REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA DE JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ...
Série : ...

Mémoire
Présenté pour obtenir le diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Fondamentales
Option : Analyse et applications

Thème

Problèmes extrémaux et contrôle optimal

Présenté par

Wahiba Frites **Amel Belhaine**

Soutenu le : 19/ juin /2017
devant le jury composé de :

Président :	N. Arada	M.C.B	Université de Jijel
Rapporteur :	D.Affane	M.C.B	Université de Jijel
Examinateurs :	H. Menigher	M.A.A	Université de Jijel

Promotion : 2016/2017

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous à donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur, Madame D. Affane, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils porté à notre recherche, acceptant d'examiner notre travail afin de l'enrichir par leurs propositions.

Ces remerciements vont tout d'abord à tous les enseignants et membres de l'administration du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Problèmes extrémaux et contrôle optimal

5 juillet 2017

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Dans ce mémoire nous présentons des aspects de base de l'analyse non-linéaire et une illustration de leur utilisation dans différents problèmes appliqués. Ce travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions, définitions et des théorèmes que nous avons utilisé dans la démonstration de certains résultats nécessaires.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons un aperçu des aspects fondamentaux d'analyse lisse et non lisse. Ce chapitre fournit tous les outils de base pour aborder la théorie et les sujets appliqués dans le chapitre suivant. D'abord nous commençons par présenter les éléments de base du calcul classique des fonctions lisses définies dans un espace de Banach. Nous présentons donc les notions de dérivées au sens de Gâteaux et de Fréchet, puis étudions leurs propriétés. Nous développons les théorèmes des valeurs moyennes, et nous considérons des dérivées partielles pour les fonctions définies sur les espaces de produits et nous présentons deux théorèmes de base importants dans l'analyse et la géométrie différentielle, qui sont, le théorème de la fonction implicite et le théorème de la fonction inverse.

Ainsi, nous traitons les fonctions convexes définies dans un espace de Banach et qui fournissent le lien qui relie l'analyse lisse et non lisse. Les fonctions convexes continues ont des propriétés de différentiabilité remarquables sur certains espaces de Banach et dans $\mathbb{R}^N$ possèdent des dérivées dans des conditions qui sont plus faibles que dans les conditions habituelles. Pour les fonctions convexes semicontinues inférieures qui ne sont pas différentiables, on peut introduire un remplacement multivoque de la dérivée connue par le sous-différentiel (convexe) d'une fonction. Ensuite, nous étudions les propriétés de base du sous-différentiel et, simultanément, nous développons la théorie de la dualité pour des fonctions convexes qui sont étroitement liées à la théorie de la sous différentiabilité. Puis, nous étendons la notion de sous-différentiel à des fonctions non convexes. Ceci est réalisé avec l'utilisation des fonctions localement Lipschitziennes. Pour de telles fonctions nous définissons un opérateur sous différentiel, connu sous le nom de sous différentiel généralisé, et développons les règles de base du calcul correspondant.

Enfin, nous introduisons une convergence de fonctions, distincte de la convergence ponctuelle. Cette convergence est connue comme la Γ-convergence et nous présentons les résultats de base qui la concernent.

Dans le troisième chapitre nous utilisons les outils mathématiques nécessaires du chapitre précédent pour étudier les problèmes extrémaux et optimaux. Premièrement on fait une étude détaillée de la notion topologique de la semi-continuité inférieure. Puis nous traitons des problèmes d'optimisation de dimension infinie avec contraintes et nous les analysons par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode est étroitement liée aux problèmes de valeur propre non linéaire. Ensuite nous étudions les points selle et développons une théorie de la dualité générale pour les problèmes d'optimisation convexe. Les points selle apparaissent dans la théorie des jeux et en général dans des problèmes de contrôle où les contrôleurs présentent des intérêts contradictoires. La dualité est au centre de l'analyse convexe. Dans l'analyse fonctionnelle initiale, nous rencontrons les premières instances de dualité avec les théorèmes de séparation pour les ensembles convexes, qui seront étendues avec l'introduction d'une fonction conjuguée convexe. En utilisant une "perturbation" d'un problème de minimisation convexe, nous associons une maximisation concave et étudions la relation précise entre les deux. Avec ces outils mathématiques, nous passons à l'étude du calcul des problèmes de contrôle optimal (théorie de l'existence, relaxation).

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et théorèmes qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats.

Après quelques notations, nous présentons des définitions fondamentales ainsi que quelques notions relatives à la convexsité sur un espace de Banach, et quelques résultats d'analyse fonctionnele qui seront utiles pour la suit.

1.1 Notations

Soit X un espace de Banach, et soit X^* son dual topologique . $q \in [1; +\infty[$, $1 \leq p \leq +\infty$ $N \in \mathbb{N}$, C un sous ensemble de X et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note par

- $\mathrm{L}^q(\Omega, \mathbb{R}^N) = \{u(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}^N : \ u(\cdot)$ est mesurable et $\int_\Omega \|u(t)\|^q dt < +\infty\}$, l'espcae $\mathrm{L}^q(\Omega, \mathbb{R}^N)$ muni de la norme $\|u(\cdot)\|_q = (\int_\Omega \|u(t)\|^q dt)^{\frac{1}{q}}$.
- $\mathscr{L}(X, Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaiers continues de X dans Y
- $\mathcal{C}^1(X, Y)$ est l'espace de Banach des applications continûment différentiables de X dans Y.
- $W^{1,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev i.e.,
  $W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega)/\exists g_i \in L^p(\Omega) : \ \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi \ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall i = 1, \dots, N\right\}$.
  muni de la norme $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum\limits_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$.

- $C_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions infiniment continues à support compact sur Ω i.e.,

$$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \; \exists K \subset \Omega, \; K \text{ compact} \; ; u = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

  Tell que K^c est le complémentaire du support compact K.

- $\Gamma_0(X)$ est le cône des fonctions propres, convexes, et semi-continue inférieure.
- $\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$ est la boule unité fermé de X^*.
- $conv(C)$ l'envloppe convexe de C.

- T_C est le cône tengente de C.
- $\mathcal{N}(x)$ est l'ensemble de voisinage de x.

  Soit A un opérateur, on note par :

- $R(A)$ est l'image de l'opérateur A.
- $N(A)$ est le noyau de A.
- Γ-lim signifie Γ- limite.
- $\mathcal{B}(x)$ signifie la σ-tribue de Borel sur X.
- $w(X, X^*)$ est la topologie faible sur X.
- $w(X^*, X)$ est la topologie faible* sur X^*.
- $\delta_C(.)$ la fonction indicatrice de $C \subseteq X$, définie par,

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

- $epi(f)$ est l'épigraphe de la fonction f.
- $intepi(f)$ est l'interieure de l'epigraphe de la fonction f.
- $intdom(f)$ est l'interieure de le domaine de la fonction f.
- $Gr(f)$ est le graphe de la fonction f.

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1. ***(Ensemble convexe)***

Un ensemble $K \subseteq X$ *est dit convexe si pour tout* $(x, y) \in K^2$ *et tout* $t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in K.$$

Définition 1.2. ***(Cône)***

Soit X *un espace vectoriel et* M *un sous ensemble non vide de* X*. On dit que* M *est un cône si et seulement si pour tout* $x \in M$*,* $\alpha \geq 0$*, et* $\alpha x \in M$*.*

De plus, si M *est convexe on dit que* M *est un cône convexe.*

Définition 1.3. ***(Le cône normal)***

Soit $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé,* X^* *son dual topologique et soit* $C \subset X$ *un cône,* $x \in C$*, on dit cône normal l'ensemble*

$$N_C(x) = \{x^* \in X^* / \langle x^*, y - x\rangle_X \leq 0, \ pour\ tout\ y \in C\}.$$

Définition 1.4. ***(Fonction affine)***

Soit X *un espace vectoriel,* $C \subset X$ *un ensemble.*

On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}^n$ *est affine sur* C *si et seulement si pour tout* $x, y \in C$*,* $x \neq y$*, et* $t \in]0, 1[$ *tell que*

$$f(tx + (1 - t)y) = tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Une fonction est dit affine sur I *si et seulement si l'épigraphe de* f *est un segment de droit. Dans un espace de dimension finie, il n'y à pas de restriction à supposer que* X *est muni d'un produit scalaire.*

Une fonction affine est alors donnée par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ *et s'écrit :* $f(x) = \langle x^*, x\rangle + \alpha$*.* x^* *représente l'application linéaire* $x \mapsto f(x) - f(0)$ *dans* X *est appelée la pente de* f*.*

Définition 1.5. ***(Minorant affine)***

On appelle minorant affine d'une fonction $f : X \to \overline{R}$*, une fonction affine* g *qui minore* f *sur* X *i.e., pour tout* $x \in X$*,* $f(x) \geq g(x)$*.*

Définition 1.6. ***(Hyperplan)***

On appelle hyperplan de X tout sous espace vectoriel de X de codimension 1.

Définition 1.7. ***(Isomophisme)***

Soient X, Y des espaces vectoriel normé, une application linéaire continue f de X dans Y est appelée un isomorphisme d'espace vectoriel normé si et seulement si f est bijective et f^{-1} est continue.

Définition 1.8. ***(Homéomorphisme)***

Une application $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si f est continue, bijective et f^{-1} est continue.

Définition 1.9. ***(Difféomorphisme)***

Soit U , V des ouverts non vide d'espaces de Banach X et Y respectivement.

On dit qu'une application $f : U \to V$ est un difféomorphisme (de U sur V) si et seulement si

(i) f est une bijection.

(ii) f est de classe C^1 c'est-à-dire continûment différentiable sur U.

(iii) f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Définition 1.10. ***(Espace de Banach)***

Un espace de Banach est un espace véctoriel normé, complet pour la distance associée à la norme

Définition 1.11. *Soit Xun espace normé sur $\mathbb{K} = (\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R})$. On appelle dual (topologique) de X et on note X^* l'espace de Banach $X^* = \mathscr{L}(X; \mathbb{K})$, cet espace est complet.*

Définition 1.12. *Soit X un espace normé, le dual de X^* s'appelle le bidual de X et se note X^{**}, pour $x \in X$ notons $J_x : X^* \to \mathbb{K}$ la forme linéaire sur X^* qui a $x^* \in X^*$ associe $x^*(x)$,*

$$\forall x^* \in X^*,\ J_x(x^*) = x^*(x).$$

Pour tout $x^* \in X^*$ on a

$$|J_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X.$$

Donc $J_x(x^*) \in X^{**}$ *et* $\|J_x(x^*)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$.

On dit que $J_x(x^*) \in \mathscr{L}(X, X^{**})$ *est l'application canonique de* X *dans son bidual.*

Définition 1.13. *Soit* X *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* X *dans* X^{**}*, on dit que* X *est réfexif si* $J(X) = X^{**}$.

Définition 1.14. *Soit* X *un espace produit,* $(X_i)_{i\in I}$ *une famille d'espaces topologique. On note, pour chaque* $i \in I$*, le projection canonique* $P_i : X \to X_i$*, définit par* $P_i((x_j)_{j\in I}) = x_i$ *(ou encore :* $P_i(x) = x(i)$*).*
Chaque des projections P_i *est une application surjective, continue.*

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X^*$. On désigne par $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f; x\rangle$. Lorsque f décrit X^* on obtient une famille d'application $(\varphi_f)_{f\in X^*}$.

Définition 1.15. *(**Topologie faible**)*
La topologie faible $w(X; X^*)$ *sur* X *est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les application* $(\varphi_f)_{f\in X^*}$.

Définition 1.16. *(**Topologie faible***)*
Soit X *un espace de Banach, soit* X^* *son dual et soit* X^{**} *son bidual, muni de la norme*

$$\|\varphi\| = \sup_{f\in X^*; \|f\|\leq 1} |\langle \varphi, f\rangle|$$

La topologie faible* *désignée par* $w(X^*, X)$ *est la topologie la moins fine sur* X^* *rendant continues touts les applications* $(\varphi_x)_{x\in X}$.

Opérateurs linéaires bornés

Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle un opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y. Pour $A \in \mathscr{L}(X; Y)$, on note

$$R(A) = \{Ax;\ x \in X\} \qquad \text{et} \qquad Ker(A) = N(A) = \{x \in X;\ Ax = 0\}.$$

Propriétés 1.1. *(i)* $N(A) = R(A^*)^\perp$.

(ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$.

(iii) $N(A)^\perp \supseteq \overline{R(A^*)}$.

(iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

Définition 1.17. *Soit X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur borné de X dans Y. L'adjoint de A noté A^* est un opérateur borné de Y^* dans X^* vérifiant*

$$(A^*l)(x) = l(A(x)), \text{ pour tout } l \in X^*.$$

Définition 1.18. ***(Opérateur de Fredholm)***

Soient X, Y deux espaces de Banach, on dit que $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ est un opérateur de Fredholm si $ker(A)$ est de dimension finie et $R(A)$ est fermé et de codimension finie.

1.3 Théorèmes fondamontaux

Théorème 1.1. ***(Théorème des accroissements finis)***

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a;b[$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Définition 1.19. ***(Séparation au sens strict et large)***

Soint $A, B \subset X$, et H un hyperplan affine, $H = \{x \in X : \ f(x) = \alpha\}$. On dit que

* *H sépare A et B au sens large si*

$$\forall x \in A, \ f(x) \leq \alpha, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B, \ f(x) \geq \alpha.$$

* *H sépare A et B au sens strict s'il existe $\delta > 0$ tell que*

$$\forall x \in A, \ f(x) \leq \alpha - \delta, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in B, \ f(x) \geq \alpha + \delta.$$

Théorème 1.2. ***(Théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique)***

Soient $A \subset X$ et $B \subset X$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints . On suppose que A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

Théorème 1.3. ***(Théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique)***

Soient $A \subset X$ et $B \subset X$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints . On suppose que B est compact, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Corollaire 1.1. *Soit $x_0 \in dom(f)$ et soit $f(x_0) < \lambda_0$. On applique le théorème de Hahn Banach deuxième forme géomètrique dans l'espace $X \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $A = epi(f)$, $B = \{[x_0, \lambda_0]\}$, il existe donc un hyperplan fermé H dans $X \times \overline{\mathbb{R}}$ d'équation $\varphi = \alpha$ qui sépare strictement A et B.*

Notez que l'application $x \in X \mapsto \varphi([x, 0])$ est une forme linéaire continue sur X et donc $\varphi([x, 0]) = \langle x^*, x\rangle$ pour tout $x^* \in X^*$.

Posons $\xi = \varphi([0, 1])$ on a alors pour tout $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}$

$$\varphi([x, \lambda]) = \langle x^*, x\rangle + \xi\lambda.$$

Ecrivant que $\varphi > \alpha$ sur A et $\varphi < \alpha$ sur B on obtient pour tout $(x, \lambda) \in epi(f)$

$$\langle x^*, x\rangle + \xi\lambda_0 < \alpha < \langle x^*, x\rangle + \xi\lambda.$$

On dit que A est relativement compact si A est contenue dans un sous ensemble compact de X.

Théorème 1.4. ***(Théorème d'Eberlien-Smulian)***

Si X un espace normé et A un sous ensemble de X est faiblement compact si et seulement si A est séquentiellement faiblement compact.

Définition 1.20. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et A un sous ensemble borné de $L^1(\mu)$, on dit que A est equi-intégrable si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tell que pour tout $B \in \Sigma$ avec $\mu(B) \leq \delta$ et pour tout $f \in A$, $\int_B |f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$.*

Théorème 1.5. ***(Théorème de Dunford-Pettis)***

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et A un sous ensemble borné de $L^1(\mu)$, A est equi-integrable si et seulement si A est un sous-ensemble relativement compact de $L^1(\mu)$ muni de la topologie faible.

Théorème 1.6. ***(Théorème du Point fixe)***

Soit C un fermé de X et $f : C \to C$ une fonction contractante. Alors f admet un unique point fixe $y \in C$ tell que $f(y) = y$.

Lemme 1.1. ***(Lemme de Mazur)***

Soit X un espace de Banach, (x_n) une suite qui converge faiblement vers x dans X, alors il existe une suite (y_n) avec chaque $\{y_n\}$ est un combinaison convexe des $(x_k)_{k \geq n}$ qui converge fortement vers x.

Lemme 1.2. ***(Lemme de Baire)***

Dans un espace métrique complet (non vide)

(i) toute intersection dénombrable des ouverts denses est dense.

(ii) toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

(iii) si l'espace entier est un réunion dénombrable de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert (non vide).

Théorème 1.7. ***(Théorème du point fixe de Brouwer)***

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble bornée, ouvert et convexe, et $f : \overline{U} \to \overline{U}$ une fonction continue, alors f admet un point fixe.

Théorème 1.8. ***(Théorème d'isomorphisme de Banach)***

Soit X , Y deux espace de Banach, et $u : X \to Y$ une application linéaire continue, bijective de X sur Y . Alors l'application réciproque u^{-1} est continue.

Théorème 1.9. ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)***

Soit $C \subset C[0,1]$, C est compact si et seulement si, C est fermé, borné et séquentiallement continue.

Théorème 1.10. ***(Lemme de Gronwall)***

Soit x, v et f des fonctions continue définie sur $[a,b]$, $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Supposons que sur $[a,b]$ on a l'inégalité

$$x(t) \leq v(t) + \int_a^t f(s)x(s)\mathrm{d}s.$$

Alors

$$x(t) \leq v(t) + \int_a^t f(s)v(s)\exp[\int_s^t f(u)\mathrm{d}]\mathrm{d}s \textit{ pour tout } t \in [a,b].$$

CHAPITRE 2

Analyse lisse et non lisse

Introduction

Ce chapitre commence par le calcul des fonctions lisses et non lisses. Nous présentons les dérivées au sens de Gâteaux et Fréchet et développons leur calcul dans plein détail. Dans le sens des fonctions non lisses, d'abord nous traitons les fonctions convexes pour lesquelles nous développons une théorie de la dualité et une théorie de la sous-différenciation. Par la suite, nous nous généralisons aux fonctions localement lipschitziennes. Enfin, nous étudions un type de convergence variationnelle des fonctions, appelée Γ-convergence, qui est adapté à l'analyse de stabilité (sensibilité) des problèmes variationnels.

2.1 Gâteaux et Fréchet différentiabilité

Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $f : X \to Y$ une fonction. Présentenant d'abord la forme faible de différentiabilité.

Définition 2.1. *On dit que f est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$ s'il existe $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ tell que :*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = Lh, \qquad \text{pour tout } h \in X$$

L'opérateur $L \in \mathscr{L}(X,Y)$ est dit la dérivée de f au sens de Gâteaux au point $x \in X$ et on le note par $f'(x)$.

On dit que f est Gâteaux-différentiable s'il est Gâteaux-différentiable en tout point $x \in X$.

Remarque 2.1. *La dérivée au sens de Gâteaux est une dérivée directionnelle et alors il est essentiallement dans un concept de unidimensionnel. Si on fixe $x, h \in X$ et on pose $\varphi(\lambda) = f(x + \lambda h), \lambda \in \mathbb{R}$ on aurra*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\lambda+t) - \varphi(\lambda)}{t} \\
\frac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}
\end{aligned}$$

posons $\varepsilon = th$ alors $t = \frac{\varepsilon}{h}$ et donc, si t tend vers 0 alors ε tend vers 0. et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\frac{\varepsilon}{h}} \\
&= h \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \\
&= hf'(x).
\end{aligned}$$

Remarque 2.2. *Si la dérivée de f au sens de Gâteaux existe au point $x \in X$ alors elle est unique.*

Exemple 2.1. *(a) Si $A \in \mathscr{L}(X,Y)$, alors $A'(x) = A$ pour tout $x \in X$.*

(b) Si $f = (f_k)_{k=1}^m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ alors $f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (la matrice Jacobien).

Nous allons montrer le théorème de valeurs moyenne pour les fonctions Gâteaux-différentiables.

Proposition 2.1. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentielle, et si $x, h \in X$ alors il existe $t \in]0,1[$ tell que*

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h.$$

Preuve. Soit $\varphi(\lambda) = f(x + \lambda h), \lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = f'(x+\lambda h)h.$$

Donc, on appliquant la théorème des accroissements finis sur l'intervalle $]0,1[$, alors il existe $t \in]0,1[$ tell que

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=t} = \varphi(1) - \varphi(0)$$

par conséquant : $f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h$. □

Si Y n'est pas l'espace des nombres réel $\mathbb{R}$, alors le théorème du valeurs moyenne pour la Gâteaux différentiable n'est pas vérifiée.

Exemple 2.2. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Dans ce cas, le théorème de la valeur moyenne prend une forme d'inégalité. C'est-à-dire, nous avons le résultat suivant.*

Proposition 2.2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ une fonction Gâteaux-différentiable, $x, h \in X$ et si $y^* \in Y^*$, alors il existe $t \in]0,1[$ tell que*

$$\langle y^*, f(x+h) - f(x)\rangle_Y = \langle y^*, f'(x+th)h\rangle_Y,$$

et

$$\|f(x+h) - f(x)\|_Y \leq \|f'(x+th)\|_{\mathscr{L}} \|h\|_X.$$

Preuve. Considérons la fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) \longmapsto \langle y^*, f(x)\rangle_Y$, comme f est Gâteaux-diférentiable, alors $\varphi'(x) = \langle y^*, f'(x)h\rangle_Y$ et d'après la proposition 2.1, il existe $t \in]0,1[$ tell que

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h$$

et alors

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) - \varphi(x) &= \langle y^*, f(x+h) - f(x)\rangle_Y \\ &= \langle y^*, f'(x+th)h\rangle_Y. \end{aligned}$$

Comme $y^* \in Y^*$ est arbitraire, alors on peut choisir $y^* \in Y^*$ avec $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ tel que

$$|\langle y^*, f(x+h) - f(x)\rangle_Y| = \|f(x+h) - f(x)\|_Y$$

d'où

$$\begin{aligned}\|f(x+h)-f(x)\|_Y &= |\langle y^*, f'(x+th)h\rangle_Y| \\ &\leq \|f'(x+th)\|_{\mathscr{L}}\|h\|_X.\end{aligned}$$

□

Maintenant on va présenter la deuxième forme forte de différentiabilité.

Définition 2.2. *On dit que $f : X \to Y$ est Fréchet différentiable au point $x \in X$, s'il existe $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ tell que*

$$f(x+h) - f(x) = Lh + R(x,h) \quad \textit{avec} \quad \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \quad \textit{quand} \quad \|h\|_X \to 0$$

L'opérateur $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ est dit la dérivée au sens de Fréchet de f au point $x \in X$, et on note par $f'(x)$.

On dit que f est Fréchet différentiable s'il est Fréchet différentiable en tout points $x \in X$

Remarque 2.3. *La différentielle de Fréchet s'il existe est unique.*

La proposition suivant donne le cas où les deux notions coïncident.

Proposition 2.3. *Si $f : X \to Y$ est une fonction Gâteaux-différentiable sur un ensemble ouvert $U \subseteq X$, $x \in X$ et la fonction $u \to f'(u)$ est continue au point $x \in X$ de X dans $\mathscr{L}(X, Y)$ muni d'opérateur topologique normé, alors f est aussi Fréchet différentiable au point $x \in X$ et les deux dérivées coincident.*

Preuve. Posons $R(x, h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$. D'après la proposition 2.2, il existe $t \in]0, 1[$ tell que

$$\langle y^*, R(x,h)\rangle_Y = \langle y^*, f'(x+th)h - f'(x)h\rangle_Y$$

alors si on choisit dans la proposition avant $y^* \in Y^*$, $\|y^*\|_Y^* = 1$ tel que

$$\|R(x,h)\|_Y = |\langle y^*, R(x,h)\rangle_Y|$$

alors

$$\|R(x,h)\|_Y \leq \|f'(x+th) - f'(x)\|_{\mathscr{L}}\|h\|_X$$

donc

$$\frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \leq \|f'(x+th) - f'(x)\|_{\mathscr{L}} \to 0, \quad \text{quand} \quad \|h\|_X \to 0.$$

Alors f est Fréchet différentiable au point $x \in X$ et les deux dérivées sont égales.

□

L'existence de la dérivée au sens de Fréchet au point $x \in X$, implique la continuité de f au point $x \in X$.

Proposition 2.4. *Soit $f : X \to Y$ une fonction alors,*

1. *Si f est Fréchet différentiable au point $x \in X$ alors f est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$, (la réciproque n'est pas vraie en générale)*
2. *Si f est Fréchet différentiable au point $x \in X$ alors f est continue au point $x \in X$.*

Preuve.

1. Soit f une fonction Fréchet différentiable au point $x \in X$ alors il existe $L \in \mathscr{L}(X,Y)$ pour tout $h \in X$ on a

$$f(x+h) - f(x) = Lh + R(x,h) \quad \text{avec} \quad \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \text{ quand } \|h\|_X \to 0,$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L + \frac{R(x+h)}{h} \quad \text{avec} \quad \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \quad \text{quand } \|h\|_X \to 0,$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$, et $t \in X$, posons $h = \varepsilon t$, alors $\|h\|_X = \varepsilon \|t\|_X$ et quand $\|h\|_X$ tend vers 0 on a ε tend vers 0 alors pour tout $t \in X$, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon t) - f(x)}{\varepsilon t} = L,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon t) - f(x)}{\varepsilon} = Lt,$$

d'où f est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$.

2. Montrons que f est continue au point $x \in X$ c'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists ? \delta' > 0, \forall h \in X; \|h\|_X < \delta' : \|f(x+h) - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

Comme f est une fonction Fréchet différentiable au point $x \in X$, alors il existe $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ pour tout $h \in X$ on a

$$f(x+h) - f(x) - Lh = R(x,h), \quad \text{avec } \frac{\|R(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} \to 0 \quad \text{quand } \|h\|_X \to 0,$$

et donc

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ pour tout $h \in X$ tell que $\|h\|_X < \delta$ on a

$$\|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y \leqslant \varepsilon \|h\|_X$$

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\|_Y &= \|f(x+h) - f(x) - Lh + Lh\|_Y \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - Lh\|_Y + \|h\|_X \|L\|_{\mathscr{L}} \\ &\leqslant \varepsilon \|h\|_X + \|h\|_X \|L\|_{\mathscr{L}} \\ &= (\varepsilon + \|L\|_{\mathscr{L}}) \|h\|_X. \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre $\delta' = \min(\delta, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|L\|_{\mathscr{L}}})$, d'où f est continue au point $x \in X$.

□

Exemple 2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^4 y}{x^6 + y^3} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrons que f est Gâteaux-différentiable au point $(0,0)$.

Soit $h = (v, w) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(v,w)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv, tw)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^5 v^4 w}{t^4 (t^3 v^6 + w^3)} = \lim_{t \to 0} \frac{t v^4 w}{t^3 v + w^3} = 0,$$

d'où f est Gâteaux-différentiable au point $(0,0)$.

Pour montrer que f n'est pas Fréchet différentiable il suffit de montrer qu'il n'est pas continue au point $(0,0)$, On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^6+y^3},$$

posons $y = \lambda x^2$, pour y tend vers 0 on a x tend vers 0, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6\lambda}{x^6(1+\lambda^3)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^3},$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq (0,0)$. Alors f n'est pas continue au point $(0,0)$, donc il n'est pas Fréchet différentiable au point $(0,0)$.

Proposition 2.5. *Si X, Y, Z trois espaces de Banach, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction Gâteaux-différentiable au point $x \in X$, et $g : Y \to Z$ Fréchet différentiable au point $f(x)$, alors $\xi = g \circ f : X \to Z$ est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$ et $\xi'(x) = g'(f(x))f'(x)$.*
De plus, si f est Fréchet différentiable au point $x \in X$, alors ξ est Fréchet différentiable au point $x \in X$.

Preuve. Soit $\lambda \neq 0$, montrons que ξ est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\lambda|}\|\xi(x+\lambda h) - \xi(x) - \lambda\xi'(x)h\|_Z \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\|g(f(x+\lambda h)) - g(f(x)) - \lambda g'(f(x))f'(x)h\|_Z \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\|g(f(x+\lambda h)) - g(f(x)) + g'(f(x))(f(x+\lambda h) - f(x)) \\
&- g'(f(x))(f(x+\lambda h) - f(x)) - \lambda g'(f(x))f'(x)h)\|_Z \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\|g(f(x+\lambda h)) - g(f(x)) - g'(f(x))(f(x+\lambda h) - f(x))\|_Z \\
&+ \frac{1}{|\lambda|}\|g'(f(x))(f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f'(x)h\|_Z.
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

La Gâteaux-différentiable de f au point $x \in X$ donne

$$\frac{1}{|\lambda|}\|g'(f(x))(f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f'(x)h)\|_Z \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \lambda \to 0, \tag{2.1.2}$$

et

$$\|f(x+\lambda h) - f(x)\|_Y \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \lambda \to 0.$$

La Fréchet différentiabilité de g au point $f(x)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \quad f(x+\lambda h) \neq f(x)$ donne

$\frac{1}{|\lambda|}\|g(f(x+\lambda h)-g(f(x))-g'(f(x))(f(x+\lambda h)-f(x))\|_Z =$

$$\left(\frac{\|g(f(x+\lambda h)-g(f(x))-g'(f(x))(f(x+\lambda h)-f(x))\|_Z}{\|f(x+\lambda h)-f(x)\|_Z}\right)\times\left(\frac{\|f(x+\lambda h)-f(x)\|_Y}{|\lambda|}\right)\to 0, \tag{2.1.3}$$

quand λ tend vers 0. On passe à la limite quand λ tend vers 0 dans (2.1.1) et en utilisant (2.1.2) et (2.1.3) on aurra

$$\frac{1}{|\lambda|}\|\xi(x+\lambda h)-\xi(x)-\lambda\xi'(x)h\|_Z \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to 0.$$

D'ou $g \circ f$ est Gâteaux-différentiable au point $x \in X$. □

Définition 2.3. *On dit que $f : X \to Y$ est continûment Fréchet différentiable au point $x \in X$ si*

1. *f est Fréchet différentiable au point $x \in X$.*
2. *$u \to f'(u)$ est continue au point $x \in X$ de X dans $\mathscr{L}(X,Y)$ muni d'opérateur topologique normé.*

Si f est continûment Fréchet différentiable en tous point $x \in X$ on dit que f est continûment Fréchet différentiable, et on écrit $f \in C^1(X,Y)$ où $f \in C^1(X)$ si $Y = \mathbb{R}$.

Supposons maintenant $Y = Y_1 \times Y_2$ avec Y_1, Y_2 sont des espaces de Banach. On sait que Y peut être muni de plusieurs normes équivalentes qui en font un espace de Banach (par exemple, $\|(y_1,y_2)\|_1 = \|y_1\|_{Y_1} + \|y_2\|_{Y_2}$ ou $\|(y_1,y_2)\|_\infty = \max\{\|y_1\|_{Y_1}, \|y_2\|_{Y_2}\}$). L'espace $\mathscr{L}(X, Y_1 \times Y_2)$ isométriquement isomorphe à l'espace produit $\mathscr{L}(X,Y_1) \times \mathscr{L}(X,Y_2)$. Soit $p_1 : X \to Y_1$ et $p_2 : X \to Y_2$ des projections canoniques correspondants. Nous avons que $p_1 \in \mathscr{L}(Y,Y_1)$ et $p_2 \in \mathscr{L}(Y,Y_2)$. Si $f : X \to Y = Y_1 \times Y_2$, Alors $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ sont les composantes de f ; c'est-à-dire $f = (f_1, f_2)$. Si $i_1 : Y_1 \to Y$ et $i_2 : Y_2 \to Y$ sont les injections canoniques avec $i_1 \in \mathscr{L}(Y_1, Y)$ et $i_2 \in \mathscr{L}(Y_2, Y)$, alors

$$f = i_1 \circ f_1 + i_2 \circ f_2.$$

Proposition 2.6. *Une fonction $f : X \to Y = Y_1 \times Y_2$ est Fréchet différentiable au point $x \in X$ si et seulement si f_1 et f_2 sont Fréchet différentiable au point $x \in X$, et on a aussi*

$$f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x)) \quad \textit{avec} \quad f_1'(x) = p_1 \circ f'(x),\ f_2'(x) = p_2 \circ f'(x).$$

Preuve. Supposons que f est Fréchet différentiable au point $x \in X$, alors d'après la proposition 2.5 on a f_1, f_2 sont les deux Fréchet différentiables au point $x \in X$, $f_1'(x) = p_1 \circ f'(x)$, $f_2'(x) = p_2 \circ f'(x)$ et $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x))$, inversement, supposons que f_1 et f_2 sont Fréchet différentiables au point $x \in X$ donne $Y = Y_1 \times Y_2$, par exemple avec la norme $\|(y_1, y_2)\|_Y = \max\{\|y_1\|_{Y_1}, \|y_2\|_{Y_2}\}$ et pour tout $h \in X$ on pose

$$\xi(h) = (f_1'(x)h, f_2'(x)h)$$

alors pour tout $u \in X$, on a

$$\|f(u) - f(x) - \xi(u - x)\|_Y = \max_{k \in \{1,2\}} \|f_k(u) - f_k(x) - f_k'(x)(u - x)\|_{Y_k} = o(\|u - x\|_X),$$

$$\text{quand} \quad \frac{o(\|u - x\|_X)}{\|u - x\|_X} \to 0 \quad \text{quand} \quad u \to x \quad \text{dans } X.$$

ceci est la démonstration que f est Fréchet différentiable au point $x \in X$ et $f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x))$. □

Supposons que $X = X_1 \times X_2$ avec X_1, X_2 deux espaces de Banach et $f : X \to Y$ une fonction , où Y est un autre espace de Banach. Soit $x = (x_1, x_2) \in X$. La fonction $u_1 \to f(u_1, x_2)$ est appelée la première fonction partielle associée à f au point x et $u_2 \to f(x_1, u_2)$ s'appelle la seconde fonction partielle associée à f au point x. On peut considérer les dérivées au sens de Fréchet de ces fonctions partielles. On appelle des dérivées partielles de f et sont notés $f_{x_1}'(x)$ et $f_{x_2}'(x)$. Ensuite, de façon simple, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Proposition 2.7. *Si $f : X_1 \times X_2 \to Y$ est une fonction Fréchet différentiable au point $x = (x_1, x_2) \in X$, alors les deux fonctions partielles associées à f au point x sont Fréchet différentiables au point $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$ respectivement, et nous avons*

$$f'(x)h = f_{x_1}'(x)h_1 + f_{x_2}'(x)h_2 \quad \textit{pour tout} \quad h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2.$$

Remarque 2.4. *Il est clair que le résultat peut être étendu à un produit fini arbitraire* $X = X_1 \times \ldots \times X_n,\ n \geq 2.$

L'inverse de la Proposition 2.7 n'est pas en général vraie. i.e., l'existence des dérivées partielles de $f : X = X_1 \times X_2 \to Y$ au point $x = (x_1, x_2) \in X$ n'implique pas la différentiabilité de f au point $x \in X$. L'exemple suivant illustre ceci.

Exemple 2.4. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & si\ (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

alors $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)(0,0) = 0$ *mais* f *n'est pas continue au point* $(0,0)$ *alors elle n'est pas Fréchet différentiable.*

Proposition 2.8. *Si* $\{X_k\}_{k=1}^n$, Y *sont des espaces de Banach et* $f : X = X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, *alors* $f \in C^1(X, Y)$ *si et seulement si le, n-dérivée, partielles* $f'_{x_k}(x)$ *existe au chaque point* $x \in X$ *et* $x \mapsto f'_{x_k}(x)$ *continue de* X *dans* $\mathscr{L}(X_k, Y)$ *muni d'opérateur topologique normé, pour tout* $1 \leq k \leq n$.

Preuve. Nous démontrons pour $n = 2$ le cas général suit facilement par induction.

Tout d'abord, nous supposons que $f \in C^1(X, Y)$, de la Proposition 2.7, nous avons que $f'_{x_1}(x)$, $f'_{x_2}(x)$ existe pour tout $x \in X$ et on a

$$f'_{x_1}(x)h_1 = f'(x)(h_1, 0),\ f'_{x_2}(x)h_2 = f'(x)(0, h_2),\ \text{pour tout } x \in X,\ h_1 \in X_1,\ h_2 \in X_2.$$

Alors $x \mapsto f'_{x_k}(x)$ est continue de X dans $\mathscr{L}(X_k, Y)$ muni d'opérateur topologique normé pour $k = 1, 2$.

Supposons maintenant que les dérivées partielles f'_{x_k} existent dans X et sont continues. Pour $h = (h_1, h_2) \in X = X_1 \times X_2$ on pose $\xi(x)h = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2$. Alors pour tout $u = (u_1, u_2) \in X$ on a

$$\begin{aligned} &\|f(u) - f(x) - \xi(x)(u - x)\|_Y \\ &\leqslant \|f(u_1, u_2) - f(x_1, u_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2)(u_1 - x_1)\|_Y \\ &+ \|f(x_1, u_2) - f(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2)(u_2 - x_2)\|_Y \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

alors pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tell que $\|u_2 - x_2\|_X \leqslant \delta$ implique,

$$\|f(x_1, u_2) - f(x_1, x_2) - f'_{x_2}(x_1, x_2)(u_2 - x_2)\|_Y \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u_2 - x_2\|_{X_2}. \tag{2.1.5}$$

Aussi d'aprés la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned} &\|f(u_1, u_2) - f(x_1, u_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2)(u_1 - x_1)\|_Y \\ &\leqslant \sup_{z_1 \in [x_1, u_1]} \|f'_{x_1}(z_1, u_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2)\|_{\mathscr{L}} \|u_1 - x_1\|_{X_1} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

avec $[x_1, u_1] = \{tx_1 + (1-t)u_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, par hypothèse, on peut trouver $\delta_1 \leqslant \delta$ tell que $\max\{\|z_1 - x_1\|_{X_1},\ \|u_2 - x_2\|_{X_2}\} \leqslant \delta$, implique

$$\|f'_{x_1}(z_1, u_2) - f'_{x_1}(x_1, x_2)\|_{\mathscr{L}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1.7}$$

remplacant (2.1.5) et (2.1.7) dans (2.1.4), on voit que si
$\|u - x\|_X = \max\{\|u_1 - x_1\|_{X_1},\ \|u_2 - x_2\|_{X_2}\} \leqslant \delta_1$, alors

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(x) - \xi(x)(u - x)\|_Y &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u_2 - x_2\|_{X_2} + \frac{\varepsilon}{2}\|u_1 - x_1\|_{X_1} \\ &\leqslant \varepsilon \max\{\|u_2 - x_2\|_{X_2},\ \|u_1 - x_1\|_{X_2}\} \\ &= \varepsilon\|u - x\|_X. \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est Fréchet différentiable au point x et $f'(x)h = \xi(x)h = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2$ pour tout $h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$. □

Corollaire 2.1. *Si Y est un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^n \to Y$, alors $f \in C^1(\mathbb{R}^n, Y)$ si et seulement si les, n-dérivées partielles $(\partial f)/(\partial x_k)(x)$ sont continues de $\mathbb{R}^n$ dans Y pour tout $k = 1, \ldots, n$.*

Dans cette dernière partie, nous prouvons le théorème de la fonction implicite et le théorème de la fonction inverse, qui sont importants dans l'analyse et la géométrie différentielle. La preuve du théorème de la fonction implicite dépend du théorème du point fixe.

En utilisant le théorème du point fixe, nous pouvons prouver le théorème qui s'appelle *théorème de la fonction implicite*, qui concerne les équations de la forme $f(x, y) = 0$. Il nous indique dans quelles conditions cette équation définit une fonction $y = g(x)$ (on dit que $y = g(x)$ est définie implicitement) et nous aimerions calculer $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Donne une telle fonction f, en général, on ne peut pas trouver la solution explicite et il est donc important de savoir qu'une telle fonction g existe sans avoir à résoudre l'équation.

Théorème 2.1 (*théorème de la fonction implicite*). *Si X, Y, Z des espaces de Banach, $U \subseteq X \times Y$ un ensemble ouvert non vide, $(x_0, y_0) \in U$, $f \in C^1(U, Z)$, $f'_y(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(Y, Z)$ est un isomorphisme et $f(x_0, y_0) = 0$, alors il existe un voisinage ouvert V de x_0, et W de y_0 avec $V \times W \subseteq U$ et une fonction $g \in C^1(V, W)$ tell que*

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \textit{pour tout } x \in V \tag{2.1.8}$$

$$\textit{et} \quad g'(x) = -f'_y(x, g(x))^{-1} \circ f'_x(x, g(x)) \quad \textit{pour tout } x \in V \tag{2.1.9}$$

de plus, pour tout $x \in V$, $g(x)$ est une solution unique de (2.1.8) *dans W.*

Preuve. On note par $S_0 = f'_y(x_0, y_0)$. Alors on a

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y - S_0^{-1} f(x, y) = F(x, y) \tag{2.1.10}$$

l'importence de cette formule est qu'on peut appliquer le théorème du point fixe sur F. Comme $S_0^{-1} \circ S_0 = Id_Y$, on a

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = S_0^{-1}(S_0(y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))$$

d'aprés l'hypothèse sur f, on peut trouver $\delta_1 > 0$ et $r > 0$ tell que si $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta_1$, $\|y_1 - y_0\|_Y \leqslant r$, $\|y_2 - y_0\| \leqslant r$ (i.e., $\|y_1 - y_2\|_Y \leqslant 2r$), alors

$$\|F(x, y_1) - F(x, y_2)\|_Z \leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_Y. \tag{2.1.11}$$

Aussi en peut trouver $0 < \delta < \delta_1$ tell que, si $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$, alors

$$\|F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\|_Z \leqslant \frac{r}{2}. \tag{2.1.12}$$

donc, si $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$ et $\|y - y_0\|_Y \leqslant r$, alors

$$\begin{aligned}\|F(x, y) - y_0\|_Z &= \|F(x, y) - F(x_0, y_0)\|_Z \\ &\leqslant \|F(x, y) - F(x, y_0)\|_Z + \|F(x, y_0) - F(x_0, y_0)\|_Z\end{aligned}$$

et d'aprés (2.1.11) et (2.1.12), on a

$$\|F(x,y)-y_0\|_Z \leqslant \frac{1}{2}\|y-y_0\|_Y+\frac{r}{2}\leqslant r.$$

d'où, $F(x,y)$ est définie de la boule fermé $\bar{B}_r(y_0)=\{y\in Y:\ \|y-y_0\|_Y\leqslant r\}$ sur elle même, et de même la boule ouvert $B_r(y_0)=\{y\in Y:\ \|y-y_0\|<r\}$ sur elle même. Appliquant le théorème du point fixe à la famille paramérique des fonctions $\{y\to F(x,y)\}_{x\in\bar{B}_\delta(x_0)}$ (voire (2.1.11)), pour tout $x\in\bar{B}_\delta(x_0)$ on peut trouver un $y=y(x)\in\bar{B}_r(y_0)$ unique tell que $F(x,y)=y$; donc $f(x,y)=0$ ce qui prouve (2.1.8) et $x\to g(x)=y(x)$ est continue. Posons

$$V=B_\delta(x_0) \qquad \text{et} \qquad W=B_r(y_0).$$

En choisie $\delta,r>0$ assez petit, alors $V\times W\subseteq U$. Supposons que $g\in C^1(B_\delta(x_0),Y)$, pour montrer ça on pose $(x_1,y_1)\in V\times W,\ y_1=g(x_1)$ (rappelons que $F(x,.)$ est une fonction de W sur elle même). De la différentiabilité de f au point (x_1,y_1), on aurra

$$f(x,y)=K(x-x_1)+L(y-y_1)+u(x,y) \text{ pour tout } (x,y)\in U, \tag{2.1.13}$$

avec $K=f'_x(x_1,y_1)$ et $L=f'_y(x_1,y_1)$ et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\|u(x,y)\|_Z}{\|(x-x_1,y-y_1)\|_{X\times Y}}=0. \tag{2.1.14}$$

Comme $f(x,g(x))=0$, alors pour tout $x\in V$, de (2.1.13) on aurra

$$g(x)=y_1-L^{-1}K(x-x_1)-L^{-1}u(x,g(x)) \quad \text{pour tout } x\in V. \tag{2.1.15}$$

D'aprés (2.1.14) on peut trouver $\eta>0$ tell que si $\|x-x_1\|_X\leqslant\eta$ et $\|y-y_1\|_X\leqslant\eta$, alors

$$\|u(x,y)\|_Z\leqslant\frac{1}{2\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}}}(\|x-x_1\|_X+\|y-y_1\|_Y).$$

Donc pour tout $x\in V$

$$\|u(x,g(x))\|_Z\leqslant\frac{1}{2\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}}}(\|x-x_1\|_X+\|g(x)-g(x_1)\|_Y). \tag{2.1.16}$$

d'aprés (2.1.15) et (2.1.16), il s'ensuit que

$$\|g(x)-g(x_1)\|_Y\leqslant\|L^{-1}K\|_{\mathscr{L}}\|x-x_1\|_X+\frac{1}{2}\|g(x)-g(x_1)\|_Y$$

$$\text{alors} \quad \|g(x)-g(x_1)\|_Y\leqslant v\|x-x_1\|_X \quad \text{avec } v=2\|L^{-1}K\|_{\mathscr{L}}+1. \tag{2.1.17}$$

Posons $\xi(x) = L^{-1}u(x, g(x)),\ x \in V$. De (2.1.15) on a

$$g(x) - g(x_1) = L^{-1}K(x - x_1) + \xi(x). \tag{2.1.18}$$

Notons que $\|\xi(x)\|_Y \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}}\|u(x, g(x)\|_Z,\ x \in V$ et de (2.1.14) et (2.1.15)

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\|u(x, g(x))\|_Z}{\|x - x_1\|_X} = 0,$$

donc on déduire que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\|\xi(x)\|_Y}{\|x - x_1\|_X} = 0. \tag{2.1.19}$$

En combinant (2.1.18) et (2.1.19), on conclure que g est Fréchet différentiable au point $x_1 \in V$ et

$$g'(x) = -L^{-1}K \tag{2.1.20}$$

ce qui prouve (2.1.9). Alors il est claire d'aprés (2.1.20) que $g \in C^1(V, W)$. □

Remarque 2.5. *Pour $X = \mathbb{R}^n$ et $Y = Z = \mathbb{R}^m$, la fonction f admet m composantes $f_k : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \to f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m)$ avec $1 \leqslant k \leqslant m$, lesquelle les fonctions sont C^1 $\mathbb{R}$-valeur de $(n + m)$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Alors*

$$f'_y(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial y_l}(x_0, y_0)\right)_{k,l=1}^{m} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Posons $a_k = f_k(x_0, y_0)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, alors d'aprés le théorème 2.1, si $\det f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, le système d'equations

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = a_k,\ k \in \{1, \ldots, m\},$$

pour toute valeur du paramètre $x = (x_i)_{i=1}^n \in V$ admet une unique solution $y = g(x)$ avec $(x, y) \in V$ et $g = (g_k)_{k=1}^m \in C^1(V, W)$. Alors on a

$$f_k(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_m)) = a_k,\ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Par conséquence du théorème 2.1 nous obtenons le théorème de la fonction inverse. Ce théorème (comme son non l'indique) concerne l'inversibilité des fonctions. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ admet un déterminant Jacobien non nul au point x (i.e., $\det(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^n \neq 0$), alors

$f'(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme. Du fait que la mielleure approximation linéiare est inversible, nous voudrions conclure l'inversibilité de f. En générale ce n'est pas possible. Considérons le cas simple de $n = 1$; C'est-à-dire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f'(x) = 0$, alors on peut seulement garantir l'inversibilité de f près de x, car f a toujours une pente non nulle dans un voisinage de x. Donc, notre Préoccupation principal est l'inversibilité locale.

Théorème 2.2 (Théorème de la fonction inverse). *Si X, Y sont des espaces de Banach, $U \subseteq Y$ est un ensemble ouvert non vide, $f \in C^1(U, X)$, $y_0 \in U$ et $f'(y_0) \in \mathscr{L}(Y, X)$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage U' de y_0, $U' \subseteq U$ et V' un Voisinage de $x_0 = f(y_0)$ tel que $f : U' \to V'$ est un C^1-difféomorphisme (c'est-à-dire, à la fois f et f^{-1} sont des fonctions de classe C^1) et $(f^{-1})'(x_0) = f'(y_0)^{-1}$.*

Preuve. Supposons $F(x, y) = f(y) - x$. Alors $F'_y(x_0, y_0) = f'(y_0) \in (\mathscr{L}(X, Y)$ ce qui est par hypothèse un isomorphisme, donc d'aprés le théorème 2.1 en trouve un voisinage V' de x_0 et $g \in C^1(V', Y)$ tell que $g(V') \subseteq U_0$ avec U_0 est un voisinage de y_0, $F(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in V'$ (i.e., $f(x, g(x)) = x$ pou tout $x \in V'$) et $g(x_0) = y_0$. Dans ce qui suite nous considérons f bornée sur $g(V')$. Comme $f(x, g(x)) = x$, on voit que g est injectif sur V', alors une bijection de V' dans $g(V')$. De plus, l'ensembe $g(V') = f^{-1}(V')$ est un ouvert dans Y car $f \in C^1(U, X)$. Posons $U' = g(V')$. On aurra que $f : U' \to V'$ est une bijection.
Aussi d'aprés le théorème 2.1 on a $g'(x_0) = -\left(F'_y(x_0, g(x_0))\right)^{-1} F'_x(x_0, g(x_0))$, donc
$f'(y_0) \circ g'(x_0) = Id_X$.
Par conséquence on déduire que $g'(x_0) = (f^{-1})'(x_0) = f'(y_0)^{-1}$. □

Corollaire 2.2. *Si X, Y des espaces de Banach, $U \subseteq Y$ un ensemble ouvert non vide, $f \in C^1(U, X)$, f est injectif, et pour tout $y \in U$, $f'(y) \in \mathscr{L}(Y, X)$ est une isomorphisme, alors $f(U)$ est un ouvert dans X et f est un C^1-difféomorphisme (i.e., f et f^{-1} sont des fonctions de classe C^1) de U dans $f(U)$.*

Remarque 2.6. *Supposons $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ et $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un ouvert non vide et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec $f(y_0) = x_0$. Supposons que $m \leqslant n$ et le rang de $f'(y_0)$ est égale à m (notons que $f'(y_0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$). Alors on peut trouver $U' \subseteq U$ un voisinage de y_0, un voisinage* *de* x_0, *et une fonction différentiable* $g : V' \to U'$ *tell que* $g \circ f = i$ *avec* $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est l'ijection canonique (i.e.,*$i(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)$*)*

Si $m \geqslant n$, *et le rang de* $f'(y_0)$ *égale à* n, *alors on peut trouver un voisinage* $U' \subseteq U$ *de* y_0 *et une fonction différentiable* $g : U' \to U$ *tell que* $g(y_0) = y_0$ *et* $f \circ g = P_{\mathbb{R}^n}$, *quand* $P_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est la projection canonique (i.e.,*$P_{\mathbb{R}^n}(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_n)$*).*

Proposition 2.9. *(a) Si* (Ω, Σ, μ) *un espase mesurable complét et* δ*-finie,* X, Y *deux espaces de Banach séparables, et* $f : \Omega \times X \to Y$ *est une fonction de Carathéodory, (i.e.,*Σ*-mésurable au point* $w \in \Omega$ *et continue au point* $x \in X$*) tell que*

$$\|f(w,x)\|_Y \leqslant \alpha(w) + c\|x\|_X^{\frac{p}{r}} \qquad p, r \in [1, \infty[,\ \alpha \in L^r(\Omega),\ c > 0$$

alors $x \to N_f(x)(.) = f(., x(.))$ *est continue et bornée de* $L^p(\Omega, X)$ *dans* $L^r(\Omega, Y)$.

(b) Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory,*

$$F(w,x) = \int_0^x f(w,s)\mathrm{d}s \quad et \quad \psi(u) = \int_\Omega F(w, u(w))du$$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$, *alors* $\psi \in C^1(L^p(\Omega))$ *et* $\psi'(u) = N_f(u)$.

2.2 Fonctions convexes

Tout au long de cette section X est un espace vectoriel localement convexe. Les hypothèses supplémentaires sont introduits au besoin. Nous considérons également des fonctions qui prennent également la valeur $+\infty$.

Définition 2.4. *Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *On appelle domaine effective de* f *l'ensemble définit par* $dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$.

On dit que f *est propre si* $dom(f) \neq \emptyset$ *(i.e.,* $f \neq +\infty$*) et si ne prend jamais la valeur* $-\infty$.

Définition 2.5. *Soit* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *une fonction, l'épigraphe de* f, *noté* $epi(f)$ *est le sous ensemble de* $X \times \mathbb{R}$ *définie par :*

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Définition 2.6. *une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propre est dit convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Proposition 2.10. *une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulemet si pour tout $x, y \in dom(f)$ et tout $t \in [0,1]$,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.2.1}$$

Preuve. Supposons f satisfait l'inégalité 2.2.1 et montrons que $epi(f)$ convexe.
Soient (x, u) et (y, v) deux points de l'épigraphe de f et soit $t \in [0,1]$ nous avons $f(x) \leq u$ et $f(y) \leq v$, en particulier pour $(x, y) \in dom(f)^2$ nous obtenons

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\leq tu + (1-t)v, \end{aligned}$$

d'où $(tx + (1-t)y, tu + (1-t)v) \in epi(f)$ et donc $epi(f)$ convexe.
Réciproquement, supposons que $epi(f)$ convexe et montrons l'inégalité (2.2.1).
Soit $(x, y) \in dom(f)^2$, et $t \in [0,1]$ on a alors

$$x \in dom(f), \text{ alors } \quad f(x) < +\infty \quad \text{ et donc } \quad (x, f(x)) \in epi(f),$$

$$x \in dom(f), \text{ alors } \quad f(y) < +\infty \quad \text{ et donc } \quad (y, f(y)) \in epi(f),$$

et comme l'épigraphe de f est convexe alors

$$t(x, f(x)) + (1-t)(y, f(y)) \in epi(f),$$

$$\text{alors} \quad (tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)) \in epi(f),$$

$$\text{donc} \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

d'où l'inégalité est vérifieé. □

Remarque 2.7. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite concave si pour tout $x, y \in X$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 2.7. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dit que La fonction f est semi-cotinue inférieure (s.c.i) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau de f : $L_\lambda(f) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ est fermé.*

Remarque 2.8. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On a f est s.c.i si et seulement si son épigraphe est fermé.*

Proposition 2.11. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, on a*

1. *Si f est convexe alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*
   $L_\lambda(f) = \{x \in X, f(x) \leq \lambda\}$ est convexe (la réciproque n'est pas vérifieé).
2. *Si C un sous ensemble de X fermé et convexe, et non vide, alors δ_C est propre, s.c.i et convexe i.e., $\delta_C \in \Gamma_0(X)$.*

Preuve. soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction,

1. Supposons f convexe et montrons que $L_\lambda(f)$ est convexe. Soit $x, y \in L_\lambda(f)$, $t \in]0, 1[$ on a,
   $$x \in L_\lambda(f) \quad \text{alors} \quad f(x) \leq \lambda, \quad \text{donc} \quad tf(x) \leq t\lambda,$$
   $$y \in L_\lambda(f) \quad \text{alors} \quad f(y) \leq \lambda, \quad \text{donc} \quad (1-t)f(y) \leq (1-t)\lambda,$$
   et comme f convexe alors $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, donc
   $$f(tx + (1-t)f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda,$$
   d'où $tx + (1-t)y \in L_\lambda(f)$, et $L_\lambda(f)$ est convexe.
2. Soit $C \subseteq X$, fermé convexe et non vide.
   $$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in C \\ +\infty & \text{Sinon} \end{cases},$$
   On a de la définition, δ_C est propore.

   Montrons que δ_C est convexe, soit alors, $x, y \in X,\ t \in]0, 1[$,

   si $x, y \in C$ alors $\delta_C(x) = 0$ et $\delta_C(y) = 0$, donc $t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y) = 0$, et C convexe alors $tx + (1-t)y \in C$ donc
   $$\delta_C(tx + (1-t)y) = 0 = t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y),$$

D'oú δ_C convexe.

Si $x, y \notin C$ alors $\delta_C(x) = +\infty$ et $\delta_C(y) = +\infty$, et nous avons toujours

$$\delta_C(tx + (1-t)y) \leq +\infty,$$

d'oú δ_C est convexe.

Si $x \in C$ et $y \notin C$, alors $\delta_C(x) = 0$ et $\delta_C(y) = +\infty$, et on a

$$\delta_C(tx + (1-t)y) \leq +\infty = t\delta_C(x) + (1-t)\delta_C(y),$$

donc δ_C est convexe.

Pour montrer que δ_C est semi-continue inférieur, il suffit de montrer que $epi(\delta_C)$ fermé.

On a $epi(\delta_C) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \delta_C(x) \leq \lambda\}$ alors

$$\begin{aligned} epi(\delta_C) &= \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} :\ 0 \leq \lambda\} \cup \{(x, \lambda) \in C_X^C \times \mathbb{R} :\ \lambda \geq +\infty\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda \geq 0\} \cup \{+\infty\} \\ &= [0, +\infty] \end{aligned}$$

par conséquons, $epi(\delta_C)$ est fermé de $X \times \mathbb{R}$, et alors δ_C est semi-continue inférieure.

D'oú $\delta_C \in \Gamma_0(X)$.

$\square$

Pour la continuité des fonction convexe, le théorème suivant résume la situation a cet egard.

2.2.1 La continuité des fonctions convexes

Théorème 2.3. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, alors les déclarations suivantes sont équivalentes*

(a) f est bornée suppérieurement dans un voisinage de $x_0 \in X$.

(b) f est continue au point $x_0 \in X$.

(c) $intepi(f) \neq \emptyset$

(d) $intdom(f) \neq \emptyset$ et $f\mid_{intdom(f)}$ continue.

De plus, si l'une des assertions ci-dessus vérifieé on a

$intepi(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R},\ x \in intdom(f);\ f(x) < \lambda\}.$

Preuve. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Montrons que

(a)$\Rightarrow$(b) Supposons U un voisinage de x_0 tel que $f\mid_U \leqslant c$ pour tout $c > 0$. Sans aucune perte de généralité nous pouvons supposer que $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Soit $0 < \varepsilon \leqslant c$ et $V_\varepsilon = ((\varepsilon/c)U) \cap (-(\varepsilon/c)U)$, alors V_ε est un voisinage analogue du origine. On va montrer que

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad x \in V_\varepsilon, \tag{2.2.2}$$

qui implique la continuité de f au point $x_0 = 0$. Donc soit $x \in U$, alors $(c/\varepsilon)x \in U$ et comme f est convexe et $f(0) = 0$ on a

$$f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{c} f\left(\frac{c}{\varepsilon}x\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right) f(0) \leqslant \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

de même : $-(cx/\varepsilon) \in U$ on a alors

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &\leqslant \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{c}} f(x) + \frac{\frac{\varepsilon}{c}}{1 + \frac{\varepsilon}{c}} f\left(-\frac{c}{\varepsilon}x\right) \\ &\leqslant \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{c}} f(x) + \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{c}} \end{aligned}$$

alors

$$-\varepsilon \leqslant f(x). \tag{2.2.4}$$

D'aprés (2.2.3) et (2.2.4), on a (2.2.2) est vérifiée, et alors f est continue au point $x_0 = 0$.

(b)$\Rightarrow$ (a) La continuité de f implique que f est bornée suppérieurement dans un voisinage de $x_0 \in X$.

(a)$\Rightarrow$(c) Comme avant, posont U un voisinage de x_0 tell que $f|_U \leqslant c$. Alors $U \subseteq intdom(f)$ et $\{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} :\ x \in U,\ c < \lambda\} \subseteq epi(f)$, qui implique que $intepi(f) \neq \emptyset$.

(c)$\Rightarrow$(a) Posons $(x, \lambda) \in intepi(f)$, alors on peut trouver un voisinage U de x et $\varepsilon > 0$ tel que $U \times [\lambda - \varepsilon,\ \lambda + \varepsilon] \subseteq epi(f)$, alors $U \times \{\lambda\} \subseteq epi(f)$ et donc on a $f(x) \leqslant \lambda$ pour tout $x \in U$.

(a)⇒ (d) Encore sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 = 0$. On pose U un voisinage de x_0 tel que $f|_U$ est bornée suppérierement. Alors $U \subseteq dom(f)$ et alors $intdom(f) \neq \emptyset$, l'ensemble $dom(f)$ est convexe, donc si $x \in intdom(f)$ on peut trouver $\lambda > 0$ tel que $v = \lambda x \in dom(f)$. Posons

$$V = x + (1 - \frac{1}{\lambda})U,$$

qui est un voisinage de x. Si $z \in V$ alors $z = x + (1 - \frac{1}{\lambda})u$ avec $u \in U$ et donc de la convexité de f, on aurra

$$\begin{aligned} f(z) = f\left(\frac{1}{\lambda}v + (1 - \frac{1}{\lambda})u\right) &\leqslant \frac{1}{\lambda}f(v) + (1 - \frac{1}{\lambda})f(u) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}f(v) + (1 - \frac{1}{\lambda})c = c_0. \end{aligned}$$

par concéquence $f|_V$ est bornée suppérieurement et donc il est continue au point $x \in intdom(f)$.

(d)⇒(a) Évident.

Maintenant posons $E = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \ x \in intdom(f),\ f(x) < \lambda\}$. On a $intepi(f) \subseteq E$. Soit $v \in intdom(f)$ tel que $f(v) < \lambda$. Choisissons $f(v) < \mu < \lambda$. Comme $f|_{intdom(f)}$ est continue on trouver un voisinage U de v tel que $U \subseteq intdom(f)$ et $f(v) < \mu$ pour tout $v \in U$. Par conséquence $(v, \lambda) \in U \times]\mu, +\infty[\subseteq intepi(f)$ et alors $E \subseteq intepi(f)$.

□

Remarque 2.9. *Notons que $intdom(f) = \{x \in X : \ \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ (x, \lambda) \in intepi(f)\}$.*

Dans un espase de dimension finie la situation est simplifier.

Proposition 2.12. *Si X de dimension finie et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, alors f est continue sur $intdom(f)$.*

Preuve. Si $x \in intdom(f)$, alors on peut trouver $\delta > 0$ et $\{e_k\}_{k=0}^N \subseteq X$ ($N = \dim X$) tel que

$$B_\delta(x) \subseteq conv\{e_k\}_{k=0}^N \subseteq dom(f).$$

Donc, si $v \in B_\delta(x)$, alors on peut trouver $\{t_k\}_{k=0}^N \subseteq [0,1]$ tel que

$$v = \sum_{k=0}^{N} t_k e_k \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=0}^{N} t_k = 1.$$

Comme f est convexe, alors

$$f(v) \leqslant \sum_{k=0}^{N} t_k f(e_k) \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant N} f(e_k) = c.$$

En appliquant le théorème2.3, on déduire que $f|_{intdom(f)}$ est continue. $\square$

Dans un espace de dimension infinie. nous avons besoin d'une condition supplémentaire sur f pour avoir la continuité sur l'$intdom(f)$.

Proposition 2.13. *Si X est un espace de Banach et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et semi continue inférieure, alors $f|_{intdom(f)}$ est continue.*

Preuve. Notons que $dom(f) = \bigcup_{n \geqslant 1} \{f \leqslant n\}$, de la semi-continuité inférieure de f, l'ensemble $\{f \leqslant n\}$ est fermé. Donc, si $x \in intdom(f)$, alors d'aprés *lemme de Baire* en peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $int\{f < n\} \neq \emptyset$ et $f(x) < n$. Posons $u \in int\{f < n\}$ et définissons la fonction

$$\xi(\lambda) = f(x + \lambda(u - x)), \qquad \lambda > 0.$$

comme $x \in intdom(f)$, en peut trouver $\delta > 0$ tel que $\bar{B}_{\delta\|u-x\|_X}(x) \subseteq dom(f)$. Il s'ensuite que $[-\delta, \delta] \subseteq dom(\xi)$, et donc $0 \in intdom(\xi)$. Alors d'aprés la proposition 2.12 ξ est continue au point 0. Comme $\xi(0) < n$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\xi(\lambda) < n$ pour tout $\lambda \in [-\varepsilon, 0]$. On pose $y = x - \varepsilon(u - x)$. Alors on a

$$y \in \{f < n\} \qquad \text{et} \qquad u \in int\{f < n\}.$$

Comme $x \in [u, y[= \{(1-t)u + ty : \ 0 \leqslant t < 1\}$, alors $x \in intdom\{f < n\}$ et donc d'aprés le théorème 2.3 f est continue au point x. $\square$

En fait, nous pouvons identifier le type de continuité de f sur $intdom(f)$.

Théorème 2.4. *Si X est un espace de Banach et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe continue au point $x_0 \in dom(f)$, alors il existe $r > 0$ tell que f est lipchitzienne continue sur $\overline{B}_r(x_0)$.*

Preuve. La continuité de f au point x_0 implique qu'il existe $r, \delta, c > 0$ tell que

$$|f(y)| \leq c, \quad \forall y \in \overline{B}_{r+\delta}.$$

Soit $x, y \in \overline{B}_r(x_0)$ avec $x \neq y$. On pose

$$u = y + \delta \frac{y - x}{\|y - x\|} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \delta} \in]0, 1[,$$

alors $u \in \overline{B}_{r+\delta}(x_0)$ et $y = \lambda u + (1 - \lambda)x$, et donc, puisque f est convexe on aurra $f(y) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(x)$, alors

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &\leq \lambda |f(u) - f(x)| \\
&\leq \frac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \delta} (|f(u)| + |f(x)|) \\
&\leq \frac{\|y - x\|}{\|y - x\| + \delta} 2c \\
&\leq \frac{2c}{\delta} \|y - x\|.
\end{aligned}$$

d'où,

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{2c}{\delta} \|y - x\|, \qquad \forall x, y \in \overline{B}_r(x_0).$$

Alors il existe $k = \frac{2c}{\delta} > 0$ tell que

$$|f(y) - f(x)| \leqslant k \|y - x\|.$$

donc f lipschitzienne continue sur $\overline{B}_r(x_0)$. □

Corollaire 2.3. *Si X un espace de Banach et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, alors f est locallement lipschitzienne.*

Ainsi, nous avons concentré nous attention sur les propriétés du continuité des fonction convexe. Maintenant nous allons donner les propriétés de différentiabilité qui nous orientera à la sous différentiabilité.

Définition 2.8. *Soit X un espace normé, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe et $x_0 \in dom(f)$. La dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction $h \in X$ qu'on note par $f'(x_0, h)$ définie par*

$$f'(x_0; h) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Remarque 2.10. *1. Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre convexe, et soit $x_0 \in dom(f)$, on a alors*

- *$f'(x_0; h)$ existe en tout point $h \in X$.*
- *La fonction $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $h \mapsto g(h) = f'(x_0; h)$ est une fonction positivement homogène et convexe.*

2. D'aprés la convexité de f, la fonction $\lambda \to \frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda}$ est croissante dans $]0, +\infty[$. En fait $f'(x_0, h) = \inf\limits_{\lambda>0} \frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda}$.

3. Si $f'(x_0; .) \in X^*$, alors $f'(x_0; .)$ est la dérivée de f au sens de Gâteaux au point $x_0 \in X$.

Le résultat essentielle de la Gâteaux différentiable des fonctions convexe est le suivant.

Théorème 2.5. *Si X un espace de Banach séparable, $U \subseteq X$ un ensemble ouvert convexe non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, alors f est Gâteaux différentiable dans un sous ensemble G_δ dense dans U.*

Preuve. Pour tout $h \in X$, et $n \geqslant 1$, On définie l'ensemble

$$V(h, n) = \left\{ x \in U, \ \exists \delta = \delta(x, n) > 0 : \sup_{0<\lambda<\delta} \frac{f(x+\lambda h) - f(x-\lambda h) - 2f(x)}{\lambda} < \frac{1}{n} \right\}.$$

Puisque f est continue sur U, il existe $n \geqslant 1$ et pour tout $m \geqslant 1$ l'ensemble

$$W_m(h) = \left\{ x \in U : \ \frac{f(x+\frac{1}{m}h) - f(x-\frac{1}{m}h) - 2f(x)}{\frac{1}{m}} < \frac{1}{n} \right\}$$

est ouvert dans U. Notons que $V(h, n) = \bigcup\limits_{m\geqslant 1} W_m(h)$. Donc $V(h, n)$ est ouvert. Dans ce qui suite nous avons montrer que $V(h, n)$ dense dans U. Supposons le contraire, alors en peut trouver $x_0 \in U$ et $\delta > 0$ tel que $V(h, n) \cap B_\delta(x_0) = \emptyset$, le cas où la fonction convexe $\lambda \to \xi(\lambda) = f(x_0 + \lambda h)$ n'est pas différentiable dans $]-\delta, \delta[$, contradiction avec le resultat classique de différentiabilité des fonctions convexe réel. donc $V(h, n)$ est dense dans U. Puisque f convexe continue, alors d'aprés le corollaire 2.3 on déduire que $f'(x, .)$ est continue pour tout $x \in U$, donc si $\{h_k\}_{k\geqslant 1}$ est dense dans $\partial B_1 = \{u \in X : \ \|u\|_X = 1\}$, alors f est Gâteaux différentiable dans l'ensemble $\bigcap\limits_{n,k} V(h_k, n)$ le quelle est dense dans U (d'aprés *le lemme de Baire*) et G_δ. $\square$

Théorème 2.6. *Si X un espace de Banach avec un dual séparable, U un ensemble ouvert convexe non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue, alors f est Fréchet différentiable dans un ensemble G_δ dense dans U.*

Dans l'exemple 2.3 on voit que l'existence des dérivée partiel n'implique pas généralement la dérivée au sens de Fréchet d'une fonction. Dans le cas des fonctions convexe, la situation va changer.

Proposition 2.14. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert non vide, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et tout les dérivée partiel de f au point $x \in U$ existe, alors f est Fréchet différentiable au point $x \in U$.*

Preuve. Posons $A(x) \in \mathbb{R}^N$ définit par $(A(x), h)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{k=1}^{N} (\partial f / \partial x_k)(x) h_k$ pour tout $h = (h_k)_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$. Soit $r > 0$ tel que $B_r(x) \subseteq U$. pour chaque $h \in B_r(0)$, on pose

$$\vartheta(h) = f(x+h) - f(x) - (A(x), h)_{\mathbb{R}^N}.$$

On a ϑ est convexe dans $B_r(0)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ on définit $\eta_k : B_r(0) \to \mathbb{R}$ par

$$\eta_k(h) = \begin{cases} \frac{\vartheta(h_k e_k)}{h_k} & \text{Si } h_k \neq 0 \\ 0 & \text{Si } h_k = 0 \end{cases} \qquad \text{pour tout } h = (h_k)_{k=1}^N \in B_r(0).$$

où $\{e_k\}_{k=1}^N$ est la base orthonormal de $\mathbb{R}^N$. Notons que $\eta_k(h) \to 0$ quand $\|h\|_{\mathbb{R}^N} \to 0$. Pour chaque $h = (h_k)_{k=1}^N$ avec $\|h\|_{\mathbb{R}^N} < \frac{r}{N}$, comme ϑ est convexe, alors on a

$$\begin{aligned} \vartheta(h) = \vartheta\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} N h_k e_k\right) &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \vartheta(N h_k e_k). \\ = \sum_{k=1}^{N} h_k \eta_k(Nh) &\leqslant \|h\|_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{N} |\eta_k(Nh)|. \end{aligned}$$

puisque $-\vartheta(-h) \leqslant \vartheta(h)$, on a

$$-\|h\|_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{N} |\eta_k(-Nh)| \leqslant \vartheta h \leqslant \|h\|_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{N} |\eta_k(Nh)|.$$

donc $\frac{\vartheta(h)}{\|h\|_{\mathbb{R}^N}} \to 0$ quand $\|h\|_{\mathbb{R}^N} \to 0$.

Ce qui prouver que f est Fréchet différentiable au point $x \in U$ et que $f'(x) = A(x)$. $\square$

Corollaire 2.4. *Si X un espace de Banach de dimension finie, $U \subseteq X$ un ensemble ouvert non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors f est Gâteaux différentiable au point $x \in U$ si et seulement s'il est Fréchet différentiable au point $x \in U$.*

2.2.2 Fonctions conjuguées

Définition 2.9. *Soit $f : X \to \mathbb{R}^*$, on appelle fonction conjuguée de f qu'on la note f^* la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f^* : X^* &\to \mathbb{R} \\ x^* &\mapsto f^*(x^*) = \sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle_X - f(x)) \end{aligned}$$

On appelle fonction conjuguée de f^* ou bien biconjuguée de f, qu'on la note f^{**} la fonction définie par

$$\begin{aligned} f^{**} : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{**}(x) = \sup_{x^* \in X^*}(\langle x^*, x\rangle_X - f^*(x^*)) \end{aligned}$$

Remarque 2.11. *Si f prend la valeur $-\infty$, alors $f^* \equiv +\infty$. Aussi, si $f \neq +\infty$ alors f^* est à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 2.15. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, alors $f^* \in \Gamma_0(X^*)$.*

Proposition 2.16. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction alors pour tout $x \in X$, $x^* \in X^*$, et tout $\lambda > 0$, on a*

1. $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle_X$ *(Inégalité de Young-Fenchel).*
2. $f^*(x^*) + f^{**}(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X$.
3. $f^{**} \leq f$.
4. $(\lambda f)^*(x^*) = \lambda f^*(\frac{x^*}{\lambda})$.

Preuve. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction,

1. Pour tout $x^* \in X^*$, $x \in X$, on a $f^*(x^*) = \sup_{x\in X} (\langle x^*, x\rangle_X - f(x))$, alors

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle_X - f(x),$$

donc $f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X$.

2. Montrons que pour tout $x \in X$, $x^* \in X^*$, on a $f^*(x^*) + f^{**}(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X$.

On a pour tout $x \in X$, $x^* \in X^*$, $f^{**}(x) = \sup_{x^*\in X^*} (\langle x^*, x\rangle_X - f^*(x^*))$ alors

$$f^{**}(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X - f^*(x^*).$$

donc $f^{**}(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle_X$.

3. On a pour tout $x \in X$, et $x^* \in X^*$, $\quad f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X$, alors

$$f(x) \geq \sup_{x^*\in X^*} (\langle x^*, x\rangle_X - f^*(x^*))$$

donc $f(x) \geq f^{**}(x)$.

4. Montrons que $(\lambda f)^*(x^*) = \lambda f^*\left(\frac{x^*}{\lambda}\right)$, pour tout $x^* \in X^*$, et $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}(\lambda f)^*(x^*) &= \sup_{x\in X} (\langle x^*, x\rangle_X - (\lambda f)(x)) \\ &\overset{\lambda\geq 0}{=} \lambda \sup_{x\in X}\left(\frac{1}{\lambda}\langle x^*, x\rangle_X - f(x)\right) \\ &= \lambda \sup_{x\in X}\left(\langle \frac{x^*}{\lambda}, x\rangle_X - f(x)\right) \\ &= \lambda f^*\left(\frac{x^*}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.17. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, alors f admet un minorant affine continue ; i.e., il existe $(x_0^*, v_0) \in X^* \times \mathbb{R}$ tell que*

$$\langle x_0^*, x\rangle_X - v_0 \leq f(x),\ \textit{pour tout}\, x \in X$$

Preuve. Soit $A = \{(x_0, \beta) \in X \times \mathbb{R} : \beta < f(x_0)\}$ alors $(x_0, \beta) \notin epi(f)$. Comme $epi(f) \subseteq X \times \mathbb{R}$ est un convexe fermé alors on peut utilisant la définition du séparation au sens strict, on peut trouver $(x_0^*, \xi_0) \in X^* \times \mathbb{R}$ et $v_0 \in \mathbb{R}$ tell que

$$\langle x_0^*, x\rangle_X + \xi_0\lambda \leq v_0 < \langle x_0^*, x_0\rangle_X + \xi_0\beta, \forall (x, \lambda) \in epi(f),$$

alors

$$\langle x_0^*, x\rangle_X + \xi_0 f(x) \leq v_0 < \langle x_0^*, x_0\rangle_X + \xi_0\beta, \tag{2.2.5}$$

de l'inégalité (2.2.5), on obtient

$$\langle x_0^*, x\rangle_X + \xi_0 f(x) - \langle x_0^*, x_0\rangle_X - \xi_0\beta \leq 0,$$

alors

$$\langle x_0^*, x - x_0\rangle_X + \xi_0(f(x) - \beta) \leq 0.$$

donc

$$\xi_0 \leq -\frac{\langle x_0^*, x - x_0\rangle_X}{f(x) - \beta}$$

c'est-à-dire $\xi_0 \leq 0$. Supposons que $\xi_0 = -1$ alors de (2.2.5) on aurra pour tout $x \in X$

$$\langle x_0^*, x\rangle_X - f(x) \leq v_0,$$

d'oú

$$\langle x_0^*, x\rangle_X - v_0 \leq f(x).$$

donc f est minorée par une fonction affine continue. □

Théorème 2.7. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors, $f^{**} = f$ si et seulement si $f \in \Gamma_0(X)$.*

Preuve. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, montrons que $f^{**} = f$ si et seulement si $f \in \Gamma_0(X)$.

$\Rightarrow$) De la proposition 2.15.

$\Leftarrow$) Supposons $f \in \Gamma_0(X)$ et montrons que $f^{**} = f$.

On à déja vu que $f^{**} < f$. Il suffit de montrer que $f \leq f^{**}$.

Supposons $A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t < f(x)\}$ comme $epi(f)$ est un convexe fermé alors $(x,t) \notin epi(f)$. D'aprés la définition de séparation au sens strict il existe $(x^*, \xi) \in X^* \times \mathbb{R}$, $(x^*, \xi) \neq (0,0)$ et $\varepsilon > 0$, tell que

$$\langle x^*, y\rangle_X + \xi\lambda \leq \langle x^*, x\rangle_X + \xi t - \varepsilon,\ \forall (y,\lambda) \in epi(f). \tag{2.2.6}$$

Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ on aurra $\xi \leq 0$.

Si $\xi < 0$, alors pour tout $y \in X$

$$\langle x^*, y\rangle_X + \xi f(y) < \langle x^*, x\rangle_X + \xi t,$$

alors

$$\sup_{y\in X}(\langle x^*, y\rangle_X - (-\xi f)(y)) < \langle x^*, x\rangle_X + \xi t,$$

donc

$$(-\xi f)^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle_X + \xi t.$$

Et comme $(-\xi f)^*(x^*) = -\xi f^*(\frac{x^*}{-\xi})$ on a

$$-\xi f^*(\frac{x^*}{-\xi}) \leq \langle x^*, x\rangle_X + \xi t$$

alors

$$-\xi f^*(-\frac{x^*}{\xi}) \leq -\xi\langle -\frac{x^*}{\xi}, x\rangle_X + \xi t,$$

donc

$$-f^*(-\frac{x^*}{\xi}) + \langle -\frac{x^*}{\xi}, x\rangle_X \geq t$$

d'où $t \leq \langle -\frac{x^*}{\xi}, x\rangle_X - f^*(-\frac{x^*}{\xi})$. Et comme $t < f(x)$ arbitraire, alors $f(x) \leq f^{**}(x)$.

Si $\xi = 0$, d'aprés (2.2.6) on a pour tout $y \in dom(f)$

$$\langle x^*, y\rangle_X \leq \langle x^*, x\rangle_X - \varepsilon,$$

alors $x \notin dom(f)$ et alors $f(x) = +\infty$.

Donc, nous avons besoin de montrer que $f^{**}(x) = +\infty$.

Posons $\eta \in \mathbb{R}$ tell que

$$\langle x^*, y\rangle_X < \eta < \langle x^*, x\rangle_X \quad \text{pour tout } y \in dom(f). \tag{2.2.7}$$

D'aprés la proposition 2.17 il existe $(y^*, v_0) \in X^* \times \mathbb{R}$, tell que

$$\langle y^*, y\rangle_X - v_0 \leq f(y), \quad \text{pour tout } y \in X.$$

Pour tout $\gamma > 0$ nous avons d'aprés (2.2.7) nous avons, pour tout $y \in X$,

$$\langle y^*, y\rangle_X - v_0 + \gamma(\langle x^*, y\rangle_X - \eta) \leq f(y)$$

alors

$$\langle y^* + \gamma x^*, y\rangle_X - f(y) \leq v_0 + \gamma\eta,$$

donc

$$\sup_{y\in X}(\langle y^* + \gamma x^*, y\rangle_X - f(y)) \leq v_0 + \gamma\eta$$

d'où

$$f^*(y^* + \gamma x^*) \leq v_0 + \gamma\eta. \tag{2.2.8}$$

Donc, d'aprés (2.2.8) on a

$$\begin{aligned}\langle y^*, x\rangle_X - v_0 + \gamma(\langle x^*, x\rangle_X - \eta) &\leq \langle y^* + \gamma x^*, x\rangle_X - f^*(y^* + \gamma x^*)\\ &\leq f^{**}(x).\end{aligned}$$

Comme $\gamma > 0$ est arbitraire, alors quand $\gamma \uparrow +\infty$ et puisque $\langle x^*, x\rangle_X - \eta > 0$, on obtient $f^{**}(x) = +\infty$. Alors on déduire que $f^{**} = f$.

□

Remarque 2.12. *Il résulte du Théorème 2.7 que $f \in \Gamma_0(X)$ si et seulement si f est un enveloppe suppérieure de tous les fonctions continues majorée par f. Et il résulte que f^{**}est semi cotinue inférieurement, convexe de régilarisation(i.e., la plus grand fonction semi-continue inférieure, convexe et majoreé par f)*

Prochaine, nous avons présenter un opération qui est la base dans l'analyse convexe.

Définition 2.10. *Soit $f, \varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Le convolution infimal de f et φ notée par $f \oplus \varphi$, définie par*

$$(f \oplus \varphi)(x) = \inf_{y\in X}[f(y) + \varphi(x - y)] = \inf[f(u_1) + \varphi(u_2); u_1 + u_2 = x].$$

Proposition 2.18. *Si $f, \varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes. S'il existe $x_0 \in dom(\varphi)$ tell que f est continue au point x_0, alors*

$$\inf_{x\in X}(f(x) + \varphi(x)) = \max_{x^*\in X^*}(-f^*(x^*) - \varphi^*(-x^*)).$$

Preuve. On a

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle_X - f(x)), \quad \text{alors} \quad -f^*(x^*) \leq -\langle x^*, x\rangle_X + f(x), \tag{2.2.9}$$

$$\text{et } \varphi^*(-x^*) = \sup_{x\in X}(\langle -x^*, x\rangle_X - \varphi(x)) \quad \text{alors} \quad -\varphi^*(-x^*) \leq \langle x^*, x\rangle_X + \varphi(x), \tag{2.2.10}$$

de (2.2.9), et (2.2.10) on aurra $-f^*(x^*) - \varphi(-x^*) \leq f(x) + \varphi(x)$, alors

$$\sup_{x^*\in X^*}[-f^*(x^*) - \varphi(-x^*)] \leq \inf_{x\in X}[f(x) + \varphi(x)].$$

Posons

$$m^* = \sup_{x^*\in X^*}[-f^*(x^*) - \varphi(-x^*)]; \text{ et } \quad m = \inf_{x\in X}[f(x) + \varphi(x)],$$

comme $x_0 \in dom(f) \cap dom(\varphi)$, alors $-\infty \leq m < +\infty$. Si $m = -\infty$ nous avons fini.

Alors supposons que $m \in \mathbb{R}$, et posons $E = intepi(f) \neq \emptyset$ (théorème 2.3) et

$G = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \lambda \leq m - \varphi(x)\} \neq \emptyset$

On a les deux ensembles sont convexes, et si $(x, \lambda) \in E$, alors $\lambda > f(x) \geq m - \varphi(x)$..

Par conséquent, $E \cap G = \emptyset$, En appliquant le définition de séparation au sens strict on aurra, il existe $(x_0^*, \lambda_0) \in X^* \times \mathbb{R}$, $(x_0^*, \lambda_0) \neq (0, 0)$ et $\xi \in \mathbb{R}$ tell que

$$\langle x_0^*, x\rangle_X + \lambda_0\lambda \leq \xi \leq \langle x_0^*, u\rangle_X + \lambda_0 t, \quad \text{pour tout } (x, \lambda) \in E, \ (u, t) \in G. \tag{2.2.11}$$

Quand $\lambda \to +\infty$ on obtient $\lambda_0 \leq 0$. Si $\lambda_0 = 0$

$$\langle x_0^*, x\rangle_X \leq \xi \leq \langle x_0^*, u\rangle_X \qquad \text{pour tout } x \in dom(f),$$

mais on peut trouver $\delta > 0$ tell que $B_\delta(x_0) \subseteq dom(f)$ alors, $x_0^* = 0$.

Contradiction avec $(x_0^*, \lambda_0) \neq (0, 0)$ et donc $\lambda_0 < 0$.

En particulier pour $\lambda_0 = -1$, on aurra d'aprés (2.2.11),

$$-\langle x_0^*, u\rangle_X + t \leq -\xi \quad \text{pour tout } (u, t) \in G, \tag{2.2.12}$$

alors

$$-\langle x_0^*, u\rangle_X + m - \varphi(u) \leq -\xi \quad \text{pour tout } u \in X, \tag{2.2.13}$$

et

$$\langle x_0^*, x\rangle_X - \lambda \leq \xi \quad \text{pour tout}(x, \lambda) \in \overline{E} = epi(f), \tag{2.2.14}$$

d'aprés (2.2.13) on obtient $\varphi^*(-x_0^*) \leq -\xi - m$ et d'aprés (2.2.14) on a $f^*(x_0^*) \leq \xi$, alors

$$m \leq -f^*(x^*) - \varphi^*(-x_0^*) \leq m^*$$

d'où

$$\inf_{x \in X}(f(x) + \varphi(x)) = \max_{x^* \in X^*}(-f^*(x^*) - \varphi^*(-x^*))$$

□

Utilisant cette proposition on peut démontrer la dualité entre l'addition et la convolution infimal.

Théorème 2.8. *Si $f, \varphi : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et s'il existe $x_0 \in dom(\varphi)$ tell que f est continue au point x_0 alors $(f + \varphi)^* = f^* \oplus \varphi^*$.*

Preuve. On a pour tout $x^* \in X^*$, alors

$$-(f + \varphi)^*(x^*) = \inf_{x \in X}[g(x) + h(x)],$$

avec $g(x) = f(x) - \langle x^*, x\rangle_X$ et $h(x) = \varphi(x)$.
On a g, h sont des fonctions convexes, et g continue au point $x_0 \in dom(h) = dom(\varphi)$ alors, d'aprés la proposition 2.18 on aurra

$$\begin{aligned} -(f + \varphi)^*(x^*) &= -\min_{u^* \in X^*}[h^*(u^*) + g(-u^*)] \\ &= -\min_{u^* \in X^*}[\varphi^*(u^*) + f^*(x^* - u^*)]. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.13. *Pour tout fonctions $f, \varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres convexes, on a*

$$(f \oplus \varphi)^* = f^* + \varphi^*.$$

Exemple 2.5. *1. Soit $C \subseteq X$ un ensemble non vide, et δ_C la fonction indicatrice, alors*

$$\begin{aligned} \delta_C^*(x^*) &= \sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle_X - \delta_C(x)) \\ &= \sup(\sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle_X - \delta_C(x)), \sup_{x \in C_X^C}(\langle x^*, x\rangle_X - \delta_C(x))) \\ &= \sup(\sup_{x \in C}(\langle x^*, x\rangle_X, -\infty) \\ &= \sup_{x \in C}(\langle x^*, x\rangle_X). \end{aligned}$$

(la fonction support de l'ensemble C).

Si $C \subseteq X$ un ensemble convexe fermé et non vide, alors

$$x \in C \Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle_X \leq \delta_C^*(x^*) \quad \textit{pour tout } x^* \in X^*.$$

2. *Soit X un espace normé, $C \subseteq X$ un ensemble non vide et*

   $f(x) = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$, alors $f = \delta_C \oplus \|.\|_X$, et donc d'aprés la remarque 2.13 on a

$$f^* = \delta_C + (\|.\|_X)^* = \delta_C + \delta_{\overline{B}_1^*}$$

3. *Soit X un espace normé, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie par*

   $x \mapsto g(x) = \frac{1}{2}x^2$. On définie la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) = g(\|x\|_X) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$ alors,

$$\begin{aligned} f^* &: X^* \to \mathbb{R} \\ &x^* \mapsto f^*(x^*) = \sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle_X - f(x)). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_{x \in X}(\langle x^*, x\rangle_X - \frac{1}{2}\|x^*\|_{X^*}) \\ &= \sup_{x \in X}(\|x\|_X\langle x^*, \frac{x}{\|x\|_X}\rangle_X - \frac{1}{2}\|x\|_X^2). \end{aligned}$$

Posons $t = \|x\|_X, \quad y = \frac{x}{\|x\|_X}$ donc

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \sup_{\substack{t>0 \\ y \in S(0,1)}} (t\langle x^*, y\rangle_X - \frac{1}{2}t^2) \\ &= \sup_{t>0}(t \sup_{y \in S(0,1)} \langle x^*, y\rangle_X - \frac{1}{2}t^2) \\ &= \sup_{t>0}(t\|x^*\|_{X^*} - \frac{1}{2}t^2) \end{aligned}$$

Posons : $h(t) = t\|x^*\|_{X^*} - \frac{1}{2}t^2$ alors $h'(t) = \|x^*\|_{X^*} - t$.

On a $\quad h'(t) = 0 \quad$ alors $\quad t = \|x^*\|_{X^*}$,

et $\quad h''(t) = -1 \quad$ alors $\quad h''(\|x^*\|_{X^*}) = -1 < 0$.

Alors $t = \|x^*\|_{X^*}$ est un maximun de h, donc

$$f^*(x^*) = h(\|x^*\|_{X^*}) = \frac{1}{2}\|x^*\|_{X^*}^2. \qquad \textit{alors} \quad f^*(x^*) = g^*(\|x^*\|_{X^*}).$$

2.2.3 Sous-différentiabilité

Maintenant nous passons à l'étude du sous-différentiel d'une fonction convexe. Le sous-différentiel caractérise le comportement local de la fonction convexe dans une façon analogue dans lequel les dérivées déterminent le comportement local des fonctions lisses.
Considérons X un espace localement convex, X^* son dual topologique, et $\langle ., . \rangle_X$ le produit scalaire de dualité pour la couple (X, X^*).
On muni X par la topologie $\omega(X, X^*)$ et X^* par la topologie $\omega(X^*, X)$.

Définition 2.11. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre et $x_0 \in dom(f)$. Le sous-différentielle de f au point x_0 est l'ensemble $\partial f(x_0) \subseteq X^*$ définie par*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h \rangle_X \leq f(x_0 + h) - f(x_0), \quad \textit{pour tout} \quad h \in X\}.$$

On dit que f est sous différentiable au point x_0 si et sseulement si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Remarque 2.14. *1. $\partial f(x_0)$ est w^*-fermé et convexe.*

2. $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction propre convexe, alors f admet un minimun globale au point x_0 si est seulement si $0 \in \partial f(x_0)$

En effet, pour tout $x \in X$ on pose $h = x - x_0$ alors,

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(x) &\iff f(x_0) \geq f(x_0) + \langle 0, x - x_0 \rangle_X \\ &\iff f(x) \geq f(x_0). \end{aligned}$$

Donc f admet un minimun global au point x_0.

3. $x^* \in \partial f(x_0)$ si et seulement si $\langle x^*, h \rangle_X \leq f'(x_0; h)$, pour tout $h \in X$.

Proposition 2.19. *Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres, $x_0 \in dom(f) \cap dom(g)$ et soit $\lambda > 0$, alors*

a) $\partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subseteq \partial(f + g)(x_0)$.

b) $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$

Preuve. Soit $h \in X$ et $x_0 \in dom(f) \cap dom(g)$ on a

a) soit $x^* \in \partial f(x_0) + \partial g(x_0)$ alors $x^* = x_1^* + x_2^*$, tell que $x_1^* \in \partial f(x_0)$ et $x_2^* \in \partial g(x_0)$.

$$x_1^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \langle x_1^*, h\rangle_X \leq f(x_0+h) - f(x_0) \tag{2.2.15}$$

$$x_2^* \in \partial g(x_0) \Leftrightarrow \langle x_2^*, h\rangle_X \leq g(x_0+h) - g(x_0) \tag{2.2.16}$$

on somme (2.2.15) et (2.2.16) on trouve

$$\langle x_1^*, h\rangle_X + \langle x_2^*, h\rangle_X \leq f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0),$$

alors

$$\langle x_1^* + x_2^*, h\rangle_X \leq (f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0).$$

Donc $x^* = x_1^* + x_2^* \in \partial(f+g)(x_0)$.

b) Supposons $x^* \in \partial(\lambda f)(x_0)$, et montons que $x^* \in \lambda \partial f(x_0)$,

$$\begin{aligned} x^* \in \partial(\lambda f)(x_0) &\Leftrightarrow \langle x^*, h\rangle_X \leq (\lambda f)(x_0+h) - (\lambda f)(x_0) \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, h\rangle_X \leq \lambda f(x_0+h) - \lambda f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \langle x^*, h\rangle_X \leq \lambda(f(x_0+h) - f(x_0)) \\ &\Leftrightarrow x^* \in \lambda \partial f(x_0). \end{aligned}$$

Donc $\partial(\lambda f)(x_0) = \lambda \partial f(x_0)$.

□

Proposition 2.20. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre alors $x^* \in \partial f(x)$ si et seulement si $f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle_X$.*

Preuve. On a déja vu d'aprés l'inégalité de Young-Fenchel que pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$,

$$f^*(x^*) + f(x) \geqslant \langle x^*, x\rangle_X, \tag{2.2.17}$$

alors il suffit de montrer l'inégalité opposé. Pour tout $y \in X$ on a

$$\begin{aligned}
x^* \in \partial f(x) &\Leftrightarrow f(y) - f(x) \geqslant \langle x^*, y - x\rangle_X \\
&\Leftrightarrow f(y) - f(x) \geqslant \langle x^*, y\rangle_X - \langle x^*, x\rangle_X \\
&\Rightarrow \langle x^*, x\rangle_X \geqslant f(x) - f(y) + \langle x^*, y\rangle_X \\
&\Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle_X \geqslant f(x) + \sup_{y\in X}(\langle x^*, y\rangle_X - f(y)) \\
&\Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle_X \geqslant f(x) + f^*(x^*). \qquad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Donc de (2.2.17) et (2.2.18) on a l'égalité.

□

Remarque 2.15. *Si $x^* \in \partial f(x)$ alors l'inégalité de Young-Fenchel devient une égalité i.e.,*

$$f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x\rangle_X, \quad \textit{pour tout}\; x \in X.$$

Proposition 2.21. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre.*

1. *Si $x^* \in \partial f(x)$, alors $x \in \partial f^*(x^*)$.*
2. *Si $f \in \Gamma_0(X)$, alors $x^* \in \partial f(x)$ si et seulement si $x \in \partial f^*(x^*)$.*

Théorème 2.9. *Si X est un espace de Banach et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, continue au point $x \in X$, alors $\partial f(x)$ est un ensemble non vide w^*-compact et convexe sur X^**

Preuve. D'aprés le Théorème 2.3 on a f continue au point $x \in X$ alors $intepi(f) \neq \emptyset$, et comme $(x, f(x))$ est un point limité de $epi(f)$, alors on va appliquer le définition de séparation au sens large on trouve $(x^*, \xi) \in X^* \times \mathbb{R}$, avec $(x^*, \xi) \neq (0, 0)$, tell que pour tout $(y, \lambda) \in epi(f)$

$$\xi(f(x) - \lambda) \leq \langle x^*, y - x\rangle_X \qquad (2.2.19)$$

quand λ tend vers $+\infty$ on aura $\xi \geq 0$.

Si $\xi = 0$: de (2.2.19) on a pour tout $y \in dom(f)$, $\langle x^*, x\rangle_X \leq \langle x^*, y\rangle_X$.

Mais $x \in intdom(f)$, alors pour tout $\delta > 0$ on aurra $\langle x^*, x\rangle_X \geq 0$ pour tout $u \in \overline{B}_\delta(0)$ qui implique que $x^* = 0$. Contradiction avec $(x^*, \xi) \neq (0,0)$, donc $\xi > 0$.

On particulier pour $\xi = 1$, on prend $\lambda = f(y)$, alors d'aprés (2.2.19) on aurra

$$f(x) - f(y) \leq \langle x^*, y - x \rangle_X \quad \text{pour tout} \quad y \in dom(f),$$

alors

$$-x^* \in \partial f(x) \neq \emptyset.$$

D'aprés le théorème 2.4, il exist $r > 0$ tel que $f_{|\overline{B}_r(x)}$ est lipschitzienne continue, donc il exist un constante $K_r > 0$, tell que pour $x^* \in \partial f(x)$ nous avons

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq f(x+h) - f(x) \leq K_r \|h\|_X, \qquad \text{pour tout} \quad h \in \overline{B}_r(0),$$

d'où $\|x^*\|_{X^*} \leq K_r$ Ce qui prouve que $\partial f(x^*)$ est borné, par conséquent, d'aprés le théorème de Alaoglou elle est w^*-compact. □

Théorème 2.10. *Si X un espace de Banach, et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe continue au point $x \in X$, alors pour tout $h \in X$*

$$f'(x; h) = \delta^*_{\partial f(x)}(h) = \sup_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, h \rangle_X.$$

Preuve. Soit $\varphi(x) = f'(x; h),\ h \in X$. Comme f est continue au point $x \in X$, alors φ est convexe continue et d'aprés le théorème 2.9 on a $\partial f(x) \neq \emptyset$. Donc pour tout $x^* \in \partial f(x)$ et tout $h \in X$, nous avons

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq \varphi(h).$$

Et on a

$$\begin{aligned} f(x+\lambda h) - f(x) &= f(\lambda x + (1-\lambda)x + \lambda h) - f(x) \\ &= f(\lambda(x+h) + (1-\lambda)x) - f(x) \\ &\leq \lambda f(x+h) + (1-\lambda) f(x) - f(x) \text{ (car } f \text{ est convexe)} \\ &= \lambda(f(x+h) - f(x)) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \leq f(x+h) - f(x),$$

et

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \leq f(x+h) - f(x)$$

c'est à dire $f'(x; h) \leq f(x+h) - f(x)$. Donc

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq f'(x; h) \leq f(x+h) - f(x).$$

Considérons maintenant pour tout $\lambda > 0$ la fonction $\varphi_\lambda : X \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$\varphi_\lambda(h) = \frac{1}{\lambda}(f(x+\lambda h) - f(x))$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^*(x^*) &= \sup_{h \in X}(\langle x^*, h \rangle_X - \varphi_\lambda(h)) \\
&= \sup_{h \in X}(\langle x^*, h \rangle_X - \frac{1}{\lambda}(f(x+\lambda h) - f(x)) \\
&= \sup_{h \in X}(\langle x^*, h \rangle_X - \frac{1}{\lambda} f(x+\lambda h) + \frac{1}{\lambda} f(x))
\end{aligned}$$

Posons $y = x + \lambda h$ alors $h = \frac{y-x}{\lambda}$, donc

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^*(x^*) &= \sup_{y \in X}[\langle x^*, \frac{y-x}{\lambda} \rangle_X - \frac{1}{\lambda} f(x + \lambda(\frac{y-x}{\lambda})) + \frac{1}{\lambda} f(x)] \\
&= \frac{1}{\lambda} \sup_{y \in X}[\langle x^*, y-x \rangle_X - f(y) + f(x)] \\
&= \frac{1}{\lambda}(\sup_{y \in X}[\langle x^*, y \rangle_X - \langle x^*, x \rangle_X - f(y) + f(x)] \\
&= \frac{1}{\lambda}[-\langle x^*, x \rangle_X + f(x)] + \frac{1}{\lambda} \sup_{y \in X}[\langle x^*, y \rangle_X - f(y)]
\end{aligned}$$

alors, $\varphi_\lambda^*(x^*) = \frac{1}{\lambda}[f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle_X], \ \lambda > 0.$

Comme $\varphi = \inf\limits_{\lambda > 0} \varphi_\lambda$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(h) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \varphi_\lambda(h) = \inf_{\lambda > 0} \varphi_\lambda(h) \quad \text{(car } \varphi_\lambda \text{ est croissante)},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x^*) &= \sup_{h\in X}[\langle x^*, h\rangle_X - \varphi(h)] \\
&= \sup_{h\in X}[\langle x^*, h\rangle_X - \inf_{\lambda>0}\varphi_\lambda(h)] \\
&= \sup_{h\in X}[\langle x^*, h\rangle_X + \sup_{\lambda>0}(-\varphi_\lambda(h))] \\
&= \sup_{\lambda>0}[\sup_{h\in X}\langle x^*, h\rangle_X - \varphi_\lambda(h)] \\
&= \sup_{\lambda>0}\varphi_\lambda^*.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x^*) &= \sup_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}[f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x\rangle_X] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x\rangle_X \leq 0 \\ +\infty & \text{si } f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x\rangle_X \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } f^*(x^*) + f(x) \leq \langle x^*, x\rangle_X \\ +\infty & \text{si } f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x\rangle_X \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x^* \in \partial f(x) \\ +\infty & \text{si } x^* \notin \partial f(x) \end{cases} \\
&= \delta_{\partial f(x)}(x^*)
\end{aligned}$$

donc $\varphi^* = \delta_{\partial f(x)}$, d'où $\varphi^{**} = \varphi = \delta^*_{\partial f(x)}$. □

Remarque 2.16. *On générale le théorème 2.9 et 2.10 sont encore valable dans le dual des espaces localement convexe.*

Il est naturel de demander quel est la ralation exacte entre le sous-différentielle et le différentielle au sens de Gâteaux s'il existe.

Théorème 2.11. *Si X un espace de Banach, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, alors*

1. *Si f est Gâteaux-différentiable au point x_0, alors $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

2. *Si f est continue au point $x_0 \in X$ et $\partial f(x_0)$ est un singleton, alors f est Gâteaux-différentiable au point x_0 et $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

Preuve. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe,

1. f est Gâteaux-différentiable, alors $f'(x_0; h) = \langle f'(x_0), h\rangle_X$. D'autre part on a pour tout $x^* \in \partial f(x_0)$, et tout $h \in X$,

$$f'(x_0, h) \geq \langle x^*, h\rangle_X \iff \langle f'(x_0), h\rangle_X \geq \langle x^*, h\rangle_X, \tag{2.2.20}$$

en particulier pour $-h$, on a,

$$\langle f'(x_0), -h\rangle_X \geq \langle x^*, -h\rangle_X \iff \langle f'(x_0), h\rangle_X \leq \langle x^*, h\rangle_X, \tag{2.2.21}$$

de (2.2.20) et (2.2.21) on aurra pour tout $h \in X$

$$\langle f'(x_0), h\rangle_X = \langle x^*, h\rangle_X,$$

alors

$$\langle f'(x_0) - x^*, h\rangle_X = 0,$$

d'où

$$f'(x_0) - x^* = 0_{X^*}, \text{ alors } x^* = f'(x_0),$$

pour tout $x^* \in \partial f(x_0) = x^* = f'(x_0)$ donc $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

2. D'aprés le théorème 2.10 on a pour tout $h \in X$

$$f'(x_0; h) = \sup_{x^* \in \partial f(x_0)} \langle x^*, h\rangle_X.$$

Si $\partial f(x_0)$ et un singleton, i.e., $\partial f(x_0) = \{h^*\}$, alors pour tout $h \in X$

$$f'(x_0, h) = \sup_{x^* \in \{h^*\}} \langle x^*, h\rangle_X = \langle h^*, h\rangle_X$$

d'ou f est Gâteaux-différentiable et $f'(x_0) = h^*$ donc $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

$\square$

Théorème 2.12. *Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres convexes et s'il existe $\hat{x} \in dom(f) \cap dom(g)$ où une des deux fonctions est continue, alors*

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in X.$$

Preuve. De la proposition (2.19) partie(a) on sait que nous avons toujours $\partial f + \partial g \subseteq \partial(f+g)$. Donc il suffit de montrer que l'inclusion opposée est satisfait. Soit $u^* \in \partial(f+g)(x)$, alors $x \in dom f \cap dom g$ et

$$g(x) - g(y) \leq f(y) - f(x) - \langle u^*, y - x\rangle_X = h(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in X. \tag{2.2.22}$$

Nous considérons les deux ensembles suivantes

$$C_1 = epi(h) \quad \text{et} \quad C_2 = \{(y, \mu) \in X \times \mathbb{R} : \mu \leq g(x) - g(y)\}.$$

Notons que les deux ensembles sont convexes et du théorème (2.3) nous avons $intC_1 = \emptyset$. De plus, $intC_1 \cap C_2 = \emptyset$. (Si $y \in intC_1 \cap C_2$, alors $h(y) < \mu \leq g(x) - g(y)$ qui est contradiction avec (2.2.22)). Donc nous pouvons appliquer la définition de séparation au sens large en obtient $(x^*, \varepsilon) \in X^* \times \mathbb{R}, (x^*, \varepsilon) \neq (0, 0)$ tel que pour tout $(u, \lambda) \in C_1$ et tout $(y, \mu) \in C_2$ on a

$$\langle x^*, u\rangle_X + \varepsilon\lambda \leq \langle x^*, y\rangle_X + \varepsilon\mu. \tag{2.2.23}$$

L'inégalité dans (2.2.23) est stricte si $(u, \lambda) \in intC_1$. Soit $(x, 0) \in C_2$ et λ tend vers $+\infty$. Donc $\varepsilon \leq 0$. Si $\varepsilon = 0$, alors

$$\langle x^*, u\rangle_X \leq \langle x^*, x\rangle_X, \quad \text{pour tout} \quad u \in dom\ h. \tag{2.2.24}$$

Mais h est continu au point x, et donc $dom\ h$ est un voisinage de x. Donc de (2.2.24) il s'ensuit que $x^* = 0$; d'où $(x^*, \varepsilon) = (0, 0)$ une contradiction. Ainsi $\varepsilon < 0$ et nous pouvons prendre $\varepsilon = -1$. Alors de (2.2.23), nous avons

$$\langle x^*, u\rangle_X - h(u) \leq \langle x^*, x\rangle_X \leq \langle x^*, y\rangle_X - (g(x) - g(y)),$$

pour tout $u \in dom\ h$ et tout $y \in domg$. De la deuxième inégalité, nous obtenons $-x^* \in \partial g(x)$. De la première inégalité et parce que $h(x) = 0$, nous avons $x^* \in \partial h(x)$, d'où $x^* + u^* \in \partial f(x)$. Donc finalement

$$u^* = u^* + x^* + (-x^*) \in \partial f(x) + \partial g(x),$$

donc

$$\partial(f + g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x).$$

□

Remarque 2.17. *Le théorème* (2.12) *est vraie pour une famille* $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ *des fonctions propres convexes,* $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, tel que les tous sauf un du* f_k *sont continues en un point* $x \in \bigcap_{k=1}^{n} dom f_k$*.*

Théorème 2.13. *Si* Y *est un autre espace localement convexe,* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *et* $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *est une fonction propre convexe, alors* $A^*\partial f(Ax) \subseteq \partial(f \circ A)(x)$ *pour tout* $x \in X$*. De plus, l'égalité est satisfait s'il y a un point dans le domaine de* A*, où* f *est continue.*

Preuve. L'inclusion s'ensuit immédiatement de la Définition 2.11. Montrons que l'égalité est satisfait quand f est continue sur le domaine de A. Soit $x^* \in \partial(f \circ A)(x)$, alors

$$\langle x^*, u - x\rangle_X + (f \circ A)(x) \leq (f \circ A)(u) \quad \text{pour tout} \quad u \in X.$$

Considérons l'espace affine $L \subseteq Y \times \mathbb{R}$ définie par

$$L = \{(Au, \langle x^*, u - x\rangle_X + (f \circ A)(x)) \in Y \times \mathbb{R} : u \in X\}.$$

Notons que $L \cap intepi f = \emptyset$, ont des point communs seulement de la frontière. La définition de la séparation au sens large implique qu'il existe un hyperplan fermé H tel que

$$L \subseteq H \text{ et } H \cap intepi f = \emptyset.$$

On sait que $H = Grg$ où $g : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction affine continue définie par

$$g(y) = \langle y^*, y\rangle_Y + v, y^* \in Y^*, v \in \mathbb{R}.$$

De l'inclusion $L \subseteq H$, nous aurons

$$\langle y^*, Au\rangle_Y + v = \langle x^*, u - x\rangle_X + (f \circ A)(x), \quad \text{pour tout} \quad u \in X.$$

Soit $u = 0$, alors $v = (f \circ A)(x) - \langle x^*, x\rangle_X$, c'est-à-dire

$$\langle y^*, Au\rangle_Y = \langle x^*, u\rangle_X, \quad \text{pour tout} \quad u \in X,$$

donc $x^* = A^*y^*$.

De plus, étant donné $H \cap intepi f = \emptyset$, nous aurons

$$\langle y^*, y\rangle_Y + (f \circ A)(x) - \langle A^*y^*, x\rangle_X \leq f(y), \quad \text{pour tout} \quad y \in Y,$$

alors $y^* \in \partial f(Ax)0$, c'est-à-dire, $x^* \in A^*\partial f(Ax)$.

D'oú $\partial(f \circ A)(X) \subseteq A^*\partial f(Ax)$ et ainsi l'égalité est satisfaite. $\square$

Exemple 2.6. *a) Si $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe et $x \in intdomf$, alors*

$$\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)].$$

avec

$$f'_-(x) = \lim_{u\uparrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

et

$$f'_+(x) = \lim_{u\downarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}.$$

b) Si X est un espace de Banach et $f(x) = \|x\|$, alors

$$\partial f(x) = \begin{cases} \overline{B}_1^* & si \quad x = 0 \\ \frac{F(x)}{\|x\|} & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

avec $F(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle_X = \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$, et $\overline{B}_1^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_X^* \leq 1\}$.

c) Si X est un espace localement convexe, $C \subset X$ un sous ensemble non vide convexe fermé et $f(x) = \delta_C(x)$, alors

$$\begin{aligned} \partial f(x) = N_C(x) &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, c - x\rangle_X \leq 0 \quad pour\ tout \quad c \in C\} \\ &= \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle_X = \delta_C(x^*)\}, \end{aligned}$$

cet ensemble est un cône convexe fermé, connu comme le cône normal à C en x.

2.3 Les fonctions localement lipschitziennes

Dans cette section nous étendons la théorie du sous-différentielle au-delà du domaine des fonctions convexes. Le point de départ est le corollaire 2.3 selon ce resultat chaque fonction convexe continue est localement lipschitzienne. Tout au long de cette section, X est un espace de Banach, avec X^* son dual topologique, notons par $\langle ., .\rangle_X$ le produit scalaire de dualité de la couple (X, X^*).

Définition 2.12. *On dit qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne si pour chaque $x \in X$ nous pouvons trouver un voisinage $U \subseteq X$ de x et un constant $k_U > 0$ (dependent de U), tel que pour tout $y, u \in U$*

$$|f(y) - f(u)| \leq k_U \|y - u\|_X.$$

Remarque 2.18. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne continue sur des ensembles bornées, alors f est localement lipschitzienne et si $dimX < +\infty$, donc ces deux propriétés sont équivalentes.*

Définition 2.13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, la dérivée directionnelle généralisée de f en $x \in X$ dans la direction $h \in X$ est définie par*

$$\begin{aligned} f^0(x;h) &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \lambda h) - f(x')}{\lambda} \\ &= \inf_{\varepsilon,\delta>0} \sup_{\substack{\|x'-x\| \leq \varepsilon \\ 0<\lambda\leq\delta}} \frac{f(x' + \lambda h) - f(x')}{\lambda}. \end{aligned}$$

Proposition 2.22. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, alors*

(a) Pour chaque $x \in X$, la fonction $h \longmapsto f^0(x;h)$ est sous-linéaire et lipschitzienne continue.

(b) La fonction f^0 est semi-continue supérieure .

(c) $f^0(x;-h) = (-f)^0(x;h)$.

Preuve.

(a) Montrons que f est sous-linéaire c'est à dire f est positivement homogène et sous-additive. Soit g est une fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par $g(h) = f^0(x;h)$.

- g est positivement homogène si et seulement si pour tout $h \in X$, et tout $\alpha \geq 0$, on trouve $g(\alpha h) = \alpha g(h)$.

– Si $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} g(\alpha h) &= g(0.h) = g(0) = f^0(x, \alpha h) = f^0(x, 0). \\ &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \alpha\lambda h) - f(x')}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x') - f(x')}{\lambda} \\ &= 0 = 0.g(h) = \alpha g(h). \end{aligned}$$

– Si $\alpha > 0$:

$$g(\alpha h) = f^0(x, \alpha h) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \alpha\lambda h) - f(x')}{\lambda}.$$

Posons $\varepsilon = \alpha\lambda$ on trouve $\lambda = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ alors

$$\begin{aligned} g(\alpha h) &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{f(x' + \varepsilon h) - f(x')}{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \\ &= \alpha \limsup_{\substack{x' \to x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \frac{f(x' + \varepsilon h) - f(x')}{\varepsilon} \\ &= \alpha f^0(x', h) = \alpha g(h). \end{aligned}$$

Donc g est positivement homogène.

- f^0 est sous- additive si et seulement si pour tout $h_1, h_2 \in X$, on trouve

$f^0(x, h_1 + h_2) = f^0(x, h_1) + f^0(x, h_2)$.

$$\begin{aligned} f^0(x, h_1 + h_2) &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \lambda(h_1 + h_2)) - f(x')}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \lambda(h_1 + h_2)) - f(x' + \lambda h_2) + f(x' + \lambda h_2) - f(x')}{\lambda} \\ &\leq \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f((x' + \lambda h_2) + \lambda h_1) - f(x' + \lambda h_2)}{\lambda} + \limsup_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x' + \lambda h_2) - f(x')}{\lambda} \\ &= f^0(x; h_1) + f^0(x; h_2). \end{aligned}$$

Donc f^0 est sous additive d'où sous-linéaire.

• Si x' est près de x et $\lambda > 0$ près de 0, et comme f est localement lipschitzienne , nous avons pour tout$h \in X$

$$\frac{f(x'+\lambda h)-f(x')}{\lambda} \leq k\|h\|_X \Rightarrow$$

$$f^0(x;h) \leq k\|h\|_X \Rightarrow$$

$$|f^0(x;h)| \leq k\|h\|_X,$$

et comme $f^0(x;.)$ est sous-linéaire, alors

$$\text{pour tout } h = h_1 + (-h_2) \in X, \quad |f^0(x,h_1) - f^0(x;h_2)| \leq k\|h_1 - h_2\|_X,$$

d'où $f^0(x;.)$ est continue lipshitzienne.

(b) Supposons $(x_n, h_n) \longrightarrow (x,h)$ dans $X \times X$ et quand n tend vers $+\infty$, pour chaque $n \geq 1$, nous pouvons trouver $u_n \in X$ et $\lambda_n > 0$, tel que $\|u_n\| + \lambda_n \leq \frac{1}{n}$ et

$$\begin{aligned} f^0(x_n;h_n) &\leq \frac{f(x_n+u_n+\lambda_n h_n) - f(x_n+u_n)}{\lambda_n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{f(x_n+u_n+\lambda_n h_n) - f(x_n+u_n+\lambda_n h)}{\lambda_n} \\ &+ \frac{f(x_n+u_n+\lambda_n h) - f(x_n+u_n)}{\lambda_n} + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} f^0(x_n;h_n) \leq f^0(x;h)$, donc $f^0(x;.)$ est semi-continue supérieurement.

(c) De la définition 2.13, nous avons

$$f^0(x;-h) = \limsup_{\substack{x'\to x \\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x'-\lambda h)-f(x')}{\lambda},$$

posons $y = x' - \lambda h$ alors

$$f^0(x;-h) = \limsup_{\substack{y\to x \\ \lambda\downarrow 0}} \frac{(-f)(y+\lambda h)-(-f)(y)}{\lambda} = (-f)^0(x;h).$$

□

Définition 2.14. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, le sous-différentiel généralisé de f au point $x \in X$ est définie par pour tout $h \in X$*

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle_X \leq f^0(x;h)\}. \tag{2.3.1}$$

Remarque 2.19. *Par vertue de la proposition 2.17 pour chaque $x \in X$ l'ensemble $\partial f(x)$ est non vide convexe et w^*-fermé, de plus $|f^0(x;h)| \leq k\|h\|_X$ alors on voit que $\partial f(x)$ est aussi borné, par conséquent c'est w^*-compact (d'aprés le théorème d'Alaoglou), et on a aussi $f^0(x;.) = \delta_{\partial f(x)}(.)$.*

Proposition 2.23. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne et x_n converge vers x dans X, x_n^* converge vers x^* dans X^* et $x_n^* \in \partial f(x_n)$, pour tout $n \geq 1$, alors $x^* \in \partial f(x)$.*

Preuve. Nous avons pour tout $n \geq 1$ et tout $h \in X$, $\langle x_n^*, h\rangle_X \leq f^0(x_n;h)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ et en utilisant la proposision 2.22 (b) nous obtenons, pour tout $h \in X$ $\langle x^*, h\rangle_X \leq f^0(x;h)$, par conséquant $x^* \in \partial f(x)$. □

Proposition 2.24. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne.*

(a) Si f est Gâteaux-différentiable en $x \in X$, alors $f'(x) \in \partial f(x)$.

(b) Si $f \in C^1(X)$, alors $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

Preuve.

(a) De la définition 2.13 on voit que, pour tout $h \in X$, $\langle f'(x), h\rangle_X \leq f^0(x;h)$, donc d'aprés la définition 2.14, on a $f'(x) \in \partial f(x)$.

(b) Comme $f \in C^1(X)$, nous avons, pour tout $h \in X$, $f^0(x;h) = \langle f'(x), h\rangle_X$, par conséquent $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.

□

Remarque 2.20. *Pour montrer que f est Gâteaux-différentiable en $x \in X$ mais $\partial f(x)$ contient des éléments d'autre que $f'(x)$, considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 0 & si\ \ x = 0 \end{cases},$$

on a f est différentiable sur $[0,1]$, lipschitzienne continue sur $[0,1]$ et $f'(0) = 0$, cependant

$$f^0(0;h) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda h^2 \sin \frac{1}{\lambda h} = |h| \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sin \frac{1}{\lambda h}}{\frac{1}{\lambda h}} = |h|,$$

et

$$\begin{aligned}
\partial f(0) &= \{x^* \in \mathbb{R}; \langle x^*, h\rangle_X \leq f^0(0;h), \quad \forall h \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x^* h \leq |h|, \quad \forall h \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R}; x^* h \leq h, \quad \forall h \in [0,+\infty[\} \\
&\cap \{x^* \in \mathbb{R}; x^* h \leq -h, \quad \forall h \in]-\infty, 0]\} \\
&= \{x^* \in \mathbb{R}; x^* \leq 1\} \cap \{x^* \in \mathbb{R}; x^* \geq -1\} \\
&= [-1,1].
\end{aligned}$$

Aussi si f est strictement différentiable, alors la proposition 2.24 (b) est vrai. Rappelons que f est strictement différentiable, si pour chaque $x \in X$, il existe $f'_s(x) \in X^*$ tel que pour tout $h \in X$, nous avons

$$\langle f'_s(x), h\rangle_X = \lim_{\substack{x' \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x'+\lambda h) - f(x')}{\lambda}.$$

Une fonction C^1 est strictement différentiable est localement lipschitzienne.

Proposition 2.25. *Si f est continue et convexe (par conséquent localement lipschitzienne) alors $\partial f(x)$ coïnside avec la sous-diférentielle dans le sens d'analyse convexe.*

Preuve. On fixe $h \in X$, la fonction $(t,u) \longmapsto \frac{f(u+th)-f(u)}{t}$ est continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $\delta > 0$, tel que

$$\frac{f(u+th)-f(u)}{t} \leq \frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda} + \varepsilon$$

pour tout $(t,u) \in]0,+\infty[\times X$, tel que $|t-\lambda| \leq \delta$ et $\|u-x\| \leq \delta$, alors

$$\sup_{\|u-x\|\leq\delta} \frac{f(u+(\lambda+\delta)h)-f(u)}{\lambda} \leq \frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda} + \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $\lambda, \delta \downarrow 0$ nous obtenons $f^0(x;h) \leq f'(x;h) + \varepsilon$. Si ε tend vers 0 nous concluons que $f^0(x;h) \leq f'(x;h)$.

L'inégalité opposée est toujours vraie lorsque $f'(x;.)$ existe, ainsi nous concluons que $f^0(x;.) = f'(x;.)$. $\square$

Théorème 2.14. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction localement lipschitzienne, alors f est λ^n presque par tout Fréchet-différentiable, tell que λ^n est la mesure de lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.*

Nous pouvons avoir une définition du sous-différentiel généralisé, qui est plus intructif et géométrique que l'on en termes de la dérivée directionnel généralisé.

Théorème 2.15. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne et $E \subseteq \mathbb{R}^n$ n'importe quel ensemble de Lebesgue, alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial f(x) = conv\{\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) : x_n \to x, x_n \notin E \cup D_f^c\} \tag{2.3.2}$$

D_f est l'ensemble de point de différentiabilité de f, du théorème 2.14, $\lambda^n(D_f^c) = 0$.

Preuve. On a f localement lipschitzienne alors $|f^0(x;h)| \leq \|h\|_{\mathbb{R}^n}$ et donc $\partial f(.)$ est borné. Et d'aprés la proposition 2.24(a) on a $f'(x_n) \in \partial f(x_n), n \geq 1$, alors $\{f'(x_n)\}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^n$ est borné. Posons $f'(x_n) \to u^*$ dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, la proposition 2.23 implique que $u^* \in \partial f(x)$, par conséquent

$$S(x) = conv\{\lim_{n\to+\infty} f'(x_n); x_n \to x; x_n \notin E \cup D_f^c\} \subseteq \partial f(x),$$

ensuite pour $h \neq 0$, soit $V_h = \lim_{\substack{x'\to x \\ x'\notin E\cup D_f^c}} \langle f'(x'), h\rangle_{\mathbb{R}^n}$,
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, pour tout $x' \notin E \cup D_f^c$, $\|x' - x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta$, tel que

$$\langle f'(x'), h\rangle_{\mathbb{R}^n} \leq V_h + \varepsilon.$$

Si $0 < \lambda < \frac{\delta}{2\|h\|_{\mathbb{R}^n}}$, alors pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^n$, avec $\|x' - x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\delta}{2}$ nous avons

$$f(x' + \lambda h) - f(x') = \int_0^\lambda \langle f'(x' + th), h\rangle_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}t \leq \lambda(V_h + \varepsilon),$$

alors

$$f^0(x;h) \leq V_h + \varepsilon,$$

donc

$$f^0(x;h) \leq \delta_{S(x)}(h). \tag{2.3.3}$$

D'aprés (2.3.2) et (2.3.3), on conclu que $S(x) = \partial f(x)$ (voir exemple 3.3.12(1)). $\square$

Corollaire 2.5. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, alors*

$$f^0(x;h) = \limsup_{\substack{x' \to x \\ x' \notin E \cup D_f^c}} \langle f'(x'), h \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

l'importance du sous-différentiel généralisé vient du calcul riche qu'il fait, nous présentons quelques resultats de base de cette direction, nous commençons par une définition.

Définition 2.15. *Une fonction localement lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dit régulièr au point x si*

i) La dérivée directionnel $f'(x;h)$ dans le sens de la définition 3.2.7 existe pour tout $h \in X$.

ii) $f^0(x;h) = f'(x;h)$, pour tout $h \in X$.

Remarque 2.21. *Des fonctions convexes continues et des fonctions strictement différentiables (dans des fonctions C^1 particulières) sont réguliers en $x \in X$.*

La première règle de calcul est une conséquence direct de la définition 2.14.

Proposition 2.26. *Si $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ des fonctions localement lipschitziennes et $\{\lambda_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in X$*

$$\partial \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k \right)(x) \subseteq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial f_k(x).$$

L'égalité se tient si f_k est régulièr en $x \in X$, ou si tous sauf un du f_k^s sont strictement différentiable en $x \in X$ et si $\lambda_k \geq 0$ avec les multiples scalaires nous pouvons plus précis.

Proposition 2.27. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in X$*

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Preuve. • Si $\lambda \geq 0$, alors $(\lambda f)^0 = \lambda f^0$ et donc $\partial(\lambda f) = \lambda \partial f$.

• Si $\lambda < 0$ en prened $\lambda = -1$, alors d'aprés la définition 2.14, $x^* \in \partial(-f)(x)$ si et seulement si

$$\langle x^*, h \rangle_X \leq (-f)^0(x;h).$$

Mais de la proposision 2.22(c) nous avons $(-f)^0(x;h) = f^0(x;-h)$.
Par conséquent, pour tout $h \in X$

$$\langle x^*, h\rangle_X \leq f^0(x;-h) \iff -x^* \in \partial f(x),$$

donc $\partial(-f)(x) = -\partial f(x)$. □

Proposition 2.28. *Si X et Y deux espaces de Banach, $f \in C^1(X,Y)$, et $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction locallement lipschitzienne, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne et*

$$\partial(g \circ f)(x) \subseteq \partial g(f(x)) \circ f'(x). \tag{2.3.4}$$

Dans le sens que, pour tout $x^* \in \partial(g \circ f)(x)$, on a

$$x^* = f'(x)^* u^* \quad \text{pour tout} \quad u^* \in \partial g(f(x)). \tag{2.3.5}$$

De plus si g ou $(-g)$ est régulièr au point $f(x)$, alors $g \circ f$ (ou $-g \circ f$) est régulièr au point x et l'égalité vérifié dans (2.3.4).

Aussi si f est une fonction définie sur chaque voisinage de x dans un ensemble qui est dense dans un voisinage de $f(x)$ (par exemple, si $f'(x) \in \mathscr{L}(X,Y)$ est surjectif), alors l'égalité dans (2.3.4) est vérifie.

Preuve. Comme g est localement lipschitzienne alors d'aprés la définition 2.12 on peut trouver un voisinage V de $f(x)$ tell que $g|_V$ est lipschitzien continue.
Alors $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de $x \in X$, et parce que $f(U) \subseteq V$ on voit que $g \circ f|_U$ est lipschitzien continue. Donc $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne.

D'aprés la proposition 2.22 partie (b), on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \varepsilon]$ tell que

$$g^0(f(x);h') \leq g^0(f(x);h) + \varepsilon \text{ pour tout } \|h' - h\|_Y < \delta.$$

Aussi de la définition de la dérivée directionnel généraliser en trouve $\varepsilon, \beta > 0$, tell que pour tout $\|y - f(x)\|_Y \leq \varepsilon, \lambda \leq \beta,\ \|h' - h\|_Y < \delta$ on a

$$\frac{g(y + \lambda h') - g(y)}{\lambda} \leq g^0(f(x);h) + \varepsilon \leq g^0(f(x);h) + 2\varepsilon, \tag{2.3.6}$$

posons $h = f'(x)v, v \in X$. Comme $f \in C^1(X,Y)$ alors en trouve $0 < \eta \leq \beta$ tell que pour tout $\|u-x\|_X \leq \eta,\ \lambda \leq \eta$ on a

$$\|\frac{f(u+\lambda v)-f(u)}{\lambda} - f'(x)v\|_Y < \delta \text{ et } \|f(u)-f(x)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Posons dans (2.3.6) $y = f(u)$ et $h' = \frac{f(u+\lambda v)-f(u)}{\lambda}$, alors pour tout $\|u-x\|_X \leq \eta,\ \lambda \leq \eta$, on a

$$\frac{(g \circ f)(u+\lambda v)-(g\circ f)(u)}{\lambda} \leq g^0(f(x);f'(x)v)+2\varepsilon,$$

alors

$$\begin{aligned}(g\circ f)^0(x;v) &\leq g^0(f(x);f'(x)v)\\ &= \max[\langle y^*, f'(x)v\rangle_Y : y^* \in \partial g(f(x))].\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Donc (2.3.4) est vérifié.

Supposons ensuite que g est régulièr au point $f(x)$. Le cas ou $(-g)$ est régulièr au point $f(x)$ peut être dérivée à partir de le précédent car d'aprés la proposition 2.27 on a

$$\partial(-g)(f(x)) = -\partial g(f(x)).$$

Comme g est régulièr au point $f(x)$, alors

$$\begin{aligned}g^0(f(x);f'(x)v) &= g'(f(x);f'(x)v)\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{g(f(x)+\lambda f'(x)v)-g(f(x))}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{g(f(x)+\lambda f'(x)v)-g(f(x+\lambda v))}{\lambda}+\frac{g(f(x+\lambda v)-g(f(x))}{\lambda}\right]\\ &= (g\circ f)'(x;v) \qquad \text{(car } g \text{ est localement lipschitzienne et } \quad f \in C^1(X,Y))\\ &\leq (g\circ f)^0(x;v).\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Comparant (2.3.7) et (2.3.8) on déduire que pour tout $v \in X$,

$$g^0(f(x);f'(x)v) = (g\circ f)^0(x;v),$$

alors

$$\partial(g\circ f)(x) = \partial g(f(x)) \circ f'(x). \tag{2.3.9}$$

Si f est une fonction définie d'un voisinage de x dans un sous ensemble dense d'un voisinage de $f(x)$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} g^0(f(x); f'(x)v) &= \limsup_{\substack{y \to f(x) \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{g(y + \lambda f'(x)v) - g(y)}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{u \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{g(f(u) + \lambda f'(x)v) - g(f(u))}{\lambda} \\ &= \limsup_{\substack{u \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{g(f(x + \lambda v)) - g(f(u))}{\lambda} \ (\text{car} f \in C^1(X, Y)) \\ &= (g \circ f)^0(x; v), \quad \text{pour tout} \quad v \in X. \end{aligned}$$

Donc (2.3.9) est vérifié. $\square$

Remarque 2.22. *On utilisant l'adjoint de l'opérateur linéaire $f'(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$ on peut écrire* (2.3.4) *comme $\partial(g \circ f)(x) \subseteq f'(x) * \partial g(f(x))$ (voir* (2.3.5)*).*

Corollaire 2.6. *Si X et Y deux espaces de Banach, et si X est continûement et densément dans Y, $g : Y \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, et $\hat{g} = g|_X$, alors $\partial \hat{g}(x) = \partial g(x)$ pour tout $x \in X$. Ce qui signifie que chaque élément de $\partial \hat{g}(x)$ admet une extension unique à un élément de $\partial g(x)$.*

Preuve. Soit $i \in \mathscr{L}(X, Y)$ est l'injection canonique. Alors nous appliquons la proposition 2.28 avec $f = i$ pour obtenire l'égalité desirée. $\square$

Un autre resultat à la même direction que la proposition 2.28 est le suivant.

Proposition 2.29. *Si $T = [0, b]$, $f \in C^1(T, X)$ et $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, alors $h = g \circ f : T \to \mathbb{R}$ différentiable presque par tout sur T et*

$$h'(t) \leq \max \left[\langle x^*, f'(t) \rangle_X : \ x^* \in \partial g(f(t)) \right].$$

Preuve. La fonction $h : T \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, par conséquent d'aprés le théorème 2.14 h est différentiable presque par tout. Soit $t_0 \in T$ est un point de différentiabilité de h. Nous avons

$$\begin{aligned}
h'(t_0) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(f(t_0+\lambda)) - g(f(t_0))}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(f(t_0)+\lambda f'(t_0)+\circ(\lambda)) - g(f(t_0))}{\lambda} \quad (\text{ici } \frac{\circ(\lambda)}{\lambda} \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0) \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \Big[\frac{g(f(t_0)+\lambda f'(t_0)) - g(f(t_0))}{\lambda} \\
&+ \frac{g(f(t_0)+\lambda f'(t_0)+\circ(\lambda)) - g(f(t_0)+\lambda f'(t_0))}{\lambda}\Big] \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(f(t_0)+\lambda f'(t_0)) - g(f(t_0))}{\lambda} \\
&\leq g^0(f(t_0; f'(t_0)) = \max\Big[\langle x^*, f'(t_0)\rangle_X;\ x^* \in \partial g(f(t_0))\Big].
\end{aligned}$$

□

La proposition suivante produit une extension au paramètre non lisse actuel de la règle classique de *Fermat* pour les extrêmaux local.

Proposition 2.30. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne, qui atteint un extremum local (le minimun ou le maximum local) au point $x \in X$, donc $0 \in \partial f(x)$*

Preuve. On a $\partial(-f) = -\partial f$ alors il suffit de montrer la proposition quand x est un minimum local. D'aprés la définition 2.13, on a pour tout $h \in X$, $\quad 0 \leq f^0(x; h)$ d'où d'aprés la définition 2.14, on a $0 \in \partial f(x)$. □

En utilisant cette proposition, nous pouvons prouver un théorème de valeur moyen pour le sous différentiel généralisé.

Théorème 2.16. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne et $x, u \in X$, alors il existe $\lambda_0 \in]0,1[$ et $v^* \in \partial f((1-\lambda_0)x + \lambda_0 u)$, tell que*

$$f(u) - f(x) = \langle v^*, u - x\rangle_X.$$

Preuve. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$\varphi(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda u) + \lambda((f(x) - f(u)),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Evidemment φ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, car f est localement lipschitzienne, d'où lipschitzienne continue sur $[0, 1]$, et on a $\varphi(0) = \varphi(1) = f(x)$.

Ainsi on peut trouver $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que φ atteint un maximum ou un minimum local en λ_0. Par vertue de la proposition 2.30 nous avons $0 \in \partial\varphi(\lambda_0)$. De plus,

$$\partial\varphi(\lambda_0) \subseteq \langle \partial f(x+\lambda_0(u-x)), u-x\rangle_X + [f(x)-f(u)].$$

donc $f(u)-f(x) \in \langle \partial f(x+\lambda_0(u-x), u-x\rangle_X$. □

Proposition 2.31. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions localement lipschitzienne, et $x \in X$ la solution du problème :* $\inf[f(x); g(x) \leq 0]$, *alors il existe $\lambda, \mu \geq 0$, tel que*

$$0 \in \lambda\partial f(x) + \mu\partial g(x) \text{ et } \mu g(x) = 0.$$

De plus, si g est aussi convexe et il existe $x_0 \in X$ tel que $g(x_0) < 0$, alors nous avons $\lambda > 0$ (et donc nous pouvons prendre $\lambda = 1$).

2.4 Γ-Convergence

Dans l'optimisation, et dans le calcul de variation, nous donnons une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ et une ensemble de contrainte $C \subseteq X$, et nous cherchons la valeur minimale

$$m(f,C) = \inf[f(x) : x \in C]. \tag{2.4.1}$$

Et déterminer l'ensemble des minimums (les solutions de (2.4.1))

$$M(f,C) = \{x \in X : f(x) = m(f,C)\}.$$

Le but de cette section est de développer les outils qui nous permettons de déterminer la dépendance de la valeur $m(f,C)$ et de l'ensemble des solutions $M(f,C)$ sur les données du problème (f,C).

Les données mathématique dans cette section est le suivant. On nous donne (X,τ) un espace topologique de Hausdorff avec la topologie τ et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}},\ n \geq 1$, une suite des fonctions propres. Les hypothèses supplémentaires sont présentées comme nécessaire. Dans ce qui suit étant donné $x \in X$.

Définition 2.16. *Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonction propre , nous définissons deux limites de fonction.*

La Γ_τ-limite inférieure de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \liminf_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u).$$

et la Γ_τ-limite supérieure de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \limsup_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u).$$

Si $\Gamma_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \Gamma_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = f$, alors on dit que la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est Γ_τ-converge vers f et on écrit $\Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Remarque 2.23. *Nous avons toujours $\Gamma_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \leq \Gamma_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, et les deux limites de fonction sont τ-semicontinu inférieure. Dans la définition ci-dessus nous pouvons remplacer $\mathcal{N}(x)$ par un base local $\mathcal{B}(x)$. Aussi quand la topologie τ utilisé, est comprise et aucun confusion n'est possible, puis on peut écrire $\Gamma\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n, \Gamma\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ et $\Gamma\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Si $f_n(x) = c_n \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$, alors $\Gamma_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} c_n$ et $\Gamma_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \limsup\limits_{n\to\infty} c_n$. Aussi si $f_n = f$ pour $n \geq 1$, alors $\Gamma_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \Gamma_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \overline{f}^{\,\tau}$, où $\overline{f}^{\,\tau}$ est la τ régularisation semi-continue inférieure de f, c'est-à-dire, $\overline{f}^{\,\tau} = \sup\limits_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf\limits_{u\in U} f(u)$ ou équivalemment $epi\overline{f}^{\,\tau} = \overline{epif}^{\,\tau}$.*

En générale la Γ_τ-Convergence et la convergence ponctuel sont des modes de convergence distincts.

Exemple 2.7. *(a) Soit $X = \mathbb{R}$ et considérer la suite $f_n(x) = nxe^{n^2x^2}, n \geq 1$. Donc*

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2e}} & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases},$$

et $\lim f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc à la fois les Γ et les limites ponctuelles existent mais différent.

(b) Soit $X = \mathbb{R}$ et considérer la suite $f_n(x) = \sin(nx), n \geq 1$. Alors $\Gamma\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ avec $f(x) = -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais les points limites de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ n'existe pas.

(c) Soit $X = \mathbb{R}$ et considérer la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} nxe^{-n^2x^2} & si \quad n = pair \\ \\ 2nxe^{n^2x^2} & si \quad n = impair \end{cases}, n \geq 1.$$

Alors $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais la Γ-limite n'existe pas. En fait nous avons

$$\left(\Gamma\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} & si \quad x = 0 \\ \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases},$$

et

$$\left(\Gamma\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2e}} & si \quad x = 0 \\ \\ 0 & si \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

prochain on déduire un propriété de la Γ-Convergence en termes de la convergence des épigraphes des fonctions. Pour cela, nous devons introduire un mode de convergence d'ensemble.

Définition 2.17. *Soit $\{C_n\}_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de X. Le K_τ-limite inférieure de la suite $\{C_n\}_{n\geq 1}$ est notée par $K_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} C_n$ (ou simplement $K\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} C_n$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie sur X) est définie par*

$$K_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} C_n = \overline{\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \overline{C_k}^{\tau}}^{\tau}.$$

Alors $x \in K_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} C_n$ si et seulement si pour chaque $U \in \mathcal{N}(x)$, nous pouvons trouver $n_0 = n_0(U) \geq 1$ tel que $U \cap C_n \neq \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$.

La K_τ-limite supérieure de la suite $\{C_n\}_{n\geq 1}$ noté par $K_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} C_n$ (ou $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} C_n$) est définie par

$$K_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} C_k}^{\tau}.$$

Alors $x \in K_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} C_n$ si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{N}(x)$ et pour chaque $n \geq 1$, nous pouvons trouver $k \geq n$ tel que $U \cap C_k \neq \emptyset$.

Si $K_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} C_n = K_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} C_n = C$, alors on dit que la suite $\{C_n\}_{n\geq 1}$ converge vers C dans le sens de Kuratowski et nous écrivons $K_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ (ou $K\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$).

Remarque 2.24. *Nous avons que*

$$K_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} C_n \subseteq K_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} C_n = C$$

et les deux ensembles sont fermées, eventuellement vide.

Exemple 2.8. *(a) Soit $X = \mathbb{R}$ et*

$$C_n = \begin{cases} [0, \frac{1}{n}] & si \quad n \text{ est pair} \\ \\ [1, 1 + \frac{1}{n}] & si \quad n \text{ est impair} \end{cases},$$

alors $K\text{-}\liminf_{n\to\infty} C_n = \emptyset$ et $K\text{-}\limsup_{n\to\infty} C_n = \{0, 1\}$.

(b) Soit $X = \mathbb{R}$ et $C_n = [0, \frac{1}{n}] \cup [n, +\infty[$. Alors $C_n \xrightarrow{K} \{0\}$. Rappeler que pour $C \subseteq X$ nous avons la fonction indicatrice

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in C \\ \\ +\infty & si \quad x \notin C \end{cases}.$$

Proposition 2.32. *Si $\{C_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de sous-ensembles non vide de X et nous posons*

$$C' = K_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} C_n, \quad C'' = K_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} C_n,$$

alors $\delta_{C'} = \Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} \delta_{C_n}$ et $\delta_{C''} = \Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} \delta_{C_n}$.

Preuve. Nous montrons la première égalité.

Soit $f = \Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} \delta_{C_n}$. On a f prend seulement les valeurs 0 et $+\infty$ (voir la définition 2.16). Donc il suffit de montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in C'$. Selon la définition 2.17 on a $x \in C'$ si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{N}(x)$, on peut trouver $n_0 \geq 1$ tel que $C_n \cap U \neq \emptyset$ pour tout $n \geq n_0$, c'est équivalent à $\inf_{u\in U} \delta_{C_n}(u) = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Donc $x \in C'$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} \inf_{u\in U} \delta_{C_n}(u) = 0$ pour tout $U \in \mathcal{N}(x)$. Donc on déduire que $x \in C'$ si et seulement si $f(x) = 0$; c'est-à-dire $f = \delta_{C'}$,

(même démonstration pour la deuxième égalité). □

Le théorème suivante relie la Γ-Convergence et la convergence de Kuratowski des épigraphes.

Théorème 2.17. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1,$ est une suite des fonctions propres et*

$$f' = \Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n, \quad f'' = \Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n,$$

alors $epi(f') = K_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} epi(f_n)$ et $epi(f'') = K_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} epi(f_n)$.

Preuve. Montrons uniquement la première égalité, la preuve du deuxième est semblable. On sait que $(x, \lambda) \in epi(f')$ si et seulement si $f'(x) \leq \lambda$, selon la définition 2.16, on a $f'(x) \leq \lambda$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $U \in \mathcal{N}(x)$ nous avons

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) < \lambda + \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité est équivalente à dire que pour chaque $\varepsilon > 0$, chaque $U \in \mathcal{N}(x)$ et chaque $k \geq 1$ on peut trouver $n \geq k$, tel que $\inf_{u\in U} f_n(u) < \lambda + \varepsilon$. Cela équivaut à

$$U \times (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap epi f_n \neq \emptyset.$$

Comme les ensembles $U \times (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ et $U \in \mathcal{N}(x)$, forme une base local pour (x, λ) dans $X \times \mathbb{R}$ avec la topologie de produit on conclu que $(x, \lambda) \in epi(f')$ si et seulement si $(x, \lambda) \in K_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} epi(f_n)$ (voir la définition 2.17). $\square$

Remarque 2.25. *C'est la raison pour laquelle beaucuop d'auteurs appellent Γ-Convergence, épigraphique convergence, et noté par $e_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$, $e_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n$ et $e_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n$.*

Nous avons déjà vu que la Γ-Convergence et la convergence ponctuel sont en générale des notions distinctes. Nous déterminons quelle est la relation exacte entre eux, de la définition 2.16 nous avons le suivant.

Proposition 2.33. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1,$ est une suite des fonctions propres, alors*

$$\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} f_n \quad et \quad \Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n \leq \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

En particulier si $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = \hat{f}$ et $\lim f_n = \tilde{f}$ existe, alors $\hat{f} \leq \tilde{f}$.

Proposition 2.34. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1,$ est une suite des fonctions propres qui converge uniformément vers f, alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = \overline{f}^{\,\tau}$, où $\overline{f}^{\,\tau}$ est la regularisation τ-semi-continu inférieure de f.*

Preuve. Pour chaque $U \subseteq X$ un ouvert non vide , nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) = \inf_{u\in U} f(u).$$

Donc pour chaque $x \in X$, on a

$$\sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \lim_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_{u\in U} f(u) = \overline{f}^{\tau}(x)$$

d'où $\Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \overline{f}^{\,\tau}$. □

Remarque 2.26. *La limite uniforme des fonctions τ-semi-continue inférieure, est τ-semi-continue inférieure aussi, donc si chaque f_n est τ-semi-continue inférieure, alors f est τ-semi-continue inférieure et donc $\Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.*

Les deux propositions suivantes expliquent l'importance de la monotonie dans l'optimisation.

Proposition 2.35. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, est une suite croissante des fonctions propres, alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}^{\,\tau} = \sup\limits_{n\geq 1} \overline{f_n}^{\,\tau}$.*

Preuve. Si $U \subseteq X$ est un ouvert non vide, alors

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) = \sup_{n\geq 1} \inf_{u\in U} f_n(u).$$

Donc pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \lim_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) &= \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \sup_{n\geq 1} \inf_{u\in U} f_n(u)\\ &= \sup_{n\geq 1} \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_{u\in U} f_n(u) = \sup_{n\geq 1} \overline{f_n}^{\,\tau}(x).\end{aligned}$$

□

Remarque 2.27. *Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante des fonctions τ-semi-continue inférieures, alors $f_n \uparrow f = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$ est τ-semi-continue inférieure et $\Gamma\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Donc nous voyons que dans ce contexte Γ_τ est la convergence ponctuelle coïncider.*

Proposition 2.36. *Soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, est une suite décroissante des fonctions propres et $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in X$, alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \overline{f}^{\tau}$.*

Preuve. Soit $U \subseteq X$ un ouvert non vide, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) = \inf_{u\in U} \inf_{n\geq 1} f_n(u) = \inf_{u\in U} f(u),$$

alors d'où $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{f}^{\,\tau}(x)$ (voir la définition 2.16). □

Pour avoir un résultat général sur l'équivalence du Γ_τ-convergence et la convergence ponctuel, nous avons besoin de la notion suivant.

Définition 2.18. *Soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, une suite des fonctions propres. On dit que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equi-τ-semi-continue inférieure au point $x \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $U \in \mathcal{N}(x)$, tell que*

$$f_n(u) \geq f_n(x) - \varepsilon \text{ ,pour tout } u \in U \text{ ,et tout } n \geq 1.$$

On dit que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est *equi*-τ-semicontinue inférieure si c'est *equi*-τ-semicontinue inférieure en tout point $x \in X$.

Proposition 2.37. *Soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, une suite des fonctios propres qui est equi-τ-semicontinue inférieure au point $x \in X$, alors $\left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ et $\left(\Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. Donc si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equi-τ-semicontinue inférieure, alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ si et seulement si f_n converge vers f.*

Preuve. On va montrer la première égalité. La preuve de deuxième est semblable. De la proposition 2.33, on a $\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$, donc il suffit de montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x). \tag{2.4.2}$$

On a $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est *equi*-τ-semicontinue inférieure au point $x \in X$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $U \in \mathcal{N}(x)$ tel que $f_n(x) - \varepsilon < \inf_{u\in U} f_n(u)$ pour tout $n \geq 1$. D'où

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) - \varepsilon \leq \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \liminf_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u).$$

Si ε tend vers 0 on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x).$$

Donc

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

□

Si X est un espace de Banach et les $f_n s$ sont des fonctions convexes, alors nous pouvons utiliser le théorème 2.4, pour produire la conséquence suivante de la proposition 2.37.

Proposition 2.38. *Si X est un espace de Banach et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$, est une suite des fonctions convexes propres qui est equi-borné supérieurement dans $U \in \mathcal{N}(x)$ (c'est-à-dire il existe $M > 0$ tel que $\sup_{n\geq 1}\sup_{u\in U} f_n(u) \leq M < +\infty$), alors $\left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ et $\left(\Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. Donc, si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equi-borné supérieurement dans un certain voisinage de chaque point $x \in X$, alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ si et seulement si f_n converge vers f.*

Remarque 2.28. *Si X est de dimention finie et la suite $\{f_n, f\}_{n\geq 1}$ consiste des fonctions convexes avec des valeurs dans $\mathbb{R}$ (d'où continue, voir la proposition 2.12), alors $\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ si et seulement si f_n converge vers f. Soit $X = \mathbb{R}$ et considérez la suite $f_n(x) = lnx - 1$. alors $f_n \xrightarrow{\Gamma_\tau} \hat{f} = I_{\{0\}}$ et f_n converge vers $\tilde{f}$ où :*

$$\tilde{f} = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ +\infty & si \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Nous produisons quelques caractérisations pratiques séquentielles de $\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n$ et de $\Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n$.

Proposition 2.39. *Si Xest un espace dénombrable et $f' = \Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n$, $f'' = \Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n$, alors*

(a) Pour chaque $x \in X$ et chaque suite x_n converge vers x, nous avons

$$f'(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n), \tag{2.4.3}$$

et pour chaque $x \in X$, on trouve une suite x_n converge vers x dans X tel que

$$f'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n). \tag{2.4.4}$$

(b) Pour chaque $x \in X$ et chaque suite x_n converge vers x dans X nous avons

$$f''(x) \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n), \tag{2.4.5}$$

et pour chaque $x \in X$ on trouve une suite x_n converge vers x dans X tel que

$$f''(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n). \tag{2.4.6}$$

Preuve.

(a) Soit $U \in \mathcal{N}(x)$, alors nous pouvons trouver $n_0 = n_0(U) \geq 1$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$, nous avons $\inf\limits_{u\in U} f_n(u) \leq f_n(x_n)$ pour tout $n \geq n_0$, alors

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{u\in U} f_n(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n),$$

donc

$$f'(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n),$$

donc (2.4.3) est vérifiée. Ensuite nous montrons (2.4.4), soit $x \in X$ tel que $f'(x) < +\infty$ et soit $\{U_k\}_{k\geq 1}$ est un base local du point $x \in X$ tel que $U_{k+1} \subseteq U_k$ pour tout $k \geq 1$. Considérer une suite $\lambda_k \downarrow f'(x)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda_k > f'(x)$ pour tout $k \geq 1$, nous avons

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{u\in U_k} f_n(u) < \lambda_k \qquad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Alors pour tout $k \geq 1$, nous pouvons trouver une suite strictement croissante des entiers $n(k) \geq 1$ tel que

$$\inf_{u\in U_k} f_{n(k)}(u) < \lambda_k \qquad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

Pour chaque $k \geq 1$ nous pouvons trouver $u_k \in U_k$ tel que

$$f_{n(k)}(u_k) < \lambda_k.$$

Alors nous présentons la suite

$$x_n = \begin{cases} u_k & \text{si} \quad n = n(k) \\ x & \text{si} \quad n \neq n(k) \end{cases} \qquad \text{pour tout} \quad k \geq 1.$$

alors x_n converge vers x et

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} \lambda_k \geq \liminf_{n\to\infty} f_{n(k)}(u_k) \geq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n).$$

De la première partie de la preuve on sait que l'inégalité opposé est satisfait. Donc $f'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)$, c'est-à-dire (2.4.4) est satisfait.

(b) L'inégalité (2.4.5) suit comme (2.4.3) donc nous montrons (2.4.6). Soit $x \in X$ tel que $f''(x) < +\infty$ et considérer $\{\mu_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\mu_k \downarrow f''(x)$ et $\mu_k > f''(x)$ pour $k \geq 1$, comme dans avant pour tout $k \geq 1$ nous pouvons trouver une suite strictement croissante des entiers $n(k) \geq 1$ tel que

$$\inf_{u\in U_k} f_n(u) < \mu_k \quad \text{,pour tout} \quad n \geq n(k),$$

alors pour tout $n \geq n(k)$ on peut trouver $u_{n,k} \in U_k$ tel que

$$f_n(u_{n,k}) < \mu_k.$$

Alors nous présentons la suite

$$x_n = \begin{cases} x & \text{si} \quad n < n(1) \\ x_n & \text{si} \quad n(k) \leq n < n(k+1) \end{cases}.$$

Donc x_n converge vers x et ainsi

$$f''(x) = \lim_{k\to\infty} \mu_k \geq \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n).$$

Combinant avec (2.4.5), on conclu que

$$f''(x) = \limsup_{n\to\infty} \mu_k f_n(x_n),$$

c'est-à-dire (2.4.6) est satisfait.

□

Corollaire 2.7. *Si X est dénombrable et $f = \Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$, alors pour chaque $x \in X$ et chaque suite x_n qui converge vers x dans X, nous avons*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n). \tag{2.4.7}$$

Et pour chaque $x \in X$ *on trouve une suite* x_n *converge vers* x *dans* X *tel que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n). \tag{2.4.8}$$

Preuve. En utiliser (2.4.3) pour obtenir (2.4.7) et (2.4.4) et (2.4.6) pour obtenir (2.4.8).

□

Remarque 2.29. *De la proposition 2.39 et le corollaire 2.7 si* X *est dénombrable, alors*

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \min\left[\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) : x_n \to x \text{ dans } X\right],$$

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \min\left[\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) : x_n \to x \quad \text{dans} \quad X\right],$$

et

$$\left(\Gamma_\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \min\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) : x_n \to x \quad \text{dans} \quad X\right].$$

Notons aussi que dans le corollaire 2.7(2.4.7) *est une supposition plus forte que le la convergence ponctuelle car il faut tenir pour chaque* x_n *converge vers* x *et non seulement pour* $x_n = x$. *D'autre part,* (2.4.8) *est un condition plus faible que la convergence où nous devons avoir* $x_n = x$ *pour tout* $n \geq 1$. *Ceci explique pourquoi les deux notions de convergence sont en général distinct.*

Dans le cas d'une suite $\{C_n\}_{n\geq 1} \subseteq 2^X$, *nous pouvons avoir les caractérisations séquentilles pratiques des limites de Kuratowski (voir la définition 2.17 et la proposition 2.32).*

Proposition 2.40. *Si* X *est dénombrable et* $\{C_n\}_{n\geq 1} \subseteq 2^X$, *alors*

$$\liminf_{n\to\infty} C_n = \{x \in X : x = \lim x_n, x_n \in C_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1\}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} C_n = \{x \in X : x = \lim x_{nk}, x_{nk} \in C_{nk}, n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}.$$

Remarque 2.30. $\liminf_{n\to\infty} C_n$ *se compose de tous les points de limites de suites avec des éléments dans* $C_n, n \geq 1$ *et* $\limsup_{n\to\infty} C_n$ *se compose de tous les points de limites de sous suite de suites avec des éléments dans* $C_n, n \geq 1$. *Si* X *est un espace métrique, on écrit*

$$\liminf_{n\to\infty} C_n = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} d(x, C_n) = 0\} \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} C_n = \{x \in X : \liminf_{n\to\infty} d(x, C_n) = 0\}.$$

En utilisant la proposition 2.40 nous pouvons avoir la suite double dans la proposition suivante qui est un outil d'analyse.

Proposition 2.41. *Soit X un espace dénombrable, et la suite double $\{x_{mn}\}_{m,n\geq 1} \subseteq X$ et $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} x_{mn} = x$, alors on trouve les suites des entiers $\{m(n)\}_{n\geq 1}$ et $\{n(m)\}_{m\geq 1}$ croissantes vers $+\infty$ (pas necessairement strict) tel que $(x_{mn(m)})$ converge vers x quand m tend vers ∞ et $(x_{m(n)n})$ converge vers x quand n tend vers ∞.*

Preuve. Soit $A_n = \{x_{mn}\}_{m\geq 1}$ et $x_m = \lim\limits_{n\to\infty} x_{mn}$, de la proposition 2.40 nous avons $x_m \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ pour tout $m \geq 1$. Parce que x_m converge vers x quand m tend vers ∞ et $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ est fermé (voir la remarque 2.24) nous avons $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$, donc $x = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ avec $u_n \in A_n$, d'où $u_n = x_{m(n)n}$ et ainsi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{m(n)n}$.

Ensuite soit $B_m = \{x_{mn}\}_{n\geq 1}$, alors $x_m \in \overline{B_m}$ pour tout $m \geq 1$ et aussi $x = \lim x_m \in \liminf\limits_{m\to\infty} \overline{B_m} = \liminf\limits_{m\to\infty} B_m$. Donc nous pouvons trouver $v_m \in B_m,\ m \geq 1$, tel que $x = \lim\limits_{m\to\infty} v_m$. Alors $v_m = x_{mn(m)}$ et aussi $x = \lim\limits_{m\to\infty} x_{mn(m)}$. □

Maintenant vérifions les propriétés variationnelles de Γ-Convergence. Nous commençons par un version topologique de la notion de coercitivité.

Définition 2.19. *Soit (X, τ) un espace topologique de Hausdorff avec τ sa topologie.*

(a) On dit que la fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est coercitive (resp., séquentiellement coercitive) si pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\overline{\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}}^{\tau}$ et τ-dénombrable compact (resp., τ-séquentiellement compact).

(b) Une suite de fonctions $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}, n \geq 1$, et dit equicoercitif si pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble τ-fermé, τ-dénombrable compact

$$K_\lambda \subseteq X, \quad \text{tel que} \quad \{f_n \leq \lambda\} = \{x \in X : f_n(x) \leq \lambda\} \subseteq K_\lambda \quad \text{pour tout} n \geq 1.$$

Remarque 2.31. *Chaque fonction séquentiellement coercitive f est coercitive. Si X est un espace de Banach réflexif et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est coercitive pour X muni de la topologie faible, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$, quelque auteurs appellent cette propriété la coercitivité faible et on appell f coercitive où $\frac{(f(x))}{\|x\|}$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.*

Proposition 2.42. *Si $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite des fonctions tel que $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$, alors la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equicoercitive si et seulement s'il existe une fonction τ-semicontinue inférieure coercitive $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ tel que $g \leq f_n$ pour tout $n \geq 1$.*

Preuve. $\Rightarrow$) Soit $g_0(x) = \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ et l'ensemble $g = \overline{g_0}^{\tau}$ (la régularisation τ-semicontinue inférieure de g_0). Puisque $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equicoercive, on peut trouver une famille des ensembles τ-fermé, τ-dénombrable compact $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tell que $\{f_n \leq \lambda\} \subseteq K_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, n \geq 1$. Soit $x \in \{g \leq \lambda\}$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n = n(\varepsilon) \geq 1$ tell que $f_n(x) \leq \lambda + \varepsilon$ alors $x \in K_{\lambda+\varepsilon}$. Donc $\{g \leq \lambda\} \subseteq \bigcap\limits_{\varepsilon>0} K_{\lambda+\varepsilon}$ et le dernier ensemble est τ-fermé et τ-dénombrable compact, qui prouve que g est τ-semicontinue inférieure coercitive.
$\Leftarrow$) Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ et chaque $n \geq 1$, on a $\{f_n \leq \lambda\} \subseteq \{g \leq \lambda\} = K_\lambda$ et K_λ de τ-fermé (parce que g est τ-semicontinue inférieure) et K_λ est τ-dénombrable compact (parce que g est coercitive). Donc il s'ensuit que la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est equicoercitive. $\square$

L'equicoercitif des familles exposent des propriétés de stabilité variationnelles intéressantes.

Théorème 2.18. *Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$, est une suite equicoercitive, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$ et comme avant $f' = \Gamma_\tau\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ et $f'' = \Gamma_\tau\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, alors f' et f'' sont coercitives et*

$$\min_{x\in X} f'(x) = \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x_n). \tag{2.4.9}$$

De plus, $f = \Gamma_\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$, alors f est coercitive et

$$\min_{x\in X} f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x_n). \tag{2.4.10}$$

Preuve. De la proposition 2.42, on peut trouver $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction τ-semicontinue inférieure et coercitive tell que $g \leq f_n$ pour tout $n \geq 1$. Alors d'aprés la remarque 2.23 on a $g \leq f' \leq f''$ et les deux fonctions f' et f'' sont coercitives et τ-semicontinue inférieure.

Ensuite nous montrons (2.4.9). Nous allons d'abord montrer que à cause de coercitivité, f' attient son minimum sur X. En effet si $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ est une suite de minimisation et $\lim f'(x_n) = \inf\limits_X f' = m < +\infty$, alors on peut trouver $n_0 > 1$ tel que $x_n \in K_{m+1}$ pour tout $n \geq n_0$ avec K_{m+1} τ-fermé et τ-dénombrable compact. Alors $\{x_n\}_{n\geq 1}$ a un point de groupe

$x \in X$ et comme f' est τ-semicontinue inférieure, nous avons

$$m \leq f'(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f'(x_n) = m,$$

alors $m = f'(x)$, c'est-à-dire, $\inf_X f' = \min_X f'$. De la définition 2.16, nous avons

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) \leq \min_{x\in X} f'(x). \tag{2.4.11}$$

Supposons que $\liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) < +\infty$, on peut trouver la sous suite $\{n_k\}_{k\geq 1}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{x\in X} f_{n_k}(x) = \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) < \lambda. \tag{2.4.12}$$

Supposons que

$$\inf_{x\in X} f_{n_k}(x) < \lambda, \quad \text{pour tout} \quad k \geq 1. \tag{2.4.13}$$

D'aprés l'equicoercitivité de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$, on peut trouver un ensemble K_λ qui est τ-fermé et τ-dénombrable compact tell que $\{f_{n_k} \leq \lambda\} \subseteq K, k \geq 1$, sont non vide. Donc

$$\inf_{x\in X} f_{n_k}(x) = \inf_{x\in K} f_{n_k}(x). \tag{2.4.14}$$

Soit $x_{n_k} \subseteq K$ tel que $f_{n_k}(x_{n_k}) = \inf_{x\in K} f_{n_k}(x)$ (il est existe, car K est τ-fermé, τ-dénombrable compact, et f_{n_k} est τ-semicontinue inférieure, par vertu de l'equicoercitivité de la suite $\{f_n\}_{n\geq 1}$). La suite $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} \subseteq K$ a un point de groupe $\hat{x} \in K$. Pour chaque $U \in \mathcal{N}(\hat{x})$, il existe $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $k \geq k_0$ nous avons $x_{n_k} \in U$. Donc

$$\inf_{u\in U} f_{n_k} \leq f_{n_k}(x_{n_k}) \quad \text{pour tout} \quad k \geq k_0,$$

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} \inf_{u\in U} f_{n_k}(u) &\leq \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k}) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x). \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

(voir (2.4.14) et (2.4.12)). Comme $U \in \mathcal{N}(\hat{x})$ est arbitraire de (2.4.15) il s'ensuit que

$$\hat{f}'(\hat{x}) \leq \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) \qquad (\text{avec} \quad \hat{f}' = \Gamma_\tau\text{-} \liminf_{k\to\infty} f_{n_k}),$$

alors

$$\min_{x\in X} \hat{f}' \leq \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x),$$

donc

$$\min_{x\in X} f'(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) \quad (\text{puisque} \quad f' \leq \hat{f}'). \tag{2.4.16}$$

de (2.4.11) et (2.4.16) on obtient (2.4.9).

Finalement si f_n Γ_τ-Convergence vers f, alors de la définition 2.16 nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{x\in X} f_n(x) \leq \inf_{x\in X} f(x). \tag{2.4.17}$$

De (2.4.9) et (2.4.17), nous obtenons (2.4.10). $\square$

CHAPITRE 3

Problèmes extrémaux et contrôle optimal

Intoduction

Dans ce chapitre , nous utilisons les outils du chapitre précédent pour étudier les problèmes extrémaux et optimaux. Nous commençons par une étude détaillée de la notion de semi-continuité inférieure des fonctions. Ensuite, nous examinons les problèmes de minimisation contraintes et développons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ceci conduit à des théorèmes de minimax, de point selle et à la théorie des multiapplications de KKM. Le dernière section traite de calcul de contrôle optimal.

3.1 La semicontinuité inférieure

Dans la section 2.2 nous avons examiné en détail, des fonctions semi-continues inférieures convexes définies sur un espace localement convexe. Dans cette section nous laissons tomber la condition de convexité et nous nous concentrons sur une étude systématique du concept de la semi-continuité inférieure .

Notre réglage est purement topologique. Il faut donc considerer (X, τ) est un espace topologique de Hausdorff, avec τ la notation de sa topologie. Des conditions supplémentaires sur

X sont introduites au besoin.

Nous commençons par rappeler la définition de τ-semi-continue inférieure.

Définition 3.1. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}^*$ est dite τ-semi-continue inférieure au point x, si*

$$f(x) \leq \liminf_{u \to x} f(u) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{u \in U} f(u).$$

Si f est τ-semi-continue inférieure en chaque $x \in X$, alors on dit que f est τ- semi-continue inférieure. Si $-f$ est τ-semi-continue inférieure (au point x), alors on dit que f est τ- semi-continue supérieure (au point x).

Remarque 3.1. *on note par τ la topologie, donc de la définition on dit que f est semi-continue inférieure (au point $x \in X$), aussi si $x \in X$ est un point où $f(x) > -\infty$, alors f est τ-semi-continue inférieure au point x si, et seulement si pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda < f(x)$, nous pouvons trouver $U \in \mathcal{N}(x)$ tel que $\lambda < f(u)$, pour tout $u \in U$.*

Proposition 3.1. *Pour une fonction $f : x \to \mathbb{R}^*$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) f est τ semi-continue inférieure.

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau de f $L_\lambda(f) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ est τ-fermé.

(c) epi$(f) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R} : f(u) \leq t\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b)

Nous montrons que $L_\lambda(f)$ est fermé (i.e., le complimentaire de L_λ est ouvert).

Soit $x \in L_\lambda^c(f)$ alors $f(x) > \lambda$ et de la remarque 3.1 nous pouvons trouver $U \in \mathcal{N}(x)$ tel que $f(x) > \lambda$, pour tout $x \in U$, alors $L_\lambda(f)$ est fermé.

(b) $\Rightarrow$ (a)

• Si $f(x) = -\infty$, alors c'est claire de la définition(3.1) que f est τ-semi-continue inférieure en $x \in X$.

• Supposons que si $f(x) > -\infty$ et soit $f(x) > \lambda$ notez que $x \in L_\lambda^c(f)$ et parce que par l'hypothèse L_λ est fermé, on peut trouver $U \in \mathcal{N}(x)$ tel que $U \subseteq L_\lambda^c(f)$, donc $f(u) > \lambda$, pour tout $u \in U$, ce qui prouve le τ-semi-continue inférieure de f au point $x \in X$ donc nous avons établi l'équivalence entre (a) et (b).

$(a) \Leftrightarrow (c)$

on a, f est τ-semi-continue inférieure et soit $h : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $h(u,t) = f(u) - t$

f est τ-semi-continue inférieure sur X donc h est τ-semi-continue inférieure sur $X \times \mathbb{R}$.

f est τ-semi-continue inférieure si et seulement si pour tout $x \in X$ f est τ-semi-continue inférieure au point x c'est-à-dire

$$\liminf_{u \to x} f(u) = f(x).$$

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$: $\liminf\limits_{u \to x} f(u) - t_0 \geq f(x) - t_0$ alors

$$\lim_{(u,t)\to(x,t_0)} \inf(f(u) - t) \geq h(x, t_0)$$

donc h est τ-semi-continue inférieure au point (x, t_0), pour tout $(x, t_0) \in X \times \mathbb{R}$.

c'est-à-dire h est τ-semi-continue inférieure sur $X \times \mathbb{R}$.

On a, h est τ-semi-continue inférieure c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_\lambda(h)$ est τ-fermé de $X \times \mathbb{R}$.

$L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; h(u,t) \leq \lambda\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; f(u) - t \leq \lambda\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; f(u) \leq \lambda + t\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; (u, \lambda + t) \in epi(f)\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; (u,t) + (0,\lambda) \in epi(f)\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$,

$\Leftrightarrow L_\lambda(h) = \{(u,t) \in X \times \mathbb{R}; (u,t) \in epi(f) - (0,\lambda)\}$ fermé de $X \times \mathbb{R}$.

Alors $epi(f) - (0,\lambda)$ est un fermé de $X \times \mathbb{R}$, donc $epi(f)$ est un fermé de $X \times \mathbb{R}$ car $z \longmapsto z + a$ est continue.

En effet

soit g est une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $X \times \mathbb{R}$ définie par $g(u,t) = (u,t) - (0,\lambda)$ est fermé de $X \times \mathbb{R}$.

On sait que g est continue et $epi(f) - (0,\lambda)$ est fermé de $X \times \mathbb{R}$, alors $g^{-1}(epi(f) - (0,\lambda))$

est un fermé de $X \times \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} g^{-1}(epi(f) - (0,\lambda)) &= \{(u,t) \in X \times \mathbb{R} : g(u,t) \in epi(f) - (0,\lambda)\} \\ &= \{(u,t) \in X \times \mathbb{R} : (u,t) - (0,\lambda) \in epi(f) - (0,\lambda)\} \\ &= \{(u,t) \in X \times \mathbb{R} : (u,t) \in epi(f)\} \\ &= epi(f). \end{aligned}$$

Donc $epi(f)$ est un fermé de $X \times \mathbb{R}$, d'ou l'équivalence entre (a) et (c). $\square$

Corollaire 3.1. *Soit I un intervalle, si $f_i : X \to \mathbb{R}^*, i \in I$, est une famille des fonctions τ-semi-continue inférieure, alors*

a) $\sup_{i \in I} f_i$ est τ-semi-continue inférieure.

b) Si I est un intervalle fini, donc $\inf_{i \in I} f_i$ est τ-semi-continue inférieure.

Corollaire 3.2. *Un ensemble $C \subseteq X$ est τ-fermé si et seulement si δ_c est τ-semi-continue inférieure.*

De la definition 3.1 on voit que : $f : X \to \mathbb{R}^*$ est τ-semi-continue inférieure en $x \in X$, alors pour chaque suite x_n qui converge vers x dans X, nous avons

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n),$$

l'inverse n'est pas vraie en générale.

Exemple 3.1. *Soit X est un espace de Banach de dimension infinie muni par la topologie faible notée par w, et soit $C \subseteq X$ une ensemble non vide qui est séquentiellement w-fermé mais pas w-fermé, alors la fonction indicatrice δ_c vérifier*

$$\delta_c(x) = \liminf_{n \to +\infty} \delta_c(x_n).$$

Pour chaque suite $x_n \xrightarrow{w} x$ dans X, mais f n'est pas w-semi-continue inférieure, par exemple dans $X = L^1$, en raison de la propriété de schur l'ensemble

$$C = \partial B_1 = \{x \in L^1 : \|x\|_L^1 = 1\},$$

est séquentiellement w-fermé mais n'est pas w-fermé. (en fait $\overline{C}^{\,w} = \overline{B}_1 = \{x \in L^1 : \|x\|_{L^1} \leq 1\}$).

Définition 3.2. *On dit que $f : X \to \mathbb{R}^*$ est séquentiellement τ-semi-continue inférieure au point $x \in X$, si*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n),$$

pour chaque suite x_n qui converge vers x dans X.

On dit que f est séquentiellement τ-semi-continue inférieure si c'est séquentiellement τ-semi-continue inférieure en chaque point $x \in X$.

Remarque 3.2. *On note par τ_{seq} à la topologie de X dont les ensembles sont séquentiellement τ-fermé, alors $f : X \to \mathbb{R}^*$ est séquentiellement τ-semi-continue inférieure si et seulement si c'est τ_{seq}-semi-continue inférieure. En générale, la topologie τ_{seq} est plus fort que la topologie τ et donc la notion de τ-séquentiel τ-semi-continue inférieure est plus générale que le τ-semi-continue inférieure, il est claire que $\tau = \tau_{seq}$ si et seulement si X est dénombrable. Donc nous pouvons indiquer la poroposition suivante.*

Proposition 3.2. *Si (X, τ) est dénombrable et soit $f : X \to \mathbb{R}^*$ et $x \in X$, alors f est τ-semi-continue inférieure au point $x \in X$ si et seulement si f est séquentiellement τ-semi-continue inférieure au point $x \in X$.*

Le théorème suivant résume la méthode directe du calcul de variations et souligne l'importance de la notion de semi-continuité inférieure dans l'analyse variationnel, le résultat est connu sous le nom de théorème de weirstrass.

Théorème 3.1. *Si $f : X \to \mathbb{R}^*$ est τ-coercitif et τ-semi-continue inférieure (resp. séquentiellement τ-coercitif et séquentiellement τ-semi-continue infériuere), alors*

(a) Il existe $x \in X$ tel que $f(x) = \inf_X f$.

(b) Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de minimisation et x est un point de groupe de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ (resp. x est un limite sous séquentielle de $\{x_n\}_{n\geq 1}$), alors $f(x) = \inf_X f$.

(c) Si f n'est pas identique $+\infty$, alors chaque suite de minimisation a un point de groupe (resp. un sous-suite convergent).

Preuve. Si $f = +\infty$ alors tout les $x \in X$ minimise f et alors (a) et (b) sont vérifies. Donc assumez que f n'est pas équivalent à $+\infty$.

Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite de minimisation de f, nous avons $f(x_n) \downarrow \inf\limits_X f < +\infty$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\inf\limits_X f < \lambda$, alors nous pouvons trouver $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $f(x_n) \leq \lambda$. En raison de la τ-coercitivité (resp., séquentielle τ-coercitivité) de f, nous avons que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ a un point de groupe $x \in X$ (resp., une point limite sous séquentielle $x \in X$), voir définition 2.19. Ensuite, en raison de la τ-semi-continue inférieure (resp., τ-séquentielle semi-continue inférieure) de f, nous avons

$$\inf_X f \leq f(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_X f,$$

alors $f(x) = \inf\limits_X f$. □

Corollaire 3.3. *Soit X un espace de Banach réflexif et $f \in \Gamma_0(X)$, et $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, alors on peut trouver $x \in X$ tel que*

$$-\infty < f(x) = \inf_X f.$$

Preuve. En raison de la convexité de f, la fonction est semi-continue inférieure si et seulement si c'est w-semi-continue inférieure. De plus, en raison du réflexivité de X a des ensemble bornées sont relativement w-compact (en fait relativement séquentiellement w-compact par le théorème d'Eberlien-smulian). □

Remarque 3.3. *Si $f : X \to \mathbb{R}^*$ est semi-continue inférieure et convexe et il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = -\infty$, alors f n'est nulle part fini sur X pour cette raison, quand la convexité est présente on considère les fonctions avec des valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Définition 3.3. *Soit $f : X \to \mathbb{R}^*$ la régularisation τ-semi-continue inférieure (ou l'enveloppe τ-semi-continue inférieure) de f, est la fonction $\overline{f}^{\tau} : X \to \mathbb{R}^*$ definie par*

$$\overline{f}^{\tau} = \liminf_{u\to x} f(u) = \sup_{u\in\mathcal{N}(x)} \inf_{u\in U} f(u).$$

Remarque 3.4. *C'est claire que cette définition de $\overline{f}^{\tau}$ est τ-semi-continue inférieure. Dans la proposition suivante nous montrons que $\overline{f}^{\tau}$ est la plus grand fonction τ-semi-continue inférieure majorée par f.*

Proposition 3.3. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *et soit*

$$S(f) = \{h : X \to \mathbb{R}^*, h \text{ est semi-continue infériure}, \quad h \leq f\},$$

alors $epi(\overline{f}^{\tau}) = \overline{epif}$ *et pour tout* $x \in X$, $\overline{f}^{\tau}(x) = \sup[h(x) : h \in S(f)]$.

Preuve. Evidemment $\overline{epi(f)} \subseteq epi\overline{f}^{\tau}$.
Soit $(x, \lambda) \in epi(\overline{f}^{\tau})$, alors $\overline{f}^{\tau}(x) \leq \lambda$, ainsi pour chaque $U \in \mathcal{N}(x)$, et pour chaque $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\inf_{u \in U} f(u) \leq \overline{f}^{\tau}(x) \leq \lambda < \lambda + \varepsilon.$$

Donc on trouve $u \in U$ et $\mu \in (\lambda, \lambda+\varepsilon)$, tel que $f(u) < \mu$, d'ou $(U \times (\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) \cap epi(f) \neq \emptyset$, il s'ensuit que $(x, \lambda) \in \overline{epi(f)}$. Donc $epi\overline{f}^{\tau} = \overline{epif}$.
Maintenant supposons $\overline{f}^{\tau} \in S(f)$. Aussi si $h \in S(f)$, alors $epi(f) \subseteq epi(h)$ et donc $epi\overline{f}^{\tau} = \overline{epif} \subseteq \overline{epih} = epi(h)$ (voir la proposition 3.1). Donc $h \leq \overline{f}^{\tau}$ et donc nous concluons que pour tout $x \in X$

$$\overline{f}^{\tau}(x) = \sup[h(x) : h \in S(f)].$$

□

Corollaire 3.4. *(a) Soit* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\{\overline{f}^{\tau} \leq \lambda\} = \bigcap_{\mu > \lambda} \overline{\{f \leq \mu\}}^{\tau}.$$

(b) Soit $C \subseteq X$, *alors* $\overline{\delta_C}^{\tau} = \delta_{\overline{C}^{\tau}}$.

Corollaire 3.5. *Soit* $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ *alors*

(a) $\overline{(f+g)}^{\tau} \geq \overline{f}^{\tau} + \overline{g}^{\tau}$.

(b) Si g *est continue et finie partout, alors* $\overline{(f+g)}^{\tau} = \overline{f}^{\tau} + g$. *La proposition suivante caractérise* $\overline{f}^{\tau}$ *en termes des suites et suit de la proposition 2.39 (voir aussi la remarque 2.23).*

Proposition 3.4. *Si* (X, τ) *est un espace dénombrable,* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *et* $x \in X$, *alors* $\overline{f}^{\tau}$.

(a) Pour chaque suite x_n *converge vers* x *dans* X *nous avons*

$$\overline{f}^{\tau}(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

(b) Il existe une suite x_n converge vers x dans X tel que $\overline{f}^{\tau}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Le théorème suivant récaputile la méthode de relaxation dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 3.2. *Soit $f : X \to \mathbb{R}^*$ est τ-coercitif, alors*

(a) $\overline{f}^{\tau}$ *est τ-coercitif et τ-semi-continue inférieure.*

(b) Il existe $x \in X$ tel que $\overline{f}^{\tau}(x) = \inf_X \overline{f}^{\tau}$.

(c) $\min_X \overline{f}^{\tau} = \inf_X f$.

(d) Chaque point de groupe d'une suite de minimisation pour f est un minimum de $\overline{f}^{\tau}$.

(e) Si (X, τ) est dénombrable, alors les minimums de $\overline{f}^{\tau}$ *sont les limites des minimums des suites pour f.*

Preuve.

(a) On sait que $\overline{f}^{\tau}$ est τ-semi-continue inférieure, le τ-coercitivité de $\overline{f}^{\tau}$ suit du théorème 2.18 et la remarque 2.23 (voir aussi laproposition 3.4).

(b) De la partie (a) et le théorème 3.1.

(c) Soit $h(x) = \inf_X f$, pour tout $x \in X$, alors $h \in S(f)$ et ainsi $h \leq \overline{f}^{\tau}$ (voir la proposition 3.3) il s'ensuit que $\inf_X f \leq \min_X \overline{f}^{\tau}$ parce que l'inégalité opposé est toujours vraie (pour se le rappeler $\overline{f}^{\tau} \leq f$). Nous concluons que $\min_X \overline{f}^{\tau} = \inf_X f$.

(d) Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite de minimisation de f et x un point de groupe de $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Alors

$$\overline{f}^{\tau}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \overline{f}^{\tau}(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_X f = \min_X \overline{f}^{\tau}$$

(voir la partie (c)) donc $\overline{f}^{\tau}(x) = \min_X \overline{f}^{\tau}$.

(e) Soit $x \in X$ tel que $\overline{f}^{\tau}(x) = \min_X \overline{f}^{\tau}$ alors de la proposition 3.4 et la partie (c), nous pouvons trouver une suite x_n qui converge vers x tel que

$$\inf_X f = \overline{f}^{\tau}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

□

Remarque 3.5. *Ce théorème montre que la fonctionel détendu prendre le comportement asymptotique des suites minimisantes pour f.*

Pour des fonctions convexes dans un espace de Banach, le processus de relaxation est plus simple parce que par le lemme de Mazur pour des ensembles convexes, les fermetures dans la norme et la topologie faible sont coïncident. Donc nous avons le suivant.

Proposition 3.5. *Si X est un espace de Banach et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, alors $\overline{f}^{\,s} = \overline{f}^{\,w}$ (notons par s la topologie forte sur X, et w la topologie faible sur X).*

Ensuite nous avons un résultat de semi-continuité inférieure pour les fonctionnelles intégrals définies sur les produit d'espaces de lebesgue.
Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré complet, fini et $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction satisfait l'hypothèses suivantes
H_0 :

(i) f est $\Sigma \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mésurable avec $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (resp., $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$) étant les σ-tribus boreliennes de $\mathbb{R}^N$ (resp., de $\mathbb{R}^m$).

(ii) Pour μ-presque tout $\omega \in \Omega, (x, u) \to f(\omega, x, u)$ est semi-continue inférieure.

(iii) Pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}^N, u \longmapsto f(\omega, x, u)$ est convexe.

Soit $1 \leq p, r \leq +\infty$, pour tout $(x, u) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ considérons la fonction intégrale : $I_f(x, u) : L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^r(\Omega, \mathbb{R}^m) \to R^*$ définie par

$$I_f(x, u) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega), u(\omega)) d\mu.$$

Nous voulons établir un résultat de semi-continue inférieure séquentiel quand nous considérons la topologie forte sur $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et la topologie faible sur $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (la topologie faible* sur $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ quand $r = +\infty$) pour le faire nous avons besoins du resultat d'approximation suivant.

Proposition 3.6. *Si $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, satisfait les hypothèses H_0 ci-dessus et une des conditions suivantes :*

(iv) Pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, nous pouvons trouver une fonction continue $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ tel que la fonction $x \to f(\omega, x, u_0(x))$ est finie et continue.

(v) Il existe une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tell que $\lim_{s \to +\infty} \frac{v(s)}{s} = +\infty$ et $v(\|u\|_{\mathbb{R}^m}) \leq f(\omega, x, u)$, pour $\mu - p.p.\, \omega \in \Omega$, tout $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$, alors

nous pouvons trouver deux suites de fonctions de carathéodory $a_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ *et* $c_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tel que*

$$f(\omega, x, u) = \sup_{n \geq 1} [(a_n(\omega, x), u)_{\mathbb{R}^m} + c_n(\omega, x)],$$

pour μ *presque tout* $\omega \in \Omega$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^N$, *tout* $u \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 3.6. *Rappel que* $h : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s (1 \leq s, k)$ *une fonction de carathéodory, si pour tout* $x \in \mathbb{R}^k, \omega \to h(\omega, x)$ *est* Σ*-mesurable et pour* μ*-presque tout* $\omega \in \Omega, x \to h(\omega, x)$ *est continue, une telle fonction est automatiquement* $\Sigma \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$*-mesurable, si dans la proposition ci-dessus* $f \geq 0$, *alors il est facile de voir l'approximation suivant* f *vérifie :*

$$f(\omega, x, u) = \sup_{n \geq 1} [(a_n(\omega, x), u)_{\mathbb{R}^m} + c_n(\omega, x)]^+,$$

avec $a_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ *et* $c_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *des fonctions de carathéodory bornées.*
Nous montrons que le resultat de semi-continue inférieure séquentiel suivant pour l'inégalité fonctionnel $I_f(x, u)$ *avec* $(x, u) \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Théorème 3.3. *Si* $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ *satisfait les hypothèses* H_0 *et les conditions suivants "pour chaque suite* $\{x_n\}_{n \geq 1}$ *convergeant dans* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *et chaque suite* $\{u_n\}_{n \geq 1}$ *convergeant faiblement dans* $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *(convergeant faiblement* si* $r = +\infty$*) tel que*

$$\int_\Omega f^+(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega)) d\mu \leq c + \int_\Omega f^-(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega)) d\mu$$

pour un certain $c > 0$ *et tout* $n \geq 1$, *la suite* $\{f^-(., x_n(.), u_n(.))\}_{n \geq 1} \subseteq L^1(\Omega)$ *est relativement faiblement compact",*
alors la fonction intégrale I_f *est bien définie sur* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *avec des valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et c'est séquentiellement semi-continue inférieure quand nous considérons* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *avec la topologie de la norme et* $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *avec la topologie faible (faible* si* $r = +\infty$*).*

Preuve. Soit $x \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N), u \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et supposons que pour un certain $c > 0$ nous avons

$$\int_\Omega f^+(\omega, x(\omega), u(\omega)) d\mu \leq c + \int_\Omega f^-(\omega, x(\omega), u(\omega)) d\mu. \tag{3.1.1}$$

Alors par l'hypothèse $f^-(., x(.), u(.)) \subseteq L^1(\Omega)$ et ainsi utilisons (3.1.1) nous concluons que $f(., x(.), u(.)) \subseteq L^1(\Omega)$. Si (3.1.1) n'est pas satisfait, alors

$$\int_\Omega f^-(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu < +\infty$$

et

$$\int_\Omega f^+(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu = +\infty,$$

donc

$$\int_\Omega f(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu = +\infty.$$

Si en effet I_f est bien défini avec des valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Nous pouvons trouver la semi-continue inférieure séquentielle désirée de I_f dans des étapes.

étape 1 : Nous supposons qu'il existe une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tell que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{v(s)}{s} = +\infty \quad \text{et} \quad v(\|u\|_{\mathbb{R}^m}) \leq f(\omega, x, u) \tag{3.1.2}$$

pour $\mu - p.p.\ \omega \in \Omega$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$, à cause de (3.1.2) on peut appliquer la proposition3.6 (voir aussi la remarque 3.6) et on obtient que

$$f(\omega, x, u) = \sup_{n\geq 1}[(a_n(\omega, x), u)_{\mathbb{R}^N} + c_n(\omega, x)]^+, \tag{3.1.3}$$

avec $a_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ et $c_n : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, n \geq 1$ des fonctions de carathéodory bornées, rappel que

$$\int_\Omega [a_n(\omega, x), u)_{\mathbb{R}^m} + c_n(\omega, x)]^+ d\mu = \sup[\int_c [(a_n(\omega, x), u)_{\mathbb{R}^m} + c_n(\omega, x)]d\mu : c \in \Sigma], \tag{3.1.4}$$

ainsi en vue de (3.1.3) et (3.1.4) il suffit de montrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $c \in \Sigma$

$$(x, u) \to \int_c [(a_n(\omega, x(\omega), u(\omega))_{\mathbb{R}^N} + c_n(\omega, x(\omega))]d\mu,$$

est séquentiellement semi-continue inférieure sur$L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \times L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la premier espace dans le produit muni de la topologie de norme et le deuxième avec la topologie faible (la topologie faible* si $r = +\infty$). Mais ceci est immédiat parce que a_n et c_n sont des fonctions de carathéodory bornées.

étape 2 : Maintenant on assumer que f ci dessous est bornées.

Sans aucune perte de généralité, nous pouvons l'assumer $f \geq 0$. Supposons que $x_n \to x$ dans $L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et $u_n \overset{w}{\to} u$ dans $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (faiblement* si $r = +\infty$). Parceque $u_n \overset{w}{\to} u$ dans $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (faiblement* si $r = +\infty$) et μ est fini, nous avons que $u_n \overset{w}{\to} u$ dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et ainsi par le théorème de Dunford-pettis la suite $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est uniformément intégrable. Ainsi selon le théorème de De La Vallée-Poussin nous pouvons trouver $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{v(s)}{s} = +\infty \quad \text{et} \quad \int_\Omega v(\|u_n(w)\|_{\mathbb{R}^m})d\mu \leq 1 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons

$$f_\varepsilon(\omega, x, u) = f(\omega, x, u) + \varepsilon v(\|u\|_{\mathbb{R}^m}).$$

De l'étape 1 on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu &\leq \int_\Omega f\varepsilon(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_\varepsilon(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega))d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega))d\mu + \varepsilon.\end{aligned}$$

Parce que $\varepsilon > 0$ est arbitraire, supposons $\varepsilon \downarrow 0$ on déduit que

$$\int_\Omega f(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega))d\mu.$$

étape 3 : *cas générale*

Supposons que $x_n \to x$ dans $L^p(\Omega, \mathrm{R}^N)$ et $u_n \overset{w}{\to} u$ dans $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$(faiblement* si $r = +\infty$). Pour chaque $k \geq 1$ nous définissons

$$f_k(\omega, x, u) = \max\{f(\omega, x, u), -k\}, g_n(\omega) = f^-(\omega, x_n(\omega), u_n(\omega)),$$

et $C_{n,k} = \{\omega \in \Omega : g_n(\omega) > k\}$. Sans aucun perte de généralité nous pouvons supposer que $I_f(x_n, u_n)$ tend vers à une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Ainsi de l'hypothèse du théorème $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(\Omega)$ est relativement faiblement compact. Alors pour chaque $k \geq 1$, à cause de l'étape 2, nous avons

$$\begin{aligned} I_f(x,u) \leq I_{f_k}(x,u) &\leq \liminf_{n\to\infty} I_{f_k}(x_n,u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty}[I_f(x_n,u_n) + \int_{C_{n,k}} (g_n(\omega)-k)d\mu] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I_f(x_n,u_n) + \lim_{n\to\infty}\sup \int_{C_{n,k}} (g_n(\omega)-k)d\mu. \end{aligned}$$

Le théorème de Dunford-pettis implique que $\{g_n\}_{\{x_n\}_{n\geq 1}} \geq 1 \subseteq L^1(\Omega)$ est uniformément intégrable. Passons à la limite quand k tend vers ∞, on conclu que

$$I_f(x,u) \leq \liminf_{n\to\infty} I_f(x_n,u_n).$$

□

Corollaire 3.6. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ est un domain borné avec la frontière lipchitzienne et $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N_k} \to \mathbb{R}_+$ satisfait*

i) f est Borel mesurable.

ii) Pour presque tout le $z \in \Omega, (x,u) \to f(z,x,u)$ est semi-continue inférieure.

iii) Pour presque tout $z \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}^N, u \to f(z,x,u)$ est convexe, alors la fonctionnel intégral

$$x \to J_f(x) = \int_\Omega f(z,x(z),D_x(z))dz$$

est séquentiellement w-semicontinue inférieure sur $W^{1,1}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.

Remarque 3.7. *ce resultat est optimal quand $N = 1$ (le cas scalaire prétendu), dans le sens que la convexité de $f(z,x,.)$ est une condition nécessaire pour le séquentiel semicontinuité inférieure faible de $J_f(.)$ sur $W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. Dans le cas $N > 1$ (le cas vectoriel prétendu), intégrands convexe produit seulement une petite sous-classe de le séquentiellement faible fonctionnel semicontinue infériuere sur $W^{1.p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$.*

Nous pouvons avoir une version de théorème 3.3 pour intégrands défini sur des éspaces de Banach de dimension infinie .

Théorème 3.4. *Si X est un espace de Banach séparable, Y est un espace de Banach réflexif séparable, et $f : \Omega \times X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ satisfait* *(i) f est $\Sigma \times \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ mesurable (avec $\mathcal{B}(X)$(resp., $\mathcal{B}(Y)$) la σ-tribu Borelien de X(resp., de Y).*

(ii) Pour μ-presque tout $\omega \in \Omega, (x, y) \to f(\omega, x, y)$ est semicontinue inférieure.

(iii) Pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, et tout $x \in X, y \to f(\omega, x, y)$ est convexe.

iv) Il existe $M > 0$ et $v \in L^1(\Omega)$ tel que pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ et tout $(x, y) \in X \times Y$ nous avons

$$f(\omega, x, y) \geq v(\omega) - M(\|x\|_X + \|y\|_Y).$$

alors $(x, u) \to I_f(x, u) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega), u(\omega))d\mu$ est séquentiellement semi-continue inférieure sur $L^1(\Omega, X) \times L^1(\Omega, Y)_w$, on note par $L^1(\Omega, Y)_w$ l'espace de lebesgue-Bochner de $L^1(\Omega, Y)$ muni par la topologie faible w.

3.2 Problème de minimisation contraints

Dans beaucoup de situation appliquées nous ne cherchons pas juste le minimum d'un objectif fonctionnel sur un ensemble ouvert U, mais nous voulons déterminer le minimum de f sous réserve de certains restrictions sur le point $x \in U$. Dans cette section nous examinons de tels problèmes de minimisation avec des conditions et nous développement la méthode de multiplicateurs de *Lagrange*.

Définition 3.4. *Soit X, Y deux espaces de Banach, $U \subseteq X$ et $V \subseteq Y$ deux ensembles ouverts non vides, et soit $f : U \to V$ une fonction Fréchet-différentiable,*

(a) On dit que $x_0 \in U$ est un point critique de f si et seulement si $f'(x_0) \in \mathscr{L}(X, Y)$ n'est pas surjectif.

(b) On dit que $x_0 \in U$ est un point régulière de f si et seulement si $f'(x_0) \in \mathscr{L}(X, Y)$ est surjectif.

Remarque 3.8. *Si $Y = \mathbb{R}$, alors $x_0 \in U$ est un point critique (respectivement régulière) de $f : X \to \mathbb{R}$ si $f'(x_0) = 0$ (respectivement $f'(x_0) \neq 0$).*
Si $X = \mathbb{R}$, alors $x_0 \in]a, b[$ est un point critique de f si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

Exemple 3.2. *Soit $X = H$ un espace de Hilbert, et soit $A \in \mathscr{L}(H, H)$ est un isomorphisme auto-adjoint (i.e : $A^{-1} \in \mathscr{L}(H, H)$) et $g : H \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet-diférentiable .*
Posons $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_H - g(x)$. On note par $\langle ., .\rangle_H$ le produit scolaire de H. Évidement f est Fréchet-différentiable et $f'(x) = Ax - g'(x)$.
Par conséquent, $x_0 \in H$ est un point critique si et seulement si $x_0 = A^{-1}g'(x_0)$.
Si $g(x) = \frac{\lambda}{2}\|x\|_H^2, \lambda \in \mathbb{R}$ alors $g'(x_0) = \lambda x_0$ et alors $x_0 \in H$ est un point critique de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_H - \frac{\lambda}{2}\|x\|_H^2$ si et seulement si $Ax_0 = \lambda x_0$, c'est-à-dire x_0 est un vecteur propre de l'opérateur A avec la valeur propre λ.

Définition 3.5. *Soit X un espase de Banach, et soit $C \subseteq X$ un ensemble non vide.*

(a) Un vecteur $h \in X$ est dit tangent à l'ensemble C au point $x_0 \in \overline{C}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $r : [0, \varepsilon] \to X$ tell que

$$x_0 + \lambda h + r(\lambda) \in C \quad \forall \lambda \in [0, \varepsilon], \qquad \frac{\|r(\lambda)\|}{\lambda} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \to 0^+.$$

(b) L'ensemble de tous les vecteurs $h \in X$ qui sont tangente à l'ensemble C au point $x_0 \in \overline{C}$ formé un cône fermé (qui est non vide parce qu'il contient l'origin) noté par $T_C(x_0)$.

Si $T_C(x_0)$ est un sous espace, alors il dit espace tangente à l'ensemble C au point $x_0 \in \overline{C}$.

Définition 3.6. *Soit X un espace de Banach et soit Y un sous espace fermé de X.*

On dit que le sous espace V est un supplémentaire topologique de Y si

1. *V fermé.*
2. *$Y \cap V = \{0\}$ et $Y + V = X$.*

Dans ce cas on écrit $X = Y \oplus V$.

Remarque 3.9. *Un sous espace fermé Y de X admet un supplémentaire topologique si et seulement s'il existe un projection orthogonale $P_Y \in \mathscr{L}(X)$ sur Y tel que : $P_Y |_Y = id_Y$.*

* *Si Y est de dimension finie alors il admet un supplémentaire topologique. De même, si Y est de codimention finie (i.e ; $dim(X/Y) < +\infty$) alors Y peut être un supplémentaire topologique.*

* *Dans un espace de Hilbert tous les sous espaces admits un supplémentaire topologique. (Considérent le supplémentaire topologique de Y).*
* *Dans un espace de Banach non isomorphe à un espace de Hilbert possède des sous espace fermé sans supplémentaire topologique.*

Soit X, Y deux espaces de Banach, et soit $f : X \to Y$ une fonction. On va considérer l'ensemble :

$$C = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Le théorème suivant produire un caractérésation de l'espace tangente $T_C(x_0)$, $x_0 \in C$, le resultat est connu sous le nom du *Théorème de Ljusternik.*

Théorème 3.5. *Si X, Y deux espaces de Banach, $U \subseteq X$ un ensemble non vide, $f : U \to Y$ une fonction continûement Fréchet-différentiable, $C = \{x \in U : f(x) = 0\}$ et $x_0 \in C$ un point régulier de f tell que $N(f'(x_0)) = \ker f'(x_0)$ est un supplémentaire topologique dans X, alors*

$$T_C(x_0) = N(f'(x_0)).$$

Preuve. Soit $V = N(f'(x_0))$ un sous espace fermé de X. Par hypothèse V admet un supplémentaire topologique $W \subseteq X$, et alors il existe $P_V, P_W \in \mathscr{L}(X)$ deux projection sur V et W tell que

$$V = P_V(X) = N(P_W), \qquad W = P_W(X) = N(P_V).$$

$P_V^2 = P_V, P_W^2 = P_W$.(i.e ; P_V, P_W sont des opérateurs de projections linéaires)
et $P_V + P_W = id_X$ (i.e ; $X = V \oplus W$),
comme $U \subseteq X$ un ensemble ouvert, alors on peut trouver $r > 0$ tell que

$$x_0 + B_r(0) + B_r(0) \subseteq U,$$

avec $B_r(0) = \{x \in X : \|x\|_X < r\}$.
Considérons la fonction $\varphi : (V \cap B_r(0)) \times (W \cap B_r(0)) \to Y$ définie par

$$\varphi(v, w) = f(x_0 + v + w) \text{ pour tout } v \in V \cap B_r(0), w \in W \cap B_r(0),$$

la fonction prende les propriétés suivants

$$\varphi(0,0) = f(x_0) = 0, \tag{3.2.1}$$

$$\varphi \in C^1(V \times W, Y), \quad \text{avec } \varphi_1'(0,0) = f'(x_0) \mid_V = 0$$

$$\text{et} \quad \varphi_2'(0,0) = f'(x_0) \mid_W \in \mathscr{L}(W,Y). \tag{3.2.2}$$

Comme $\varphi_2'(0,0) \in \mathscr{L}(W,Y)$ est bijectif, alors d'aprés le théorème d'isomorphisme de Banach on vu que

$\varphi_2'(0,0)^{-1} \in \mathscr{L}(Y,W)$. Cette propriété permet d'utiliser le théorème des fonctions implicites, qui est donne un $\delta \in]0,r[$ et une fonction continûement Fréchet différentiable $g : V \cap B_\delta(0) \to W$ tell que :

$$\varphi(v, g(v)) = 0 \qquad \text{pour tout } v \in V \cap B_\delta(0), \tag{3.2.3}$$

$$\text{et} \quad g(0) = 0, \; g'(0) = \varphi_2'(0,0)^{-1}\varphi_1'(0,0). \tag{3.2.4}$$

D'aprés (3.2.2) et (3.2.4), on a $g'(0) = 0$, alors

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|g(v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0. \tag{3.2.5}$$

Considérons la fonction $\xi : x_0 + V \cap B_\delta(0) \to X$ définie par $\xi(x_0 + v) = x_0 + v + g(v)$.

On a ξ est continue, alors d'aprés (3.2.3)

$$0 = \varphi(v, g(v)) = f(x_0 + v + g(v)).$$

Donc ξ est à valeurs dans C. On a $v, g(v)$ sont dans les complémentaires des sous espaces de X. Donc ξ est injectif et alors on peut considérait sa inverse dans

$D = \{x_0 + v + g(v) : v \in V \cap B_\delta(0)\} \subseteq C$, alors

$$\xi^{-1}(x_0 + v + g(v)) = x_0 + v = x_0 + P_V(v + g(v)),$$

donc ξ^{-1} est continue.

Par conséquent, ξ est un homéomorphisme de $V' = x_0 + V \cap B_\delta(0)$ sur $D \subseteq C$, et par (3.2.5), on a

$$T_C(x_0) = N(f'(x_0)).$$

$\square$

Remarque 3.10. *Si pour tout $x_0 \in C$ sont des points réguliers et $N(f'(x_0))$ admet un supplémentaire topologique, alors $C = \{x \in X : f(x) = 0\}$ est C^1-collecteur. Si de plus $f \in C^r(U, Y)$ alors C est un C^r-collecteurs. Notons que l'hypothèse assez technique que $N(f'(x_0))$ admet un supplimentaire topologique est automatiquement satisfait les trois cas suivants*

(a) Y est de dimension finie.

(b) $X = H$ un espase de Hilbert.

(c) Pour tout $x \in U$, $f'(X) \in \mathscr{L}(X, Y)$ est un opérateur de Fredholm.

Corollaire 3.7. *Si X, Y, Z sont des espaces de Banach, $U \subseteq X$ est un ouvert non vide, $f \in C^1(U, Y), C = \{x \in U : f(x) = 0\}, x_0 \in C$ est un point régulière de f tell que $N(f'(x_0))$ admet un supplémentaire topologique, et soit $\varphi : U \to Z$ une fonction Fréchet différentiable au point x_0, alors il existe un voisinage U_0 de l'origine dans $T_C(x_0)$, et un autre voisinage D_0 de x_0 dans C, et un homéomorphisme continûment Fréchet différentiable g de U_0 dans D_0 tel que*

$$\varphi(g(u)) = \varphi(x_0) + \varphi(X_0)u + o(\|u\|_X), \ \textit{avec} \ \frac{o(\|u\|_X)}{\|u\|_X} \to 0 \ \textit{quand} \ \|x\|_X \to 0.$$

En utilisant le théorème 3.5, nous pouvons produire les conditions nécessaires de l'existence des solutions pour un problème de minimisation contraint. Ce théorème est le premier résultat établissant la méthode bien connue des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3.6. *Si X, Y sont des espaces de Banach, $U \subseteq X$ un ensemble ouvert non vide, $f \in C^1(U, Y)$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable, $C = \{x \in U : f(x) = 0\}$, $x_0 \in C$ est un point régulière de f tell que $N(f'(x_0))$ admet un supplémentaire topologique, et x_0 est un minimum local de φ sur l'ensemble de contraintes C, alors il existe $y_0^* \in Y^*$ tel que $\varphi'(x_0) = y_0^* \circ f'(x_0)$.*

Preuve. posons $V = N(F'(x_0))$ et W un supplémentaire topologique (existe par hypothèse) comme $x_0 \in C$ un point régulière de f, alors $K = f'(x_0) \mid_W \in \mathscr{L}(W, Y)$ est un isomorphisme (i.e ; $K^{-1} \in \mathscr{L}(Y, W)$, d'aprés le théorème d'isomorphisme de Banach) d'aprés le théorème 3.5 on peut trouver un voisinage D_0 de x_0 dans C tel que pour tout $x_0 \in D_0$ et $u \in V \cap B_\delta(0)$, on a

$$x = x_0 + u + g(u), \text{ avec } \quad \frac{\|g(u)\|_X}{\|u\|_X} \to 0 \text{ quand } u \to 0 \text{ dans } X.$$

Comme x_0 est un minimum local de φ dans C, alors il existe $\delta_1 \in]0, \delta[$ tel que

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x_0 + u + g(u)), \qquad \text{pour tout } u \in V \cap B_\delta(0),$$

$$\text{alors} \quad 0 \leq \ \langle \varphi'(x_0), u + g(u) \rangle_X + o(\|u + g(u)\|_X), \text{ pour tout } u \in V \cap B_{\delta_1}(0),$$

donc $\langle \varphi'(x_0), u \rangle_X = 0$ pour tout $u \in V \cap B_{\delta_1}(0)$. Alors

$$V \subseteq N(\varphi'(x_0)) = \ker \varphi'(x_0). \tag{3.2.6}$$

Soit $P_W \in \mathscr{L}(X)$ une projection canonique sur W, le supplémentaire topologique de V. De (3.2.6) en définie $\hat{\varphi}'(x_0) \in W^*$ par

$$\langle \hat{\varphi}'(x_0), P_W \rangle_W = \langle \varphi'(x_0), x \rangle_X, \quad \text{pour tout } x \in X$$

alors $y_0^* = \hat{\varphi}'(x_0) \circ K^{-1} \in Y^*$.

Si $P_W \in \mathscr{L}(X)$ un projection canonique de X dans V, alors pour tout $x \in X$,

$x = P_V x + P_W x$ et alors

$$\begin{aligned} \langle y_0^* \circ f'(x_0), x \rangle_X &= \langle y_0^* \circ f'(x_0), P_W x \rangle_X \\ &= \langle y_0^* \circ K, P_W x \rangle_X = \langle \hat{\varphi}'(x_0), P_W x \rangle_X \\ &= \langle \varphi'(x_0), x \rangle_X, \end{aligned}$$

donc $y_0^* \circ f'(x_0) = \varphi'(x_0)$ dans X^*. □

Remarque 3.11. *D'aprés le théorème 3.6, $x_0 \in C$ est un point critique de la fonction $L(x) = \varphi(x) - (y_0^* \circ f)(x)$, connu sous le nom de la fonction de Lagrange du problème de minimisation contrainte $\inf_C \varphi$, et l'élément $y^* \in Y^*$ est le miltiplicateur de Lagrange.*

Corollaire 3.8. *Si $U \in \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert non vide, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^N)$, $C = \{x \in U : f(x) = 0\}$, $x_0 \in C$ un point réguliére de f et il est un minimum local de φ dans C, alors il existe $\hat{\lambda}_k = (\lambda)_{k=1}^m \in \mathbb{R}^m$ tell que*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \ \forall i = 1, \dots, N.$$

Exemple 3.3. *Soit $X = H$ un espace de Hilbert, $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, on définie les deux fonctions suivants : $f : H \to \mathbb{R}$ et $g : H \to \mathbb{R}_+$ définie par $x \mapsto f(x) = \langle Ax, x\rangle_H$ et $x \mapsto g(x) = \|x\|_H^2 - 1$ respectivement. Supposons que $x_0 \in H$, $\|x_0\|_H = 1$ un minimum de f dans $\partial B(0) = \{x \in H : g(x) = 0\}$. D'aprés le théorème 3.6, avec $Y = \mathbb{R}$ il existe λ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(x_0) = \lambda g'(x_0)$, alors $2A(x_0) = 2\lambda x_0$, donc $A(x_0) = \lambda x_0$.*
Si $x_0 \in H$ est un vecteur propre de A associer à la valeur propre λ, cette exemple exposé comment on va preuvé l'existence du valeurs propres des opérateur linéaire bornée auto-adjoint dans un espace de Hilbert.

Maintenant, nous voulons améliorer le théorème 3.6 en affaiblissant les hypothèses sur la fonction de contrainte f. Pour ce faire, nous avons besoin de la généralisation suivante du *Théorème de Ljusternik* (voir le théorème 3.5).

Théorème 3.7. *Si X, Y deux espaces de Banach et si $U \subseteq X$ un ensemble ouvert non vide et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable, $C = \{x \in U : f(x) = 0\}$, $x_0 \in C$ un point régulière de f (i.e ; $f'(x_0)(X) = Y$), alors $T_C(x_0) = N(f'(x_0))$.*

Remarque 3.12. *Notons que, par rapport au théorème 3.5, nous avons laissé tomber la propriété de fractionnement pour $\mathcal{N}(f'(x_0))$. Nous avons également besoin du résultat général suivant de la théorie de l'opérateur, qui souligne l'idée de la méthode du multiplicateur de Lagrange.*

Proposition 3.7. *Si X, Y deux espaces de Banach $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, $x_0^* \in X^*$, $R(A)$ fermé et $N(A) \subseteq N(x_0^*)$, alors il existe $y_0^* \in Y^*$ telle que $x_0^* + y_0^* \circ A = 0$.*
De plus, si $A(X) = Y$ alors Y_0^* est unique.

Preuve. On a $R(A^*) = N(A)^{\perp} = \{x_0^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle_X = 0, \text{ pour tout } x \in N(A)\}$. par hypothèse $x_0^* \in N(A)^{\perp}$, alors $x_0^* = -A^* y_0^*$, pour tout $y_0^* \in Y^*$. Par conséquent

$$x_0^* + y_0^* \circ A = 0 \tag{3.2.7}$$

Si $R(A) = Y$, alors
$N(A^*) = R(A)^{\perp} = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y\rangle = 0, \forall y \in R(A)\} = \{0\}$. Et donc, A^* est injectif et la relation (3.2.7) donné que y_0^* est unique et déterminer par x_0^*. □

Corollaire 3.9. *Si X, Y deux espaces de Banach, et si $A \in \mathscr{L}(X,Y)$, $x_0^* \in X^*$, $R(A) \neq Y$ fermé, alors il existe $y_0^* \in Y^*$, $y_0^* \neq 0$ telle que $y_0^* \circ A = 0$.*

Preuve. Posons $y \in Y$ tell que $y \notin R(A)$, alors on peut trouver $y_0^* \in Y^*$: $\|y_0^*\|_{Y^*} = 1$, telle que

$$\langle y_0^*, y\rangle_y = 0 \quad \text{et } \langle y_0^*, u\rangle_Y = 0, \quad \text{pour tout } u \in R(A).$$

Par conséquant, $y_0^* \neq 0$ et $y_0^* \circ A = 0$. □

Nous avons prouver la généralisation du théorème 3.6.

Théorème 3.8. *Si X, Y deux espaces de Banach, $U \subseteq X$ un ensemble ouvert non vides, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable, $f \in C^1(U,Y)$, $C = \{x \in U : f(x) = 0\}$, $x_0 \in C$, $R(f'(x_0))$ fermé, et $x_0 \in C$ un minimum local de φ dans C, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0^* \in Y^*$: $y_0^* \neq 0$ telle que*

$$\lambda_0 \varphi'(x_0) = y_0^* \circ f'(x_0). \tag{3.2.8}$$

Preuve. Dans le cas dégénérer $R(f'(x_0)) \neq Y$

Si $\lambda_0 = 0$, la relation (3.2.8) est satisfait d'aprés le corollaire 3.9.

Si $R(f'(x_0)) = Y$, on peut montrer que $N(f'(x_0))$ admet un supplémentaire topologique, d'aprés le théorème 3.6, si $\lambda_0 = 0$, la relation (3.2.8) est valide.

Si on ne peut pas un fractionnement de $N(f'(x_0))$, alors la suit resultat est le même que dans la prouve du théorème 3.6 utilisant cette fois le théorème 3.7. □

Le théorème 3.6 et 3.8 indique qu'il existe une relation entre les multiplicateurs de Lagrange et les points critique contrainte de la fonction f.

Définition 3.7. *Soit X un espace de Banach, $U \subseteq X$ un ensemble ouvert non vide, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable, $C \subseteq X$ un ensemble fermé non vide et $x_0 \in C$. On dit que x_0 est un point critique de f sous le contrainte C si pour tout courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ tell que $\gamma(t) \in C$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0)$ existe, on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) \mid_{t=0} = 0.$$

Remarque 3.13. *Si $x_0 \in intC$, alors x_0 est le point critique usual de f (connu sous le nom du point critique libre de f). Un point critique n'est pas un extremum local de f (i.e., n'est pas un minimum local ou maximum local de f), appelée sous le nom du point selle. Alors $x_0 \in C$ un point selle de f sous le contrainte C, si pour tout $u \subseteq \mathcal{N}(x_0)$, il existe $y, v \in C \cap U$ tell que*

$$f(y) < f(x_0) < f(v).$$

Le théorème suivant établit la relation entre les points critiques contraints et les multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 3.9. *Si X, Y deux espaces de Banach, $U \subseteq X$ est un ouvert non vide, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction Fréchet différentiable, $f \in C^1(U, Y)$, $C = \{x \in X : f(x) = 0\}$, et $x_0 \in C$ est un pint régulière de f tell que $N(\varphi'(x_0))$ admet un supplémentaire topologique, alors x_0 est un point critique de f sous le contrainte C si et seulement s'il existe $y_0^* \in Y^*$ telle que*

$$\varphi'(x_0) = y_0^* \circ f'(x_0).$$

Preuve.

$\Rightarrow$) D'aprés la définition 3.7 on a $\langle \varphi'(x_0), h \rangle_X = 0$, pour tout $h \in N(f'(x_0))$, mais d'aprés le théorème 3.6 on a $N(f'(x_0)) = T_C(x_0)$, et de la proposition 3.7 on peut trouver $y_0^* \in Y^*$ telle que

$$\varphi'(x_0) = y_0^* \circ f'(x_0).$$

$\Leftarrow$) Posons $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ un courbe définie dans la définition 3.7, alors $f(\gamma(t)) = 0$, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\varphi'(x_0)\gamma'(0) = 0$. Il résulte que $\langle \varphi'(x_0), \gamma'(0) \rangle_X = 0$, et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\gamma(t)) \mid_{t=0} = 0 \qquad \text{(par la chaîne règle)},$$

alors $x_0 \in C$ est un point critique de f sous le contriante C. $\square$

Nous concluons cette section avec le théorème dite *Dubovickii-Milyutin*, qui est conclusif pour le développement du formalisme de *Dubovickii-Milyutin* pour l'analyse des problèmes d'optimisation contraints.

Théorème 3.10. *Si X est un espace de Banach, $\{K_m\}_{m+1}^{n+1}$ sont des cônes convexes non vides dans X, et $\{K_m\}_{m+1}^{n}$ sont des ouverts, alors $\bigcap_{m=1}^{n+1} = \emptyset$ si et seulemet s'il existe $x_m^* \in K_m = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle_X \geq 0, \text{ pour tout } x \in K_m\}$, n'est pas tout des zéros telle que $\sum_{m=1}^{n+1} x_m^* = 0$.*

3.3 Points selle et dualité

Rappeler qu'un point selle est un point critique d'une fonction qui n'est pas un maximum local ni un minimum local (voir la Remarque 3.13). Dans cette section nous définissons un point selle d'une fonction sur un espace de produit $C \times D$. Ce nouveau concept que nous présentons et indépendant de la notion présentée dans la section précédente et c'est global dans la nature.

Définition 3.8. *Soit C, D deux ensembles non vide, et soit $f : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que (x_0, y_0) est un point selle de f si pour tout point $(x, y) \in C \times D$, on a*

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0).$$

Remarque 3.14. *La terminologie de la définition 3.8 est justifiée par mental la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (parabole hyperbolique). Pour cette fonction, $(0, 0)$ est un point selle.*

Nous avons toujours

$$\sup_{y\in D} \inf_{x\in C} f(x, y) \leq \inf_{x\in C} \sup_{y\in D} f(x, y). \tag{3.3.1}$$

Si l'égalité (3.3.1) vérifiée alors la valeur commune est dit valeur selle de f dans $C \times D$.

Définition 3.9. *Soit C, D deux ensembles non vide et soit $f : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f satisfait l'égalié minimax sur $C \times D$, si les condition suivants sont vérifiée*

(a) f admet un valeur selle (i.e.; l'égalité (3.3.1)).

(b) Il existe $x_0 \in C$ tell que $\sup_{y\in D} f(x_0, y) = \inf_{x\in C} \sup_{y\in D} f(x, y)$.

(c) Il existe $y_0 \in D$ tell que $\inf_{x\in C} f(x, y_0) = \sup_{y\in D} \inf_{x\in C} f(x, y)$.

Remarque 3.15. *Dans ce cas on peut déplacer les opérations l'*$\inf$ *et le* $\sup$ *par le* $\min$ *et le* $\max$ *respectivement, et on peut ecrit*

$$\max_{y \in D} \min_{x \in C} f(x, y) = \min_{x \in C} \max_{y \in D} f(x, y)$$

Ceci la raison de la terminologie de légalité minimax.

La propopsition suivant est une conséquence direct de les définitions 3.8 et 3.9.

Proposition 3.8. *Si C, D deux ensembles non vide et $f : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction, alors f admet un point selle dans $C \times D$ si, et seulement si f satifaits l'égalité minimax dans $C \times D$.*

Définition 3.10. *Soit X un espace vectoriel et $B \subseteq X$ un ensemble non vide. La multiapplication $F : B \to 2^X \backslash \{\emptyset\}$ est dit de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (au simplement de KKM), si pour tout ensemble finie $\{x_k\}_{k=1}^m$ on a*

$$conv\{x_k\}_{k=1}^m \subseteq \bigcup_{k=1}^m F(x_k).$$

La propriété de base de la multiapplication de KKM est la suivant.

Théorème 3.11. *Si X un espace vectoriel topologique de Hausdorff, $B \subseteq X$ un ensemble non vide, et $F : B \to 2^X \backslash \{\phi\}$ est une multiapplication de KKM des valeurs fermé, alors la famille des ensembles $\{F(x_k)\}_{x \in B}$ est d'intersection finie des propriétés qui est l'intersection de chaque sous famille finie est non vide.*

Preuve. Supposons le contraire, i.e., $\bigcap\limits_{k=1}^m F(x_k) = \emptyset$.
posons $C = conv\{x_k\}_{k=1}^m$ et considérons la fonction $g : C \to \mathbb{R}_+$ définie par
$g(u) = \sum\limits_{k=1}^m d(u, F(x_k))$.
On a pour tout $u \in C,\ g(u) > 0$, alors on peut définie la fonction continue $h : C \to C$ définie par

$$h(u) = \frac{1}{g(u)} \sum_{k=1}^m d(u, F(x_k)) x_k, \tag{3.3.2}$$

d'aprés le théorème du point fixe de *Brouwer*, il existe $u_0 \in C$ tell que $h(u_0) = u_0$.
On pose $K = \{k \in \{1, \dots, m\} : d(u_0, F(x_k)) \neq 0\}$. Alors, $u_0 \notin \bigcup\limits_{k \in K} F(x_k)$,
d'autre part

$$u_0 = h(u_0) \in conv\{x_k\}_{k \in K} \subseteq \bigcup_{k \in K} F(x_k),$$

et comme F est une multiapplication de KKM et d'aprés (3.3.2) en trouve une contradiction.

$\square$

Remarque 3.16. *Les hypothèses de ce théorème peuvent être affaiblies dans les cas suivants. Nous pouvons supprimer l'exigence tell que F a des valeurs fermé et supposer que Chaque $F(x)$ est fini fermé. A savoir, si V est un plan de dimension finie dans X, alors $V \cap F(x)$ est fermé dans la topologie euclidienne de V. Évidemment, dans ce cas, nous avons besoin de supposons seulement que X est un espace vectoriel. Les ensembles finiment fermés définissent une topologie sur X, connue sous le nom de topologie finie. C'est plus fort que n'importe quelle topologie linéaire de Hausdorff sur X.*

Corollaire 3.10. *Si X un espace vectoriel topologique de Hausdorff, $B \subseteq X$ un ensemble non vide, et $F : B \to 2^X \backslash \{\phi\}$ est une multiapplication de KKM des valeurs fermés tell que une de lequelle est compact, alors*

$$\bigcap_{x \in B} F(x) \neq \emptyset.$$

En utilisant ce corollaire, nous pouvons prouver le théorème de coïncidence utile suivant pour les multiapplications des ensembles valeurés.

Proposition 3.9. *Si X, Y deux espaces vectorielle topologique de Hausdorff, $C \subseteq X$ et $D \subseteq Y$ deux ensembles convexes compact non vide, et $F, G : C \to 2^D$ sont deux multiapplications tell que*

(i) $F(x)$ est un ouvert dans D et $G(x)$ un convexe non vide pour tout $x \in C$.

(ii) $G^{-1}(y) = \{x \in C : y \in G(x)\}$ est un ouvert dans C et $F^{-1}(y) = \{x \in C : y \in F(x)\}$ est convexe pour tout $y \in D$, alors on peut trouver $x_0 \in C$ tell que $F(x_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$.

Preuve. On pose $E \subseteq C \times D$ et $H : C \times D \to 2^{X \times Y}$ une multiapplication définie par

$$H(x, y) = E \cap (G^{-1}(y) \times F(x))^c.$$

de (i) et (ii), on a pour tout $(x, y) \in E$, l'ensemble $H(x, y)$ est fermé dans E, et donc il est compact, et $F^{-1}(y_0) \times G(x_0) \neq \emptyset$, alors on peut donné aussi pour chaque $(x_0, y_0) \in E$

choisisons $(x, y) \in F^{-1}(y_0) \times G(x_0)$ donc $(x_0, y_0) \in G^{-1}(y) \times F(x)$ et alors on déduire que

$$E = \bigcap_{(x,y)\in E} (G^{-1}(y) \times F(x)). \tag{3.3.3}$$

De (3.3.3) et la définition d'une multiapplication H, on aurra

$$\bigcap_{(x,y)\in E} H(x, y) = \emptyset. \tag{3.3.4}$$

D'aprés (3.3.4) H n'est pas une multiapplication de KKM. Alors de la définition 3.10, peut donnée les éléments $\{(x, y)\}_{k=1}^{m} \subseteq E$ tell que

$$conv\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{m} \not\subset \bigcup_{k=1}^{m} H(x_k, y_k),$$

alors

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x_k, y_k) \notin \bigcup_{k=1}^{m} H(x_k, y_k) \quad \text{avec} \quad \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,$$

comme $E = C \times D$ convexe on aurra $v \in E$ et alors

$v \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} H(x_k, y_k) = \bigcap_{k=1}^{m} G^{-1}(y_k) \cap F(x_k)$. Donc

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \in G^{-1}(y_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k \in F(x_k), \quad \text{pour tout} \quad k = 1 \ldots m,$$

$$\text{alors} \quad y_k \in G(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k) \text{ et } x_k \in F^{-1}(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k), \quad \text{pour tout} \quad k = 1 \ldots m,$$

$$\text{et alors} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k \in G(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \in F^{-1}(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k),$$

$$\text{donc} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k \in G(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k \in F(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k).$$

Alors si on pose $x_0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$ et $y_0 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k$, on aurra $y_0 \in F(x_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$ □

En Utilisant cette proposition en peut montrer la base de le théorème minimax. Premièrement on va présenter un définition.

Définition 3.11. *Soit V un espace vectoriel, $B \subseteq V$ un ensemble convexe non vide et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est quasi-convexe (resp.,quasi-concave) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensmble $\{x \in B, f(x) \leq \lambda\}$ (resp.,l'ensemble $\{x \in B : f(x) \geq \lambda\}$) est convexe dans B.*

Remarque 3.17. *Une fonction convexe (resp.,concave) est quasi-convexe (resp., quasi-concave). La réciproque n'est pas vrai en générale. Considérons par exemple la fonction* $x \mapsto \ln(|x|+1)$ *qui est quasi-convexe mais n'est pas convexe.*

Théorème 3.12. *Si* X, Y *deux espaces vectoriel topologique de Hausdorff,* $C \subseteq X$ *et* $D \subseteq Y$ *deux ensembles convexe, compact et non vide, et la fonction* $f : C \times D \to \mathbb{R}$ *satisfait*

(i) Pour tout $y \in D$, $x \to f(x,y)$ *est semi-continue inférieure et quasi-convexe.*

(ii) Pour tout $x \in C$, $y \to f(x,y)$ *est semi-continue supérieure et quasi-concave,*

alors f *admet un point selle dans* $C \times D$.

Preuve. D'aprés la proposition 3.8 il suffit de montrer que f satisfait l'égalité minimax dans $C \times D$, i.e.,

$$\min_{x\in C}\max_{y\in D} f(x,y) = \max_{y\in D}\min_{x\in C} f(x,y). \tag{3.3.5}$$

Comme $f(x,.)$ est semi-continue supérieure, et D compact alors d'aprés le théorème 3.1, $\max_{y\in D} f(x,y)$ existe pour tout $x \in C$. Aussi si $h_1(x) = \max_{y\in D} f(x,y)$, alors $x \to h_1(x_\alpha)$ est semi-continue inférieure.

En effet

posons $x_\alpha \to x$ dans C et supposons $h_1(x_\alpha) \leq \lambda$ pour tout $\alpha \in J$. On aurra $f(x_\alpha) \leq \lambda$ pour tout $\alpha \in J$ et tout $y \in D$. Comme $f(.,y)$ est semi-continue inférieure, on a $f(x,y) \leq \liminf_{\alpha\in J} f(x_\alpha, y) \leq \lambda$, pour tout $y \in D$, donc $h_1(x) \leq \lambda$ et d'aprés la proposition 3.1 (b) on a $h_1(.)$ est semi-continue inférieure, donc $\min_{x\in C} h_1(x) = \min_{x\in C}\max_{y\in D} f(x,y)$ existe. De même, nous montrons que $\max_{y\in D}\min_{x\in C} f(x,y)$ existe.On sait que d'aprés (3.3.1)

$$\max_{y\in D}\min_{x\in C} f(x,y) \leq \min_{x\in C}\max_{y\in D} f(x,y). \tag{3.3.6}$$

Pour montrons que l'inégalité (3.3.6) n'est pas strict. On va montrer par contradiction. Supposons que on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tell que

$$\max_{y\in D}\min_{x\in C} f(x,y) < \lambda < \min_{x\in C}\max_{y\in D} f(x,y) \tag{3.3.7}$$

Considérons les multiapplications $F, G, C \to 2^D$ définies par

$$F(x) = \{y \in D : f(x,y) < \lambda\} \text{ et } G(x) = \{y \in D : f(x,y) > \lambda\}$$

d'aprés l'hypothèse (i) pour tout $x \in C$, $F(x)$ ouvert dans D et $G(x)$ est convexe non vide (de (3.3.7)) et aussi d'aprés (ii) $G^{-1}(y) = \{x \in C : f(x,y) > \lambda\}$ est un ouvert dans C et $F^{-1}(y) = \{x \in C : f(x,y) < \lambda\}$ est un convexe.

Alors de la proposition 3.9 et considérons le point $(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \in C \times D$ tell que $\hat{y}_0 \in F(\hat{x}_0) \cap G(\hat{x}_0)$. Mais on a $\lambda < f(\hat{x}_0, \hat{y}_0) < \lambda$, contradiction.

Cela prouve que (3.3.5) est vérifiée, alors f admet un point selle. $\square$

Un autre théorème de point selle utile dans l'application suivant.

Théorème 3.13. *Si X, Y deux espaces de Banach réflexif, $C \subseteq X$ et $D \subseteq Y$ des ensembles fermés convexes et non vide, et $f : C \times D \to \mathbb{R}$ une fonction tell que*

(i) pour tout $y \in D$, $x \to f(x,y)$ est convexe et semi-continue inférieure,

(ii) pour tout $x \in C$, $y \to f(x,y)$ est concave et semi-continue supérieure,

(iii) C bornée ou il existe $\hat{y}_0 \in D$ tell que

$$f(x, \hat{y}_0) \to +\infty \qquad \textit{quand} \qquad \|x\|_X \to +\infty,$$

(iv) D bornée ou il existe $\hat{x}_0 \in C$ tell que

$$f(\hat{x}_0, y) \to -\infty \qquad \textit{quand} \qquad \|y\|_Y \to +\infty,$$

alors f admet un point selle dans $C \times D$

Preuve. Comme X et Y sont réflexif, Si $C \subseteq X$ et $D \subseteq Y$ sont bornée et w-compact, et on a les fonctions $x \to f(x,y)$ et $y \to -f(x,y)$ sont convexes, alors elles sont semi-continue inférieure. Alors dans ce cas on trouve le résultat d'aprés le théorème 3.12.

Supposons la plus petite des ensembles $C \subseteq X$ et $D \subseteq Y$ est non bornée, pour tout $n \geq 1$ on pose

$$C_n = \{x \in C : \|x\|_X \leq n\} \quad \text{et} \quad D_n = \{y \in D : \|y\|_Y \leq n\},$$

pour tout $n \geq 1$ plus grand $C_n \neq \emptyset$ et $D_n \neq \emptyset$. Alors dans le cas borné on peut trouver $(x_n, y_n) \in C_n \times D_n$ tell que

$$f(x_n, y) \leq f(x_n, y_n) \leq f(x, y_n), \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in C_n \times D_n,\ n \geq 1. \tag{3.3.8}$$

Posons $x = \hat{x}_0$ et $y = \hat{y}_0$ (l'hypothèse (iii) et (iv)). utilisant l'hypothèse (iii) et (iv), d'aprés (3.3.8) on déduire que $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$, $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq Y$. et $\{f(x_n, y_n)\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ sont tout bornées. Alors par passage à la sous suite si nécessaire, on peut supposer que

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \quad \text{dans } \; X, \; y_n \xrightarrow{w} y_0 \quad \text{dans } \; Y \; et \; f(x_n, y_n) \to \xi \in \mathbb{R},$$

on a $(x_0, y_0) \in C \times D$. Aussi de l'hypotèse (i) et (ii) on aurra

$$f(x_0, y) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n, y) \leq \xi \leq \limsup_{n\to\infty} f(x, y_n) \leq f(x, y_0),$$

pour tout $(x, y) \in C \times D$, alors $f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x,y_0)$ donc, $(x0, y_0) \in C \times D$ est un point selle de f. □

Remarque 3.18. *Les fonctions $f(x, y)$ dans le théoorème 3.12 et 3.13 sont convexe au point $x \in C$ et concave au point $y \in D$. Sont généralement appelé fonctions selle (ou fonctions convexe-concave).*

Ensuite, nous dérivons une théorie de dualité pour une optimisation convexe. Les paramètres mathématique est le suivant. On nous donne deux espaces de Banach X, Y et une fonction convexe $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. On sait que $(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$ et pour le produit de dualité que nous avons

$$\langle (x^*, y^*), (x, y)\rangle_{X\times Y} = \langle x^*, x\rangle_X + \langle y^*, y\rangle_Y,$$

pour tout $x \in X, \; x^* \in X^*, \; y \in Y, \; y^* \in Y^*$. On pense à $y \in Y$ comme un perturbation et $f(x, y)$ comme une fonction perturbée avec $f(x, 0)$ une fonctionnel original non perturbé. Ensuite, le problème principal est le suivant

$$(P) : \inf_{x\in X} f(x, 0). \tag{3.3.9}$$

Nous considérons également la fonction de valeur $m : Y \to \mathbb{R}^*$ du problème perturbé

$$m(y) = \inf_{x\in X} f(x, y). \tag{3.3.10}$$

La fonction de valeur $m(.)$ est convexe. On a d'aprés (3.3.10)

$$\begin{aligned} m^*(y^*) &= \sup_{y\in Y}[\langle y^*, y\rangle_Y - \inf_{x\in X} f(x, y) \\ &= \sup_{(x,y)\in X\times Y}[\langle 0, x\rangle_X + \langle y, y^*\rangle_Y - f(x, y)] = f^*(0, y^*). \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

alors le problème dual associe à (P) est définie par

$$(D): \sup_{y^*\in Y^*}(-f^*(0,y^*)). \tag{3.3.12}$$

Proposition 3.10. *On a toujour* $\sup(D) \leq \inf(P)$ *(la dualité faible).*

Preuve. Pour tout $x \in X$ et tout $y^* \in Y^*$, et d'aprés l'inégalité de Young-Fenchel on a

$$f(x,0) + f^*(0,y^*) \geq \langle 0,x\rangle_X + \langle y^*,0\rangle_Y = 0$$
$$\text{alors} \qquad \inf(P) \geq \sup(D).$$

□

Dans la prochaine proposition, nous fournissons des conditions pour une forte dualité à tenir (i.e., d'avoir l'égalité des problèmes principal et dual).

Proposition 3.11. *Si* $\partial m(0) \neq \emptyset$ *et* $y^* \in \partial m(0)$, *alors* y^* *est une solution de D et* $\inf(P) = \max(D)$.

Preuve. On a $\partial m(0) \neq \emptyset$, alors $m(0) = \inf(P) \in \mathbb{R}$ et pour tout $y^* \in Y^*$, $m^*(y^*) \geq -m(0) > -\infty$.
d'aprés la proposition 2.20 on a

$$\inf(P) + m^*(y^*) = m(0) + m^*(y^*) = \langle y^*,0\rangle_Y = 0,$$

alors de la proposition 3.10 et la relation (3.3.11), et (3.3.12) on a $\sup(D) = \inf(P)$. □

Afin d'analyser plus avant la situation forte de dualité, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Si* V *un espace de Banach,* $f: V \to \mathbb{R}^*$ *une fonction convexe, et s'il existe* $(v_0,\lambda_0) \in V \times \mathbb{R}$ *tell que* $f(v_0) \in \mathbb{R}$, *et* $(v_0,\lambda_0) \in intepi(f)$, *alors* $f(v) > -\infty$, *pour tout* $v \in V$.

Preuve. On pose $\mu_0 < f(v_0)$, alors $(v_0,\mu_0) \notin epi(f)$ et alors d'aprés le théorème de séparation des ensembles convexes en trouve $(v^*,t) \in V^* \times \mathbb{R}$, $(v^*,t) \neq (0,0)$ tell que

$$\langle v^*,v_0\rangle_V + t\mu_0 \leq \langle v^*,v\rangle_V + t\lambda, \text{ pour tout } (v,\lambda) \in epi(f), \tag{3.3.13}$$

comme λ peut tend vers $+\infty$, de (3.3.13) on a $t \geq 0$.

Si $t = 0$, alors

$$\langle v^*, v_0 \rangle_V \leq \langle v^*, v \rangle_V, \quad \text{pour tout} \quad v \in dom(f). \tag{3.3.14}$$

Mais de le théorème 2.3 (d) $intdom(f) \neq \emptyset$, alors d'aprés (3.3.14) on déduire que $v^* = 0$, on a une contradiction avec $(v^*, t) \neq (0, 0)$. Donc $t > 0$ et en peut supposer que $t = 1$ alors on a

$$\langle v^*, v_0 - v \rangle_V + \mu_0 \leq \lambda, \quad \text{pour tout} \quad (v, \lambda) \in epi(f),$$

$$\text{donc} \quad \langle v^*, v_0 - v \rangle_V + \mu_0 \leq f(v), \quad \text{pour tout} \quad v \in V \text{ (i.e., } f(v) > -\infty, \text{ pour tout } v \in V).$$

□

En utilisant ce résultat auxiliaire, nous pouvons avoir un théorème sur la dualité des problèmes (P) et (D).

Théorème 3.14. *S'il existe $x_0 \in X$ tell que $f(x_0, .)$ est finie et continue au point $y = 0$ et l'$\inf(P) \in \mathbb{R}$, alors*

(a) m est continue au point $y = 0$.

(b) $y^* \in \partial m(0)$ si, et suelement si $y^* \in Y^*$ est une solution de le problème dual (D).

(c) $\inf(P) = \max(D) \in \mathbb{R}$ (dualité forte).

Preuve. en peut trouver $r > 0$ et $M > 0$ tell que

$$f(x_0, y) \leq M, \quad \text{pour tout} \quad y \in \overline{B}_r(0),$$

$$\text{alors} \quad m(y) \leq M, \quad \text{pour tout} \quad y \in \overline{B}_r(0).$$

donc de le théorème 2.3 on a m est continue au point $y = 0$ et $(0, \lambda) \in intepi(m)$ pour tout $\lambda > M$. Comme $m(0) = \inf(P) \in \mathbb{R}$, d'aprés le lemme 3.1 en déduire que $m(y) > -\infty$, pour tout $y \in Y$, donc m est une fonction propre convexe et continue au point $y = 0$. En vertu au théorème 2.9 on aurra $\partial m(0) \neq \emptyset$. De la proposition 3.11, on sait que $y^* \in \partial m(0)$ est une solution de (D) et $\inf(P) = \max(P)$.

Enfin, si $y^* \in Y^*$ une solution de (D), on a

$$m^*(y^*) \leq m^*(u^*), \quad \text{pour tout} \;\; u^* \in Y^*. \tag{3.3.15}$$

Et comme m est continue au point $y = 0$, utilisons la proposition 2.18 (avec $\varphi = m$ et $f = \delta_{\{0\}}$) et l'inégalité (3.3.15) on obtient

$$m(0) = \sup_{u^* \in Y^*} [\langle u^*, 0\rangle_Y - m^*(u^*)] \leq -m^*(y^*),$$

alors $m(0) + m^*(y^*) \leq 0$ (i.e., de la proposition 2.20 $y^* \in \partial m(0)$) □

Remarque 3.19. *Dans le théorème au dessus, l'hypothèse que* $\inf(P) \in \mathbb{R}$ *est important et ne peut pas être abandonné. Pour voir cela, considérez le cas où* $X = Y = \mathbb{R}$, *on pose*

$$C(y) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq y\} \quad \textit{et} \quad f(x, y) = x + \delta_{C(y)}(x).$$

Alors pour tout $x < 0$, $f(x, .)$ *est continue au point* 0 *mais* $m \equiv -\infty$ *et alors* $m^* \equiv +\infty$.

Définition 3.12. *La fonction Lagrangienne correspondent de le dual pair de le problème* $\{(P), (D)\}$ *est la fonction* $L : X \times Y^* \to \mathbb{R}^*$ *définie par*

$$L(x, y^*) = \inf[f(x, y) - \langle y^*, y\rangle_Y : \ y \in Y], \quad \textit{pour tout} \quad (x, y^*) \in X \times Y^*.$$

Remarque 3.20. $\inf\limits_{x \in X} L(x, y) = -f^*(0, y^*)$ *et* L *est une fonction selle.*

Exemple 3.4. *Considérons la situation de la programation mathématique*

$$(P) : \ \inf_{x \in X} [f(x) \ : \ f_k(x) \leq 0, \ \textit{pour tout } k = 1, \ldots, m],$$

avec $f, f_k : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $k = 1, \ldots, m$ *sont des fonctions convexes donc* $g : X \times \mathbb{R}^m \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ *est définie par*

$$g(x, y) = f(x) + \delta_{C(y)}(x), \quad \textit{pour tout } x \in X, \ y = (y_k)_{k=1}^m \in \mathbb{R}^m,$$

avec $C(y) = \{x \in X : \ f_k(x) \leq y_k, \quad \textit{pour tout } k = 1, \ldots, m\}$. *Par conséquent*

$$L(x, y^*) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{k=1}^m f_k(x) y_k^* & \textit{si } y^* \in -\mathbb{R}_+^m \\ -\infty & \textit{si } y^* \notin -\mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

pour tout $x \in X$, $y^* = (y_k^*)_{k=1}^m \in \mathbb{R}^m$.

Proposition 3.12. *Si* $f \in \Gamma_0(X \times Y)$, *alors* $f(x, 0) = \sup\limits_{y^* \in Y^*} L(x, y^*)$.

Preuve. D'aprés le théorème 2.7, on a

$$f(x,0) = \sup[\langle y^*, 0\rangle_Y - (f(x,.))^*(y^*) : y^* \in Y^*] = \sup_{y^* \in Y^*} L(x, y^*).$$

□

Nous peuvons caractériser la situation de dualité forte par les points selle de Lagrange.

Théorème 3.15. *Si $f \in \Gamma_0(X \times Y)$ et L la fonction Lagrangienne correspondante, alors les assertions suivants sont équivalentes :*

a) $(x_0, y_0^*) \in X \times Y^*$ *est un point selle de* L.

b) x_0 *est un solution de* (P), y_0^* *est un solution de* (D), *et* $\min(P) = \max(D)$.

c) $f(x_0, 0) = -f^*(0, y_0^*)$.

Preuve.

a)⇒ b), c) d'aprés la remarque 3.20, nous avons

$$L(x_0, y_0^*) = \inf_{x \in X} L(x, y_0^*) = -f^*(0, y_0^*), \tag{3.3.16}$$

et de la proposition 3.12 on a

$$L(x_0, y_0^*) = \sup_{y^* \in Y^*} L(x_0, y^*) = f(x_0, 0). \tag{3.3.17}$$

Donc, de (3.3.16) et (3.3.17), nous avons

$$\inf(P) \leq f(x_0, 0) = -f^*(0, y_0^*) \leq \inf(D). \tag{3.3.18}$$

Combinant (3.3.18) avec la proposition 3.10, nous concluons que

$$\min(P) = \max(D) = f(x_0, 0) = -f^*(0, y_0^*).$$

b)⇒ a),c) Nous avons

$$f(x_0, 0) = \min(P), -f^*(0, y_0^*) = \max(D), \quad \text{et } f(x_0, 0) = -f^*(0, y_0^*). \tag{3.3.19}$$

De la proposition 3.12 on a

$$f(x_0, 0) = \sup_{y^* \in Y^*} L(x_0, y^*) \geq L(x_0, y^*). \tag{3.3.20}$$

Et d'aprés la remarque 3.20, on a

$$-f(0,y_0^*) = \inf_{x\in X} L(x,y_0^*) \leq L(x,y_0^*). \tag{3.3.21}$$

De (3.3.19) et (3.3.21) il s'ensuit que $(x_0,y_0^*) \in X\times Y^*$ est un point selle de Lagrange.

c)$\Rightarrow$ a),b) d'aprés la proposition 3.10 nous avons

$$\inf(P) \leq f(x_0,0) = -f^*(0,y_0^*) \leq \sup(D),$$

alors

$$\inf(P) = \sup(D) = f(x_0,0) = -f^*(0,y_0^*).$$

□

Ensuite, nous considérons un cas spécial important de la théorie de dualité générale ci-dessus.

Soit donc $\varphi \in \Gamma_0(X)$, $g \in \Gamma_0(X)$, et $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Le problème principal est

$$(P') : \inf[\varphi(x) + g(A(x)) \ : \ x \in X]. \tag{3.3.22}$$

La fonctionnelle convexe perturbée $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est donnée par

$$f(x,y) = \varphi(x) + g(A(x)+y), \quad \text{pour tout } \ (x,y) \in X\times Y,$$

alors le problème dual est

$$(D') : \sup[-\varphi^*(A^*(y^*)) - g^*(-y^*) : y^* \in Y^*]. \tag{3.3.23}$$

Aussi la fonction Lagrangeinne pour le couple du problème $\{(P'),(D')\}$ (voir (3.3.22) et (3.3.23)) est donnée par

$$L(x,y^*) = \begin{cases} \varphi(x) + \langle y^*, A(x)\rangle_Y - g^*(y^*) & \text{si } \varphi(x) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \varphi(x) = +\infty \end{cases}. \tag{3.3.24}$$

En utlisant le théorè me 3.15, on obtenons le suivant.

Proposition 3.13. *La couple* $(x_0,y_0^*) \in X\times Y^*$ *est un point selle de la fonction Lagrangienne* L *définié par* (3.3.24) *si, et seulement si*

$$y_0^* \in \partial g(A(x_0)) \quad et \quad -A^*(y_0^*) \in \partial\varphi(x_0).$$

On termine cette section avec une simple application de la théorie de dualité sur un calcule du problème de variation.

Exemple 3.5. *Soit* $X = W_0^{1,2}(0,1)$, $Y = L^2(0,1)$, $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *définie par* $A(x) = x'$, *et* $f \in \Gamma_0(X)$, $g \in \Gamma_0(X)$ *définie par*

$$f(x) = \langle x_0^*, x\rangle_X = -\int_0^1 h(t)x(t)\mathrm{d}t = -(h,x)_{L^2(0,1)}, \ \ \textit{pour tout}\ h \in L^2(0,1),$$

et $g(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2_{L^2(0,1)}$.
En identifie $L^2(0,1)$ *avec sont dual (donc* $X \subseteq Y \subseteq X^* = W^{-1,2}(0,1)$*), on aurra*

$$\varphi^*(x^*) = \delta_{\{x_0^*\}}(x^*), \ \textit{pour tout}\ x^* \in X^* \ \textit{et}\ g^*(y^*) = \frac{1}{2}\|y^*\|^2_{L^2(0,1)}.$$

Notons que $-A^*(y^*) = x_0^*$ *si, et seulement si*

$$-\int_0^1 y^*(t)x'(t)dt = -\int_0^1 h(t)x(t)dt, \ \textit{pour tout}\ x \in W_0^{1,2}(0,1),$$

$$\textit{alors} \quad y^* \in W^{1,2}(0,1) \ \textit{et}\ (y^*)' = -h.$$

Alors le problème principale est

$$(P)'' : \inf\left[\frac{1}{2}\|x'\|^2_{L^2(0,1)} - (h,x)_{L^2(0,1)} : x \in W_0^{1,2}(0,1)\right],$$

et le problème dual est

$$(D)'' : \sup\left[-\frac{1}{2}\|y'\|_{L^2(0,1)} : y^* \in W_0^{1,2}(0,1), (y^*)' = -h\right],$$

les deux problèmes admet les solutions $x_0 \in W_0^{1,2} \cap W^{2,2}(0,1)$ *et* $y_0^* \in W^{1,2}(0,1)$ *(voir le corollaire 3.3), et ils sont unique dû de la convexité strict des fonctionnelles. De plus, on a*

$$-x_0''(t) = h(t) \ \textit{p.p., dans}\ ]0,1[, \ \textit{et}\ x_0(0) = x_0(1) = 0 \ \textit{et}\ y_0^* = x_0^*.$$

3.4 Contrôle optimal

Dans cette section nous étudions quelques aspects de base de théorie de contrôle optimal. Spécifiquement nous concentrons notre attention sur la théorie d'existence et les méthodes de relaxation.

Pour éviter les complications techniques qui exigent le développement d'un contexte substantielle, nous nous limitons au systèmes dimensionnels finie (c'est-à-dire, des systèmes conduits par des équations différentielles ordinaires, aussi connus comme des systèmes de paramètre regroupés).

Donc l'arrangement mathématique est le suivant. L'espace d'état est $\mathbb{R}$ et l'espace de contrôle est un espace polonais Y. Rappelons-nous qu'un espace polonais est un espace topologique de Hausdorff qui est séparable et peut être métrique au moyen d'un espace métrique complet. L'horizon de temps est $T = [0, b]$. Soit $G(T, Y) = \{u : T \to Y, u \text{ est mesurable}\}$. N'importe quel élément de $G(T, Y)$ est appelé un contrôle. Aussi $f : T \times \mathbb{R}^N \times Y \to \mathbb{R}^N$ est un domaine vectoriel et le système dinamique contrôlé que nous considérons et le suivant :

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p sur } \ T, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \tag{3.4.1}$$

Quelque solution $x(.)$ de (3.4.1) est une trajectoire de l'état du système de contrôle correspandant à l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et le contrôle $u(.)$. Notez que nous n'assumons pas l'unicité ou l'existance de solution pour (3.4.1), ainsi pour n'importe quel contrôle $u(.)$ et n'importe quel état initial x_0, nous pouvons avoir plus qu'un ou aucune réponse pour le système. De plus, en général nous avons quelques contraintes du contrôle décrit par une multiapplication (la fonction estimée d'ensemble) $U : T \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$. Pour ces raisons, la définition suivant est nécéssaire.

Définition 3.13. *Une couple* $(x(.), u(.)) \in W^{1,1}(]0, b[, \mathbb{R}^N) \times \Gamma(T, Y)$ *est dit admissible si* (3.4.1) *est satisfait et* $u(t) \in U(t)$ *p.p. sur* T. *Dans ce qui suit on note par* α_{ad} *l'ensemble de toutes les couple de contrôle de l'état admissibles. On donne aussi un intégral fonctionnel*

$$J(x, u) = \int_0^b L(t, x(t), u(t))\mathrm{d}t \ \ \textit{pour tout } (x, u) \in \alpha_{ad}.$$

Alors le problème de contrôle optimal peut être exposé comme suit :

(P) *: Trouver* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \alpha_{ad}$ *tel que*

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf[J(x, u) : (x, u) \in \alpha_{ad}] = m \tag{3.4.2}$$

Définition 3.14. *Si nous pouvons trouver $(\hat{x}, \hat{u}) \in \alpha_{ad}$ tel que (3.4.2) est satisfait, alors on dit que $(\hat{x}, \hat{u})$ est un couple admissible optimal. La fonction $\hat{x} \in W^{1,1}(]a, b[, \mathbb{R}^N)$ peut être dit une trajectoire optimal, et la fonction $\hat{u} \in G(T, Y)$ peut être dit un contrôle optimal.*

Les hypothèse sur les données du problème de contrôle optimal $(\mathbf{P})$ *sont les suivantes :*

$\mathbf{H(f)}$ $f : T \times \mathbb{R}^N \times Y \to \mathbb{R}^N$ *est une fonction tel que*

(i) Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times Y$, $t \to f(t, x, u)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $t \in T, (x, u) \to f(t, x, u)$ est continue.

(iii) pour presque tout $t \in T$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $u \in U(t)$, nous avons :

$$\|f(t, x, u)\| \leq \alpha(t) + c(t)\|x\|, \text{ avec } \alpha, c \in L^1(T).$$

$\mathbf{H(U)}$:$U : T \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ *est une multiapplication à des valeurs compact tel que :*

$$Gr(U) = \{(t, u) \in T \times Y : u \in U(t)\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(Y),$$

avec $\mathcal{B}(T)$ (resp., $\mathcal{B}(Y)$) étant le σ-tribu borelienne de T (resp., de Y).

Remarque 3.21. $\mathbf{H(L)}$ *: $L : T \times \mathbb{R}^N \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est un intégral tel que*

(i) $(t, x, u) \to L(t, x, u)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $t \in T$, $(x, u) \to L(t, x, u)$ est semi-continu inférieure.

(iii) Pour presque tout $t \in T$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $u \in U(t)$

$$\alpha_0(t) - c_0\|x\| \leq L(t, x, u), \text{ avec } \alpha_0 \in L^1(T), c_0 > 0.$$

Dans la théorie d'existaence l'hypothèse de convexité suivant joue un rôle central.

$\mathbf{H_c}$ *: pour tout $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^N$ l'ensemble*

$Q(t, x) = \{(v, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : v = f(t, x, u), u \in U(t), L(t, x, u) \leq \lambda\}$ *est convexe.*

Remarque 3.22. *Les hypothèses $\mathbf{H(f)}$, $\mathbf{H(U)}$ et $\mathbf{H(L)}$ impliquent que pour tout $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^N$,$Q(t, x)$ est aussi fermé. L'hypothèse $\mathbf{H_c}$ signifie que le problème de contrôle optimal a la structure convexe. Notons que si la variable de contrôle est linéaire dans le système dynamique (c'est-à-dire, $f(t, x, u) = f_1(t, x) + f_2(t, x)u$), $Y = \mathbb{R}^N$, la multifonction de contrainte de contrôle à aussi des valeurs convexes, de plus l'intégral $L(t, x, u)$ est convexe* *pour tout $u \in \mathbb{R}^N$, alors l'hypothèse* $\mathbf{H_c}$ *est satisfaite. Notons que cette hypothèse implique que pour tout $t \in T$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, $F(t,x) = f(t,x,U(t))$ est convexe.*

Dans ce qui suit on pose $\alpha^1_{ad} \subseteq W^{1,1}(]0,b[,\mathbb{R}^N)$ l'ensemble admissible des trajectoires. Nous commençons par démontrer le nonvide et la compacité dans $C(T,\mathbb{R}^N)$ de α^1_{ad}. Pour déterminer les proporiétés de α^1_{ad}, nous étudions le aprés inclusion différentielle.

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t,x(t)) \qquad \text{p.p. sur } \ T = [0,b] \\ x(0) = x_0 \end{cases}. \tag{3.4.3}$$

Nous imposons les conditions suivantes sur la multiapplication $F(t,x)$:

$\mathbf{H(F)}$: $F : T \times \mathbb{R}^N \to 2^{\mathbb{R}^N} \backslash \{\emptyset\}$ est une multiapplication à des valeurs compactes convexes telles que :

i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $Gr\ F(.,x) = \{(t,v) \in T \times \mathbb{R}^N : v \in F(t,x)\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

ii) Pour presque tout $t \in T$ $GrF(t,.) = \{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, u \in F(t,x)\}$ est fermé.

iii) Pour presque tout $t \in T$, tout $x \in \mathbb{R}^N$, et tout $v \in F(t,x)$, nous avons :

$$\|v\| \leq \alpha(t) + c(t)\|x\|, \text{ et } \alpha, c \in \mathbb{R}^+.$$

Remarque 3.23. *Si $F(t,x) = f(t,x,U(t))$ alors en vertu des hypothèses* $\mathbf{H(f)}, \mathbf{H(U)}, \mathbf{H(L)}$ *et* $\mathbf{H_c}$*, la multiapplication F satisfait des hypothèses* $\mathbf{H(F)}$.

Définition 3.15. *D'aprés la solution* (3.4.3)*, nous avons*

$$S_F(x_0) = \begin{cases} x \in W^{1,1}(]0,b[,\mathbb{R}^N) : \ x(0) = x_0, \\ et\, x'(t) \in F(t,x(t)) \ \ pour\ presque\ tout\, t \in T. \end{cases}$$

Notons par $S_F(x_0)$ l'ensemble des solutions de (3.4.3)*. Alors $S_F(x_0) \subseteq W^{1,1}(]0,b[,\mathbb{R}^N) \subseteq C(T,\mathbb{R}^N)$.*

Pour pouvoir résoudre (3.4.3) et étudier le problème de contrôle optimal, nous avons besoin de quelques résultats d'analyse de mulivaleurs.

Le premier résultat est du point fixe de *Kakutani-Ky*.

Théorème 3.16. *Si X est un espace localement convexe, $C \subseteq X$ est non vide, compact et convexe et $G : C \to 2^C$ est une multiapplication à des valeurs non vides, fermés convexes, et $Gr\ G = \{(x, y) \in C \times C : \ y \in G(x)\}$ est fermé dans $X \times X$, alors il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.*

Le deuxième résultat est connu sous le nom du théorème de sélection de *Yankov-von Neumann-Aumann.*

Théorème 3.17. *Si (Ω, Σ, μ) est σ-finie mesure, l'espace X est un espace polonais et $G : \Omega \to 2^X$ est une multiapplication tel que : $Gr\ G = \{(w, x) \in \Omega \times X : x \in G(w)\} \in \Sigma \times \mathcal{B}$, alors il existe une fonction Σ-mesurable $g : \Omega \to X$ tel que $g(w) \in G(w)$ μ-p.p. sur Ω.*

Théorème 3.18. *Si S, X sont des espaces polonais, $G \in \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(X)$, et pour chaque $s \in S$ la section $G(s) = \{x \in X : (s, x) \in G\}$ est σ-compact, alors $Proj_S\ G \in \mathcal{B}(S)$.*

Maintenant on donne les propriétés de l'ensemble $S(x_0)$.

Théorème 3.19. *Si l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{F})$ est satisfait, donc $S_F(x_0) \neq \emptyset$ et $S_F(x_0)$ est compact dans $C(T, \mathbb{R}^N)$.*

Preuve. Supposont que $x \in S_F(x_0)$. Alors pour $v \in L^1(T, \mathbb{R}^N)$ qui satisfait $v(t) \in F(T, x(t))$ p.p. sur T, nous avons

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|v(s)\| \mathrm{d} \quad \text{pour tout } t \in T,$$

alors

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (\alpha(s) + c(s)\|x(s)\|)\mathrm{d}s \quad \text{pour tout } t \in T.$$

Utilisant le lemme de Gronwall, nous pouvons trouver $M_1 > 0$ tel que

$$\|x(t)\| \leq M_1 \text{ pour tout } t \in T \text{ et tout } x \in S(x_0).$$

Supposont $P_{M_1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$P_{M_1}(x) = \begin{cases} \frac{M_1 x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > M_1 \\ x & \text{si } \|x\| \leq M_1 \end{cases}.$$

On a $P_{M_1}(.)$ est lipschitzienne continue. Soit $F_1(t,x) = F(t, P_{M_1}(x))$, alors F_1 satisfait les propriétées de F c'est à dire (i) et (ii), de plus pour presque tout $t \in T$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $v \in F_1(t,x)$ nous avons

$$\|v\| \leq \eta(t) \text{ p.p. sur } T, \text{ avec } \eta(.) = \alpha(.) + c(.)M \in \mathbb{R}^+.$$

On pose $C = \{g \in L^1(T,\mathbb{R}) : \|g(t)\|\eta(t) \text{ p.p. sur } \ T\}$. D'aprés le théorème du Dunford-pettis l'ensemble C muni de la topologie faible est un ensemble compact convexe. Supposons la fonction $\xi : C \to C(T,\mathbb{R}^N)$ définie par

$$\xi(g)(t) = x_0 + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s.$$

D'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli, nous aurons ξ est sequentiellement continue de C pour la topologie faible dans $C(T,\mathbb{R}^N)$ muni de la topologie de la norme. On pose $G_1 : C \to 2^C$ définie par

$$G_1(g) = \{h \in L^1(T,\mathbb{R}), h(t) \in F_1(t, \xi(g)(t)) \quad \text{p.p. sur } \ T\}.$$

Soit $\xi(g) \in C(T,\mathbb{R}^N)$ et soit $\{s_n\}_{n\geq 0}$ être le pas fonctionne de T dans $\mathbb{R}^N$ tel que $S_n(t) \to x(t)$ p.p. sur T quand $n \to \infty$. Puisque pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $t \to F_1(t,y)$ a un graphe mesurable appliquant le théorème 3.17 pour chaque $n \geq 1$ nous pouvons trouver $h_n : T \to \mathbb{R}^N$ une fonction mesurable tel que $h_n(t) \in F_1(t, s_n(t))$ p.p. sur T. Evidemment $\|h_n(t)\| \leq \eta(t)$ p.p. sur T et ainsi par le théorème de Dunford-pettis et en passant à un sous-ordre approprié si néssecaire, nous pouvons supposons que $h_n \xrightarrow{w} h$ dans $L^1(T,\mathbb{R}^N)$. Utilisant le lemme de Masur et le fait que pour presque tout $t \in T$, $y \to F_1(t,y)$ a graphe fermé, nous avons $h(t) \in F_1(t, x(t))$ p.p. sur T (i.e., $h \in G_1(g)$).

Donc G_1 a des valeurs non vides fermées et convexes dans C. De $Gr\ G \subseteq C \times C$ est séquentiellement fermé dans $C \times C$.

Quand C est équipé de la topologie faible. Rappelons-nous que la tpologie faible sur C est metrisable, donc nous pouvons appliquer le théorème 3.16 on obtenir $g \in C$ tel que $g \in G_1(g)$.

Alors si $x = \xi(g)$, nous avons :

$$x'(t) \in F_1(t, x(t)) \quad \text{p.p. sur } T, x(0) = x_0,$$

alors

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| + \int_0^t \|v\| \mathrm{d}s \quad \text{pour tout } t \in T, \text{ avec} v \in L^1(T, \mathbb{R}^N),$$
$$v \in F_1(s, x(s)) \quad \text{p.p. sur } T. \tag{3.4.4}$$

Mais de la définition de F_1, on voit que $\|v(s)\| \le \alpha(s) + c(s)\|x\|$ p.p, sur T et ainsi de (3.4.4) et le lemme de Gronwall il s'ensuit que :

$$\|x(t)\| \le M_1 \quad \text{pour tout } t \in T,$$

alors

$$F_1(t, x(t)) = F(t, x(t)) \quad \text{pour tout } t \in T \text{ (i.e.,} x \in S_F(x_0)).$$

Donc nous avons prouver que $S_F(x_0) \neq \emptyset$. Clairement $S(x_0) \subseteq C(T, \mathbb{R}^N)$ est fermé, tandis que du théorème de Arzela-Ascoli nous avons $S(x_0)$ est relativement compact dans $C(T, \mathbb{R}^N)$. Alors $S_F(x_0)$ est compact dans $C(T, \mathbb{R}^N)$.

Maintenant si $F(t, x) = f(t, x, U(t))$ et $x \in S(x_0)$ alors nous posons :

$$V(t) = \{u \in U(t) : x'(t) = f(t, x(t), u)\},$$

alors

$$Gr\ V = \{(t, u) : x'(t) = f(t, x(t), u) \cap Gr\ U\}.$$

D'aprés l'hypothèse $\mathbf{H(f)}(i), (ii)$, $(t, u) \to x'(t) - f(t, x(t), u)$ est une fonction de carathéodory (i.e., f pour tout $u \in Y$, $t \to x'(t) - f(t, x(t), u)$ est mesurable, tandis que presque tout $t \in T$, $u \to x'(t) - f(t, x(t), u)$ est continue), d'où $(t, u) \to -f(t, x(t), u)$ est mesurable et ce combiné ceci à l'hypothèse $\mathbf{H(U)}$ on voit que : $Gr\ V \in \mathcal{L}(T) \times \mathcal{B}(Y)$ avec $\mathcal{L}(T)$ est la σ-tribu borelienne de Y. Donc nous pouvons appliquer le théorème 3.17 et obtenir $u : T \to Y$ une fonction mesurable tel que $u(t) \in V(t)$ p.p., sur T. Alors $(x, u) \in \alpha_{ad}$ et ainsi le théorème 3.19 implique que $\alpha^1_{ad} = S_F(x_0) \subseteq C(T, \mathbb{R}^N)$ est compact. □

Dans la suite nous étudions le problème de contrôle optimal ($\mathbf{P}$). L'approche est le suivant. Nous utilisant l'hypothèse $\mathbf{H_c}$ pour transformer ($\mathbf{P}$) dans un problème variationnel sans contrôle avec la structure convexe (le calcul de problème de variations) avec les mêmes valeurs que ($\mathbf{P}$). Nous résolvons le calcul de problème de variations utilisant la méthode directe. Cette methode est connue comme la méthode de réduction.

Théorème 3.20. *Si les hypothèses* $\mathbf{H(f)}$, $\mathbf{H(U)}$, $\mathbf{H(L)}$ *et* $\mathbf{H_c}$ *vérifier et* $m \leq +\infty$, *donc le problème* $(\mathbf{P})$ *admet une couple de contrôle de l'état optimal* $(\hat{x}, \hat{u}) \in \alpha^1_{ad}$.

Preuve. Posons

$$A(t, x, v) = \{u \in U(t) : v = f(t, x, u)\},$$

l'ensemble de tout les contrôle admissible qui au temps $t \in T$ et quand le système est à l'état $x \in \mathbb{R}^N$, produire la "vitesse" $v \in \mathbb{R}^N$. évident, d'aprés la modification f, U, et L sur un ensemble de Lebesgue null, on a

$Gr\ A = \{(t, x, v, u) \in T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times Y :\ (t, u) \in Gr\ U, v - f(t, x, u) = 0\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})^N \times \mathcal{B}(\mathbb{R})^N \times \mathcal{B}(Y)$.

Soit $P : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$P(t, x, v) = \inf[L(t, x, u) : u \in A(t, x, u)] \tag{3.4.5}$$

qui représente le coût minimum pour générer "la vitesse" v au temps $t \in T$, quand l'état du système est $x \in \mathbb{R}^N$ et on utilisant le contrôle addmissible. Nous avons toujours $\inf \emptyset = +\infty$.

On a : $(t, x, u) \to P(t, x, v)$ est une fonction Borélienne mesurable.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons d'aprés le théorème 3.18

$$\begin{aligned}
&\{(t, x, v) \in T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N :\ P(t, x, v) \leq \lambda\} \\
&= Proj_{T\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\{(t, x, v, u) \in T \times \mathbb{R}^N\mathbb{R}^N \times Y :\ L(t, x, u) \leq \lambda, \\
&u \in A(t, x, v)\} \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

On a : Pour tout $t \in T$, la fonction $(x, v) \to P(t, x, v)$ est semi-continue inférieure.

Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S(\lambda) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : P(t, x, v) \leq \lambda\}$ fermé.

Posons $\{(x_n, v_n)\}_{n\geq 1} \subseteq S(\lambda)$ et supposons que $x_n \to x,\ v_n \to v$ dans $\mathbb{R}^N$ quand $n \to +\infty$.

D'aprés (3.4.5) il existe $u_n \in A(t, x_n, v_n)$ tel que $P(t, x_n, v_n) = L(t, x_n, u_n)$.

On a $u_n \in U(t)$ et $v_n = f(t, x_n, v_n)$. On passe à la sous séquence si nécessaire, on peut supposer que $u_n \to u \in U(t)$. Alors $v = f(t, x, u)$ (l'hypothèse $\mathbf{H(f)}(ii)$) et donc $u \in A(t, x, v)$. Par conséquent, $P(t, x, v) \leq L(t, x, v) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} L(t, x_n, u_n) = \liminf_{n\to\infty} P(t, x_n, u_n) \leq \lambda$ (l'hypothèse $\mathbf{H(L)}(iii)$), alors $(x, v) \in S(\lambda)$, (i.e., $P(t, ., .)$ est semi-continue inférieure).

On a : pour tout $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^N$, $v \mapsto P(t,x,v)$ est convexe. Notons que

$$\begin{aligned} epi(P(t,x,.)) &= \{(v,\lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : \ P(t,x,v) \leq \lambda\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \{(v,\lambda) \in \mathbb{R}^N \mathbb{R} : \ L(t,x,v) \leq L(t,x,v) \leq \lambda + \varepsilon, \\ & u \in U(t), \ v = f(t,x,u)\}. \end{aligned}$$

Donc en vertu à l'hypothèse $\mathbf{H_c}$, $epi(p(t,x,.))$ est convexe, c'est-à-dire $v \mapsto P(t,x,v)$ est convexe comme l'hypothèse.

Supposons maintenant que $\{(x_n,u_n)\}_{n\geq 1} \subseteq \alpha_{ad}$ une suite de minimisation du problème $(\mathbf{P})$, tell que, $J(x_n,u_n) \downarrow m$ quand $n \to \infty$. D'aprés le Théorème 3.19, supposons que $x_n \to \hat{x}$ dans $C(T,\mathbb{R}^N)$. Ainsi d'aprés l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{f})(iii)$ on sait que $\{x'_n(.)\}_{n\geq 1} \subseteq L^1(T,\mathbb{R}N)$ est uniformément intégrable, alors d'aprés le théorème de Dunford-Pettis on va supposer que $x'_n \xrightarrow{w} v$ dans $L1(T,\mathbb{R}^N)$. Évident $v = \hat{x}'$. De ce qui précède, et d'aprés le théorème 3.4 on obtien

$$\begin{aligned} \int_0^b P(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))\mathrm{d}t &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^b P(t,x_n(t),x'_n(t))\mathrm{d}t \\ &\leq \lim_{n\to\infty} J(x_n,u_n) = m < \infty. \end{aligned}$$

Donc d'aprés l'hypothèse $\mathbf{H}(\mathbf{L})(iii)$ et d'aprés la redéfinir de $t \to P(t,x(t),x'(t))$ sur un ensemble nul de Lebesgue , on peut dire que pour tout $t \in T$, $P(t,x(t),x'(t))$ est finie. D'aprés le théorème 3.17 il existe une fonction muserable $\hat{u} : T \to Y$ tell que $\hat{u}(t) \in A(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t))$ pour presque tout $t \in T$ et

$$P(t,\hat{x}(t),\hat{x}'(t)) = L(t,\hat{x}(t),\hat{u}'(t)) \ \text{ p.p. sur } T,$$

alors

$$J(\hat{x},\hat{u}) \leq m \text{ et } (\hat{x},\hat{u}) \in \alpha_{ad},$$

donc $J(\hat{x},\hat{u}) = m$ (i.e., $(\hat{x},\hat{u})$ est une couple d'état du contrôle optimal). □

En examinant la preuve du théorème ci-dessus, nous voyons que l'hypothèse $\mathbf{H_c}$ est cruciale parce qu'elle fournit la structure convexe nécessaire à l'application de la méthode directe du calcul des variations. Si $\mathbf{H_c}$ n'est pas satisfaite, l'existence de solution n'est pas garantie. Afin de capturer le comportement asymptotique des suites de minimisation nous devons intègrer un système présentant la structure convexe nécessaire et qui garantit l'existence du couple optimal. Cette méthode est connue sous le nom de "relaxation". Il n'y a pas un approche unique pour la relaxation. Nous pouvons convenir qu'une méthode de relaxation raisonnable doit répondre aux trois critères suivants.

(i) Chaque état d'origine est également un état de relaxation.

(ii) L'ensemble des états d'origine est danse dans un ensemble des états de relaxation.

(iii) Le problème de relaxation admet une solution, et les valeurs de deux problèmes (relaxation et origine) sont égales.

Les deux premieres exigences concernent le système dynamique et le troisième implique également le coût. L'exigence que les valeurs des deux problèmes soient égales est connu sous le nom du "relaxabilité". Si la relaxabilité échoue, on peut dit que le système d'origine a été trop élargi. Une méthode de relaxation qui répond aux trois critères est dite "admissible".

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Bekhouche, *C_0 semi-groupes et applications "Problème de Cauchy abstrait"*, université de KASDI MARBAH-Ouargla, (juin 2014).

[2] J. Bell, *The Dunford-Pettis theorem*, university of Toronto, (April 2015).

[3] P. Bernard, *Espace de Banach*, (november 2013).

[4] S.M. Bahri, *Théorème d'Ascoli-Arzela*,(Mars 2012).

[5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle "Théorie et applications"*, university Pierre et Marie Curie et École polytechnique, Masson, Paris, (1983).

[6] J. Charles and M. Mbakhta and H. Queffélec, *ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS*, Dunord, Paris, (2010).

[7] S.S. Dragomir, *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*, School of Communications and Informatics, Victoria University of Technology, Austoralia, (November 2002).

[8] P. Lissy, *Formes linéaire et hyperplan en dimension finie. Exemples et applications*, (December 2009).

[9] N.S. Papageorgiou and S.Th. Kyritsi-Yiallourou , *HANDBOOK OF APPLIED ANALYSIS*, Athens, (September 2008).

[10] L. Pujo-Menjouet, *Cours de Calcul Différentiel*, Université Claude Bernard, Lyon I, boulevard 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France.

[11] F. Rouvière, *Théorème de Baire et applications*, (février 2004).

[12] A. Sabourin and P. Bianchi, *Convex analysis*, Institut Mines-Télécom, Télécom-Paris Tech, CNRS LTCI, (October 2014).