(x',B) - \delta^*(x',A)]. \tag{1.2}$$
De (1.1) et (1.2)
$$\mathcal{H}(A,B) = \sup_{x' \in \overline{B}_{X'}} |\delta^*(x',A) - \delta^*(x',B)|. \qquad \blacksquare$$

1.3.2 Les Multi-applications

Définition 1.46 [2] *Soient T, X deux ensembles non vides. On appelle multi-application ou fonction multivoque définie sur T à valeurs dans X, toute application F définie sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$, et on note*
$$F : T \to \mathcal{P}(X) \quad ou \quad F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall\, t \in T$, $F(t)$ *est un sous ensemble de* X.

Définition 1.47 [2] *Soient* T, X *deux ensembles non vides. Pour tout multi-application* $F : T \rightrightarrows X$, *on définit*

- *Le domaine (effectif) de* F *qu'on note* $dom(F)$, *l'ensemble*

$$dom(F) = \{t \in T/\ F(t) \neq \emptyset\}.$$

- *L'image de* F *qu'on note* $Im(F)$, *l'ensemble*

$$Im(F) = \{x \in X/\ \exists\, t \in T,\ x \in F(t)\}.$$

- *Si* $A \subset T$, *on appelle image de* A *par* F *qu'on note* $F(A)$, *l'ensemble défini par*

$$F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t) = \{x \in X/\ \exists\ t \in A,\ \ x \in F(t)\}.$$

- *la multi-application inverse* $F^{-1} : X \to \mathcal{P}(T)$ *défini par*

$$t \in F^{-1}(x)\ \Leftrightarrow\ x \in F(t).$$

  Nous avons

$$(F^{-1})^{-1} = F, \quad dom(F^{-1}) = Im(F) \quad et \quad Im(F^{-1}) = dom(F).$$

- *Le graphe de* F *qu'on note* $\mathtt{gph}(F)$, *le sous-ensemble de* $T \times X$ *défini par*

$$\mathtt{gph}(F) = \{(t, x) \in T \times X/\ x \in F(t)\}.$$

Corollaire 1.5 [2] *Pour tout* $V \subset X$, *nous avons*

$$F^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \cap V \neq \emptyset\},$$

qui est appelé l'image réciproque large de V *par la multi-application* F.

Définition 1.48 [2] *On appelle image réciproque étroite de* V *par la multi-application* F *qu'on note par* $F_+^{-1}(V)$ *l'ensemble définie par*

$$F_+^{-1}(V) = \{t \in T :\ F(t) \subseteq V\}.$$

Et nous avons

$$T \setminus F_+^{-1}(V)\ =\ F^{-1}(X \setminus V) \quad et \quad T \setminus F^{-1}(V)\ =\ F_+^{-1}(X \setminus V).$$

1.3.3 La continuité des multi-applications

Semicontinuité supérieure

Définition 1.49 [2] *Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s.) au point $t_0 \in T$, si et seulement si pour tout ouvert U de X contenant $F(t_0)$ (i.e., $F(t_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire $F(z) \subset U, \forall z \in \Omega$.*
• *On dit que F est s.c.s. sur T si elle est s.c.s. en tout point $t \in T$.*

Définition 1.50 [2] *Soient T et X deux espaces topologiques, $\Omega \subset T$ non vide et $F : \Omega \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est s.c.s au point t_0 si pour toute suite $(t_n) \subset \Omega$, $A \subset X$ fermé, $t_n \longrightarrow t_0 \in \Omega$ et $F(t_n) \bigcap A \neq \emptyset$, pour tout $n \geq 1$, alors $F(t_0) \bigcap A \neq \emptyset$.*

Proposition 1.14 [2] *Soient T, X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. La semicontinuité supérieure de F sur E est équivalente à chacune des propriétés suivantes*

a) *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X.*

b) *$F^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout fermé U de X.*

c) *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X.*

Semicontinuité inférieure

Définition 1.51 [2] *Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i.) au point $t_0 \in T$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(z) \cap U \neq \emptyset, \forall z \in \Omega$.*
• *On dit que F est s.c.i. sur T si elle est s.c.i. en tout point $t \in T$.*

Corollaire 1.6 [2] *Soient T et X deux espaces topologiques et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. La semicontinuité inférieure de F est équivalante à chacune des propriétés suivantes*

i) *$F^{-1}(V)$ est un ouvert de T pour tout ouvert V de X.*

ii) *$F_+^{-1}(U)$ est un fermé de T pour tout fermé U de X.*

iii) *$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$ pour tout sous ensemble M de X.*

Définition 1.52 (Continuité d'une multi-application) [2]
Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que
- *F est continue au point t_0 si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i. au point t_0.*
- *F est continue sur T si et seulement si elle est s.c.s. et s.c.i. sur T.*

Multi-application lipschitzienne

Définition 1.53 [11] *Soient T et X deux espaces métriques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est lipschitzienne si et seulement s'il existe un constante $k > 0$ tel que*

$$\mathcal{H}\big(F(t), F(s)\big) \leq k|t-s|, \quad \forall\, t,\, s \in T.$$

Exemple 1.2 [11] *Soient H un espace de Hilbert et T, $k \in \mathbb{R}_+$. Soient A un sous ensemble non vide convexe fermé de H et $D : [0,T] \to H$ une application lipschitzienne de rapport $\leq k$, soit $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application définie par*

$$C(t) = A + D(t), \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Alors C est lipschitzienne de rapport $\leq k$.

Démonstration

Soient s, $t \in [0,T]$ fixé, $x \in C(s)$ et $y = [x - D(s)] + D(t) \in A + D(t) = C(t)$.

Nous avons

$$\begin{aligned} D\big(x, C(t)\big) &= \inf_{y \in C(t)} \|y - x\| \\ &\leq \|y - x\| \\ &= \|D(t) + D(s)\| \\ &\leq k|t-s|. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x \in C(s)} D\big(x, C(t)\big) \leq k|t-s|, \quad \forall\, t,\, s \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Et de la même manière

$$\sup_{y \in C(t)} D\big(y, C(s)\big) \leq k|t-s|, \quad \forall\, t,\, s \in [0,T]. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4)

$$\max\Big\{\sup_{x\in C(s)} D\big(x, C(t)\big),\ \sup_{y\in C(t)} D\big(y, C(s)\big)\Big\} \leq k|t-s|, \quad \forall\, t,\ s \in [0,T],$$

alors

$$\mathcal{H}\big(C(t), C(s)\big) \leq k|t-s|, \quad \forall\, t,\ s \in [0,T].$$

d'où , C est une multi-application lipschitzienne de rapport $\leq k$. ■

Chapitre 2

Différentiabilité, sous-différentiabilité et les cônes normaux

Dans ce chapitre nous présentons dans la premier partie quelques dérivées directionnelles classiques au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet, ensuite les propriétés et résultats de base du sous-différentiabilité d ?une fonction convexe. Dans la deuxième partie nous donnons les définitions générales d'un cône et quelques propriétés et résultats qui jouent un rôle important dans l'analyse convexe et enfin les types de cônes normaux (Clarke, Fréchet, Proximal et Mordukhovitch) et nous donnons un résultat qui met en évidence la relation entre les différents types de cônes normaux.

2.1 Différentiabilité et sous-différentiabilité

2.1.1 Dérivée directionnelle

Notons que les résultats de cette section ont été pris des références [3], [7], [10], [16] et [11].

Définition 2.1 [7] *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soient x_0, $v \in E$.*
On appelle dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction v qu'on note par

$f'(x_0, v)$, la limite définie par

$$f'(x_0, v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand elle existe.

Théorème 2.1 [7] *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et convexe et $x_0 \in D(f)$. Alors $f'(x_0, v)$ existe, pour tout $v \in E$.*

Définition 2.2 (Dérivée directionnelle de Clarke) [7]
Soient E un espace de Banach réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$ de rapport $\leq k$. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke (dérivée directionnelle généralisé) de f au point x_0 dans la direction $v \in E$, notée $f^0(x_0, v)$ est définie par

$$f^0(x_0, v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x - tv) - f(x)}{t}$$

tel que x est un vecteur de E et t un scalaire positif.

2.1.2 Différentiabilité

Définition 2.3 [20] *Soient E un espace de Banach réel, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$.*

1. *On dit que f est Gâteaux-différentiable au point x_0 s'il existe $x' \in E'$ tel que*

$$f'(x_0, v) = \langle x', v \rangle, \quad \forall\, v \in E. \tag{2.1}$$

Dans ce cas x' est défini d'une façon unique par la relation (2.1) et il est appelée différentielle de f au sens de Gâteaux au point x_0 et on la note par $x' = \nabla f(x_0)$, appelée aussi gradient de f au point x_0.

2. *On dit que f est Fréchet-différentiable au point x_0 s'il existe $x' \in E'$ tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', x - x_0 \rangle}{||x - x_0||} = 0. \tag{2.2}$$

Dans ce cas x' est défini d'une façon unique par la relation (2.2) et il est appelée différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0 et on la note $x' = df(x_0)$.

2.1.3 Sous-différentiabilité

Définition 2.4 [5] *Soient E un espace de Banach réel, E' son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, soit $x_0 \in D(f)$.*
On appelle sous-différentiabilité de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E',\ t.q\ f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0\rangle,\ \forall\, x \in E\}.$$

• *On dit que f est sous-différentiabilité au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0.*

Remarque 2.1 [5] *Soient E un espace de Banach réel, E' son dual topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, soit $x_0 \in D(f)$*

1. *∂f est une multi-application de E dans E'.*
2. *Si $f : E \to]-\infty, +\infty]$ propre et $f(x_0) = +\infty$ alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.*
3. *$x' \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \langle x', v\rangle \leq f'(x_0, v),\ \forall\, v \in E$.*

Proposition 2.1 (Relation entre sous-différentiel et fonction polaire) [5]
Soient E un espace de Banach réel, E' son dual topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, soit $x_0 \in D(f)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalente

i) $x' \in \partial f(x_0)$,

ii) $f^*(x') + f(x_0) \leq \langle x', x_0\rangle$,

iii) $f^*(x') + f(x_0) = \langle x', x_0\rangle$.

De plus $\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe fermé de E'.
Où f^* est la fonction polaire de f définie par

$$f^*(x') = \sup_{x\in E}[\langle x', x\rangle - f(x)] \leq \langle x', x_0\rangle\ ,\ \forall\, x' \in E'.$$

Proposition 2.2 [20] *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $x_0 \in D(f)$. Si f est Gâteaux différentiable au point x_0, alors $\partial f(x_0)$ est un singleton et est égale à $\nabla f(x_0)$ i.e., $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.*
Inversement si f est continue au point x_0 et si $\partial f(x_0)$ est un singleton, alors f est Gâteaux différentiable au point x_0 et $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Définition 2.5 (Sous-différentiel de Fréchet) [3]
Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$.

On appelle sous-différentiel de Fréchet de f au point x_0 qu'on note $\partial^F f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial^F f(x_0) = \{x' \in E', \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_o\rangle \leq f(x) - f(x_0) - \varepsilon||x - x_0||, \forall x \in B(x_0, \delta)\}.$$

Proposition 2.3 [*10*]

$$\partial^F f(x_0) = \left\{ x' \in E' \; t.q \; \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', \, x - x_0\rangle}{||x - x_0||} \geq 0 \right\}.$$

Proposition 2.4 [*10*] *Si f est convexe, alors*

$$\partial^F f(x_0) = \partial f(x_0).$$

Définition 2.6 (Sous-différentiel de Clarke) [*7*]
Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, le sous-différentiel de Clarke de f au point x_0, qu'on note $\partial^C f(x_0)$ l'ensemble définie par

$$\partial^C f(x_0) = \{x' \in E', \; f^\circ(x_0, \, v) \geq \langle x', \, v\rangle, \; \forall v \in E\}.$$

Proposition 2.5 [*7*] *Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction localement lipschitzienne en $x_0 \in E$. Si f est convexe, alors*

1. $f^\circ(x_0, v) = f'(x_0, v)$.
2. $\partial^C f(x_0) = \partial f(x_0)$.

Définition 2.7 (Sous-différentiel proximal) [*3*]
Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$.
On appelle sous-différentiel proximal de f au point x_0 qu'on note $\partial^P f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial^P f(x_0) = \{x' \in E', \exists \sigma > 0, \exists \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) + \sigma||x - x_0||^2, \forall x \in B(x_0, \rho)\}.$$

Proposition 2.6 [*10*]

$$\partial^P f(x_0) = \left\{ x' \in E' \; t.q \; \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x', \, x - x_0\rangle}{||x - x_0||^2} > -\infty \right\}.$$

Proposition 2.7 [*10*] *Si f est convexe, alors*

$$\partial^P f(x_0) = \partial f(x_0).$$

Définition 2.8 (Sous-différentiel de Mordukhovich) [*3*]
Soient E un espace de Banach réel, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et s.c.i. sur E et $x_0 \in D(f)$.
On appelle sous-différentiel de Mordukhovich de f au point x_0 qu'on note $\partial^M f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial^M f(x_0) = \{x' \in E', \exists\, x_n \to x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \ t.q\ x'_n \in \partial^F f(x_n), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 2.8 [*3*] *Si f est convexe, alors*

$$\partial^M f(x_0) = \partial f(x_0).$$

2.2 Les cônes

Dans cette section on intéresse sur un espace de Hilbert réel muni de la norme $\|.\|$ et du produit scalaire $\langle ., .\rangle$.
Notons que les résultats de cette section ont été pris des références [1] et [20].

Définition 2.9 [*20*] *Soient H un espace de Hilbert réel, K un sous ensemble non vide de H. On dit que K est un cône si*

$$\forall\, x \in K, \forall\, \lambda \geq 0, \quad \lambda\, x \in K.$$

Proposition 2.9 [*20*] *Soient H un espace de Hilbert réel, K un cône de H. Alors K est un cône convexe ssi*

$$\forall\, x,\, y \in K,\, x + y \in K.$$

Définition 2.10 (Le cône polaire) [*20*]
Soient H un espace de Hilbert réel et K un cône de H.

1. *On appelle polaire (conjugué) de K qu'on note K°, le sous ensemble de H définie par*
$$K^\circ = \{v \in H,\ \langle v, x\rangle \leq 0,\ \forall\, x \in K\}.$$
2. *On appelle bipolaire (biconjugué) de K qu'on note $K^{\circ\circ}$, le sous ensemble de H définie par*
$$K^{\circ\circ} = \{x \in H,\ \langle v, x\rangle \leq 0,\ \forall\, v \in K^\circ\}.$$

Définition 2.11 (le cône dual) [*20*]
Soient H un espace de Hilbert réel et K un cône de H.

1. *On appelle dual de K qu'on note K^*, le sous ensemble de H définie par*

$$K^* = \{v \in H,\ \langle v, x\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in K\}.$$

2. *On appelle bidual de K qu'on note K^{**}, le sous ensemble de H définie par*

$$K^{**} = \{x \in H,\ \langle v,\, x\rangle \geq 0,\ \forall\, v \in K^*\}.$$

Remarque 2.2 [*20*]
- $K^* = -K^\circ$.
- $K^{\circ\circ}$ *et* K° *sont des cônes convexes.*
- K^* *et* K^{**} *sont des cônes convexes fermés.*

2.3 Les cônes normaux

Notons que les résultats de cette section ont été pris des références [1], [3], [7], [10], [11], [20] et [16].

Définition 2.12 [*11*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble convexe fermé de H et $x_0 \in A$. On appelle cône normal à A au point x, qu'on note $N(x_0, A)$, l'ensemble défini par*

$$N(x_0, A) = \{x' \in H \ t.q\ \langle x', y - x_0\rangle \leq 0,\ \forall\, y \in A\}.$$

Remarque 2.3
- $N(x_0, x_0) = H$.
- $0 \in N(x_0, A)$.

Définition 2.13 [*1*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble convexe fermé de H et $x_0 \in A$. Le cône normal $N(x_0, A)$ à A au point x_0 est l'ensemble défini par*

$$N(x_0, A) = \{x' \in H \ t.q\ \langle x', x_0\rangle = \max\{\langle x', y\rangle,\ \forall\, y \in A\} = \delta^*(x', A)\}.$$

Lemme 2.1 [*11*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A, C deux ensembles convexes fermés non vide de H telle que int$(A \cap C) = \emptyset$. Alors,*

$$\begin{aligned} N(x_0, A\cap C) &= N(x_0, A) + N(x_0, C), \quad \forall\, x_0 \in A \cap C \\ &= \{\xi_1 + \xi_2 \in H \ t.q\ \xi_1 \in N(x_0, A),\ \xi_2 \in N(x_0, C),\ \forall\, x_0 \in A \cap C\}. \end{aligned}$$

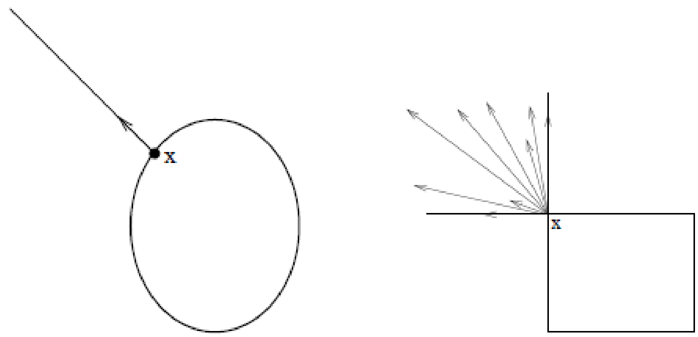

Figure 2.1 – Exemple du cône normal

Exemple 2.1 [11] *Soit* $A = \{(x,0)\ t,q\ 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
N\big((0,0),A\big) &= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \langle(\xi_1,\xi_2),(x,0)-(0,0)\rangle \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \langle(\xi_1,\xi_2),\ (x,0)\rangle \leq 0\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_1 x \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\ et\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_1 \leq 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&=]-\infty,0] \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N\big((1,0),A\big) &= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \langle(\xi_1,\xi_2),\ (x,0)-(1,0)\rangle \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \langle(\xi_1,\xi_2),\ (x-1,0)\rangle \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_1(x-1) \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\ et\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= [0,+\infty[\times\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Soit $y \in]0,1[$, *on a*

$$\begin{aligned}
N\big((y,0),A\big) &= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \ \langle(\xi_1,\xi_2),(x,0)-(y,0)\rangle \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \ \langle(\xi_1,\xi_2),(x-y,0)\rangle \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\} \\
&= \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_1(x-y) \leq 0,\ \forall x \in [0,1]\ et\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(0,\xi_2) \in \mathbb{R}^2\ t.q\ \xi_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{0\} \times \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.10 *Soient* H *un espace de Hilbert réel,* A *un sous ensemble convexe fermé de* H *et* $y \in H$. *Alors,*

$$x_0 = \mathrm{proj}_A(y) \Leftrightarrow y - x_0 \in N(x_0,\ A), \quad \forall x_0 \in A.$$

Démonstration.

Soient $y \in H$ et $x_0 \in A$, on a d'après **la Proposition 1.4**

$$\begin{aligned} x_0 = \text{proj}_A(y) \;&\Leftrightarrow\; \langle y - x_0,\, x_0 - z\rangle \geq 0, \quad \forall\, z \in A, \\ &\Leftrightarrow\; \langle y - x_0,\, z - x_0\rangle \leq 0, \quad \forall\, z \in A. \end{aligned}$$

D'après **la Définition 2.12**,

$$y - x_0 \in N(x_0,\, A), \quad \forall\, x_0 \in A.$$

■

Proposition 2.11 [*11*] *Soient H un espace de Hilbert réel, $A \subset H$ et $x_0 \in A$. Alors,*

$$x_0 \in int\ (A) \Rightarrow N(x_0, A) = \{0\}.$$

Démonstration.

Soit $x_0 \in int(A)$

1. Montrons que $\{0\} \subset N(x_0, A)$.

   Nous avons

   $$x' \in N(x_0, A) \Leftrightarrow < x', y - x_0 > \leq 0,\ \forall\, y \in A.$$

   Pour $x' = 0$, on a

   $$0 = \langle 0, y - x_0\rangle \leq 0,\ \forall\, y \in A.$$

   Donc $\{0\} \subset N(x_0, A)$.

2. Montrons que $N(x_0, A) \subset \{0\}$.

   Nous avons

   $$x_0 \in \text{int}\ (A) \Leftrightarrow \exists\, r > 0 \text{ t.q } B(x_0, r) \subset A.$$

   Soit $u \in S(0, 1)$ alors $||u|| = 1$.

   On pose $y = x_0 + \delta u$ tel que $0 < \delta < r$, on obtient

   $$||y - x_0|| = ||\delta u|| = \delta ||u|| = \delta < r.$$

Par conséquence $y \in B(x_0, r) \subset A$ c'est à dire $y \in A$.

Soit $x' \in N(x_0, A)$, donc

$$\begin{aligned} \langle x', y - x_0 \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle x', x_0 + \delta u - x_0 \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow \delta \langle x', u \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow \langle x', u \rangle \leq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'autre part, soit $z = x_0 - \delta u$, alors

$$||z - x_0|| = || - \delta u|| = \delta ||u|| = \delta < r.$$

Par conséquence $z \in B(x_0, r) \subset A$ c'est à dire $z \in A$.

Donc

$$\begin{aligned} \langle x', z - x_0 \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle x', x_0 - \delta u - x_0 \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow -\delta \langle x', u \rangle \leq 0, \\ &\Rightarrow \langle x', u \rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \langle x', u \rangle = 0 &\Rightarrow \sup_{u \in S(0,1)} \langle x', u \rangle = 0, \\ &\Rightarrow ||x'|| = 0, \\ &\Rightarrow x' = 0. \end{aligned}$$

D'où, $N(x_0, A) \subset \{0\}$.

De 1) et 2) on trouve que $N(x_0, A) = \{0\}$. ■

Proposition 2.12 [*11*] *Soient H un espace de Hilbert réel et A un sous ensemble convexe fermé de H, tel que int$(A) \neq \emptyset$.*
Si $x_0 \in Fr(A)$ alors $N(x_0, A) \neq \{0\}$.

Proposition 2.13 [*16*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble convexe fermé de H et $x_0 \in A$. Alors*

$$\partial \delta(x_0, A) = N(x_0, A).$$

Si $x_0 \notin A$, alors

$$\partial \delta(x_0, A) = \emptyset.$$

Démonstration.

1. Montrons que $\partial\delta(x_0, A) = N(x_0, A)$.

   Nous avons $x_0 \in A$ donc $\delta(x_0,\, A) = 0$.

$$\begin{aligned}
\partial\delta(x_0, A) &= \{x' \in H,\ \delta(x, A) - \delta(x_0, A) \geq \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in H\} \\
&= \{x' \in H,\ \delta(x, A) \geq \delta(x_0, A) + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in A\} \\
&\cap \{x' \in H,\ \delta(x, A) \geq \delta(x_0, A) + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in C_H^A\} \\
&= \{x' \in H,\ 0 \geq 0 + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in A\} \\
&\cap \{x' \in H,\ +\infty \geq 0 + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in C_H^A\} \\
&= \{x' \in H,\ \langle x', x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall\, x \in A\} \cap H \\
&= \{x' \in H,\ \langle x', x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall\, x \in A\} \\
&= N(x_0, A).
\end{aligned}$$

   D'où $\quad \partial\delta(x_0, A) = N(x_0, A)$.

2. Si $x_0 \notin A$ donc $\delta(x_0, A) = +\infty$.

$$\begin{aligned}
\partial\delta(x_0, A) &= \{x' \in H,\ \delta(x, A) - \delta(x_0, A) \geq \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in H\} \\
&= \{x' \in H,\ \delta(x, A) \geq \delta(x_0, A) + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in A\} \\
&\cap \{x' \in H,\ \delta(x, A) \geq \delta(x_0,\, A) + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in C_H^A\} \\
&= \{x' \in H,\ 0 \geq +\infty + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in A\} \\
&\cap \{x' \in H,\ +\infty \geq +\infty + \langle x', x - x_0\rangle\,,\ \forall\, x \in C_H^A\} \\
&= \emptyset \cap H \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.14 (Cône normal de Fréchet) [*3*]
Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$. On appelle cône normal de Fréchet à A au point x_0 qu'on note $N_F(x_0, A)$, l'ensemble défini par

$$N_F(x_0, A) = \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \varepsilon ||x - x_0||,\, \forall\, x \in B(x_0,\, \delta) \cap A\}.$$

Proposition 2.14 [*10*]

$$N_F(x_0,\, A) = \Big\{x' \in H \;\, t.q \; \limsup_{\substack{A \\ x \to x_0}} \frac{\langle x',\, x - x_0\rangle}{||x - x_0||} \leq 0\Big\}.$$

Proposition 2.15 [*10*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$. Alors*

$$N_F(x_0, A) = \partial^F \delta(x_0, A).$$

Démonstration.

Nous avons

$$\partial^F \delta(x_0, A) = \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x,\, A) - \delta(x_0, A) + \varepsilon ||x - x_0||, \\ \forall\, x \in B(x_0, \rho)\}.$$

comme $B(x_0, \rho) = B(x_0, \rho) \cap (A \cup C_H^A) = (B(x_0, \rho) \cap A) \cup (B(x_0, \rho) \cap C_H^A)$ et $\delta(x_0, A) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial^F \delta(x_0, A) =& \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x, A) + \varepsilon ||x - x_0||, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
&\cap \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x, A) + \varepsilon ||x - x_0||, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq 0 + \varepsilon ||x - x_0||, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
&\cap \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq +\infty + \varepsilon ||x - x_0||, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq \varepsilon ||x - x_0||, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
&\cap \{x' \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \rho > 0 \; t.q \; \langle x', x - x_0\rangle \leq +\infty, \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& N_F(x_0, A) \cap H \\
=& N_F(x_0, A).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.16 [*3*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H.*
Si A est convexe, alors

$$N_F(x_0, A) = N(x_0, A).$$

Définition 2.15 (Cône normal Proximal) [*3*]
Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$.

On appelle cône normal Proximal à A au point x_0 qu'on note $N_P(x_0,\, A)$, l'ensemble défini par

$$N_P(x_0, A) = \{x' \in H, \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\}.$$

Proposition 2.17 [*10*] *Nous avons*

- $N_P(x_0, A) = \{x' \in H, \exists\, \sigma > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle\, . \leq \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in A\}.$
- $N_P(x_0,\, A) = \left\{x' \in H\ \ t.q\ \limsup\limits_{x \xrightarrow{A} x_0} \dfrac{\langle x', x - x_0\rangle}{||x - x_0||^2} < \infty\right\}.$
- $N_P(x_0, A)$ *est convexe.*

Proposition 2.18 [*16*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$. Alors*

$$N_P(x_0, A) = \partial^P \delta(x_0, A).$$

Démonstration.

Nous avons

$$\partial^P \delta(x_0, A) = \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x, A) - \delta(x_0, A) + \sigma||x - x_0||^2,$$
$$\forall\, x \in B(x_0, \rho)\},$$

Comme $B(x_0, \rho) = B(x_0, \rho) \cap (A \cup C_H^A) = (B(x_0, \rho) \cap A) \cup (B(x_0, \rho) \cap C_H^A)$ et $\delta(x_0, A) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial^P \delta(x_0, A) =& \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x, A) + \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
& \cap \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \delta(x, A) + \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq 0 + \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
& \cap \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq +\infty + \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq \sigma||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap A\} \\
& \cap \{x' \in H,\ \exists\, \sigma > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_0\rangle \leq +\infty,\ \forall\, x \in B(x_0, \rho) \cap C_H^A\} \\
=& N_P(x_0, A) \cap H \\
=& N_P(x_0, A).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.19 [3] *Si A est convexe, alors*

$$N_P(x_0, A) = N(x_0, A).$$

Démonstration.

1. Montrons que $N(x_0, A) \subset N_P(x_0, A)$.

   Soit $x \in N(x_0, A)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle x', x - x_0 \rangle \leq 0,\, \forall\, x \in A \quad &\Rightarrow \quad \forall\, \sigma > 0,\ \langle x', x - x_0 \rangle \leq 0 \leq \sigma ||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in A,\\
&\Rightarrow \quad \forall\, \sigma > 0,\ \langle x', x - x_0 \rangle \leq \sigma ||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in A,\\
&\Rightarrow \quad \exists\, \sigma > 0,\ \langle x', x - x_0 \rangle \leq \sigma ||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in A,\\
&\Rightarrow \quad x \in N_P(x_0, A).
\end{aligned}$$

   D'où $N(x_0, A) \subset N_P(x_0, A)$.

2. Montrons que $N_P(x_0, A) \subset N(x_0, A)$.

   Soit $x \in N_P(x_0, A)$, alors d'après **la Proposition 2.17**,

$$\exists\, \sigma \geq 0,\ \langle x', x - x_0 \rangle \leq \sigma ||x - x_0||^2,\ \forall\, x \in A. \tag{2.5}$$

   Soit $z \in A$, et comme $x_0 \in A$, A est convexe, alors

$$tz + (1 - t)x_0 = t(z - x_0) + x_0 \in A,\ \forall\, t \in]0, 1[.$$

   donc, la relation (2.5) donne

$$\langle x', t(z - x_0) + x_0 - x_0 \rangle \leq \sigma ||t(z - x_0) + x_0 - x_0||^2,\ \forall\, z \in A,\ \forall\, t \in]0, 1[.$$

Par conséquence

$$\langle x',\, t(z-x_0)\rangle \leq \sigma||t(z-x_0)||^2,\, \forall\, z\in A,\, \forall\, t\in]0,1[\Rightarrow t\,\langle x', z-x_0\rangle \leq \sigma t^2||z-x_0||^2,$$

$$\forall\, z\in A,\, \forall\, t\in]0,1[,$$

$$\Rightarrow \langle x', z-x_0\rangle \leq \sigma t||z-x_0||^2,$$

$$\forall\, z\in A,\, \forall\, t\in]0,1[,$$

$$\Rightarrow \langle x', z-x_0\rangle \leq \lim_{t\downarrow 0} \sigma t||z-x_0||^2,\ \forall\, z\in A,$$

$$\Rightarrow \langle x', z-x_0\rangle \leq 0,\ \forall\, z\in A,$$

$$\Rightarrow x\in N(x_0,A).$$

D'où $\quad N_P(x_0,A)\subset N(x_0,A)$.

De 1) et 2) on obtient

$$N_P(x_0,A)=N(x_0,A). \qquad \blacksquare$$

Définition 2.16 (Cône tangent de Clarke) [3]
Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0\in A$. On appelle cône tangent de Clarke à A au point x_0 qu'on note $T_C(x_0,\, A)$ l'ensemble défini par

$$T_C(x_0,A)=\{x\in H\ t.q\ f^\circ(x_0,v)=0\}.$$

Tel que f° est le dérivée directionnelle au sens de Clarke de la fonction distance par rapport à l'ensemble A.

Proposition 2.20 *Si A est convexe*

$$T_C(x_0,A)=\{\lambda(y-x_0),\, \forall\, \lambda\geq 0,\, \forall\, y\in A\}.$$

Définition 2.17 (Cône normal de Clarke) [3]
Soient E un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0\in A$. On appelle cône normal de Clarke à A au point x_0 qu'on note $N_C(x_0,A)$, l'ensemble défini par

$$N_C(x_0,A)=\big(T_C(x_0,A)\big)^\circ=\{x'\in H\ t.q\ \langle x',x\rangle\leq 0,\ \forall\, x\in T_C(x_0,A)\}.$$

Proposition 2.21 [3] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0\in A$.*
Si A est convexe, alors

$$N_C(x_0,A)=N(x_0,A).$$

Démonstration.

D'après **la Proposition 2.20**, on a

$$\begin{aligned} N_C(x_0, A) &= \{x' \in H \ t.q \ \langle x', x\rangle \leq 0, \ \forall\, x \in T_C(x_0, A)\} \\ &= \{x' \in H \ t.q \ \langle x', \lambda(y - x_0)\rangle \leq 0, \ \forall\, \lambda \geq 0, \forall\, y \in A\} \\ &= \{x' \in H \ t.q \ \lambda \langle x', (y - x_0)\rangle \leq 0, \ \forall\, \lambda \geq 0, \forall\, y \in A\} \\ &= \{x' \in H \ t.q \ \langle x', (y - x_0)\rangle \leq 0, \ \forall\, y \in A\} \\ &= N(x_0, A). \end{aligned}$$

■

Définition 2.18 (Cône normal de Mordukhovitch) [*3*]
Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$. On appelle cône normal de Mordukhovitch à A au point x_0 qu'on note $N_M(x_0,\, A)$, l'ensemble défini par

$$N_M(x_0, A) = \{x' \in H, \exists\, x_n \xrightarrow{A} x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \ t.q \ x'_n \in N_F(x_n, A), \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposition 2.22 [*16*] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de H et $x_0 \in A$. Alors*

$$N_M(x_0, A) = \partial^M \delta(x_0, A).$$

Démonstration.

On a d'après **la Proposition 2.15**

$$\begin{aligned} \partial^M \delta(x_0, A) &= \{x' \in H, \exists\, x_n \to x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in \partial^F \delta(x_n,\, A), \ \forall\, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x' \in H, \exists\, x_n \to x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in N_F(x_n, A), \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

1) Montrons que $N_M(x_0, A) \subset \partial^M \delta(x_0, A)$.

Soit $x' \in N_M(x_0, A)$, alors

$$\exists\, x_n \xrightarrow{A} x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in N_F(x_n, A), \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\exists\, x_n \to x_0, \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in N_F(x_n, A), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Donc la relation (2.6) donne $x' \in \partial^M \delta(x_0, A)$, i.e.

$$N_M(x_0, A) \subset \partial^M \delta(x_0, A).$$

2) Montrons que $\partial^M \delta(x_0, A) \subset N_M(x_0, A)$.

Soit $x' \in \partial^M \delta(x_0, A)$, alors

$$\exists\, x_n \to x_0,\ \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in \partial^F \delta(x_n, A),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

il suffit de montrer dans (2.7) que $x_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q $x_{n_0} \notin A$, on trouve

$$\begin{aligned}\partial^F \delta(x_{n_0}, A) &= \{x' \in H,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_{n_0}\rangle \leq \delta(x, A) - \delta(x_{n_0},\ A) \\ &\quad + \varepsilon||x - x_{n_o}||,\ \forall\, x \in B(x_{n_0}, \rho)\} \\ &= \{x' \in H,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \rho > 0\ t.q\ \langle x', x - x_{n_0}\rangle \leq -\infty,\ \forall\, x \in B(x_{n_0},\ \rho)\} \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Et comme $x'_n \in \partial^F \delta(x_n, A),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, alors $x'_{n_0} \in \partial^F \delta(x_{n_0}, A) = \emptyset$.

D'où la contradiction.

Donc $x_n \xrightarrow{A} x_0$, par suite (2.7) implique

$$\exists\ x_n \xrightarrow{A} x_0,\ \exists\, x'_n \rightharpoonup^* x' \text{ t.q } x'_n \in N_F(x_n, A),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x' \in N_M(x_0, A)$$

D'où $\quad \partial^M \delta(x_0, A) \subset N_M(x_0, A)$.

De 1) et 2) on trouve $\quad N_M(x_0, A) = \partial^M \delta(x_0, A)$. ■

Proposition 2.23 [3] *Si A est convexe, alors*

$$N_M(x_0, A) = N(x_0, A).$$

Proposition 2.24 [3] *Soient H un espace de Hilbert réel, A un sous ensemble non vide fermé de et H $x_0 \in A$. Alors*

$$N_P(x_0, A) \subset N_F(x_0, A) \subset N_M(x_0, A) \subset N_C(x_0, A).$$

D'après tous qui procède, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.25 (Relation entre les cônes normaux)
Si A est convexe alors

$$N_C(x_0, A) = N_P(x_0, A) = N_F(x_0, A) = N_M(x_0, A) = N(x_0, A).$$

Chapitre 3

Étude d'une inclusion différentielle gouvernée par un cône normal

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat principal de ce mémoire, l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par le cône normal avec une perturbation lipschitzienne. De plus, on donne au une application sur ce résultat, la relation entre deux solutions de deux problèmes différents et un exemple ou nous démontrons q'une fonction est la solution d'un problème considéré.

3.1 Introduction au processus de la rafle introduit par J. J. Moreau

Le processus de la rafle joue un rôle important dans l'élastoplasticité, la quasi-statique et la dynamique. Un processus de la rafle se compose de deux ingrédients principaux : une partie qui balaie et l'autre qui est balayé, à titre d'exemple, dans le plan Euclidien, considérons un grand anneau qui contient une petite boule à l'intérieur. L'anneau va commencer a se déplacer à l'instant $t = 0$, selon le mouvement de l'anneau, la boule va rester où elle est (dans ce le cas où elle n'est pas touchée par l'anneau), ou elle est balayé vers l'intérieur de l'anneau. Dans ce dernier cas la direction du vecteur de la boule doit pointer vers l'intérieur de l'anneau pour que la boule ne quitte pas l'anneau (voir la figure 3.1) .

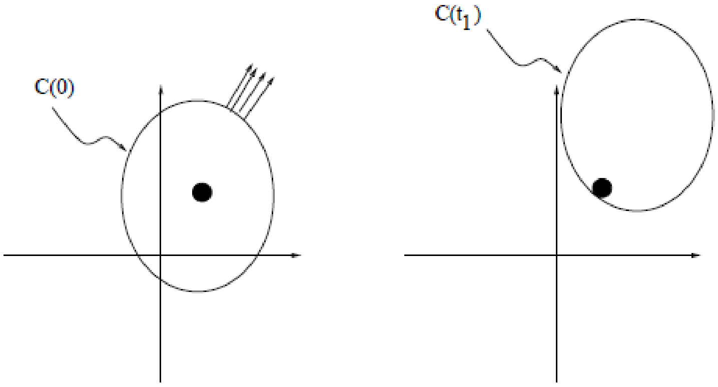

FIGURE 3.1 – Le processus de la rafle

En termes mathématiques ce problème s'écrit

$$\begin{cases} u(0) \in C(0), & \\ u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T], \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t),\, C(t)\big), & \text{p.p. } t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.1}$$

admet une solution $u \in \mathbf{L}^1_H[(0,1)]$.

Où $u(t)$ est la position de la boule à l'instant t et $C(t)$ est l'ensemble comprenant l'anneau à l'instant t. L'ensemble $N\big(C(t), u(t)\big)$ désigne l'extérieur du cône normal à l'ensemble $C(t)$ à la position $u(t)$, autrement dit, la vitesse $\dot{u}$ de la boule doit pointer vers l'intérieur de l'anneau p.p. $t \in [0,T]$.

La restriction à "presque partout" est due au fait que généralement on ne trouve pas de solution lisses $t \to u(t)$ de (3.1), mais seulement des solutions qui sont différentiables partout, en plus sur certains sous ensemble de [0,T] de mesure nulle. La condition initiale $u(0) \in C(0)$ indique que la boule au départ est contenue dans l'anneau. Le problème (3.1) est le plus simple exemple du processus de la rafle, introduit par J.J Moreau dans les années 1970. En générale l'ensemble en mouvement dépendant du temps $t \longmapsto C(t)$ est donné et nous voulons prouver l'existence d'une solution unique $t \longmapsto u(t)$ qui va prendre des valeurs dans un certain espace de Hilbert H. Notons également que $C(t)$ change sa forme tout en se déplaçant, contrairement à l'exemple, l'anneau s'est déplacé en mouvement de translation et a gardé sa forme initiale.

3.2 Énoncé du problème

Soient H une espace de Hilbert réel et $T \in \mathbb{R}_+$. Soient $u : [0,T] \to H$ une fonction, $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application lipschitzienne et $a \in C(0)$.

Considérons le problème formellement énonce par

$$(P_N) \begin{cases} u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T], \\ u(0) = a\,, & \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), & \text{p.p. } t \in [0,T], \end{cases}$$

En d'autre terme, nous cherchons une sélection $u(t) \in C(t)$, en passant par un point donné, de telle sorte que l'opposé de sa dérivée soit un vecteur normal à $C(t)$ en t.

Il existe plusieurs auteurs qui ont démontré l'existence de solutions de ce problème, nous citons [11] et [15].

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la démonstration de Valadier dans [8].

3.3 L'existence des solutions

Avant de donner le théorème d'existence on a besoin de deux lemmes suivantes.

Lemme 3.1 [*14*] *Soient H un espace de Hilbert réel, $T \in \mathbb{R}_+$ et $\dot{u} \in \mathbf{L}^1_H([0,T])$. Soit $u : [0,T] \to H$ une primitive de $\dot{u}$, alors*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle dt = \frac{1}{2}\Big\|u(t_2)\Big\|^2 - \frac{1}{2}\Big\|u(t_1)\Big\|^2, \quad \forall\, t_1,\, t_2 \in [0,T].$$

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\|u(t)\|\Big)^2 &= \frac{d}{dt}\langle u(t), u(t)\rangle \\ &= \left\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t) \right\rangle + \left\langle u(t), \frac{du(t)}{dt} \right\rangle \\ &= 2\langle \dot{u}(t), u(t)\rangle\,, \quad \forall\, t \in]0,T[. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\langle \dot{u}(t), u(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u(t)\|^2\Big), \quad \forall\, t \in]0,T[.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{u}(t), u(t)\rangle dt &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} d\big(\|u(t)\|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\Big\|u(t_2)\Big\|^2 - \frac{1}{2}\Big\|u(t_1)\Big\|^2, \quad \forall\, t_1,\, t_2 \in [0,T]. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemme 3.2 [*11*] *Soient H un espace Hilbert réel, T et $k \in \mathbb{R}_+$ et $v : [0,T] \to H$ une application. Soient $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application lipschitzienne de rapport $\leq k$ à valeurs non vide convexes fermées et $\Phi : \mathbf{L}^\infty_H([0,T]) \to H$ une application définie par*

$$\Phi(v) = \int_0^T \delta^*\Big(v(t), C(t)\Big)dt.$$

Alors, Φ est semicontinue inférieurement.
De plus, si (v_n) une suite définie sur $[0,T]$ à valeurs dans H converge faiblement vers v. Alors*

$$\Phi(v) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(v_n).$$

Nous somme maintenant en mesure de notre principal théorème d'existence.

Théorème 3.1 [*8*] *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Soient T et $k \in \mathbb{R}_+$, $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application lipschitzienne de rapport $\leq k$ à valeurs convexes fermés et $a \in C(0)$. Alors l'inclusion différentielle*

$$(P_N)\begin{cases} u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T],\\ u(0) = a\,, & \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), & p.p.\ t \in [0,T],\end{cases}$$

admet une solution $u \in \mathbf{L}^1_H([0,T])$.
De plus $\|\dot{u}(t)\| \leq k$, p.p. $t \in]0,T[$.

Démonstration.

Étape 1

Supposons $T = k = 1$ pour simplifier.

Pour tout $n \geq 1$, on a les intervalles

$$](k-1)2^{-n}, k2^{-n}[\subset [0,1].$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit les fonctions $\theta_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ par,

$$t \longmapsto \theta_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0, \\ \\ k2^{-n}, & \text{si } t \in](k-1)2^{-n}, k2^{-n}]. \end{cases}$$

Et définissons aussi les applications $X_n : [0,1] \longrightarrow H$ d'abord pour $t = 0$, $t = k2^{-n}$, $n \geq 1$ par

$$t \longmapsto X_n(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t = 0, \\ \\ \operatorname{proj}_{C(k2^{-n})}\Big(X_n\big((k-1)2^{-n}\big)\Big), & \text{si } t = k2^{-n}, \end{cases}$$

puis sur les intervalles $](k-1)2^{-n}, k2^{-n}[$ par les interpolations affines suivantes

$$X_n(t) = X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big) + \Big[t - (k-1)2^{-n}\Big]2^n\Big[X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big].$$

On a, sur $](k-1)2^{-n}, k2^{-n}[$,

$$\begin{aligned} X_n(t) &= X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big) + \Big[t - (k-1)2^{-n}\Big]2^n\Big[X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big] \\ &= X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big) + 2^n\Big[X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big]t - (k-1)\Big[X_n(k2^{-n}) \\ &- X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{X}_n(t) &= 2^n\Big[X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big] \\ &= \text{cte}, \quad \forall\, t \in](k-1)2^{-n}, k2^{-n}[. \end{aligned}$$

C'est à dire, la dérivée $\dot{X}_n(t)$ est constante sur $](k-1)2^{-n},\ k2^{-n}[$.

De plus, nous avons

$$X_n(k2^{-n}) = \operatorname{proj}_{C(k2^{-n})}\Big(X_n\left((k-1)2^{-n}\right)\Big).$$

D'après **la Proposition 2.10**, on obtient

$$X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big) \in -N\Big(X_n(k2^{-n}), C(k2^{-n})\Big).$$

Et comme $2^n > 0$, on a

$$2^n\Big[X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big] \in -N\Big(X_n(k2^{-n}), C(k2^{-n})\Big),$$

donc

$$\dot{X}_n(t) \in -N\Big(X_n(k2^{-n}), C(k2^{-n})\Big).$$

i.e.

$$\dot{X}_n(t) \in -N\Big(X_n\big(\theta_n(t)\big), C\big(\theta_n(t)\big)\Big). \tag{3.2}$$

D'autre part, nous avons C est lipschitzienne de rapport ≤ 1, alors

$$\mathcal{H}\big(C(t_1),\, C(t_2)\big) \leq |t_1 - t_2|, \quad \forall\, t_1,\, t_2 \in [0,\, 1], \tag{3.3}$$

d'où

$$\|x - y\| \leq |t_1 - t_2|, \quad \forall\, t_1,\, t_2 \in [0,\, 1],\ \forall\, x \in C(t_1), \forall\, y \in C(t_2). \tag{3.4}$$

En prenant

$$t_1 := k2^{-n}, \qquad t_2 := (k-1)2^{-n}$$

et

$$x := X_n(k2^{-n}), \qquad y := X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big).$$

On obtient

$$\Big\|X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big\| \leq \Big|k2^{-n} - (k-1)2^{-n}\Big| = 2^{-n}.$$

Par suite

$$2^n\Big\|X_n(k2^{-n}) - X_n\Big((k-1)2^{-n}\Big)\Big\| \leq 2^n 2^{-n} = 1,$$

d'où

$$\Big\|\dot{X}_n(t)\Big\| \leq 1, \quad \forall\, t \in](k-1)2^{-n}, k2^{-n}[. \tag{3.5}$$

C'est à dire, pour tout $t \in [0,1]$, $\dot{X}_n \in \overline{B}(0,1)$, telle que $\overline{B}(0,1)$ la boule unité de $\mathbf{L}_H^\infty$.

Alors, d'après **le Théorème 1.8**, on peut extraire une sous suite de $(\dot{X}_n)$ qu'on note $(\dot{u}_p)$ converge $\sigma(\mathbf{L}^\infty_H,\, \mathbf{L}^1_H)$ vers $\dot{u} \in \overline{B}(0,1)$ i.e.,

$$\lim_{p\to+\infty} \langle \dot{u}_p, \varphi\rangle = \langle \dot{u}, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{L}^1_H.$$

Donc

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t), \varphi(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle \dot{u}(t), \varphi(t)\rangle dt \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{L}^1_H. \tag{3.6}$$

Posons

$$u_p(t) = a + \int_0^t \dot{u}_p(s)ds, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Alors $u_p(t) \in C(t),\ \forall\, t \in [0,1]$.

Pour $t_0 \in [0,1]$ fixé et (e_j) une base hilbertien, on définie l'application $\varphi : [0,1] \to H$ comme suite

$$\varphi(t) = \delta(t,[0,t_0])e_j = \begin{cases} e_j\,, & \text{si } 0 \le t \le t_0, \\ 0\,, & \text{si } t_0 < t \le 1. \end{cases}$$

On a, d'après la relation (3.7),

$$\begin{aligned} \langle u_p(t_0), e_j\rangle &= \langle a, e_j\rangle + \langle \int_0^{t_0} \dot{u}_p(t)\, dt, e_j\rangle \\ &= \langle a, e_j\rangle + \int_0^{t_0} \langle \dot{u}_p(t), e_j\rangle dt \\ &= \langle a, e_j\rangle + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t), \varphi(t)\rangle dt. \end{aligned}$$

D'après la relation (3.6) et $\mathbf{L}^\infty_H \subset \mathbf{L}^1_H$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty} \langle u_p(t_0), e_j\rangle &= \lim_{p\to+\infty} \left(\langle a, e_j\rangle + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t), \varphi(t)\rangle dt \right) \\ &= \langle a, e_j\rangle + \int_0^1 \langle \dot{u}(t), \varphi(t)\rangle dt \\ &= \langle a + \int_0^{t_0} \dot{u}(t)\, dt, e_j\rangle. \end{aligned}$$

c'est à dire $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(t_0) = a + \int_0^{t_0} \dot{u}(t)\, dt$.

Donc $(u_p(t))$ converge fortement vers $u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(t)dt,\ \forall\, t \in [0,1]$,

et puisque $C(t),\ \forall\, t \in [0,1]$ est fermé, donc d'après **la Proposition 1.2**,

$$u(t) \in C(t), \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Étape 2

Soit $\Phi : \mathbf{L}_H^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction définie par

$$\Phi(v) = \int_0^1 \delta^*\Big(v(t), C(t)\Big)dt.$$

D'après **le Lemme 3.2** Φ est s.c.i et

$$\Phi(-\dot{u}) \leq \liminf_{p\to+\infty} \Phi(-\dot{u}_p). \tag{3.9}$$

Soit $n_p \in \mathbb{N}$ tel que $\dot{u}_p = \dot{X}_{n_p}$.

On a pour tout $t \in [0,1]$, $C(t)$ est convexe fermé et $||\dot{u}_p(t)|| \leq 1$, alors d'après **le Corollair 1.4**

$$\mathcal{H}\Big(C(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big) = \sup_{\dot{u}_p(t)\in\overline{B}(0,1)} \left|\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\right|,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Donc

$$\left|\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\right| \leq \mathcal{H}\Big(C(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big),\ \forall\, t \in [0,1].$$

D'autre part, C est lipschitzienne de rapport ≤ 1, alors

$$\mathcal{H}\Big(C(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big) \leq \left|t - \theta_{n_p}(t)\right|, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Ce qui donne

$$\left|\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\right| \leq \left|t - \theta_{n_p}(t)\right|, \quad \forall\ t \in [0,1],$$

par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \left[\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\right] dt\right| &\leq \int_0^1 \left|\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left|t - \theta_{n_p}(t)\right| dt. \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \Big[\langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle - \big\langle \dot{u}_p(t), u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle\Big]dt\right| &= \left|\int_0^1 \Big[\big\langle \dot{u}_p(t), u_p(t) - u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle\Big]dt\right| \\ &\leq \int_0^1 \|\dot{u}_p(t)\| \left\|u_p(t) - u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\right\| dt.\end{aligned} \tag{3.12}$$

On a pour $x := u_p(t)$, $y := u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)$ et $t_1 := t$, $t_2 := \theta_{n_p}(t)$ dans la relation (3.4)

$$\left\|u_p(t) - u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\right\| \leq \left|t - \theta_{n_p}(t)\right|, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

et comme $\|\dot{u_p}(t)\| \leq 1$, donc la relation (3.12) donne,

$$\left|\int_0^1 \Big[\langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle - \big\langle \dot{u}_p(t), u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle\Big]dt\right| \leq \int_0^1 \left|t - \theta_{n_p}(t)\right| dt. \tag{3.13}$$

De (3.11) et (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 \Big[\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big) + \langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle - \big\langle \dot{u}_p(t),\, u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle\Big]dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 \Big[\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) - \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)\Big]\, dt\right| \\ &+ \left|\int_0^1 \Big[\langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle - \big\langle \dot{u}_p(t), u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle\Big]dt\right| \\ &\leq 2\int_0^1 \left|t - \theta_{n_p}(t)\right| dt.\end{aligned}$$

De plus, nous avons $\dot{u}_p(t) \in -N\Big(u_p\big(\theta_{n_p}(t)\big), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big)$, alors d'après **la Définition 2.13**,

on a

$$\begin{aligned}\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C\left(\theta_{n_p}(t)\right)\Big) &= \big\langle -\dot{u}_p(t), u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle \\ &= -\big\langle \dot{u}_p(t), u_p\left(\theta_{n_p}(t)\right)\big\rangle,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left|\int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big)dt + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle\, dt\right| \leq 2\int_0^1 \left|t - \theta_{n_p}(t)\right| dt,$$

Étape 3

Nous avons $u_p(t) \in C(t),\ \forall\, t \in [0,1]$, alors

$$\delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big) \geq \langle -\dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle\,, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

par suite

$$\int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big)dt + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t), u_p(t)\rangle\, dt \geq 0.$$

On pose la application $q : \mathbf{L}_H^\infty \longrightarrow H$ définie par

$$q(\dot{u}) = \int_0^1 \langle \dot{u}(t), u(t)\rangle\, dt.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Phi(-\dot{u}_p) + q(\dot{u}_p) &= \int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big)dt + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t),\ u_p(t)\rangle\, dt \\
&= \left|\int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}_p(t), C(t)\Big)dt + \int_0^1 \langle \dot{u}_p(t),\ u_p(t)\rangle\, dt\right| \\
&\leq 2\int_0^1 \big|t - \theta_{n_p}(t)\big|\, dt.
\end{aligned}$$

Nous avons $\theta_{n_p}(t) = 2^{-n_p}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Phi(-\dot{u}_p) + q(\dot{u}_p) &\leq 2\int_0^1 \big|t - \theta_{n_p}(t)\big|\, dt \\
&= 2\left|\frac{1}{2} - 2^{-n_p}\right| \\
&\leq 22^{-n_p}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après **le Lemme 3.1**, **la Proposition 1.12** et **la Proposition 1.5**, puisque (u_p) converge faiblement * vers u, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \langle \dot{u}(t), u(t)\rangle\, dt &= \frac{1}{2}\Big(\|u(1)\|^2 - \|u(0)\|^2\Big) \\
&\leq \liminf_{p\to+\infty} \frac{1}{2}\Big(\|u_p(1)\|^2 - \|u(0)\|^2\Big) \\
&= \liminf_{p\to+\infty} \int_0^1 < \dot{u}_p(t), u_p(t) > dt.
\end{aligned}$$

D'où,

$$q(\dot{u}) \leq \liminf_{p\to\infty} q(\dot{u}_p) \tag{3.15}$$

De les relations (3.9), (3.14), (3.15) et **la Proposition 1.5** , on a

$$\begin{aligned} \Phi(-\dot{u}) + q(\dot{u}) &\leq \liminf_{p\to\infty} \Phi(-\dot{u}_p) + \liminf_{p\to\infty} q(\dot{u}_p) \\ &\leq \liminf_{p\to\infty} \Big(\Phi(-\dot{u}_p) + q(\dot{u}_p) \Big) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

D'autre part, nous avons d'après la relation (3.8)

$$u(t) \in C(t), \quad \forall\, t \in [0,1],$$

alors

$$\delta^*\Big(-\dot{u}(t), C(t)\Big) \geq \langle -\dot{u}(t), u(t) \rangle\,, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

par conséquence

$$\int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}(t), C(t)\Big) dt + \int_0^1 \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle\, dt \geq 0,$$

d'où

$$\Phi(-\dot{u}) + q(\dot{u}) \geq 0. \tag{3.17}$$

Les deux relations (3.16) et (3.17) donnent

$$\Phi(-\dot{u}) + q(\dot{u}) = 0.$$

i.e,

$$\int_0^1 \delta^*\Big(-\dot{u}(t), C(t)\Big) dt + \int_0^1 \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle\, dt = 0,$$

donc

$$\int_0^1 \Big[\delta^*\Big(-\dot{u}(t), C(t)\Big) + \langle \dot{u}(t),\, u(t) \rangle \Big]\, dt = 0.$$

D'après **le Théorème 1.4**

$$\delta^*\Big(-\dot{u}(t), C(t)\Big) + \langle \dot{u}(t), u(t) \rangle = 0, \quad p.p\ t \in [0,1],$$

D'où

$$\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), \quad p.p.\ t \in [0,1].$$

C'est à dire u est une solution de notre problème (P_N). ■

3.4 L'unicité de solution

D'après le théorème d'existence des solutions, on donne maintenant le théorème d'unicité de solution du problème (P_N).

Théorème 3.2 *[14] Soit H un espace de Hilbert réel séparable, soient T et $k \in \mathbb{R}_+$, l'application $u : [0,T] \to H$ et $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multi-application lipschitzienne de rapport $\leq k$ à valeurs convexes fermées et $a \in C(0)$. Alors l'inclusion différentielle*

$$(P_N) \begin{cases} u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T], \\ u(0) = a, \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), & p.p.\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Admet une solution unique $u \in \mathbf{L}^1_H([0,T])$.

Démonstration.

D'après **le Théorème d'existence 3.1**, (P_N) admet des solutions dans $\mathbf{L}^1_H([0,T])$.

Soient u et v deux solutions de inclusion (P_N).

Alors,

$$\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), \text{ et } \dot{v}(t) \in -N\big(v(t), C(t)\big) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Par définition du cône normal, on a

$$\langle -\dot{u}(t), v(t) - u(t) \rangle \leq 0, \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \tag{3.18}$$

et

$$\langle -\dot{v}(t), u(t) - v(t) \rangle \leq 0, \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \tag{3.19}$$

De (3.18) et (3.19), on a

$$\langle \dot{u}(t) - \dot{v}(t), u(t) - v(t) \rangle \leq 0, \quad \text{p.p. } t \in [0,T],$$

Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ et $w = u - v$.

Par **le Théorème 1.4**, nous avons

$$\langle \dot{w}(t), w(t) \rangle \leq 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{w}(t), w(t) \rangle \, dt \leq 0$$

d'après **le Lemme 3.1**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big[\,\|w(t_2)\|^2 - \|w(t_1)\|^2\,\Big] \leq 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; \frac{1}{2}\Big[\,\|u(t_2)-v(t_2)\|^2 - \|u(t_1)-v(t_1)\|^2\,\Big] \leq 0\\ &\Leftrightarrow \;\; \|u(t_2)-v(t_2)\|^2 \leq \|u(t_1)-v(t_1)\|^2\\ &\Leftrightarrow \;\; \|u(t_2)-v(t_2)\| \leq ||u(t_1)-v(t_1)||\end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq \|u(T)-v(T)\| \leq \cdots \leq \|u(t_2)-v(t_2)\| \leq \|u(t_1)-v(t_1)\| \leq \cdots \leq \|u(0)-v(0)\| = ||a-a|| = 0$$

Ce qui donne

$$||u(t)-v(t)|| = 0, \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Finalement $u(t) = v(t), \;\forall\, t \in [0,T]$.

D'où l'unicité de la solution de (P_N). ∎

3.5 Applications

Après la démonstration d'existence et d'unicité des solutions de l'inclusion différentielle (P_N), on donne maintenant une relation entre deux solutions de deux inclusions différentielles considérés.

Théorème 3.3 [*11*] *Soient H un espace de Hilbert réel séparable, T, k_C et $k_D \in \mathbb{R}_+$. Soient $C : [0,T] \rightrightarrows H$ et $D : [0,T] \rightrightarrows H$ deux multi-application lipschitziennes de rapports $\leq k_C$ (respectivement $\leq k_D$) à valeurs non vides convexes fermées. Soient $a \in C(0)$ et $b \in D(0)$.*
Si $u : [0,T] \to H$ est un solution de (P_{N_C}) i.e.,

$$(P_{N_C})\begin{cases} u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,T],\\ u(0) = a, & \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), & p.p.\; t \in [0,T]. \end{cases}$$

Et si $v : [0,T] \to H$ est une solution de (P_{N_D}) i.e.,

$$(P_{N_D})\begin{cases} v(t) \in D(t), & \forall\, t \in [0,T],\\ v(0) = b, & \\ \dot{v}(t) \in -N\big(v(t),\, D(t)\big), & p.p.\; t \in [0,T]. \end{cases}$$

Alors

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \|u(0)-v(0)\|^2 + 2(k_C+k_D)\int_0^t \Delta(s)ds, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Où

$$\Delta(t) = \mathcal{H}\big(C(t),\, D(t)\big), \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Démonstration.

Pour $t \in [0,T]$ fixé, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(C(t),\, D(t)\big) &\geq \|u(t)-v(t)\| \\ &\geq \|u(t)\| - \|v(t)\|. \end{aligned}$$

alors

$$\|u(t)\| \leq \|v(t)\| + \mathcal{H}(C(t),\, D(t)),$$

i.e.,

$$u(t) \in D(t) + \overline{B}\big(0, \Delta(t)\big).$$

Donc, il existe $d(t) \in D(t)$ et $r(t) \in H$ telle que

$$u(t) = d(t) + r(t) \text{ et } \|r(t)\| \leq \Delta(t).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(D(t),\, C(t)\big) &\geq \|v(t)-u(t)\| \\ &\geq \|v(t)\| - \|u(t)\|. \end{aligned}$$

alors

$$\|v(t)\| \leq \|u(t)\| + \mathcal{H}\big(D(t),\, C(t)\big)$$

i.e.,

$$v(t) \in C(t) + \overline{B}\big(0, \Delta(t)\big).$$

Donc, il existe $c(t) \in C(t)$ et $s(t) \in H$ telle que

$$v(t) = c(t) + s(t) \text{ et } \|s(t)\| \leq \Delta(t).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u(t)-v(t)\|^2\Big) &= \langle \dot{u}(t)-\dot{v}(t), u(t)-v(t)\rangle \\
&= \langle \dot{u}(t), u(t)-v(t)\rangle - \langle \dot{v}(t), u(t)-v(t)\rangle \\
&= \langle \dot{u}(t), u(t)-c(t)-s(t)\rangle - \langle \dot{v}(t), d(t)+r(t)-v(t)\rangle \\
&= \langle \dot{u}(t), u(t)-c(t)\rangle + \langle \dot{v}(t), v(t)-d(t)\rangle - \langle \dot{u}(t),\, s(t)\rangle - \langle \dot{v}(t), r(t)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Comme $\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big)$, $\dot{v}(t) \in -N\big(v(t),\, D(t)\big)$ et $c(t) \in C(t)$, $d(t) \in D(t)$.

Donc

$$\langle -\dot{u}(t), c(t)-u(t)\rangle \leq 0 \text{ et } \langle -\dot{v}(t), d(t)-v(t)\rangle \leq 0.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u(t)-v(t)\|^2\Big) &\leq -\langle \dot{u}(t), s(t)\rangle - \langle \dot{v}(t), r(t)\rangle \\
&\leq \|\dot{u}(t)\|\ \|s(t)\| + \|\dot{v}(t)\|\ \|r(t)\| \\
&\leq (\|\dot{u}(t)\| + \|\dot{v}(t)\|)\,\Delta(t).
\end{aligned}$$

On a, d'après **le Théorème d'existence 3.1**

$$\|\dot{u}(t)\| \leq k_C \text{ et } \|\dot{v}(t)\| \leq k_D \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Soit $t_0 \in [0,T]$. Alors

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_0} \frac{d}{dt}\Big(\|u(t)-v(t)\|^2\Big)\,dt \leq \int_0^{t_0} (k_C + k_D)\,\Delta(t)\,dt,$$

par conséquence

$$\frac{1}{2}\Big(\|u(t_0)-v(t_0)\|^2 - \|u(0)-v(0)\|^2\Big) \leq \int_0^{t_0} (k_C + k_D)\,\Delta(t)\,dt,$$

d'où

$$\|u(t_0)-v(t_0)\|^2 \leq \|u(0)-v(0)\|^2 + 2(k_C + k_D)\int_0^{t_0} \Delta(t)\,dt.$$

i.e.

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \|a-b\|^2 + 2(k_C + k_D)\int_0^{t} \Delta(s)\,ds,\ \forall\, t \in [0,T] \qquad \blacksquare$$

On donne maintenant une exemple ou on démontrons que une fonction u est une solution d'une inclusion différentielle (P_N).

Exemple 3.1 [11] *Soient* $H = \mathbb{R}$ *et* $C : [0,1] \rightrightarrows H$ *une multi-application définie par*

$$t \longmapsto C(t) = \begin{cases} [t,1]\,, & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ [1-t,1]\,, & si\ \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Alors la fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$t \longmapsto u(t) = \begin{cases} t\,, & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\,, & si\ \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

est une solution de l'inclusion différentielle suivante

$$(P_N) \begin{cases} u(t) \in C(t), & \forall\, t \in [0,1], \\ u(0) = 0\,, & \\ \dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), & p.p.\ t \in [0,1], \end{cases}$$

Démonstration.

1) On doit montrer que C vérifie les conditions du **Théorème 3.1**

En début, C est lipschitzienne.

En effet,

a) Soit $t \in [0, \frac{1}{2}],\ s \in [0, \frac{1}{2}]$, donc $C(t) = [t,1]$ et $C(s) = [s,1]$.

• Si $t < s$ alors $C(s) \subset C(t)$, ce qui donne $e(C(s), C(t)) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) &= e\big(C(t), C(s)\big) \\ &= e\big([t,1], [s,1]\big) \\ &= \sup_{a \in [t,1]} D\big(a, [s,1]\big) \\ &= D\big(t, [s,1]\big) \\ &= \inf_{b \in [s,1]} d(t,b) \\ &= s - t. \end{aligned} \tag{3.20}$$

• Si $s < t$ alors $C(t) \subset C(s)$, donc $e\big(C(t), C(s)\big) = 0$ et

$$\mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) = e\big(C(s), C(t)\big) = t - s. \tag{3.21}$$

De (3.20) et (3.21), on trouve

$$\mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) = |t-s|, \quad \forall\, t \in [0, \frac{1}{2}],\ \forall\, s \in [0, \frac{1}{2}].$$

b) Soit $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $C(t) = [1-t, 1]$ et $C(s) = [1-s, 1]$.

• Si $t < s$ alors $1-t > 1-s$, c'est à dire $C(t) \subset C(s)$,

ce qui donne $e\big(C(t),\, C(s)\big) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) &= e\big(C(s),\, C(t)\big) \\ &= \sup_{b \in [1-s,1]} D\big(b, [1-t, 1]\big) \\ &= D\big(1-s, [1-t, 1]\big) \\ &= \inf_{a \in [1-t,1]} d(1-s, a) \\ &= (1-t) - (1-s) \\ &= s - t. \end{aligned} \tag{3.22}$$

• Si $s < t$ alors $1-t < 1-s$, c'est à dire $C(s) \subset C(t)$,

ce qui donne $e\big(C(s), C(t)\big) = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) &= e\big(C(t), C(s)\big) \\ &= (1-s) - (1-t) \\ &= t - s. \end{aligned} \tag{3.23}$$

De (3.22) et (3.23), on obtient

$$\mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) = |t-s|, \quad \forall\, t \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big],\ \forall\, s \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]$$

c) Soit $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $C(t) = [t, 1]$ et $C(s) = [1-s, 1]$.

• Si $t < 1-s$, alors

$$\mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) = 1 - s - t. \tag{3.24}$$

• Si $1-s < t$, alors

$$\mathcal{H}(C(t),\, C(s)) = t - (1-s). \tag{3.25}$$

de (3.24) et (3.25), on obtient

$$\mathcal{H}\big(C(t),\, C(s)\big) = |1-s-t|, \quad \forall\, t \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big],\ \forall\, s \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big].$$

on a $\dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} - s \leq 0$ et $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} - t \geq 0.$

De plus $t \leq s$. Donc,

$$\begin{aligned}
|(1-s)-t| &= \left|\left(\frac{1}{2}-s\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}-s\right| + \left|\frac{1}{2}-t\right| \\
&\leq \left(s-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right) \\
&= s-t \\
&= |t-s|, \quad \forall\, t \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big],\ \forall\, s \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]
\end{aligned}$$

On obtient, alors

$$\mathcal{H}(C(t),\, C(s)) \leq |t-s|, \quad \forall\, t \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big],\ \forall\, s \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]$$

De (a), (b) et (c), on trouve

$$\mathcal{H}(C(t),\, C(s)) \leq |t-s|, \quad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, s \in [0,1]$$

D'où C est lipschitzienne de rapport ≤ 1

De plus, puisque $C(t)$ sont des intervalles fermées de $\mathbb{R}$, $\forall\, t \in [0,T]$, alors d'après **la Proposition 1.3**, C est à valeurs convexes fermées.

D'autre part, on a $C(0) = [0,1]$ et $0 \in [0,1]$ i.e., $a = 0 \in C(0)$.

Donc d'après **le Théorème 3.1**, l'inclusion différentielle (P_N) admet une solution $u \in \mathbf{L}^1_H([0,1])$.

2) Montrons que la fonction $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$t \longmapsto u(t) = \begin{cases} t\,, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\[2ex] \frac{1}{2}\,, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

est la solution du l'inclusion différentielle (P_N).

On a $u(0) = 0 \in C(0)$.

De plus, $u(t) \in C(t)\ \forall\, t \in [0,1]$. En effet,

• on a pour $t \in [0, \frac{1}{2}],\ u(t) = t \in [t,1] = C(t)$.

• Et pour $t \in [\frac{1}{2}, 1],\ -1 \leq -t < -\frac{1}{2}$ alors $0 \leq 1 - t \leq \frac{1}{2}$.

Donc $u(t) = \frac{1}{2} \in [1-t, 1] = C(t)$.

D'autre part, $\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big),\ p.p.\ t \in [0,1]$.

En effet,

• Si $t \in]0, \frac{1}{2}[:\ \dot{u}(t) = \dot{(t)} = 1$.

• Si $t \in]\frac{1}{2}, 1[:\ \dot{u}(t) = \dot{(\frac{1}{2})} = 0$.

si $t = \frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{\substack{< \\ t \to \frac{1}{2}}} \frac{u(t) - u(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} = \lim_{\substack{< \\ t \to \frac{1}{2}}} \frac{t - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} = 1,$$

et

$$\lim_{\substack{> \\ t \to \frac{1}{2}}} \frac{u(t) - u(\frac{1}{2})}{t - \frac{1}{2}} = \lim_{\substack{> \\ t \to \frac{1}{2}}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} = 0.$$

Donc u n'est pas dérivable au point $t = \frac{1}{2}$.

C'est à dire, u est dérivable sur les intervalles $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1[$ et n'est pas dérivable au point $t = \frac{1}{2}$.

Par conséquence

$$\dot{u}(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2}, \\ 0\,, & \text{si } \ \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases}$$

On doit montrer que $\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big),\ \forall\, t \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$.

En effet,

i) Si $t \in]0, \frac{1}{2}[,\ C(t) = [t, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned} N(t,[t,1]) &= \{\xi \in \mathbb{R}\ t.q\ \ \langle \xi,\, x - t\rangle \leq 0,\ \forall\, x \in [t,1]\} \\ &= \{\xi \in \mathbb{R}\ t.q\ \xi(x-t) \leq 0,\ \forall\, x \in [t,1]\}. \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} t \leq x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq x - t \leq 1 - t \\ &\Rightarrow \xi(x-t) \leq 0 \\ &\Rightarrow \xi \leq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} N(t,\, [t,1]) &= \{\xi \in \mathbb{R} \ t.q \ \xi \leq 0\} \\ &=]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

D'où $\dot{u}(t) = 1 \in -N\big(t, [t,1]\big)$.

ii) Si $t \in]\frac{1}{2}, 1[, u(t) = \frac{1}{2},\ \dot{u}(t) = 0$ et $C(t) = [1-t, 1]$.

On a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < t < 1 &\Rightarrow -t < -\frac{1}{2}, \\ &\Rightarrow 1 - t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2} \in \mathrm{int}(C)$, alors d'après **la Proposition 2.11**

$$N\Big(\frac{1}{2},\, [1-t,1]\Big) = \{0\}.$$

D'où $\dot{u}(t) = 0 \in -N\big(\frac{1}{2}, [1-t,1]\big)$

de (i) et (ii), on obtient

$$\dot{u}(t) \in -N\big(u(t), C(t)\big), \ \text{ p.p. } t \in [0,1].$$

Enfin, u est une solution de l'inclusion différentielle (P_N). ∎

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème d'inclusion différentielle de type processus de la rafle du premier ordre gouvernée par un cône normal sous l'hypothèse de lipschitzité de la multi-application.
Ce dernier à été introduit par J. J. Moreau mais il existe plusieurs auteurs qui ont démontré l'existence de solutions de ce type de problèmes.
Dans ce mémoire nous avons détallé la démonstration d'existence de solutions de Valadier énonce dans [8], et la démonstration du l'unicité du Moreau énoncé dans [14]. Pour ce qui s'intéressent à ce types d'inclusions différentielles, il existe plusieurs travaux dans la littérature, la différence entre eux réside dans les hypothèses que nous donnons à la multi-application.

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin et A. Cellina,** *Differential Inclusions*, Set valued maps ans viability theory, Spring-Verlag. MR 9Id : 49001. Berlin, (1984).

[2] **D. Azzam-Laouir,** *Cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Purs et Appliquées, Université de Jijel, (2009).

[3] **M. Bounkhel,** *Regularity Concepts in Nonsmooth analysis,* Theory and Applications, Springer Science+Business Media. LLC, (2012).

[4] **H. Brezis,** *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, Milan et Barcelone, (1983).

[5] **C. Castaing et M. Valadier,** *Convex analysis and measurable multifunctions,* Lectures Notes in Math, 580 Springer-Verlag. Berlin, (1977).

[6] **C. Castaing,** *Sur une nouvelle classe d'équation d ?évolution dans les espaces de Hilbert*, in Siminaire d'analyse convexe. expose 10. Montpellier, (1983).

[7] **F. H. Clarke,** *Nonsmooth Analysis in Systems and Control Theory,* Springer-verlag New York. Int, (1998).

[8] **M. Valadier,** *Quelque resultats de base concernant le processus de rafle*, Siminaire d'analyse convexe. Exposé $N°3$. Motpellier, (1988).

[9] **T. Gallouët et R. Herbin,** *Mesure, Integration et Probabilites*, (2009).

[10] **A. Ya. Kruger,** *On Frechet subdifferentials,* Journal of Mathematical Sciences, Vol. 116, No. 3, (2003).

[11] **M. Kunze et M. D. P. Monteitro Marques,** *An Introduction to Moreau's Sweeping Process,* Springer Verlag Berlin Heidelberg, (2000).

[12] **M. D. P. Monteitro Marques,** *Rafle par un convexe semicontinu inférieurement d ?intérieur non vide en dimension finie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 299. 307-310, (1984).

[13] **J. J. Moreau,** *Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique,* C. R. Acad. Sci. A, 1118-121. 273, (1971).

[14] **J. J. Moreau**, *Rafle pare un convexe variable. (Premier partie)*, Siminaire d'analyse convexe exposé 3. Montpellier, (1971).

[15] **J. J. Moreau,** *Rafle pare un convexe variable. (Deuxième partie)* Siminaire d'analyse convexe exposé 3. Montpellier, (1972).

[16] **W. Schirotzek,** *Nonsmooth Analysis.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, (2007).

[17] **Y. Sonntag,** *Topologie Et Analyse Fonctionnelle,* ellipses, (1997).

[18] **H. Tanaka,** *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions*, Hiroshima Math. J. 9. 163-177, (1980).

[19] **P. Thomsen,** *Analyse. Espaces vectoriels normés. Séries à termes constants. Dérivation.Intégration,* Masson. Paris, (1997).

[20] **J. V. Tiel,** *Convex Analysis an introductory text,* Northern Ireland. Ltd, (1984).

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة وجود و وحدانية حلول احتوائية تفاضلية من الدرجة الأولى لنسق النشل محكم بمخروط طبيعي في فضاء هيلبارتي مع بعض التطبيقات على هذه الحلول.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une inclusion différentielle du premier ordre gouvernée par un cône normal dans un espace de Hilbert. De plus, on donne des applications sur ses solutions.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of a differential inclusion of first order sweeping process governed by a normal cone in a Hilbert space. Moreover, we give some applications of the differential inclusion solutions.