MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° D'ordre :...............
Série :.........................

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
En mathématiques

Thème

Problème de Wentzell pour une classe d'équations aux dérivées partielles

Option : Analyse

Par

Yagoub Ameur

Devant le jury :

Président :	Aibeche. A	Prof - Université de Setif.
Rapporteur :	Denche. M	Prof - Université de Constantine.
Examinateur :	Yarou. M	M.C - Université de Jijel.
Examinateur :	A.Laouir. D	M.C - Université de Jijel.
Examinateur :	Zerzaihi. T	M.C - Université de Jijel.

Soutenu le 29 / 06 /2006

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE JIJEL
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° D'ordre : ....
Série : ....

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
En mathématiques

Thème

Problème de Wentzell pour une classe d'équations aux dérivées partielles

Option : Analyse
Par

Yagoub Ameur

Devant le jury :

Président :	Aibeche. A	Prof - Université de Setif.
Rapporteur :	Denche. M	Prof - Université de Constantine.
Examinateur :	Yarou. M	M.C - Université de Jijel.
Examinateur :	A. Laouir. D	M.C - Université de Jijel.
Examinateur :	Zerzaihi. T	M.C - Université de Jijel.

Soutenu le 29 / 06 /2006

بسم الله الرحمن الرحيم

Table des matières

Introduction générale **2**

1 Notions préliminaires **5**

1.1 Espaces fonctionnels 5

1.2 Semi-groupes fortement continus 6

1.3 Semi-groupes analytiques 8

1.4 Applications 10

2 Semi-groupes analytiques engendrés par des opérateurs différentiels du second ordre et des conditions aux limites du type Wentzell. **12**

2.1 Introduction 12

2.2 Résultats préliminaires 12

2.3 Résultats principaux 20

3 Semi-groupes analytiques dans $C[0,1]$ engendrés par des opérateurs différentiels du second ordre et des conditions aux limites du type Wentzell générales. **41**

3.1 Introduction 41

3.2 Résultats principaux 42

Bibliographie **62**

Introduction générale

Après plusieurs études approfondies, les auteurs s'inspirant des résultats antérieurs concernant la génération et l'analyticité des semi-groupes fortement continus (C_0–semi-groupes) engendrés par les opérateurs différentiels elliptiques dégénérés de second ordre, avec les conditions aux limites de Wentzell (ces conditions ont été introduites en 1959 par [31] dans le contexte du processus de la diffusion pour l'équation de la chaleur). Ils ont commencé une étude systématique de problèmes analogues pour quelques classes d'opérateurs linéaires, qui peuvent être dégénérés à la limite, des opérateurs différentiels de second ordre avec les conditions aux limites de Wentzell générales dans plusieurs espaces fonctionnels.

Les conditions aux limites de Wentzell générales pour un opérateur A s'écrivent généralement comme suit :

$$AU + \beta\frac{\partial U}{\partial n} + \gamma U = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où Ω est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, et β, γ sont deux fonctions continues sur $\partial\Omega$, et n l'unité normale externe.

Plusieurs résultats de la génération dans $C[0.1]$ ont été prouvés dans [12] lesquels ont fourni d'autres résultats intimement liés aux conditions aux limites de Dirichlet, Neumann, Robin et Wentzell.

Par la suite, la génération et la régularité en $C\left(\bar{\Omega}\right)$, dans des espaces convenables comme $L^p\left(\Omega, \mu\right)$ et $H^1\left(\Omega\right)$ ont été obtenus dans les articles [13][15] et [17], alors que dans [14] l'équation d'onde à été abordé avec les conditions aux limites de Wentzell (i,e $\beta = \gamma = 0$ sur $\partial\Omega$) pour $\Omega = (0, 1)$.

Après toutes ces réalisations, et depuis quelques années, un grand intérêt est accordé aux sujets précités menés avec des progrès considérables et signifiants, en appliquant différentes techniques et méthodes d'approchement, voir par exemple [1][2][4][8][9][29][30][32].

Il faut signaler, en particulier que les résultats recensés et obtenus dans [4] et [32] n'ont été révélés que grâce à une structure abstraite convenable, l'analyticité avec les conditions aux limites de Wentzell générales pour les opérateurs de second ordre (dans le temps), des équations dans $C[0, 1]$ peuvent être obtenues comme un sous-produit de l'étude des familles de cosinus avec les conditions aux limites de Wentzell, pour l'équation d'ondes voir par exemple [20].

Mais, en dépit de tant d'efforts dépensés, le problème d'analyticité dans le cas dégénéré n'est pas complètement résolu, même dans $C[0,1]$.

[6] et [11] et [18] ont abordé des problèmes de type :

$$AU = \alpha U'' + \beta U'$$

avec les conditions aux limites de Wentzell du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) = 0, \ j = 0, 1$$

dans plusieurs espaces fonctionnels pour certaines conditions de compatibilité des coefficients $(\alpha.\beta)$, la positivité du semi-groupe a été étudiée dans [28].
Dans [16] a été abordée l'étude des problèmes engendrés par les équations

$$AU = \alpha U'' + \beta U' \text{ ou } \ AU = b(aU')' + \beta U'$$

avec les conditions aux limites de Wentzell générales du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) + \tilde{b}U'(x) = 0, \ j = 0, 1$$

dans l'espace $C[0,1]$ pour certaines conditions convenables sur les coefficients.

Ce travail est consacré à l'étude de la génération de semi-groupes analytiques engendrés par des opérateurs différentiels du second ordre avec des conditions aux limites du type Wentzell et Wentzell généralisées.

Le mémoire est constitué d'une introduction et de trois chapitres.
On commence dans l'introduction par un bref historique des problèmes aux limites de Wentzell.
Le premier chapitre est consacré aux principales notions utilisées tout au long de ce travail.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème

$$AU = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U$$

avec les conditions aux limites de Wentzell du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) = 0, j = 0, 1$$

dans les espaces fonctionnels $C[0,1], C_0[0,1]$ et $C_\pi[0,1]$ .Par un changement de variable à défaut, on ramène l'étude des problèmes à l'axe tout entier. Et en se basant sur des résultats [18] on établit le génération de semi-groupes analytiques. Dans le cas où $\gamma \equiv 0$ un problème analogue a été traité dans [18]

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème

$$AU = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \text{ ou } AU = b(aU')' + \beta U' + \gamma U$$

avec les conditions aux limites de Wentzell générales du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) + \tilde{b}U'(x) = 0, \; j = 0, 1$$

dans l'espace de Banach $C[0, 1]$.

Ici la génération de semi-groupes analytiques est établie à l'aide d'un théorème de perturbation. Le cas $\gamma \equiv 0$ a été étudié dans [16].

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

Soit X un espace de Banach réel ou complexe, muni de la norme $\|.\|$ et $I \subseteq \mathbb{R}$.
1) ([23]) Nous définissons les espaces fonctionnels $B(I;X)$, $C(I;X)$, $C_b(I;X)$, $C^m(I;X)$ et $C_b^m(I;X)$ $(m \in \mathbb{N})$ par

$$B(I;X) = \{f : I \longmapsto X,\ f \text{ bornée dans } I\}$$

avec

$$\|f\|_{B(I;X)} = \sup_{t\in I} \|f(t)\|.$$

$$C(I;X) = \{f : I \longmapsto X,\ f \text{ continue dans } I\}$$

avec

$$\|f\|_{C(I;X)} = \|f\|_{B(I;X)} := \|f\|_{\infty}.$$

$$C_b(I;X) = C(I;X) \cap B(I;X).$$

$$C^m(I;X) = \left\{f, f^{(i)}\exists, f^{(i)} \in C(I;X), \forall i = 0,1,...,m\right\}$$

avec

$$\|f\|_{C^m(I;X)} = \sum_{i=0}^{m} \left\|f^{(i)}\right\|_{B(I;X)} := \sum_{i=0}^{m} \left\|f^{(i)}\right\|_{\infty}.$$

$$C_b^m(I;X) = \left\{f \in C^m(I;X), f^{(i)} \in C_b(I;X), \forall i = 0,1,...,m\right\}$$

avec

$$\|f\|_{C_b^m(I;X)} = \|f\|_{C^m(I;X)}.$$

Si $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$ alors on pose $C([0.1], X) := C[0.1]$, $C(\mathbb{R}, X) := C(\mathbb{R})$ et $C^m((0.1), X) := C^m(0.1)$ et définissons $C_0[0.1]$, $C_\pi[0.1]$, $C_0(\mathbb{R})$, $C(\bar{\mathbb{R}})$ par

$$C_0[0,1] := \{U \in C[0,1], U(0) = U(1) = 0\}$$

$$C_\pi[0,1] := \{U \in C[0,1], U(0) = U(1)\}$$

$$C_0(\mathbb{R}) := \left\{V \in C(\mathbb{R}), \lim_{t \to j} V(t) = 0,\ j = \{-\infty, +\infty\}\right\}$$

$$C(\bar{\mathbb{R}}) := \left\{V \in C(\mathbb{R}), \lim_{t \to j} V(t) \in C,\ j = \{-\infty, +\infty\}\right\}$$

tel que C est un intervalle borné compact dans $\mathbb{R}$.

1.2 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 ([26]et[7])*Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.*
Etant donné une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X $(L(X))$, nous dirons que cette famille est un semi-groupe fortement continu sur X si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :
(i) $T(0) = I$, (I est l'opérateur identité sur X),
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t \geq 0, s \geq 0$,
(iii) $\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x$ pour tout $x \in X$.
Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés est aussi appelé un C_0-semi-groupe.
La famille $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ constitue un groupe fortement continu dans X, si
i)$T(s+t) = T(t)T(s) = T(s)T(t), \forall s, t \in \mathbb{R}$
ii)$T(0) = I$
iii)$\lim_{t \to 0} T(t)x = x$ pour tout $x \in X$
qui est appelé un C_0-groupe .

Définition 1.2.2 ([26]) *Le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, (resp groupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$) est l'opérateur A défini sur le domaine*

$$\left\{\begin{array}{c} D(A) = \{x \in X,\ \lim_{t\to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\} \\ (\text{resp } D(A) = \{x \in X,\ \lim_{t\to 0} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}) \end{array}\right\}$$

on noté par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ pour tout } x \in D(A)$$
$$(\text{resp } Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ pour tout } x \in D(A)).$$

L'espace $D(A)$ est muni de la norme du graphe $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$.

Définition 1.2.3 *On dit qu'un opérateur A est fermé si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \to y$ dans X alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Théorème 1.2.4 ([26])*Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ (resp $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$) un C_0−semi-groupe (resp C_0 − groupe) alors il existe $M \geq 1$, $\omega \geq 0$ tels que pour tout $t \geq 0$ (resp $t \in \mathbb{R}$) on a*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \left(resp \ \|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}\right).$$

Si $\omega = 0$ le semi-groupe est dit uniformément borné. Si de plus $M = 1$, le semi-groupe est dit de contraction.

Corollaire 1.2.5 ([7])*Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0−semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, alors $D(A)$ est dense dans X et A est un opérateur fermé.*

Définition 1.2.6 ([26])*Soit A un opérateur linéaire fermé dans X.*
(a) L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$ est défini par

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda I - A)^{-1} \text{existe et borné dans } X \right\}$$

(b) Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$.
(c) La famille $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ d'opérateurs linéaires bornés est appelée la résolvante de A.

Dans ce paragraphe nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0. Il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0−semi-groupes.

Théorème 1.2.7 ([26])*(Hille-Yosida) Soit A un opérateur linéaire. A est le générateur infinitésimal d'un C_0−semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ $(\|T(t)\| \leq Me^{\omega t})$, si et seulement si :*
(i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) Il existe $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}_+$, tel que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega \}$ et

$$\left\|R(\lambda : A)^k\right\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^k}$$

pour $k = 1, 2, ...$; si $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$.

Théorème 1.2.8 ([10]) *Soient X, Y deux espaces de Banach, et soit T_ϕ est un isomorphisme de X sur Y. Alors l'opérateur $(A, D(A))$ engendre un C_0-semi-groupe (resp C_0-groupe) sur X si et seulement si $(B, D(B))$ donné par*

$$\begin{aligned} B &= T_\phi A T_\phi^{-1} \\ D(B) &= T_\phi (D(A)) \end{aligned}$$

engendre un C_0-semi-groupe (resp C_0-groupe) sur Y, et dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{c} T_\phi e^{tA} T_\phi^{-1} = e^{tT_\phi A T_\phi^{-1}}, t \geq 0 \\ (\text{ resp } T_\phi e^{tA} T_\phi^{-1} = e^{tT_\phi A T_\phi^{-1}}, t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Lemme 1.2.9 ([26]) *Soit A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tel que $\|T(t)\| \leq M$ si $x \in D(A^2)$ alors*

$$\|Ax\| \leq \frac{2M}{t} \|x\| + \frac{Mt}{2} \|A^2 x\| \qquad \text{pour tout } t > 0$$

1.3 Semi-groupes analytiques

Par la suite nous donnons la possibilité d'étendre l'intervalle $]0, +\infty)$ à une région du plan complexe, sans abandonner les propriétés de C_0-semi-groupe. Nous désignerons par Δ l'ensemble :

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_2 < \arg(z) < \varphi_1, \varphi_2 < 0 < \varphi_1\}$$

Définition 1.3.1 ([26])*Pour tout $z \in \Delta$, soit $T(z)$ un opérateur linéaire borné. La famille $(T(z))_{z\in\Delta}$ forme un semi-groupe dans X, analytique dans Δ si :*
(i) $z \longrightarrow T(z)$ est analytique dans Δ.
(ii) $T(0) = I$ et $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Delta}} T(z)x = x$ pour tout $x \in X$.
(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, pour tout z_1, z_2 et $z_1 + z_2 \in \Delta$.

Théorème 1.3.2 ([7]) *Soit A un opérateur fermé, et $\overline{D(A)} = X, X$ espace de Banach, alors*
1) *les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) Il existe $\omega \in \mathbb{R}, \theta$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, M' > 0$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho(A) \supset \Sigma_{\omega,\theta} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda - \omega)| \leq \frac{\pi}{2} + \theta\right\} \\ \|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M'}{1 + |\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma_{\omega,\theta} \end{array} \right.$$

ii) A est générateur infinitésimal d' un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ avec $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ prolongeable en un semi-groupe analytique dans un angle $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \theta\}$

2) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $\theta, M > 0$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, telle que

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| \leq \frac{\pi}{2} + \theta\right\} \\ \|R(\lambda : A)\| \leq \dfrac{M}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma \end{cases}$$

ii) A est générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ uniformément borné prolongeable en un semi-groupe analytique dans un angle $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \theta\}$

Théorème 1.3.3 ([*26*]*ou*[*22*]) ***(Perturbation de générateur infinitésimal de semi-groupe analytique)***

i) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $(T(t))_{t\geq 0}$ et soit B est un opérateur linéaire fermé qui satisfait $D(A) \subseteq D(B)$ et

$$\|BU\| \leq k\|AU\| + c\|U\|, \forall U \in D(A)$$

tel qu'il existe un nombre positif δ tel que $0 \leq k \leq \delta$ alors $A+B$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. (B est A-bornée avec B est A-borne égal á 0).

Pour $\rho(A+B)$:

1) *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe uniformément borné $(\|T(t)\| \leq M)$ alors*

$$\rho(A+B) = \{\lambda \in \rho(A) \cap \Sigma\}, \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 2cM\}$$

2) *Si $(T(t))_{t\geq 0}$ semi-groupe te que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ alors*

$$\rho(A+B) = \{\lambda \in \rho(A) \cap \Sigma\}, \Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 2(k\omega + c)M\}$$

.ii) Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique et B est un opérateur linéaire borneé alors, $A+B$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.

Théorème 1.3.4 ([*7*]*ou*[*26*]) *L'opérateur A engendre un semi-groupe analytique $(T(t))_{t\geq 0}$, $(\|T(t)\| \leq Me^{\omega t})$ si et seulement si il existe ω tel que $A-\omega$ engendre un semi-groupe analytique uniformément borné $(S(t))_{t\geq 0}$ $(\|S(t)\| \leq M)$, dans ce cas,*

$$T(t) = e^{\omega t}S(t), \forall t \geq 0$$

Théorème 1.3.5 *[25] Soient X, Y deux espaces de Banach, et soit T_ϕ est un isomorphisme de X sur Y. Alors l'opérateur $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur*

X si et seulement si $(B, D(B))$ *donné par*

$$\begin{aligned} B &= T_\phi A T_\phi^{-1} \\ D(B) &= T_\phi (D(A)) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur Y, *avec* $\rho(A) = \rho(B)$.

1.4 Applications

Théorème 1.4.1 *[6] [27] Soient* $\alpha, \beta \in C[0,1]$ *avec* $\alpha(x) > 0$ *dans* $(0,1)$, *et définit les fonctions* W, Q *et* R *comme*

$$\begin{aligned} W(x) &: = \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt) \\ Q(x) &: = \frac{1}{\alpha(x) W(x)} \int_{\frac{1}{2}}^{x} W(t)\, dt \\ R(x) &: = W(x) \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\alpha(t) W(t)} \end{aligned}$$

tel que $x \in (0,1)$.

i) l'opérateur $(A, D(A))$ *donné par*

$$\begin{aligned} D(A) &: = \left\{U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), AU \in C_0[0,1]\right\} \\ AU &: = \alpha U'' + \beta U' , U \in D(A) \end{aligned}$$

engendre un C_0-*semi-groupe sur* $C[0,1]$ *si et seulement si*

$$W \in L^1\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \text{ ou } Q \notin L^1\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \text{ ou les deux} \tag{1}$$

et

$$W \in L^1\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \text{ ou } Q \notin L^1\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \text{ ou les deux.} \tag{2}$$

ii) l'opérateur $(B, D(B))$ *donné par*

$$\begin{aligned} D(B) &: = \left\{U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), BU \in C[0,1]\right\} \\ BU &: = \alpha U'' + \beta U' , U \in D(B) \end{aligned}$$

engendre un C_0-semi-groupe sur $C[0,1]$ si

$$R \notin L^1\left(0,\tfrac{1}{2}\right) \text{ et } R \notin L^1\left(0,\tfrac{1}{2}\right) \tag{3}$$

de plus si toutes les suppositions $(1),(2)$ et (3) sont satisfaites alors $D(B) = D(A)$ et $A = B$ engendre un C_0-semi-groupe sur $C[0,1]$.

Corollaire 1.4.2 ([23]) *Soient a, b, c réelles et bornées et uniformément continues et*

$$a(x) \geq \mu > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

alors l'opérateur $(C_0, D(C_0))$ donné par

$$\begin{aligned} D(C_0) &:= \left\{U \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}), aU'' + bU' + cU \in C_0(\mathbb{R})\right\} \\ C_0U &:= aU'' + bU' + cU, U \in D(C_0) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C_0(\mathbb{R})$ et il existe $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\rho(C_0) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0\}$$

Théorème 1.4.3 [5] *Soient $\alpha, \beta \in C[0,1]$ et*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &> 0 \qquad \forall x \in (0,1) \\ \frac{1}{\alpha} &\in L^1(0,1) \end{aligned}$$

$$\beta \text{ est Hölder continue á } x = 0.x = 1$$

alors $(L_0, D(L_0))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L_0) &:= \left\{ \begin{array}{l} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} \alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) = 0, \; j = 0,1 \end{array} \right\} \\ L_0U &:= \alpha U'' + \beta U', U \in D(L_0) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Chapitre 2

Semi-groupes analytiques engendrés par des opérateurs différentiels du second ordre et des conditions aux limites du type Wentzell.

2.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur différentiel du second ordre de la forme :

$$AU = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U$$

avec les conditions aux limites de Wentzell du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) = 0, j = 0, 1$$

dans les espaces fonctionnels $C[0,1]$, $C_0[0,1]$, $C_\pi[0,1]$. Par un changement de variable à défaut, on ramène l'étude des problèmes de $C_0[0,1]$ à $C(\mathbb{R})$. En se basant sur des résultats [18] on établit la génération de semi-groupe analytique. Après résultat de génération de semi-groupes analytiques dans $C[0,1]$ et $C_\pi[0,1]$ sont déduits par des changements de variables convenables de ceux établis dans $C_0[0,1]$.

2.2 Résultats préliminaires

Soient α, β et γ trois fonctions à valeurs réelles qui vérifient :

$$\alpha, \beta, \gamma \in C\,[0,1]\,, \alpha\,(0) = \alpha\,(1) = 0, \alpha\,(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1) \tag{2.1.1}$$

$$\sqrt{\alpha} \in C^1\,[0,1] \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C\,[0,1] \tag{2.1.3}$$

Définition 2.2.1 [25] *On dit qu'une fonction f est $\mathbb{R}-$ admissible sur $[0,1]$ si*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{f\,(x)} = +\infty = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{f\,(x)}$$

Proposition 2.2.2 *Si α vérifie* (2.1.1) *et* (2.1.2) *alors $\sqrt{\alpha}$ est $\mathbb{R}-$ admissible sur $[0,1]$, c'est-à-dire*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha\,(t)}} = +\infty = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\alpha\,(t)}}$$

Preuve. Si $\alpha\,(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$ alors $\left|\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha\,(t)}}\right| < +\infty, \forall x \in (0,1)$ et si $\alpha\,(0) = \alpha\,(1) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \alpha\,(x) &\sim c_1 x^k, c_1 > 0, k > 0, \text{ en voisinage de } 0 \\ \alpha\,(x) &\sim c_2\,(1-x)^{k_1}\,, c_2 > 0, k_1 > 0, \text{ en voisinage de } 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\,(x)}} \underset{V(0)}{\sim} c_3 x^{-\frac{k}{2}}, c_3 > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\,(x)}} \underset{V(1)}{\sim} c_4\,(1-x)^{-\frac{k_1}{2}}\,, c_4 > 0$$

donc pour $x = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha\,(t)}} &= +\infty \text{ si } -\frac{k}{2} \leq -1 \iff k \geq 2 \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha\,(t)}} &< +\infty \text{ si } -\frac{k}{2} < -1 \iff 0 < k < 2. \end{aligned}$$

D'autre part $\sqrt{\alpha} \in C^1\,[0,1] \Longrightarrow$

$$\lim_{x \to j} \frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha\,(x)}} = \text{existe, } j = 0, 1$$

il est clair que

$$\alpha'(0) = 0 \Longrightarrow \alpha'(x) \underset{V(0)}{\sim} c_5 x^{k-1}$$

donc

$$\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} \underset{V(0)}{\sim} c_6 x^{\frac{k}{2}-1}$$

puisque

$$\lim_{x\to j} \frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} = \text{existe} \Longrightarrow \frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} \underset{V(0)}{\sim} c_6 x^m, m \geq 0$$

alors $\frac{k}{2} - 1 = m \geq 0 \Longrightarrow k \geq 2$ on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}} = +\infty.$$

De même si $x = 1$ c'est-à-dire $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}} = +\infty$. Par conséquent $\sqrt{\alpha}$ est $\mathbb{R}$-admissible sur $[0,1]$. ■

Avant d'énoncer les théorèmes principaux, nous aurons besoin des résultats suivants

Lemme 2.2.3 *Si $\alpha \in C[0,1]$ vérifie (2.1.1) et (2.1.2) alors la projection*

$$\begin{array}{rcl} \Phi & : & (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}} \end{array} \tag{2.2.1}$$

appartient á $C^1(0,1)$ et est strictement croissante avec son inverse

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$$

qui est différentiable sur $\mathbb{R}$, et l'opérateur T_ϕ définie par

$$T_\phi U := U \circ \phi$$

possède les propriétés suivantes :
1.$T_\phi(C_0[0,1]) = C_0(\mathbb{R})$; *avec*

$$C_0(\mathbb{R}) := \left\{ V \in C(\mathbb{R}), \lim_{t\to j} V(t) = 0, \ j = \{-\infty, +\infty\} \right\}$$

2.$T_\phi\left(D\left(B_0\right)\right)=\left\{V\in C_0\left(\mathbb{R}\right), V \textit{ différentiable}, V'\in C_0\left(\mathbb{R}\right)\right\}$ *avec*

$$D\left(B_0\right):=\left\{U\in C_0\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right), \lim_{x\to j}\sqrt{\alpha\left(x\right)}U'(x)=0,\ j=0,1\right\}$$

3.$T_\phi\left(C\left[0,1\right]\right)=C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$; *avec*

$$C\left(\bar{\mathbb{R}}\right):=\left\{V\in C\left(\mathbb{R}\right), \lim_{t\to j}V(t)\in C,\ j=\{-\infty,+\infty\}\right\}$$

C est un intervalle borné compact dans $\mathbb{R}$.
4.$T_\phi\left(D\left(B_\infty\right)\right)=\left\{V\in C\left(\bar{\mathbb{R}}\right), V \textit{ différentiable}, V'\in C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right\}$ *avec*

$$D\left(B_\infty\right):=\left\{U\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right), \lim_{x\to j}\sqrt{\alpha\left(x\right)}U'(x)\in C,\ j=0,1\right\}$$

Preuve. Si α vérifie (2.1.1) alors $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\left(x\right)}}$ existe $\forall x\in(0,1)$ et d'après

$$\Phi'\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{\alpha\left(x\right)}}$$

alors Φ' est continue $\forall x\in(0,1)$ et $\Phi\left(x\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\dfrac{dt}{\sqrt{\alpha\left(t\right)}}$ est continue $\forall x\in(0,1)$ donc $\Phi\in C^1\left(0,1\right)$ c'est-à-dire surjective sur $(0,1)$.
D'autre part $\Phi'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\left(x\right)}}>0,\ \forall x\in(0,1)\Longrightarrow\Phi$ est strictement croissante c'est-à-dire injective sur $(0,1)$.
Par conséquent Φ surjective et injective $\Longrightarrow$ bijective sur $(0,1)$, donc il existe un inverse unique de Φ noté ϕ tel que

$$\phi:\mathbb{R}\longrightarrow(0,1).$$

Φ est bijective sur $(0,1)\Longleftrightarrow\phi=\Phi^{-1}$est bijective sur $\mathbb{R}$ et

$$\phi'\left(t\right)=\frac{1}{\Phi'\left(\phi\left(t\right)\right)}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha(\phi(t))}}}=\sqrt{\alpha\left(\phi\left(t\right)\right)}$$

$\phi\in C\left(\mathbb{R}\right)$ (car ϕ est bijective sur $\mathbb{R}$) et

$$0<\phi(t)<1\ \forall t\in\mathbb{R}\Longrightarrow\alpha\left(\phi\left(t\right)\right)>0\Rightarrow\phi'\in C\left(\mathbb{R}\right)$$

alors ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}$. Et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Phi(x) &= \lim_{x\to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}} = -\infty, \text{ car } \sqrt{\alpha} \text{ est } \mathbb{R}-\textit{admissible} \\
\lim_{x\to 1}\Phi(x) &= \lim_{x\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}} = +\infty, \text{ car } \sqrt{\alpha} \text{ est } \mathbb{R}-\textit{admissible}
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t\to-\infty}\phi(t) = 0, \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = 1.$$

Soit l'opérateur T_ϕ donné par

$$\begin{aligned}
T_\phi U &: \doteq U\circ\phi := V : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\
T_\phi^{-1} V &: \doteq V\circ\Phi := U : (0,1)\to\mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.$T_\phi(C_0[0,1]) = C_0(\mathbb{R})$ .En effet :
soit $U\in C_0[0,1]$ on a $\phi\in C(\mathbb{R})$ et $U\in C(0,1)\Longrightarrow U\circ\phi\in C(\mathbb{R})$ et de plus

$$\lim_{t\to+\infty}T_\phi U(t) = \lim_{t\to+\infty}(U\circ\phi)(t) = \lim_{x\to 1}U(x) = 0, \text{ car } U\in C_0[0,1]$$

$$\lim_{t\to-\infty}T_\phi U(t) = \lim_{t\to-\infty}(U\circ\phi)(t) = \lim_{x\to 0}U(x) = 0, \text{ car } U\in C_0[0,1]$$

alors

$$T_\phi(C_0[0,1]) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

Soit $V\in C_0(\mathbb{R})$ on a $\Phi\in C(0,1)$ et $V\in C(\mathbb{R})\Longrightarrow V\circ\Phi\in C(0,1)$ et de plus

$$\lim_{x\to 1}(V\circ\Phi)(x) = \lim_{t\to+\infty}(V)(t) = 0, \text{ car } V\in C_0(\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0}(V\circ\Phi)(x) = \lim_{t\to-\infty}(V)(t) = 0, \text{ car } V\in C_0(\mathbb{R})$$

donc

$$V\circ\Phi\in C_0[0,1]\Longrightarrow C_0(\mathbb{R})\subset T_\phi(C_0[0,1]).$$

Par conséquent

$$T_\phi(C_0[0,1]) = C_0(\mathbb{R})$$

2.$T_\phi(D(B_0)) = \{V\in C_0(\mathbb{R}), V \text{ différentiable}, V'\in C_0(\mathbb{R})\}$ .En effet :
soit $U\in D(B_0)\Longrightarrow U\in C_0[0,1]\Longleftrightarrow V := U\circ\phi\in C_0(\mathbb{R})$ d'après 1. dans le lemme 2.2.3.et pour

$$V'(t) := (U\circ\phi)'(t) = (U'\circ\phi)(t)\,\phi'(t) = \sqrt{(\alpha\circ\phi)(t)}\,(U'\circ\phi)(t).$$

Puisque $U \in C^1(0,1)$ et $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow V' \in C(\mathbb{R}) \Longrightarrow V$ différentiable sur $\mathbb{R}$, et de plus

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} V'(t) &= \lim_{t\to+\infty} (U\circ\phi)'(t) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \sqrt{(\alpha\circ\phi)(t)}\,(U'\circ\phi)(t) \\
&= \lim_{x\to 1} \sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0, \text{ car } U \in D(B_0)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} V'(t) &= \lim_{t\to-\infty} (U\circ\phi)'(t) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \sqrt{(\alpha\circ\phi)(t)}\,(U'\circ\phi)(t) \\
&= \lim_{x\to 0} \sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0, \text{ car } U \in D(B_0)
\end{aligned}$$

alors $V' \in C_0(\mathbb{R})$ d'où

$$V := U\circ\phi \in \{V \in C_0(\mathbb{R}), V \text{ différentiable}, V' \in C_0(\mathbb{R})\}$$

alors

$$T_\phi(D(B_0)) \subseteq \{V \in C_0(\mathbb{R}), V \text{ différentiable}, V' \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Soit $V \in \{V \in C_0(\mathbb{R}), V \text{ différentiable}, V' \in C_0(\mathbb{R})\}$, $V \in C_0(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow V\circ\Phi \in C_0[0,1]$ d'après 1. dans le lemme 2.2.3 et pour

$$(V\circ\Phi)'(x) = (V'\circ\Phi)(x)\,\Phi'(x) = \frac{(V'\circ\Phi)(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}$$

puisque $V' \in C_0(\mathbb{R})$ et $\Phi \in C(0,1)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \in C(0,1)$ donc

$$(V\circ\Phi)' \in C(0,1) \Longrightarrow V\circ\Phi \in C^1(0,1) \Longrightarrow V\circ\Phi \in C_0[0,1] \cap C^1(0,1)$$

et de plus

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \sqrt{\alpha(x)}\,(V\circ\Phi)'(x) &= \lim_{x\to 1} \sqrt{\alpha(x)}V'(\Phi(x))\,\Phi'(x) \\
&= \lim_{x\to 1} V'(\Phi(x)) = \lim_{t\to+\infty} V'(t) = 0, \text{ car } V' \in C_0(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\sqrt{\alpha(x)}\,(V\circ\Phi)'(x) &= \lim_{x\to 0}\sqrt{\alpha(x)}V'(\Phi(x))\,\Phi'(x)\\ &= \lim_{x\to 0}V'(\Phi(x)) = \lim_{t\to -\infty}V'(t) = 0,\ \text{ car } V'\in C_0(\mathbb{R})\end{aligned}$$

d'ou

$$V\circ\Phi\in D(B_0) := \left\{U\in C_0[0,1]\cap C^1(0,1),\lim_{x\to j}\sqrt{\alpha}(x)\,U'(x)=0,\ j=0,1\ \right\}$$

par conséquent

$$T_\phi(D(B_0)) = \{V\in C_0(\mathbb{R}), V \text{ différentiable}, V'\in C_0(\mathbb{R})\}.$$

3.$T_\phi(C[0,1]) = C(\bar{\mathbb{R}})$ .En effet :
soit $U\in C[0,1]$ alors $U\circ\phi\in C(\mathbb{R})$ et de plus

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}T_\phi U(t) &= \lim_{t\to+\infty}(U\circ\phi)(t) = \lim_{x\to 1}U(x) = \text{existe} \in C,\ \text{ car } U\in C[0,1]\\ \lim_{t\to-\infty}T_\phi U(t) &= \lim_{t\to-\infty}(U\circ\phi)(t) = \lim_{x\to 0}U(x) = \text{existe} \in C,\ \text{ car } U\in C[0,1]\end{aligned}$$

donc

$$T_\phi(C[0,1]) \subseteq C(\bar{\mathbb{R}})$$

Soit $V\in C(\bar{\mathbb{R}})$ alors $V\circ\Phi\in C(0,1)$ et de plus

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(V\circ\Phi)(x) &= \lim_{t\to+\infty}V(t)\in C \Longrightarrow \text{existe, car } V\in C(\bar{\mathbb{R}})\\ \lim_{x\to 0}(V\circ\Phi)(x) &= \lim_{t\to-\infty}V(t)\in C \Longrightarrow \text{existe, car } V\in C(\bar{\mathbb{R}})\end{aligned}$$

on a

$$V\circ\Phi\in C[0,1]\Longrightarrow C(\bar{\mathbb{R}})\subset T_\phi(C[0,1])$$

par conséquent

$$T_\phi(C[0,1]) = C(\bar{\mathbb{R}}).$$

4.$T_\phi(D(B_\infty)) = \left\{V\in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ différentiable}, V'\in C(\bar{\mathbb{R}})\right\}$ .En effet :
soit $U\in D(B_\infty)\Longrightarrow U\in C[0,1]\Longleftrightarrow V := U\circ\phi\in C(\bar{\mathbb{R}})$ (d'après 3.dans le lemme 2.2.3) et pour

$$V'(t) := (U\circ\phi)'(t) = \sqrt{\alpha\circ\phi(t)}U'\circ\phi(t)$$

puisque $U \in C^1(0,1)$ et ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}$ alors $V := U \circ \phi$ est différentiable sur $\mathbb{R} \Longrightarrow V' \in C(\mathbb{R})$ et de plus

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} V'(t) &= \lim_{t\to+\infty} (U\circ\phi)'(t) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \sqrt{(\alpha\circ\phi)(t)}\,(U'\circ\phi)(t) \\
&= \lim_{x\to 1}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) \in C, \text{ car } U \in D(B_\infty)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} V'(t) &= \lim_{t\to-\infty} (U\circ\phi)'(t) \\
&= \lim_{t\to-\infty} \sqrt{(\alpha\circ\phi)(t)}\,(U'\circ\phi)(t) \\
&= \lim_{x\to 0}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) \in C, \text{ car } U \in D(B_\infty)
\end{aligned}$$

alors $V' \in C(\bar{\mathbb{R}})$ d'où $V := U\circ\phi \in \left\{V \in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ différentiable}, V' \in C(\bar{\mathbb{R}})\right\}$ donc

$$T_\phi(D(B_\infty)) \subseteq \left\{V \in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ différentiable}, V' \in C(\bar{\mathbb{R}})\right\}.$$

Soit $V \in \left\{V \in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ différentiable}, V' \in C(\bar{\mathbb{R}})\right\}$, $V \in C(\bar{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow V\circ\Phi \in C[0,1]$ (d'après 3.dans le lemme 2.2.3) et pour

$$(V\circ\Phi)'(x) = \frac{(V'\circ\Phi)(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}$$

$V' \in C(\bar{\mathbb{R}})$ et $\Phi \in C(0,1)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \in C(0,1) \Longrightarrow (V\circ\Phi)' \in C(0,1) \Longrightarrow V\circ\Phi \in C^1(0,1)$ $\Longrightarrow V\circ\Phi \in C_0[0,1] \cap C^1(0,1)$ et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\sqrt{\alpha(x)}\,(V\circ\Phi)'(x) &= \lim_{x\to 1}\sqrt{\alpha(x)}V'(\Phi(x))\,\Phi'(x) \\
&= \lim_{x\to 1} V'(\Phi(x)) \\
&= \lim_{t\to+\infty} V'(t) \in C, \text{ car } V' \in C(\bar{\mathbb{R}})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\sqrt{\alpha(x)}\,(V\circ\Phi)'(x) &= \lim_{x\to 0}\sqrt{\alpha(x)}V'(\Phi(x))\,\Phi'(x) \\
&= \lim_{x\to 0} V'(\Phi(x)) \\
&= \lim_{t\to-\infty} V'(t) \in C, \text{ car } V' \in C(\bar{\mathbb{R}})
\end{aligned}$$

alors

$$V \circ \Phi \in D(B_\infty) := \left\{ U \in C_0[0,1] \cap C^1(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x)\, U'(x) \in C,\ j = 0,1 \right\}$$

par conséquent

$$T_\phi(D(B_\infty)) = \left\{ V \in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ différentiable}, V' \in C(\bar{\mathbb{R}}) \right\}.$$

■

2.3 Résultats principaux

Théorème 2.3.1 *Si* α, β, γ *vérifient* $(2,1,1)$, $(2,1,2)$ *et* $(2,1,3)$ *alors l'opérateur* $(C, D(C))$ *donné par*

$$\begin{aligned} D(C) &:= \left\{ U \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C_0[0,1] \right\} \\ CU &:= \alpha U'' + \beta U' + \gamma U, U \in D(C) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$.

Preuve. D'après le corollaire 1.4.2 l'opérateur $(C_0, D(C_0))$ donné par

$$\begin{aligned} D(C_0) &:= \left\{ U \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}), U'' + bU' + cU \in C_0(\mathbb{R}) \right\} \\ C_0 U &:= U'' + bU' + cU, U \in D(C_0) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C_0(\mathbb{R})$ et il existe $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(C_0) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0\}$ si b, c sont réelles, bornées et uniformément continues.
D'autre part, soit l'operateur $(C_1, D(C_1))$ donné par

$$\begin{aligned} D(C_1) &:= \left\{ \begin{array}{c} V \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}), \lim\limits_{t\to j} V''(t) + \dfrac{2\beta(\phi(t)) - \alpha'(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} V'(t) \\ + \gamma \circ \phi(t)\, V(t) = 0, j = \{-\infty, +\infty\} \end{array} \right\} \\ C_1 V &:= V'' + \frac{2\beta \circ \phi - \alpha' \circ \phi}{2\sqrt{\alpha \circ \phi}} V' + (\gamma \circ \phi) V, V \in D(C_1) \end{aligned}$$

on a pour

$$b := \frac{2\beta \circ \phi - \alpha' \circ \phi}{2\sqrt{\alpha \circ \phi}}, c := (\gamma \circ \phi)$$

et par la hypothèse on a $0 \leq \phi(t) \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$, $\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$, $\gamma \in C[0,1]$ et $[0,1]$ est un intervalle compact dans $\mathbb{R}$ alors b, c sont bornées, et il est clair que b, c sont réelles, et

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{(\beta \circ \phi)(t)}{\sqrt{\alpha \circ \phi(t)}} = \lim_{x\to i} \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} = \text{existe tel que } i = 0,1$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\alpha' \circ \phi}{2\sqrt{\alpha \circ \phi}}(t) = \lim_{x\to i} \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}(x) = \text{existe tel que } i = 0,1$$

alors

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{2\beta \circ \phi - \alpha' \circ \phi}{2\sqrt{\alpha \circ \phi}} = \text{existe}$$

et

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\gamma \circ \phi)(t) = \lim_{x\to i} \gamma(x) = \text{existe tel que } i = 0,1$$

on a

$$b, c \in C(\mathbb{R})$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} b(t) \text{ est existe}$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} c(t) \text{ est existe}$$

alors b, c est uniformément continue dans $\mathbb{R}$. Donc $(C_1, D(C_1))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$ pour

$$\rho(C_1) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0\}.$$

On montre que $T_\phi(D(C)) = D(C_1)$.
En effet : soit $U \in D(C) \Longrightarrow U \in C_0[0,1] \Longleftrightarrow U \circ \phi \in C_0(\mathbb{R})$ (lemme 2.2.3)

$$U \in C^2(0,1) \Longrightarrow U \circ \phi \in C^2(\mathbb{R})$$

car

$$\begin{aligned}
(U \circ \phi)''(t) &= \left((U' \circ \phi)(t)\sqrt{(\alpha \circ \phi)(t)}\right)' \\
&= (\alpha \circ \phi)(t)(U'' \circ \phi)(t) + \frac{(\alpha' \circ \phi)(t)}{2}(U' \circ \phi)(t) \\
&= (\alpha \circ \phi)(t)(U'' \circ \phi)(t) + \frac{(\alpha' \circ \phi)}{2\sqrt{(\alpha \circ \phi)}}\sqrt{(\alpha \circ \phi)}
\end{aligned}$$

où $U'' \in C(0,1), \phi \in C(\mathbb{R}), \alpha$ vérifie (2.1.1) et (2.1.2) donc

$$(U \circ \phi)'' \in C(\mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow V := U \circ \phi \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$$

d'autre part

$$\lim_{t \to \pm\infty} V''(t) + \frac{2\beta(\phi(t)) - \alpha'(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} V'(t) + \gamma(\phi(t)) V =$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (U \circ \phi)''(t) + \frac{2\beta(\phi(t)) - \alpha'(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} (U \circ \phi)'(t) + \gamma(\phi(t))(U \circ \phi) =$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\alpha \circ \phi)(t)(U'' \circ \phi)(t) + \beta \circ \phi(t)(U' \circ \phi)(t) + \gamma \circ \phi(t) U \circ \phi(t) =$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)\phi(t) = \lim_{x \to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, j = 0, 1$$

on obtient

$$V := U \circ \phi \in D(C_1)$$

alors

$$T_\phi(D(C)) \subseteq D(C_1).$$

Soit $V \in D(C_1) \Longrightarrow V \in C_0(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow V \circ \Phi \in C_0[0,1]$ (lemme2.2.3)

$$U \in C^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow V \circ \Phi \in C^2(0,1)$$

car

$$(V \circ \Phi)''(x) = \left(\frac{(V' \circ \Phi)(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}\right)' = \frac{(V'' \circ \Phi)(x)}{\alpha(x)} - \frac{\alpha'(x)}{2\alpha(x)\sqrt{\alpha(x)}}(V' \circ \Phi)(x)$$

et $V'' \in C(\mathbb{R}), \Phi \in C(0,1), \alpha(x) > 0\ \forall x \in (0,1)$ et $\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}} \in C[0,1] \Longrightarrow (V \circ \Phi)'' \in C(0,1) \Longrightarrow$

$$U := V \circ \Phi \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1)$$

et

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) \\
= & \lim_{t \to \pm\infty} V''(t) + \frac{2\beta(\phi(t)) - \alpha'(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} V'(t) + \gamma(\phi(t)) V \\
= & \ 0, j = 0, 1
\end{aligned}$$

d'où $U := V \circ \Phi \in D(C)$. Donc

$$\begin{array}{rcl} T_\phi(D(C)) &=& D(C_1) \\ T_\phi(C_0[0,1]) &=& C_0(\mathbb{R}) \\ T_\phi(C) &=& C_1 \end{array}$$

si $V \in D(C_1)$ alors $V \circ \Phi \in D(C)$ et

$$C_1 V = (CU) \circ \phi = T_\phi(CU) \Longleftrightarrow \left(T_\phi^{-1} \circ C_1\right) V = CU$$

$$\Longleftrightarrow \left(T_\phi^{-1} \circ C_1\right) U \circ \phi = CU \Longleftrightarrow \left(T_\phi^{-1} \circ C_1 \circ T_\phi\right) U = CU$$

$$\Longleftrightarrow T_\phi^{-1} \circ C_1 \circ T_\phi = C$$

$$\Longleftrightarrow C_1 = T_\phi \circ C \circ T_\phi^{-1}.$$

D'après le théorème 1.3.5 $(C, D(C))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$.
Pour $\rho(C)$:
Soit $\lambda \in \rho(C_1)$ alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda V - C_1 V = g \in C_0(\mathbb{R}) \\ V \in D(C_1) \end{array} \right.$$

admet une solution unique $\Longleftrightarrow$ le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda U - CU = f \in C_0[0,1] \\ U \in D(C) \end{array} \right.$$

admet une solution unique (avec le même λ) $\Longleftrightarrow$ $\lambda \in \rho(C)$ donc il existe une constante Λ_0 tel que

$$\rho(C) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0\}, \Lambda_0 \in \mathbb{R}$$

■

Théorème 2.3.2 *Si α, β, γ vérifient* (2.1.1), (2.1.2) *et* (2.1.3) *et de plus*

$$\beta(0) = \beta(1) = 0$$

alors l'opérateur $(A, D(A))$ donné par

$$\begin{aligned} D(A) &: = \left\{ U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x \to j} AU(x) = 0, \ j = 0,1. \right\} \\ AU &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U, U \in D(A) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Preuve. D'après le théorème 2.3.1 et le théorème 1.3.2 on a pour $f \in C_0[0,1]$ et pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand alors le problème

$$\begin{cases} \lambda_1 V - \alpha V'' - \beta V' = f \\ V \in D(C) = \{V \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha V'' + \beta V' \in C_0[0,1] \ \} \end{cases}$$

admet une solution unique et il existe les constantes $k' > 0, \Lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \|V\|_\infty &\leq \frac{k'}{1+|\lambda|} \|f\|_\infty \\ \rho(C) &\supset \{\lambda_1 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda_1 > \Lambda_0\}. \end{aligned}$$

Maintenant, montrons que le problème

$$\lambda U - \alpha U'' - \beta U' = g$$

$$U \in D(M) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \\ \lim_{x \to j}(\alpha U'' + \beta U'(x) = 0, j = 0,1. \end{array} \right\}$$

admet une solution unique, $\forall g \in C[0,1]$ et il existe la constante $k > 0$ tel que

$$\|U\|_\infty \leq \frac{k}{1+|\lambda|} \|g\|_\infty$$

et trouvé $\rho(M)$

pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand.
En utilisant le changement de variable

$$U(x) = V(x) + \frac{(1-x)g(0) + xg(1)}{\lambda}, \lambda \neq 0$$

tel que $V \in D(C)$, alors

$$U(0) = V(0) + \frac{(1-0)g(0) + 0g(1)}{\lambda} = \frac{g(0)}{\lambda} \in C[0,1]$$

$$U(1) = V(1) + \frac{(1-1)\,g(0) + 1g(1)}{\lambda} = \frac{g(1)}{\lambda} \in C[0,1]$$

et

$$\lambda U - \alpha U'' - \beta U' = g \Longleftrightarrow$$

$$\lambda \left(V(x) + \frac{(1-x)\,g(0) + xg(1)}{\lambda} \right) - \alpha(x) \left(V(x) + \frac{(1-x)\,g(0) + xg(1)}{\lambda} \right)''$$

$$-\beta(x) \left(V(x) + \frac{(1-x)\,g(0) + xg(1)}{\lambda} \right)' = g(x).$$

On obtient alors

$$\lambda V(x) - \alpha(x)\, V''(x) - \beta(x)\, V'(x) =$$

$$g(x) - [(1-x)\,g(0) + xg(1)] + \beta(x)\,\frac{g(1) - g(0)}{\lambda}$$

on pose

$$f_\lambda(x) = g(x) - [(1-x)\,g(0) + xg(1)] + \beta(x)\,\frac{g(1) - g(0)}{\lambda}$$

alors

$$\lambda V(x) - CV(x) = f_\lambda(x).$$

Nous montrons facilement que

$$f_\lambda \in C_0[0,1]$$

En effet, il est clair $f_\lambda \in C(0,1)$ et

$$\begin{aligned} f_\lambda(1) &= g(1) - g(1) + \beta(1)\,\frac{g(1) - g(0)}{\lambda} = 0 \\ f_\lambda(0) &= g(0) - g(0) + \beta(0)\,\frac{g(1) - g(0)}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

car $\beta(0) = \beta(1) = 0$.
On montre que $U \in D(M)$.
En effet : $V \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1) \Longleftrightarrow U \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to j} MU(x) &= \lim_{x \to j} (\alpha U'' - \beta U')(x) \\ &= \lim_{x \to j} \alpha(x)\, V''(x) + \beta(x)\, V'(x) + \beta(x)\,\frac{g(1) - g(0)}{\lambda} \\ &= 0, j = 0, 1 \end{aligned}$$

$$\text{car } \beta(0) = \beta(1) = 0$$

Par conséquent, $U \in D(M)$.
Donc d'après le théorème 2.3.1 il existe une solution unique $V \in D(C)$ et de même une

solution unique $U \in D(M)$.
On montre que $\|U\|_\infty \le \frac{k}{1+|\lambda|}\|g\|_\infty$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda\|_\infty &\le \max_{x\in[0,1]}|g(x)-[(1-x)g(0)+xg(1)]| \\
&\quad + \max_{x\in[0,1]}\left|\beta(x)\frac{g(1)-g(0)}{\lambda}\right|
\end{aligned}$$

$$\le \|g\|_\infty + \max_{x\in[0,1]}|(1-x)g(0)| + \max_{x\in[0,1]}|xg(1)| + 2\frac{\|\beta\|_\infty}{|\lambda|}\|g\|_\infty$$

pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand, on a $\frac{1}{|\lambda|}\le 1$ donc

$$\|f_\lambda\|_\infty \le (3+2\|\beta\|_\infty)\|g\|_\infty \tag{2.2.2}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}\right| &\le \frac{|g(0)|+|g(1)|}{|\lambda|} \\
&\le \frac{|g(0)|+|g(1)|}{1+|\lambda|}\frac{1+|\lambda|}{|\lambda|} \le 2\frac{|g(0)|+|g(1)|}{1+|\lambda|}
\end{aligned}$$

alors

$$\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}\right| \le 4\frac{\|g\|_\infty}{1+|\lambda|} \tag{2.2.3}$$

donc d'après le théorème 2.3.1

$$\|V\|_\infty \le \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty$$

d'où

$$\|U\|_\infty - \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}\right| \le \|V\|_\infty \le \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty$$

d'aprés (2.2.2) et (2.2.3)

$$\begin{aligned}
\|U\|_\infty &\le \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty + \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{\lambda}\right| \\
\|U\|_\infty &\le \frac{k'}{1+|\lambda|}[(3+2\|\beta\|_\infty)\|g\|_\infty] + 4\frac{\|g\|_\infty}{1+|\lambda|} \\
\|U\|_\infty &\le \frac{k'(3+2\|\beta\|_\infty)+4}{1+|\lambda|}\|g\|_\infty
\end{aligned}$$

alors

$$k = k'\left(3 + 2\left\|\beta\right\|_{\infty}\right) + 4.$$

Pour trouver $\rho(M)$
soit $\lambda_1 \in \rho(C)$ alors

le problème

$$\lambda_1 V - \alpha V'' - \beta V' = f_\lambda \in C_0\left[0,1\right]$$
$$V \in D\left(C\right)$$

admet une solution unique

alors

le problème

$$\lambda U - \alpha U'' - \beta U' = g \in C\left[0,1\right]$$
$$U \in D\left(M\right)$$

admet une solution unique

avec $\lambda = \lambda_1 \Longrightarrow \rho(C) \subseteq \rho(M)$ et de plus $|\lambda| \geq 1, \lambda \neq 0$ alors

$$\rho(M) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0, |\lambda| \geq 1\}.$$

Finalement le problème

$$\begin{cases} \lambda U - \alpha U'' - \beta U' = g \\ U \in D\left(M\right) \end{cases}$$

admet une solution unique et il existe une constante Λ_0 tel que

$$\begin{aligned} \left\|U\right\|_{\infty} &\leq \frac{k}{1+|\lambda|}\left\|g\right\|_{\infty} \\ \rho(M) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0, |\lambda| \geq 1\}, \Lambda_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

alors l'opérateur $(M, D(M))$ donné par

$$\begin{aligned} D(M) &:= \left\{U \in C\left[0,1\right] \cap C^2\left(0,1\right), \lim_{x\to j} MU(x) = 0,\ j = 0,1\right\} \\ MU &:= \alpha U'' + \beta U', U \in D\left(M\right) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C\left[0,1\right]$.
D'autre part $\forall \gamma \in C\left[0,1\right]$ alors

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{U \in C\left[0,1\right] \cap C^2\left(0,1\right), \lim_{x\to j}\left(\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\right)(x) = 0,\ j = 0,1.\right\} \\ &= \left\{U \in C\left[0,1\right] \cap C^2\left(0,1\right), \lim_{x\to j}\left(\alpha U'' + \beta U'\right)(x) \in C,\ j = 0,1.\right\} \end{aligned}$$

d'après le théorème 1.4.1 (pour la génération) et [11] (pour l'analyticité) on a

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x\to j} (\alpha U'' + \beta U')(x) = 0,\ j = 0,1. \right\} \\ &= D(M) \end{aligned}$$

donc $(M, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$ .Et pour $\gamma \in C[0,1]$, γU est un opérateur linéaire borné, et d'après le théorème 1.3.3 on a $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$ avec $\rho(A) = \rho(M)$. ■

Théorème 2.3.3 *Si α, β, γ vérifient* (2.1.1), (2.1.2) *et* (2.1.3) *et de plus*

$$\gamma(0) = \gamma(1)$$

alors l'opérateur $(P, D(P))$ donné par

$$\begin{aligned} D(P) &: = \{ U \in C_\pi[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C_\pi[0,1] \} \\ PU &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U, U \in D(A) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C_\pi[0,1]$.

Preuve. D'après le théorème 2.3.1 et le théorème 1.3.2 pour $f \in C_0[0,1]$ et pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand alors le problème

$$\begin{cases} \lambda V - \alpha V'' - \beta V' - \gamma V = f \\ V \in D(C) \end{cases}$$

admet une solution unique et il existe une constante $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$, $k' > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|V\|_\infty &\leq \frac{k'}{1+|\lambda|} \|f\|_\infty \\ \rho(C) &\supset \{ \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0 \}. \end{aligned}$$

Maintenant, montrons que le problème

$$\begin{cases} \lambda U - \alpha U'' - \beta U' - \gamma U = g \\ U \in D(P) \end{cases}$$

admet une solution unique $\forall g \in C_\pi[0,1]$ et il existe une constante $k > 0$ tel que

$$\|U\|_\infty \leq \frac{k}{1+|\lambda|} \|g\|_\infty$$

et trouve $\rho(P)$.

Pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand, en utilisant le changement de variable

$$U(x) = V(x) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}$$

tel que $V \in D(C)$ et $\lambda \neq \gamma(0)$ alors

$$\begin{aligned}
U(0) &= V(0) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} = \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} \\
U(1) &= V(1) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(1)} = \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow U \in C_\pi[0,1].$$

et

$$\lambda U - \alpha U'' - \beta U' - \gamma U = g \Longleftrightarrow$$

$$\begin{gathered}
\lambda\left(V(x) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right) - \alpha(x)\left(V(x) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right)'' \\
-\beta(x)\left(V(x) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right)' - \gamma(x)\left(V(x) + \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right) = g(x)
\end{gathered}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
& \lambda V(x) - \alpha(x) V''(x) - \beta(x) V'(x) - \gamma(x) V(x) \\
= \;& g(x) - \left[\lambda \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right] + \gamma(x) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}.
\end{aligned}$$

Posons

$$f_\lambda(x) = g(x) - \left[\lambda \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right] + \gamma(x) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}$$

alors

$$\lambda V(x) - PV(x) = f_\lambda(x).$$

Nous montrons facilement que

$$f_\lambda \in C_0[0,1].$$

En effet, il est clair que $f_\lambda \in C(0,1)$ et

$$\begin{aligned}
f_\lambda(1) &= g(0) - \left[\lambda \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right] + \gamma(0) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} = 0 \\
f_\lambda(0) &= g(1) - \left[\lambda \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right] + \gamma(1) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} = 0
\end{aligned}$$

car $\gamma(0) = \gamma(1)$ et $g(1) = g(0)$.
On montre que $U \in D(P)$.
En effet :

$$V \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1) \Longleftrightarrow U \in C_\pi[0,1] \cap C^2(0,1)$$

et

$$\begin{aligned} (\alpha U'' - \beta U' - \gamma U)(0) &= \alpha(0) V''(0) + \beta(0) V'(0) + \gamma(0) V(0) \\ +\gamma(0) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} &= \gamma(0) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha U'' - \beta U' - \gamma U)(1) &= \alpha(1) V''(1) + \beta(1) V'(1) + \gamma(1) V(1) \\ +\gamma(1) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} &= \gamma(0) \frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} \end{aligned}$$

$$\text{car } \gamma(0) = \gamma(1) \text{ et } g(1) = g(0)$$

donc $PU \in C_\pi[0,1] \Longrightarrow U \in D(P)$ pour $\lambda \neq \gamma(0)$.
Maintenant soient $V_1, V_2 \in D(P)$, vérifions

$$\lambda V - PV = g \in C_\pi[0,1]$$

et soit

$$w_i(t) = V_i(\phi(t)), t \in \mathbb{R}, i = 1, 2$$

supposons $w = w_1 - w_2$ on a

$$\begin{aligned} &\lambda w_i(t) - \left[w_i''(t) - \frac{\alpha'(\phi(t)) - 2\beta(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} w_i'(t) + \gamma(\phi(t)) w_i(t) \right] \\ = \ & g(\phi(t)) \ , t \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \end{aligned}$$

alors

$$\lambda w(t) - \left[w''(t) - \frac{\alpha'(\phi(t)) - 2\beta(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} w'(t) + \gamma(\phi(t)) w(t) \right] = 0, t \in \mathbb{R}$$

avec $w \in C^2(\mathbb{R})$, d'après [23] $\exists!$ solution avec $\sup_{t\in\mathbb{R}} |w(t)| \leq \frac{k}{1+|\lambda|} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t)| = 0$ (car $F = 0$) $\Longrightarrow$ $w = 0 \Longrightarrow V_1 = V_2$.
Donc d'après le théorème 2.3.1 il existe une solution unique $V \in D(C) \Longrightarrow$ il existe une solution unique $U \in D(P)$.

On montre que $\|U\|_\infty \leq \frac{k}{1+|\lambda|}\|g\|_\infty$.
En effet : pour $\operatorname{Re}\lambda$ suffisamment grand, tel que $|\lambda| > 3\|\gamma\|_\infty$ on a

$$\begin{aligned}|\lambda| - |\gamma(0)| &\leq |\lambda - \gamma(0)| \\ &\Rightarrow \frac{1}{|\lambda| - |\gamma(0)|} \geq \frac{1}{|\lambda - \gamma(0)|}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{\gamma(x) - \gamma(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| &\leq \frac{|\gamma(x) - \gamma(0)|}{|\lambda| - |\gamma(0)|} \leq \frac{|\gamma(x)| + |\gamma(0)|}{3\|\gamma\|_\infty - |\gamma(0)|} \\ &\leq \frac{|\gamma(x)| + 2|\gamma(0)| - |\gamma(0)|}{3\|\gamma\|_\infty - |\gamma(0)|} \leq 1\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}|f_\lambda(x)| &\leq |g(x)| + \left|\gamma(x)\frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)} - \lambda\frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| \\ &\leq |g(x)| + \left|\frac{\gamma(x) - \gamma(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| |g(0)|\end{aligned}$$

alors

$$\|f_\lambda\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty . \tag{2.2.4}$$

Et pour choisir $|\lambda| > 3\|\gamma\|_\infty + 1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| &\leq \frac{|g(0)|}{|\lambda| - |\gamma(0)|} \leq \frac{|g(0)|}{1+|\lambda|}\frac{1+|\lambda|}{|\lambda| - |\gamma(0)|} \\ &\leq \frac{|g(0)|}{1+|\lambda|}\left(1 + \frac{1+|\gamma(0)|}{|\lambda| - |\gamma(0)|}\right) \leq 2\frac{|g(0)|}{1+|\lambda|}\end{aligned}$$

alors

$$\left|\frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| \leq 2\frac{\|g\|_\infty}{1+|\lambda|} \tag{2.2.5}$$

donc

$$\begin{aligned}\|V\|_\infty &\leq \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty \\ \|U\|_\infty - \left|\frac{g(0)}{\lambda - \gamma(0)}\right| &\leq \|V\|_\infty \leq \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty\end{aligned}$$

donc d'après (2.2.4) et (2.2.5)

$$\begin{aligned}
\|U\|_\infty &\leq \frac{k'}{1+|\lambda|}\|f_\lambda\|_\infty + \left|\frac{g(0)}{\lambda-\gamma(0)}\right| \\
\|U\|_\infty &\leq \frac{k'}{1+|\lambda|}[2\|g\|_\infty] + 2\frac{\|g\|_\infty}{1+|\lambda|} \\
\|U\|_\infty &\leq \frac{2k'+2}{1+|\lambda|}\|g\|_\infty
\end{aligned}$$

alors

$$k = 2k' + 2.$$

Pour $\rho(P)$:

soit $\lambda \in \rho(C)$ alors

le problème

$$\begin{aligned}
\lambda V - \alpha V'' - \beta V' - \gamma V &= f_\lambda \in C_0[0,1] \\
V &\in D(C)
\end{aligned}$$

admet une solution unique

alors

le problème

$$\begin{aligned}
\lambda_1 U - \alpha U'' - \beta U' - \gamma U &= g \in C_\pi[0,1] \\
U &\in D(P)
\end{aligned}$$

admet une solution unique

avec $\lambda = \lambda_1 \Longrightarrow \rho(C) \subseteq \rho(P)$ et de plus $|\lambda| > 3\|\gamma\|_\infty + 1$ on obtient

$$\rho(P) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0, |\lambda| > 3\|\gamma\|_\infty + 1\}.$$

Finalement le problème

$$\begin{cases} \lambda U - \alpha U'' - \beta U' - \gamma U = g \\ U \in D(P) \end{cases}$$

admet une solution unique et il existe une constante Λ_0 tel que

$$\begin{aligned}
\|U\|_\infty &\leq \frac{k}{1+|\lambda|}\|g\|_\infty \\
\rho(P) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0, |\lambda| > 3\|\gamma\|_\infty + 1\}, \Lambda_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Alors $(P, D(P))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_\pi[0,1]$. ■

Théorème 2.3.4 *Si α, β, γ vérifient* (2.1.1), (2.1.2) *et* (2.1.3) *alors le domaine $D(C)$ présenté dans le théorème 2.3.1 coïncide avec*

$$\left\{ \begin{array}{c} U \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) = 0 \\ , \lim_{x\to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, \ j = 0, 1. \end{array} \right\}$$

Preuve. D'après [25] la famille des opérateurs linéaires

$$T_1(t) U(x) := U(x+t), t \in \mathbb{R}, U \in C_0(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}.$$

est un C_0-groupe sur $C_0(\mathbb{R})$, avec $\|T_1(t)\| = 1$ et avec son générateur $(A_1, D(A_1))$ donné par

$$\begin{aligned} D(A_1) &: = \{U \in C_0(\mathbb{R}), \exists U' \in C_0(\mathbb{R})\} \\ A_1 U &: = U', U \in D(A_1) \end{aligned}$$

si α vérifies les suppositions du théorème 2.3.4 et du lemme 2.2.3 cela implique la projection

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$$

l'inverse de Φ donné par (2.2.1) induit l'opérateur

$$\begin{aligned} T_\phi &: = U \circ \phi \\ T_\phi &: C_0[0,1] \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $C_0[0,1]$ à $C_0(\mathbb{R})$, d'après le lemme 2.2.3 et théorème 1.2.8

$$S_1(t) := T_\phi^{-1} T_1(t) T_\phi, t \in \mathbb{R}$$

est un C_0-groupe sur $C_0[0,1]$, avec le générateur $(B_0, D(B_0))$ donne par

$$\begin{aligned} D(B_0) &: = \left\{ U \in C_0[0,1] \cap C^1(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x) U'(x) = 0, \ j = 0, 1 \right\} \\ B_0 U &: = (T_\phi^{-1} A_1 T_\phi) U = T_\phi^{-1}[(U \circ \phi)'] = T_\phi^{-1}\left[(U' \circ \phi)\sqrt{\alpha(\phi)}\right] \\ &= T_\phi^{-1}\left[(U'\sqrt{\alpha})(\phi)\right] = \sqrt{\alpha} U'. \end{aligned}$$

d'après [24] nous déduisons que $(B_0^2, D(B_0^2))$ donné par

$$\begin{array}{rcl} D\left(B_0^2\right) & : & = \left\{U \in D\left(B_0\right), \sqrt{\alpha}U' \in D\left(B_0\right) \right\} \\ & : & = \left\{ \begin{array}{c} U \in C_0\left[0,1\right] \cap C^2\left(0,1\right), \sqrt{\alpha}U' \in C_0\left[0,1\right] \\ , \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' \in C_0\left[0,1\right] \end{array} \right\} \\ B_0^2 U & : & = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' \end{array}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$. Pour $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$ alors

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' = \alpha U'' + \sqrt{\alpha}\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}U' \in C_0[0,1]$$

$$\lim_{x \to j} \sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to j} \sqrt{\alpha(x)}\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}(x)\, U'(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to j} \alpha(x)\, U''(x) = 0, j = 0, 1$$

alors

$$D\left(B_0^2\right) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x \to j} \sqrt{\alpha}(x)\, U'(x) = 0, \\ \lim_{x \to j} \alpha(x)\, U''(x) = 0, j = 0, 1 \end{array} \right\}$$

et

$$\begin{array}{rcl} B_0^2 U & = & \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' = \alpha U'' + \sqrt{\alpha}\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}U' \\ & = & \alpha U'' + \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}B_0 U, U \in D\left(B_0^2\right). \end{array}$$

Soit $\tilde{A}$ défini comme

$$\tilde{A}U = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U$$

avec domaine $D\left(\tilde{A}\right) := D\left(B_0^2\right)$ alors

$$\tilde{A}U = B_0^2 U + \frac{2\beta - \alpha'}{2\sqrt{\alpha}}B_0 U + \gamma U$$

et soit $\bar{A}$ défini comme

$$\bar{A}U = B_0^2 U + \frac{2\beta - \alpha'}{2\sqrt{\alpha}}B_0 U$$

car $\dfrac{2\beta - \alpha'}{2\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$ d'après [3] on obtient que $\bar{A}$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$.

En effet : depuis que B_0^2 engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$ et $\dfrac{\beta-\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}B_0$ est B_0^2 -borné avec B_0^2 -borne égal à 0, l'assertion suit du théorème 1.2.9 et [22] (voir aussi [21]).

D'autre part $\gamma \in C[0,1]$ alors γU est un opérateur linéaire borné et $\bar{A}$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$ alors d'après le théorème 1.3.3 $\tilde{A}$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$.

D'après les conditions (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3) nous prouvons que $D\left(\tilde{A}\right)$ coïncide avec

$$D(S) := \left\{ \begin{array}{c} U \in C_0[0,1] \cap C^2(0,1), \lim\limits_{x\to j}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0 \\ , \lim\limits_{x\to j} \ (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, \ j = 0,1. \end{array} \right\}.$$

En effet,

Soit $U \in D\left(\tilde{A}\right)$ alors

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to j} \ \alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) \\ = & \lim_{x\to j}\alpha(x)U''(x) + \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) + \gamma(x)U(x) \\ = & \ 0, \ j = 0,1. \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to j} \ \alpha(x)U''(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to j}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0\,(\,j=0,1.)$, $U \in C_0[0,1]$, $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$ alors

$$D\left(\tilde{A}\right) \subseteq D(S).$$

Soit $U \in D(S)$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\to j}\alpha(x)U''(x) &= \lim_{x\to j} \ (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) \\ &\quad -\lim_{x\to j}\frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) - \gamma(x)U(x) \\ &= 0, \ j = 0,1. \end{aligned}$$

car

$$\lim_{x\to j}(\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, \ j = 0,1$$

et

$$\lim_{x\to j}\sqrt{\alpha(x)}U'(x) = 0, \ j = 0,1$$

et $U(1) = U(0) = 0, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1] \Longrightarrow U \in D\left(\tilde{A}\right)$.
Par conséquent :

$$D\left(\tilde{A}\right) = D(S).$$

Finalement $\left(\tilde{A}, D\left(\tilde{A}\right)\right)$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$ et d'après le théorème 2.3.1 $(C, D(C))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C_0[0,1]$ et $D\left(\tilde{A}\right) \subseteq D(C)$ et $\tilde{A}U = CU$ sur $D\left(\tilde{A}\right)$ donc $D(C) = D\left(\tilde{A}\right)$ ∎

Théorème 2.3.5 *Si α, β, γ vérifient* (2.1.1), (2.1.2) *et* (2.1.3) *et*

$$\beta(0) = \beta(1) = 0$$

alors le domaine $D(A)$ présenté dans le théorème 2.3.2 coïncide avec

$$D(A_2) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim\limits_{x \to j} \sqrt{\alpha(x)}U'(x) \in C \\ , \lim\limits_{x \to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) \in C, \ j = 0, 1. \end{array} \right\}$$

Preuve. D'après [24], la famille des opérateurs linéaires

$$T_2(t)U(x) := U(x+t), t \in \mathbb{R}, U \in C\left(\bar{\mathbb{R}}\right), x \in \mathbb{R}.$$

est un C_0-groupe sur $C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$, avec son générateur $(L, D(L))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L) &: = \left\{U \in C\left(\bar{\mathbb{R}}\right), \exists U' \in C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)\right\} \\ LU &: = U', U \in D(L). \end{aligned}$$

Si α vérifie les suppositions du théorème 2.3.5 et lemme 2.2.3 impliquent que la projection

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$$

inverse de Φ donné par (2.2.1) induit l'opérateur

$$\begin{aligned} T_\phi &: = U \circ \phi \\ T_\phi &: \ C[0,1] \longrightarrow C\left(\bar{\mathbb{R}}\right) \end{aligned}$$

est isomorphisme de $C[0,1]$ à $C\left(\bar{\mathbb{R}}\right)$, d'après le lemme 2.2.3 et le théorème 1.2.8

$$S_2(t) := T_\phi^{-1} T_2(t) T_\phi, t \in \mathbb{R}$$

est un C_0-groupe sur $C[0,1]$, avec son générateur $(B_\infty, D(B_\infty))$ donné par

$$\begin{aligned}
D(B_\infty) &: = \left\{ U \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x) U'(x) \in C,\ j = 0,1 \right\} \\
B_\infty U &: = T_\phi^{-1} L T_\phi = T_\phi^{-1}\left[(U\circ\phi)'\right] \\
&= T_\phi^{-1}\left[(U'\circ\phi)\sqrt{\alpha(\phi)}\right] \\
&= T_\phi^{-1}\left[(U'\sqrt{\alpha})(\phi)\right] = \sqrt{\alpha}U'
\end{aligned}$$

d'après [25] et [21] nous déduisons que $(B_\infty^2, D(B_\infty^2))$ donné par

$$\begin{aligned}
D(B_\infty^2) &: = \left\{ U \in D(B_\infty), \sqrt{\alpha}U' \in D(B_\infty) \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x) U'(x) \in C \\ , \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)'(x) \in C,\ j = 0,1 \end{array} \right\} \\
B_\infty^2 U &: = \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)'
\end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.
Pour $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$ alors

$$\sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' = \alpha U'' + \sqrt{\alpha}\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}U'$$

$$\lim_{x\to j} \sqrt{\alpha(x)}U'(x) \in C$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x) \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}(x) U'(x) \in C \Longrightarrow \lim_{x\to j} \alpha(x) U''(x) \in C, j = 0,1$$

alors

$$D(B_\infty^2) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha}(x) U'(x) \in C \\ , \lim_{x\to j} \alpha(x) U''(x) \in C, j = 0,1 \end{array} \right\}$$

et

$$\begin{aligned}
B_\infty^2 U &= \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}U'\right)' = \alpha U'' + \sqrt{\alpha}\frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}U' \\
&= \alpha U'' + \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}} B_0 U, U \in D(B_\infty^2)
\end{aligned}$$

soit $\tilde{A}$ défini comme

$$\tilde{A}U = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U$$

avec domaine $D\left(\tilde{A}\right) := D\left(B_\infty^2\right)$ alors

$$\tilde{A}U = B_\infty^2 U + \frac{2\beta - \alpha'}{2\sqrt{\alpha}} B_\infty U + \gamma U$$

et soit $\bar{A}$ défini comme

$$\bar{A}U = B_\infty^2 U + \frac{2\beta - \alpha'}{2\sqrt{\alpha}} B_\infty U$$

d'après la preuve du théorème 2.3.4 on conclut facilement que $\left(\tilde{A}, D\left(\tilde{A}\right)\right)$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.
D'après (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.3) nous prouvons que $D\left(\tilde{A}\right)$ coïncide avec

$$D(A_2) := \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \lim_{x\to j} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) \in C \\ , \lim_{x\to j} \ (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) \in C, \ j = 0, 1. \end{array} \right\}$$

En effet : soit $U \in D\left(\tilde{A}\right)$ alors

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to j} \alpha(x) U''(x) + \beta(x) U'(x) + \gamma(x) U(x) \\ = \ & \lim_{x\to j} \alpha(x) U''(x) + \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) + \gamma(x) U(x) \in C, \ j = 0, 1. \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to j} \alpha(x) U''(x) \in C$, $\lim\limits_{x\to j} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) \in C$ pour $j = 0, 1, \gamma \in C[0,1]$, et $\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1] \Longrightarrow U \in D(A_2)$..
Soit $U \in D(A_2)$ alors

$$\lim_{x\to j} \alpha(x) U''(x) = \lim_{x\to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x)$$

$$-\lim_{x\to j} \frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) - \gamma(x) U(x) \in C, \ j = 0, 1$$

car

$$\lim_{x\to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) \in C, j = 0, 1$$

et

$$\lim_{x\to j} \sqrt{\alpha(x)} U'(x) \in C, j = 0, 1$$

$\gamma \in C[0,1]$, $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1] \Longrightarrow U \in D\left(\tilde{A}\right)$.
Par conséquent :

$$D\left(\tilde{A}\right) = D(A_2).$$

Maintenant d'après [23] et pour $\operatorname{Re}\lambda$ est suffisamment grand et pour tout $f \in C[0,1]$ il existe unique $V \in C^2(\mathbb{R})$ tel que

$$V'' + \frac{2\beta \circ \phi - \alpha' \circ \phi}{2\sqrt{\alpha \circ \phi}} V' + (\gamma \circ \phi) V \in C(\mathbb{R})$$

et

$$\lambda V(t) - \left[V''(t) + \frac{2\beta(\phi(t)) - \alpha'(\phi(t))}{2\sqrt{\alpha(\phi(t))}} V'(t) + \gamma(\phi(t)) V(t) \right] = f(\phi(t)), t \in \mathbb{R}$$

d'où il y a un unique $U \in C^2(0,1)$, U est borné sur $(0,1)$ tel que $\alpha U'' + \beta U' + \gamma U$ est encore borné appartient à $C(0,1)$ et de plus satisfait

$$\lambda U - \alpha U'' - \beta U' - \gamma U = f$$

mais une telle fonction est présentée dans le théorème 2.3.2 donc $D\left(\tilde{A}\right) \subseteq D(A)$.
Finalement $\left(\tilde{A}, D\left(\tilde{A}\right)\right)$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$ et d'après le théorème 2.3.2 $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$ et $D\left(\tilde{A}\right) \subseteq D(A)$ et $\tilde{A}U = AU$ sur $D\left(\tilde{A}\right)$ donc $D(A) = D\left(\tilde{A}\right) = D(A_2)$. ■

Exemple 2.3.6 *Soient*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= x^i (1-x)^i \\ \beta(x) &= x^j (1-x)^j \zeta(x), \zeta \in C[0,1] \\ \gamma(x) &\in C_\pi[0,1] \end{aligned}$$

1.$\alpha, \beta, \gamma \in C[0,1]$ *?*
$\alpha, \beta, \gamma \in C(0,1)$, $\forall i, j \in \mathbb{R}$, *et*
si $i, j \in [0.\infty)$, α, β *sont continues on* 0 *et* 1
si $i, j \in (\infty, 0)$, α, β *n'sont pas continues on* $0{,}1$ *alors*

$$\alpha, \beta \in C[0,1] \quad si\ i \geq 0, j \geq 0$$

2.$[\alpha(x) > 0, \forall x \in (0,1)]$ *si* $i \in \mathbb{R}$.
3.$\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = 0$, $\forall i > 0, j > 0$
4.$\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$?

$\sqrt{\alpha} \in C^1(0,1)\ \forall i \in \mathbb{R}$ *et*

$$\lim_{x\to m}\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} = \lim_{x\to m}\frac{ix^{i-1}(1-x)^i - ix^i(1-x)^{i-1}}{\sqrt{x^i(1-x)^i}}$$

$$= \lim_{x\to m}\frac{ix^{i-1}(1-x)^{i-1}[1-2x]}{\sqrt{x^i(1-x)^i}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to m} ix^{\frac{i}{2}-1}(1-x)^{\frac{i}{2}-1}[1-2x], m = 0,1$$

donc $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1]$ *si* $\frac{i}{2} - 1 \geq 0 \Longrightarrow i \geq 2$

5.$\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$?

$\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C(0,1)\ \forall i,j \in \mathbb{R}$ *et*

$$\lim_{x\to m}\frac{\beta(x)}{\sqrt{\alpha(x)}} = \lim_{x\to m}\frac{x^j(1-x)^j\zeta(x)}{\sqrt{x^i(1-x)^i}} = \lim_{x\to m} x^{j-\frac{i}{2}}(1-x)^{j-\frac{i}{2}}\zeta(x), m = 0,1$$

donc $\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$ *si* $j - \frac{i}{2} \geq 0 \Longrightarrow j \geq \frac{i}{2}$

6) $\gamma \in C_\pi[0,1]$.

Finalement pour $i \geq 2$, $j \geq \frac{i}{2}$ *alors, tous les théorèmes antérieurs s'appliquent.*

Chapitre 3

Semi-groupes analytiques dans $C\,[0,1]$ engendrés par des opérateurs différentiels du second ordre et des conditions aux limites du type Wentzell générales.

3.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur différentiel du second ordre de la forme :

$$AU = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \text{ ou } AU = b(aU')' + \beta U' + \gamma U$$

avec les conditions aux limites de Wentzell générales du type :

$$\lim_{x \to j} AU(x) + \tilde{b}U'(x) = 0,\ j = 0, 1$$

dans l'espace de Banach $C\,[0,1]$.
Le cas on $\gamma \equiv 0$ a été étudié dans [16]. La génération de semi-groupes analytiques est établie à l'aide d'un théorème de perturbation.

3.2 Résultats principaux

Théorème 3.2.1 *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in C[0,1]$ et*

$$\begin{aligned} \alpha(x) &> 0, \forall x \in (0,1) \\ \frac{1}{\alpha} &\in L^1(0,1) \end{aligned}$$

$$\beta \text{ est Hölder continue á } x = 0, x = 1$$

alors l'opérateur $(L, D(L))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L) &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \ \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} (\alpha U'' + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \\ LU &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \ , U \in D(L) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Preuve. On pose

$$LU = L_0 U + \gamma U, U \in D(L)$$

on applique le théorème 1.4.3 dans L_0, on a $\alpha, \beta \in C[0,1]$ et $\alpha(x) > 0, \forall x \in (0,1), \dfrac{1}{\alpha} \in L^1(0,1)$ et

$$\beta \text{ est Hölder continue á } x = 0, x = 1$$

alors $(L_0, D(L_0))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L_0) &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} \alpha(x) U''(x) + \beta(x) U'(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \\ L_0 U &: = \alpha U'' + \beta U', U \in D(L_0) \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.Et pour $\gamma \in C[0,1]$ alors γU est un opérateur linéaire borné et d'après le théorème 1.3.3 $(L, D(L_0))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.
Nous prouvons que $D(L)$ coïncide avec $D(L_0)$.

Soit $\gamma \in C[0,1]$ alors

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} \alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\}$$

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} \alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) \in C, \ j = 0,1 \end{array} \right\}$$

d'après [19] on a

$$\begin{aligned} D(L) &= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} \alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \\ &= D(L_0) \end{aligned}$$

donc $(L, D(L))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$. ■

Considérons l'opérateur du type $AU := \alpha U''$, où le coefficient α peut dégénérer à la limite, mais avec dégénérescence d'ordre bas,

Théorème 3.2.2 *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in C[0,1]$ et*

$$\alpha(x) > 0, \forall x \in (0,1) \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} \textit{La projection } x &\longrightarrow \int_0^x \frac{dt}{\alpha(t)} \textit{ est Hölder continue dans } [0,1] \\ \textit{d'exposant } k &\in (0,1) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\beta \textit{est Hölder continue á } x = 0, x = 1$$

alors $(A, D(A))$ donné par

$$\begin{aligned} AU &: = \alpha U'' \\ D(A) &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), AU \in C[0,1] \\ , \lim\limits_{x \to j} (AU + \beta U' + \gamma U)(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Preuve. Pour appliquer le théorème 3.2.1 dans l'opérateur $(L, D(L))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L) &: = D(A) \\ LU &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \end{aligned}$$

montre que $\frac{1}{\alpha} \in L^1(0,1)$.

en effet : d'après (3.2.2) $x \longrightarrow \int\limits_0^x \frac{\partial t}{\alpha(t)}$ est Hölder continue dans $[0,1]$ d'exposant $k \in (0,1)$ donc continue dans $(0,1)$ donc

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial t}{|\alpha(t)|} < \infty \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} \in L^1(0,1)$$

donc d'après le théorème 3.2.1 l'opérateur $(L, D(L))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Soit l'opérateur $(B, D(B))$ donné par

$$\begin{aligned} D(B) &: = D(A) = D(L) \\ BU &: = -\beta U' - \gamma U \end{aligned}$$

montre que $(B + L, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.?

Premièrement d'après [10] pour appliquer le théorème du perturbation il faut montre que chaque $U \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, et $\alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C[0,1]$ alors

$$\begin{aligned} U' &\in C[0,1] \\ U'' &\in L^1(0,1) \end{aligned}$$

on a $\frac{1}{\alpha} \in L^1(0,1)$ alors

$$w(x) = \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt)$$

Satisfait

$$0 < c_0 \leq w(x) \leq c_1$$

En effet :

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt < \infty, \forall x \in (0,1) \text{ car } \frac{1}{\alpha} \in L^1(0,1) \text{ et } \beta \in C[0,1]$$

$$\Longrightarrow 0 < \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt) < \infty \Longrightarrow \exists\ c_0, c_1$$

tel que

$$0 < c_0 \leq \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt) \leq c_1$$

alors

$$0 < c_0 \leq w(x) \leq c_1.$$

Soit $f := \alpha w(\frac{U'}{w})' + \gamma U \in C\,[0,1]$ car

$$f := \alpha w(\frac{U''w - w'U'}{w^2}) + \gamma U = \alpha U'' - \alpha\frac{w'}{w}U' + \gamma U$$

et on a

$$\frac{w'}{w}(x) = \frac{-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}dt)}{\exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}dt)} = -\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$

alors

$$f = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U$$

d'après la définition de $D(A)$ on a

$$f = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C\,[0,1]\,.$$

D'autre part $\gamma \in C\,[0,1]$ et $U \in C\,[0,1]$ alors $\gamma U \in C\,[0,1]$
on peut conclure que $\alpha w(\frac{U'}{w})' \in C\,[0,1]$ donc on pose $f_1 := \alpha w(\frac{U'}{w})'$ on a

$$\frac{f_1}{\alpha w} = (\frac{U'}{w})'$$

donc

$$\frac{U'(x)}{w(x)} - \frac{U'(\frac{1}{2})}{w(\frac{1}{2})} = \int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{f_1(t)}{\alpha(t)w(t)}dt$$

pour $w(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$, $f_1 \in C\,[0,1]$, et $x \longmapsto \int\limits_0^x \frac{\partial t}{\alpha(t)}$ est Hölder continue dans $[0,1]$

$$U'(x) = \ w(x)\left[\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{f_1(t)}{\alpha(t)w(t)}dt + \frac{U'(\frac{1}{2})}{w(\frac{1}{2})}\ \right]$$

est continue dans $[0,1]$ i,e

$$U' \in C\,[0,1]\,.$$

De plus $\forall U \in D(L)$

$$|\alpha(x)U''(x) + \beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x)| \leq \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_\infty$$

donc

$$|\alpha(x)U''(x)| - |\beta(x)U'(x) + \gamma(x)U(x)| \leq \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_\infty$$

d'où

$$|\alpha(x)U''(x)| \leq \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_\infty + |\beta(x)U'(x)| + |\gamma(x)U(x)|$$

et

$$|U''(x)| \leq \frac{1}{|\alpha(x)|} \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_\infty + \left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right| |U'(x)| + \frac{|\gamma(x)U(x)|}{|\alpha(x)|}$$

alors

$$\int_0^1 |U''(x)|\, dx \leq \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_\infty \int_0^1 \frac{1}{|\alpha(x)|} dx$$
$$+ \int_0^1 \left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right| |U'(x)|\, dx + \int_0^1 \frac{|\gamma(x)U(x)|}{\alpha(x)} dx \quad , x \in [0,1]$$

pour $\gamma U \in C[0,1]$ et $x \longmapsto \int\limits_0^x \frac{\partial t}{\alpha(t)}$ est Hölder continue dans $[0,1]$ et $U' \in C[0,1]$ et $\beta \in C[0,1]$ alors

$$U'' \in L^1(0,1).$$

L'application du théorème 1.3.3, montre que

$$\begin{aligned} D(L) &\subseteq D(B) \\ \|BU\|_\infty &\leq c_2 \|LU\|_\infty + c_3 \|U\|_\infty, \forall U \in D(L). \end{aligned}$$

En effet : soit $\beta_0 = \max\limits_{x\in[0,1]} |\beta(x)|, \gamma_0 = \max\limits_{x\in[0,1]} |\gamma(x)|$ nous fixons n entier grand alors on pose

$$J_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \quad , i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

et on écrit $\|U\|_{J_i,\infty}$la norme de l'espace $C(J_i)$.
On commence par l'intervalle $J_0 = [0, \frac{1}{n}]$, et $U \in D(L)$, et soit

$$\begin{aligned} x, x_0 &\in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ s &\in \left[0, \frac{1}{3n}\right] \\ t &\in \left[\frac{2}{3n}, \frac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

alors

$$U'(x) - U'(x_0) = \int_{x_0}^x U''(y)dy$$

donc

$$|U'(x)| \leq |U'(x_0)| + \left|\int_{x_0}^{x} U''(y)dy\right| \leq |U'(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |U''(y)|\, dy$$

$$|U'(x)| \leq |U'(x_0)| + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |U''(y)|\, dy, \forall x, x_0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

d'après le théorème des accroissements finis

$$|U'(x_0)| \leq \frac{|U(t) - U(s)|}{t - s}$$

on a alors

$$|U'(x)| \leq \frac{|U(t) - U(s)|}{t - s} + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |U''(y)|\, dy$$

$t - s \geq \dfrac{1}{3n} \Rightarrow \dfrac{1}{t - s} \leq 3n$ alors

$$|U'(x)| \leq 3n\left(|U(t)| + |U(s)|\right) + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |U''(y)|\, dy.$$

D'autre part

$$|U''(x)| \leq \frac{1}{|\alpha(x)|} \|\alpha U'' + \beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty} + \left|\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}U'(x) + \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}U(x)\right|$$

on a

$$|U'(x)| \leq 6n \|U\|_{J_0,\infty} + \|LU\|_{J_0,\infty} \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\alpha(y)}dy + \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty} \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\alpha(y)}dy \qquad (3.2.4)$$

d'aprés la définition de la fonction Hölderienne d'exposant k, $\exists c$ tel que

$$\int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\alpha(y)}dy \leq c(\frac{1}{n} - 0)^k = c\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

on a

$$|U'(x)| \leq 6n \|U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|LU\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty} \qquad (3.2.5)$$

$|\beta(x)| \leq \max\limits_{x\in[0,1]} |\beta(x)| = \beta_0$ obtenir

$$|\beta(x)U'(x)| \leq 6n\beta_0 \|U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{J_0,\infty}$$

$$+c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty}.$$

On remarque que

$$|(\beta U' + \gamma U)(x)| \leq |\beta(x)U'(x)| + |\gamma(x)U(x)| \leq |\beta(x)U'(x)| + \gamma_0 \|U\|_{J_0,\infty}$$

donc

$$\begin{aligned}|(\beta U' + \gamma U)(x)| &\leq (\gamma_0 + 6n\beta_0) \|U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{J_0,\infty} \\ &+c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty}\end{aligned}$$

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ alors

$$\begin{aligned}\|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty} &\leq (\gamma_0 + 6n\beta_0) \|U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{J_0,\infty} \\ &+c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0\right) \|\beta U' + \gamma U\|_{J_0,\infty} \;\leq\; & (\gamma_0 + 6n\beta_0) \|U\|_{J_0,\infty} \\ & +c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{J_0,\infty}.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De même pour $x \in J_i$ on a

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{1}{\alpha(y)} dy \leq c\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right)^k = c\left(\frac{1}{n}\right)^k, c > 0$$

donc

$$\begin{aligned}|(\beta U' + \gamma U)(x)| &\leq (\gamma_0 + 6n\beta_0) \|U\|_{J_i,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{J_i,\infty} \\ &+c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|\beta U' + \gamma U\|_{J_i,\infty} \quad \forall x \in J_i\end{aligned}$$

alors

$$|(\beta U' + \gamma U)(x)| \leq (\gamma_0 + 6n\beta_0) \|U\|_{\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \|LU\|_{\infty} +$$

$$c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \left\|\beta U' + \gamma U\right\|_\infty \quad \forall x \in [0,1]$$

on obtient alors

$$\left(1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0\right) \left\|\beta U' + \gamma U\right\|_\infty \leq (\gamma_0 + 6n\beta_0) \left\|U\right\|_\infty$$

$$+c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 \left\|LU\right\|_\infty, \forall x \in [0,1], U \in D(L)$$

Pour n suffisamment grand et on choisit $1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0 > 0$ on a

$$\left\|\beta U' + \gamma U\right\|_\infty \leq \frac{(\gamma_0 + 6n\beta_0)}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0} \left\|U\right\|_\infty + \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0} \left\|LU\right\|_\infty \tag{3.2.7}$$

donc

$$c_3 = \frac{(\gamma_0 + 6n\beta_0)}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0}, c_2 = \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0}.$$

donc $(L + B, D(L)) = (A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.
Pour $\rho(A)$
on a $(L, D(L))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$, alors

$$\begin{aligned} \rho(L) &\supset \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \left|\arg \lambda\right| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi\right\} \quad \varpi > 0 \\ \left\|R(\lambda, L)\right\|_\infty &\leq \frac{M}{|\lambda|} \qquad \forall \lambda \in \Sigma \;\; M > 0. \end{aligned}$$

d'aprés Le théorème 1.3.3

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \rho(L + B) \supset \Sigma = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 2M\dfrac{(\gamma_0 + 6n\beta_0)}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \beta_0}, \\ |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi \end{array} \right\}, \varpi > 0 \\ \left\|R(\lambda, A)\right\|_\infty &\leq \frac{M'}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma \end{aligned}$$

■

Corollaire 3.2.3 *Soient* $\alpha, b, \beta, \gamma \in C[0,1]$ *et* α *vérifie* (3.2.1), (3.2.2) *et de plus*

$$b + \beta \text{ est Hölder continue á } x = 0, x = 1 \tag{3.2.8}$$

alors $(C, D(C))$ *donné par*

$$\begin{aligned} D(C) &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \ \in C[0,1] \\ , \lim_{x \to j} (CU + bU')(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \\ CU &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Preuve. D'après le théorème 3.2.1

$$\begin{aligned} L_1 U &: = \alpha U'' + (\beta + b) U' + \gamma U \\ D(L_1) &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), L_1 U \in C[0,1], \\ \lim_{x \to j} L_1 U(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$. On montre que

$$\begin{aligned} D(B_1) &: = D(L_1) \\ B_1 U &: = -bU' \end{aligned}$$

est L_1-bornée avec L_1-borne égal á 0, d'après la preuve du théorème 3.2.2 on a

$$\begin{aligned} \forall U &\in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C[0,1] \\ &\Longrightarrow U' \in C[0,1], U'' \in L^1(0,1) \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \max_{x \in [0,1]} |(\beta + b)(x)| \\ b_0 &= \max_{x \in [0,1]} |b(x)| \\ \gamma_0 &= \max_{x \in [0,1]} |\gamma(x)| \end{aligned}$$

de manière équivalente dons le théorème 3.2.2 on obtient

$$|U'(x)| \leq 6n \|U\|_{J_0, \infty} + \int_0^{\frac{1}{n}} |U''(y)| \, dy, \forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

donc

$$
\begin{aligned}
|U'(x)| &\leq 6n\|U\|_{J_0,\infty} + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|(\alpha U'' + (\beta+b)U' + \gamma U)(y)|}{\alpha(y)}dy \\
&+ \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|((\beta+b)U')(y)|}{\alpha(y)}dy + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|(\gamma U)(y)|}{\alpha(y)}dy
\end{aligned}
$$

alors

$$
|U'(x)| \leq 6n\|U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|L_1U\|_{J_0,\infty} + c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|(\beta+b)U'\|_{J_0,\infty}
$$

$$
+c\gamma_0\left(\frac{1}{n}\right)^k \|U\|_{J_0,\infty}
$$

donc

$$
|bU'(x)| \leq b_0\left(6n + c\gamma_0\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)\|U\|_{J_0,\infty} + b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|L_1U\|_{J_0,\infty}
$$

$$
+b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|(\beta+b)U'\|_{J_0,\infty}.
$$

De la même manière pour $J_1, J_2, ..., J_n$ on obtenaient

$$
\begin{aligned}
|bU'(x)| &\leq b_0\left(6n + c\gamma_0\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)\|U\|_{J_i,\infty} + b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|L_1U\|_{J_i,\infty} \\
&+b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|(\beta+b)U'\|_{J_i,\infty}
\end{aligned}
$$

pour tous $i = 1, 2, ..., n$. Et par suite

$$
\begin{aligned}
\|bU'\|_\infty &\leq b_0\left(6n + c\gamma_0\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)\|U\|_\infty + b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|L_1U\|_\infty \qquad (3.2.9) \\
&+b_0c\left(\frac{1}{n}\right)^k \|(\beta+b)U'\|_\infty.
\end{aligned}
$$

D'après le théorème 3.2.2 remplaçons β par $\beta+b$, L_1 par L, BU par $(\beta+b)U'$et β_0 par $\tilde{\beta}_0$ dans (3.2.7) et pour n suffisamment grand, nous choisissons $1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0 > 0$ on a

$$
\|(\beta+b)U' + \gamma U\|_\infty \leq \frac{\left(\gamma_0 + 6n\tilde{\beta}_0\right)}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}\|U\|_\infty + \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}\|L_1U\|_\infty.
$$

Nous avons aussi

$$\|(\beta+b)U'\|_\infty \leq \|(\beta+b)U'+\gamma U\|_\infty + \|\gamma U\|_\infty \quad \leq \|(\beta+b)U'+\gamma U\|_\infty + \gamma_0 \|U\|_\infty$$

alors

$$\|(\beta+b)U'\|_\infty \leq \left(\frac{\left(\gamma_0 + 6n\tilde{\beta}_0\right)}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} + \gamma_0 \right) \|U\|_\infty + \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} \|L_1 U\|_\infty \qquad (3.2.10)$$

dans (3.2.10) et (3.2.9) on a

$$\begin{aligned} \|bU'\|_\infty \ \leq\ & \left(b_0(6n + c\gamma_0 \left(\frac{1}{n}\right)^k) + b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{\left(\gamma_0 + 6n\tilde{\beta}_0\right)}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} + \gamma_0 \right)\right) \|U\|_\infty \\ & + \left(b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k + b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} \right) \|L_1 U\|_\infty \end{aligned}$$

donc nous choisissons n tel que $1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0 > 0$ alors $\exists\ c_5,\ c_6$ tel que

$$\|bU'\|_\infty \leq c_5 \|L_1 U\|_\infty + c_6 \|U\|_\infty$$

$$\begin{aligned} c_5 &= \left(b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k + b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k \frac{c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} \right), \\ c_6 &= \left(b_0 \left(6n + c\gamma_0 \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) + b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{\left(\gamma_0 + 6n\tilde{\beta}_0\right)}{1-c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} + \gamma_0 \right)\right). \end{aligned}$$

Pour $\rho(C)$
on a $(L_1, D(L_1))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C\,[0,1]$, alors

$$\begin{aligned} \rho(L) \ &\supset\ \Sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi \right\} \qquad \varpi > 0 \\ \|R(\lambda, L_1)\|_\infty \ &\leq\ \frac{M}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma \ \ M > 0 \end{aligned}$$

d'après Le théorème du perturbation $\rho(C) \supset \Sigma$ tel que

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| > 2M(b_0 \left(6n + c\gamma_0 \left(\frac{1}{n}\right)^k\right) \\ +b_0 c \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{\left(\gamma_0 + 6n\tilde{\beta}_0\right)}{1 - c\left(\frac{1}{n}\right)^k \tilde{\beta}_0} + \gamma_0\right)), \\ |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi \end{array} \right\} \quad \varpi > 0$$

$$\|R(\lambda, C)\|_\infty \leq \frac{M'}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma$$

■

Corollaire 3.2.4 *Soient $\alpha, \tilde{b}, b, \beta_1, \gamma \in C[0,1]$ et α vérifie (3.2.1), (3.2.2) et de plus*

$$\alpha \in C^1[0,1], b(x) > 0, \forall x \in [0,1] \tag{3.2.11}$$

$$\alpha' b + \beta_1 + \tilde{b} \text{ est Hölder continue á } x = 0, x = 1 \tag{3.2.12}$$

alors $(C_1, D(C_1))$ donné par

$$\begin{aligned} D(C_1) &:= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), b(\alpha U')' + \beta_1 U' + \gamma U \in C[0,1] \\ , \lim_{x \to j} (C_1 U + \tilde{b} U')(x) = 0, \ j = 0, 1 \end{array} \right\} \\ C_1 U &:= b(\alpha U')' + \beta_1 U' + \gamma U \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$

Preuve. On applique le corollaire 3.2.3 on obtient
si $\alpha \in C^1[0,1]$ on a

$$C_1 U := b(\alpha U')' + \beta_1 U' + \gamma U = b\alpha U'' + (\alpha' b + \beta_1) U' + \gamma U, \forall U \in D(C_1)$$

1)

$$\alpha \in C[0,1], b \in C[0,1] \Rightarrow \alpha b \in C[0,1]$$

et

$$\alpha' \in C[0,1], b \in C[0,1], \beta_1 \in C[0,1] \Rightarrow \alpha' b + \beta_1 \in C[0,1]$$

et $\gamma \in C[0,1]$ et $\tilde{b} \in C[0,1]$.

2) et si $x \longmapsto \int_0^x \frac{\partial t}{a(t)}$ est Hölder continue dans $[0,1]$ d'exposant $k \in (0,1)$, $b(x) > 0$

$$\forall x \in [0,1] \Longrightarrow x \longmapsto \int_0^x \frac{\partial t}{b(t)\alpha(t)} \text{ est Hölder continue dans } [0,1] \text{ d'exposant } k \in (0,1)$$

3) si

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(x) > 0, \forall x \in (0,1) \\ b(x) > 0, \forall x \in [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha(x)b(x) > 0, \forall x \in (0,1)$$

4) $\alpha' b + \beta_1 + \tilde{b}$ est Hölder continue á $x = 0, x = 1$
par conséquent d'après le corollaire 3.2.3 $(C_1, D(C_1))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$. ∎

Théorème 3.2.5 *Soient* $\alpha, \beta, b, \gamma \in C[0,1]$ *et*

$$\alpha(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1), \sqrt{\alpha} \in C^1[0,1], \alpha(0) = \alpha(1) = 0 \tag{3.2.13}$$

$$\frac{\beta + b}{\alpha} \in C[0,1]. \tag{3.2.14}$$

alors $(A, D(A))$ *donné par*

$$\begin{aligned} D(A) \ &: = \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \ \in C[0,1] \\ , \lim_{x \to j} (AU + bU')(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\} \\ AU \ &: = \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.

Preuve. Pour appliquons le théorème 2.3.2 dans l'opérateur $(L, D(L))$ donné par

$$\begin{aligned} D(L) \ &: = D(A) \\ LU \ &: = \alpha U'' + (\beta + b) U' + \gamma U, \ \ U \in D(L) \end{aligned}$$

on a
1) $\alpha(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,1), \alpha(0) = \alpha(1) = 0$
2)

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\alpha} \in C^1[0,1] \\ \dfrac{\beta + b}{\alpha} \in C[0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\beta + b}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\alpha} \in C[0,1] \Longrightarrow \frac{\beta + b}{\sqrt{\alpha}} \in C[0,1]$$

donc $(L, D(L))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$.
Soit l'operateur $(B, D(B))$ donné par

$$\begin{aligned} D(B) \ &: = D(A) = D(L) \\ BU \ &: = -bU' \end{aligned}$$

montre que $(B, D(B))$ est L-bornée avec L-borne égal 0, c'est-à-dire $(B+L, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} D(L) &\subseteq D(B) \\ \|BU\|_\infty &\leq k_1 \|LU\|_\infty + k_2 \|U\|_\infty, \forall U \in D(L). \end{aligned}$$

Définissons

$$w_1(x) = \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)+b(t)}{\alpha(t)} dt), \; x \in (0,1)$$

et

$$w_1(x) = \frac{\alpha(\frac{1}{2})}{\alpha(x)} \phi(x), x \in (0,1)$$

tel que

$$\phi(x) = \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)+b(t)-\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt), \, x \in (0,1)$$

satisfait

$$0 < k_3 \leq \alpha(x) w_1(x) \leq k_4.$$

En effet :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)+b(t)-\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt < \infty \;\; \forall x \in (0,1) \;\; \text{car} \; \frac{\beta+b-\alpha'}{\alpha} C[0,1]$$

donc

$$0 < \exp - \left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)+b(t)-\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt \right) < \infty$$

donc $\exists \, k_3, k_4$ tel que

$$0 < k_3 \leq \exp(-\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\beta(t)+b(t)-\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt) \leq k_4$$

alors

$$0 < k_3 \leq \alpha(x) w_1(x) \leq k_4. \tag{3.2.15}$$

d'après le preuve de théorème 3.2.2 on a

$$LU = \alpha w_1 (\frac{U'}{w_1})' + \gamma U$$

et on pose $LU = L_2U + \gamma U$ avec

$$L_2U = \alpha w_1 (\frac{U'}{w_1})' = \alpha U'' + (\beta + b) U'$$

et

$$\begin{aligned} L_2U &:= \alpha U'' + (\beta + b) U' \\ D(L_2) &:= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1) ; \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1], \\ \lim\limits_{x \to j} (\alpha U'' + \beta U' + bU')(x) = 0, \ j = 0,1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part soit l'opérateur $(B_0, D(B_0))$ donné par

$$\begin{aligned} D(B_0) &:= \left\{ U \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \lim_{x \to j} \frac{U'(x)}{w_1(x)} \in C, \ j = 0,1 \right\} \\ B_0U &:= \frac{U'(x)}{w_1(x)}, U \in D(B_0) \end{aligned}$$

engendre un c_0-groupe sur $C[0,1]$.
En effet : la projection

$$\varphi(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} w_1(t)\, dt$$

est strictement croissante et différentiable sur $(0,1)$ et $\dfrac{1}{w_1(t)}$ est $\mathbb{R}-$*admissible* sur $[0,1]$ en effet :

$$w_1(t) = \frac{\alpha(t) w_1(t)}{\alpha(t)} \sim \frac{m}{\alpha(t)} \text{ en voisinage de } 0, 1, m > 0$$

d'autre part $\sqrt{\alpha} \in C^1[0,1], \alpha(0) = \alpha(1) = 0$ alors d'après la proposition 2.2.2 α est $\mathbb{R}-$*admissible* sur $[0,1]$, alors $\dfrac{1}{w_1(t)}$ est $\mathbb{R}-$*admissible* sur $[0,1]$.

Soit l'opérateur T_φ donné par

$$T_\varphi U := U \circ \varphi^{-1} := V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

d'après le lemme 2.2.3 l'opérateur $(B_0, D(B_0))$ est semblable à l'opérateur $(B_\infty, D(B_\infty))$ donné par

$$\begin{aligned} D(B_\infty) &= \left\{ V \in C(\bar{\mathbb{R}}), V \text{ est différentiable }, V' \in C(\bar{\mathbb{R}}) \right\} \\ B_\infty U &= V'. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty} V'(t) &= \lim_{t\to\pm\infty} \left(U\circ\varphi^{-1}\right)'(t)\\ &= \lim_{t\to\pm\infty} \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\left(U'\circ\varphi^{-1}\right)(t)\\ &= \lim_{x\to 1,0} \frac{U'(x)}{w_1(t)} \in C\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to\pm\infty} V'(t) \in C \Leftrightarrow \lim_{x\to 1,0} \frac{U'(x)}{w_1(t)} \in C.$$

Par conséquent, d'après [10], l'opérateur $(B_0^2, D(B_0^2))$ donné par

$$D(B_0^2) = \left\{\begin{array}{c} U\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \lim\limits_{x\to j}\dfrac{U'(x)}{w_1(x)}\in C\\ ,\lim\limits_{x\to j}\dfrac{1}{w_1(x)}\left(\dfrac{U'(x)}{w_1(x)}\right)' \in C,\ j=0,1\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} U\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \lim\limits_{x\to j}\frac{U'(x)}{w_1(x)} = 0\\ ,\lim\limits_{x\to j}\dfrac{1}{w_1(x)}\left(\dfrac{U'(x)}{w_1(x)}\right)' = 0,\ j=0,1\end{array}\right\}$$

$$B_0^2 U = B_0(B_0 U) = \frac{1}{w_1}\left(\frac{U'}{w_1}\right)'$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$ .Et d'après le théorème 1.2.9 et [22] obtient $\forall\,\varepsilon>0, \exists k>0$ tel que

$$\|B_0 U\|_\infty \le \varepsilon \left\|B_0^2 U\right\|_\infty + \frac{k}{\varepsilon}\|U\|_\infty \tag{3.2.16}$$

et, d'après [11], on obtient alors $D(B_0^2) = D(L_2)$.
Montre que $D(L) = D(B_0^2) = D(L_2)$.
En effet : soit $\gamma \in C[0,1]$ alors

$$D(L) = \left\{\begin{array}{c} U\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C[0,1]\\ ,\lim\limits_{x\to j}\alpha(x)U''(x) + (\beta(x)+b(x))U'(x) + \gamma(x)U(x) = 0,\ j=0,1\end{array}\right\}.$$

$$D(L) = \left\{\begin{array}{c} U\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' + \gamma U \in C[0,1]\\ ,\lim\limits_{x\to j}\alpha(x)U''(x) + (\beta(x)+b(x))U'(x) \in C,\ j=0,1\end{array}\right\}$$

d'après le théorème 1.4.1 (pour la génération) et [11] (pour l'analyticité) on a

$$\begin{aligned}
D(L) &= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \alpha U'' + \beta U' \in C[0,1] \\ , \lim_{x \to j} \alpha(x) U''(x) + (\beta(x) + b(x)) U'(x) = 0, \ j = 0, 1 \end{array} \right\} \\
&= D\left(B_0^2\right) = D(L_2)
\end{aligned}$$

donc $D(L) = D(B_0^2) = D(L_2)$.
Finalement, soit $\gamma_0 = \max_{x \in [0,1]} |\gamma(x)|$
d'après (3.2.15) on a

$$\begin{aligned}
\|bU'\|_\infty &= \left\| w_1 b \frac{U'}{w_1} \right\|_\infty, \forall U \in D(L) = D(B_0^2) \\
\|bU'\|_\infty &\leq \|w_1 b\|_\infty \left\| \frac{U'}{w_1} \right\|_\infty, \ \forall U \in D(L) = D(B_0^2)
\end{aligned}$$

d'après (3.2.16) et $U \in D(B_0^2)$ alors

$$\begin{aligned}
\|bU'\|_\infty &\leq \|w_1 b\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{w_1} \left(\frac{U'}{w_1} \right)' \right\|_\infty + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \alpha w_1 \left(\frac{U'}{w_1} \right)' \right\|_\infty + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \left\| \alpha w_1 \left(\frac{U'}{w_1} \right)' \right\|_\infty + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \left\| \alpha w_1 \left(\frac{U'}{w_1} \right)' + \gamma U - \gamma U \right\|_\infty + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty [\|LU\|_\infty + \|\gamma U\|_\infty] + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty [\|LU\|_\infty + \gamma_0 \|U\|_\infty] + \frac{k}{\varepsilon} \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \|bw_1\|_\infty \left[\varepsilon \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \|LU\|_\infty + \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon \gamma_0 \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \|U\|_\infty \right] \\
&\leq \left(\varepsilon \|bw_1\|_\infty \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \|LU\|_\infty + \left[\|bw_1\|_\infty \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon \gamma_0 \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \right] \|U\|_\infty \\
&\leq k_1 \|LU\|_\infty + k_2 \|U\|_\infty, \forall U \in D(L)
\end{aligned}$$

donc

$$\|BU\|_\infty \leq k_1 \|LU\|_\infty + k_2 \|U\|_\infty, \forall U \in D(L)$$

tel que

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(\varepsilon \|bw_1\|_\infty \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \\ k_2 &= \left[\|bw_1\|_\infty \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon\gamma_0 \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour $\rho(A)$: on a $(L, D(L))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$, alors soit

$$\begin{aligned} \rho(L) &\supset \Sigma = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi \right\}, \varpi > 0 \\ \|R(\lambda, L)\|_\infty &\leq \frac{M}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma \quad M > 0 \end{aligned}$$

d'après Le théorème du perturbation $\rho(A) = \rho(L+B) \supset \Sigma$ tel que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \\ > 2M \left[\|bw_1\|_\infty \left(\frac{k}{\varepsilon} + \varepsilon\gamma_0 \left\| \frac{1}{\alpha w_1^2} \right\|_\infty \right) \right], \\ |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \varpi \end{array} \right\} \varpi > 0 \\ \|R(\lambda, A+B)\|_\infty &\leq \frac{M'}{|\lambda|}, \forall \lambda \in \Sigma \end{aligned}$$

donc $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$. ∎

Corollaire 3.2.6 *Soient $a, \tilde{b}, b, \beta_1, \gamma \in C[0,1]$ et*

$$\begin{aligned} a(x) &> 0 \quad \forall x \in (0,1), \sqrt{a} \in C^1[0,1], a(0) = a(1) = 0 \\ b(x) &> 0 \quad \forall x \in [0,1], b \in C^1[0,1], \frac{ba' + \beta_1 + \tilde{b} + (ba)'}{a} \in C[0,1] \end{aligned}$$

alors $(A, D(A))$ donné par

$$\begin{aligned} D(A) &:= \left\{ \begin{array}{c} U \in C[0,1] \cap C^2(0,1), b(aU')' + \beta_1 U' + \gamma U \in C[0,1], \\ \lim_{x \to j} (AU + \tilde{b}U')(x) = 0, \; j = 0, 1 \end{array} \right\} \\ AU &:= b(aU')' + \beta_1 U' + \gamma U \end{aligned}$$

engendre un semi-groupe analytique sur $C[0,1]$

Preuve. En appliquant le théorème 3.2.5 on a

$$\left. \begin{array}{c} \sqrt{a} \in C^1[0,1] \Longleftrightarrow \dfrac{a'}{2\sqrt{a}} \in C[0,1] \\ a(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1) \end{array} \right\} \Longrightarrow a \in C^1(0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a'}{2\sqrt{a}} \in C\,[0,1] \\ a(0)=a(1)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow a'(0)=a'(1)=0$$

$$\Longrightarrow a \in C^1\,[0,1]$$

$$\Longrightarrow AU := b(aU')' + \beta_1 U' + \gamma U = baU'' + (a'b+\beta_1)\,U' + \gamma U, \forall U \in D(A)$$

1) $a \in C\,[0,1]\,,\, b \in C\,[0,1] \Rightarrow$

$$ab \in C\,[0,1]$$

et $a' \in C^1\,[0,1]$, $b \in C\,[0,1]$, $\beta_1 \in C\,[0,1]$

$\Rightarrow a'b + \beta_1 \in C\,[0,1]$ et $\gamma \in C\,[0,1]$ et $\tilde{b} \in C\,[0,1]$

2) $a(x) > 0 \ \ \forall x \in (0,1), b(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow a(x)b(x) > 0 \ \forall x \in (0,1)$$

3) $b(x) > 0 \ \forall x \in [0,1] \ \Longrightarrow \sqrt{b\,(x)} \neq 0 \ \forall x \in [0,1]$ et $b \in C^1\,[0,1] \Longrightarrow \frac{b'}{\sqrt{b}} \in C\,[0,1] \Rightarrow$ $\sqrt{b} \in C^1\,[0,1]$ alors

$$\sqrt{a(x)b(x)} = \sqrt{a(x)}\sqrt{b(x)} \in C^1\,[0,1]$$

4) $a(0) = a(1) = 0, b(x) > 0 \ \forall x \in [0,1] \Longrightarrow a(0)b\,(0) = b\,(1)\,a(1) = 0$

5)

$$\frac{ba' + \beta_1 + \tilde{b} + (ba)'}{a} \in C\,[0,1]$$

alors

$$\frac{ba' + \beta_1 + \tilde{b} + (ba)'}{ab} \in C\,[0,1]$$

alors

$$\frac{(ba' + \beta_1) + \tilde{b}}{ab} + \frac{(ba)'}{ab} \in C\,[0,1]$$

donc d'après le théorème 3.2.5 $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe analytique sur $C\,[0,1]$.

■

Exemple 3.2.7 *Soient*

$$\begin{array}{rcl}\alpha\,(x) & = & x^i\,(1-x)^i \\ \beta\,(x) & = & x^j\,(1-x)^j\,\zeta\,(x)\,, \zeta \in C\,[0,1] \\ \gamma\,(x) & \in & C\,[0,1] \\ b\,(x) & = & x^j\,(1-x)^j\,\xi\,(x)\,, \xi \in C\,[0,1]\end{array}$$

1) D'après [5] et le théorème 3.2.1 si ζ *est Hölder continue á* $x = 0.x = 1$ *et* $0 < i < 2$ *et*

$$i - 1 < j \leq \frac{i}{2} \text{ ou } i - 1 = j \leq \frac{i}{2}, \zeta(1) > -1, \zeta(0) < 1$$

alors les théorèmes 3.2.1,3.2.2 s'appliquent.
Si de plus $\xi + \zeta$*est Hölder continue á* $x = 0.x = 1$ *alors l'operateur* $(C, D(C))$ *donné par le corollaire 3.2.3 engendre un semi-groupe analytique sur* $C[0,1]$
2) D'aprés l'exemple 2.3.6 on a $i \geq 2 \Rightarrow \alpha(x) > 0 \; \forall x \in (0,1), \sqrt{\alpha} \in C^1[0,1], \alpha(0) = \alpha(1) = 0$ *et*

$$j \geq i \Longrightarrow \frac{\beta + b}{\alpha} \in C[0,1]$$

alors si $i \geq 2$, $j \geq i$ *l'operateur* $(A, D(A))$ *donné par le théorème 3.2.5 engendre un semi-groupe analytique sur* $C[0,1]$.

Bibliographie

[1] A. Aibeche, A. Favini, «*Coerciveness estimate for Ventcel boundary value preblem for a differential equation*», Semigroup Forum, Vol 70(2005).269-277.

[2] W. Arendt, G. Metafune, D. Pallara, S. Romanelli, «The Laplacian with Wentzell-Robin boundary conditions on spaces of continuous functions», Semigroup Forum, 67(2003).247-261.

[3] A. Attalienti, S. Romanelli, «on some classes of analytic semigroups on $C([a,b])$ related to $\mathbb{R}$ or, -admissible mappings», in "Evolution Equations", G.Ferreyra, G. Goldstein, F. Neubrander (Eds.), Lect. Notes in pure and Appl.Math . 168, M.Dekker, New York, 1994, 29-34.

[4] A. Batkai, K. J. Engel, «Cosine families generated by operators with generalized Wentzell boundary conditions», Tübinger Berichte zur Funktional analysis, 11 (2001), 7–19.

[5] M. Campiti, G. Metafune, «Ventcel's boundary conditions and analytic semigroups», Arch. Math, 70 (1998), 377–390.

[6] Ph. Clément, C. A.Timmermans, «On C_0-semigroups generated by differential operators satisfying Ventcel's boundary conditions», Indag. Math, 89 (1986), 379–387.

[7] R. Dautray, J. L. Lions, «analyse Mathématique et calcul numérique». vol 8 : Evolution : semi-groupe, variationnel, Masson, Paris, 1988.

[8] K. J. Engel, «Second order differential operators on $C[0;1]$ with Wentzell-Robin boundary conditions», in : G. R. Goldstein, R. Nagel, S. Romanelli (eds.), \Evolution Equations : Proceedings in Honor of J. A. Goldstein's 60th Birthday", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 234, Marcel Dekker 2003, 159-166.

[9] K. J. Engel, «Analyticity of semigroups generated by operators with generalized Wentzell boundary conditions», 2003 preprint.

[10] K. J. Engel, et R. Nagel, «One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations», Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer, Berlin, 2000.

[11] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «On some classes of differential operators generating analytic semigroups», Evolution Equationsand treir

applications in Phisical and Life Sciences (G. Lumer and L. Weis eds.) M. Dekker, New York,2000, pp 99-114.

[12] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «C_0-semigroups generated by second order differential operators with general Wentzell boundary conditions», Proc. Amer. Math. Soc, 128 (2000), 1981–1989.

[13] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «Generalized Wentzell boundary conditions and analytic semigroups in $C[0,1]$», Semigroups of Operators : Theory and Applications (Proceedings Newport Beach, CA, 1998) (A. V. Balakrishnan ed.) Progr. Nonlinear Differential Equations Appl, vol. 42, Birkh¨auser Verlag, Basel (2000) 125–130.

[14] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «The one dimensional wave equation with Wentzell boundary condition», Differential Equations and Control Theory (S. Aizicovici and N. H. Pavel eds.), M. Dekker, New York,(2002) 139–145.

[15] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «The heat equation with general Wentzell boundary condition», J. Evol. Eqns, (2002) 2, 1–19

[16] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, S. Romanelli, «General Wentzell boundary conditions, differential operators and analytic semigroups in C[0, 1]»,Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.) v. 20 1/2 (2002), 93–104.

[17] A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, E. Obrecht, S. Romanelli, «The Laplacian with generalized Wentzell boundary conditions», in : M.Iannelli and G. Lumer (eds.) : \Evolution Equations 2000 : Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics" (Proceedings Levico Terme 2000), Progress in Nonlinear Differential Equations, Birkhauser 2003, 169-180.

[18] A. Favini, S. Romanelli, «Analytic semigroups on $C[0,1]$ generated by some classes of second order differential operators», Semigroup Forum 56 (1998) 367–372.

[19] A. Favini and A. Yagi, «Degenerate differential equations in Banach spaces», Marcel Dekker Inc, New York, 1999.

[20] C. Gal, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, «Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations», J. Evol. Equ. 3 (2004), 623–635.

[21] J. A. Goldstein, «Semigroups of Linear Operators and Applications Oxford University Press», Oxford, New York (1985).

[22] T. Kato, «Perturbation Theory for Linear Operators», Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1966).

[23] A. Lunardi, «Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems», Birkhäuser Verlag Boston (1995).

[24] A. C. McBride, «Semigroups of linear Operators :an introduction» , pitman Research Notes in Math . Series 156, Longman Scientific and Technical, Now York 1987.

[25] R. Nagel (Ed), «One-Parameter Semigroups of positive Operators», Lecture Notes in Math. 1184, Springer, New York, 1986.

[26] A. Pazy, «Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations», Springer-Verlag, Berlin, Heidelderg, Tokyo, 1983.

[27] C. A. Timmermans, «On C_0- semigroups in a space of bounded continuous functions inthe case of entrance or natural boundary points», in : Approximation and Optimization (J.A.Gomez Fernandez et al.eds), Springer (1988), 209-216.

[28] M. G. Ulmet, «Admissible boundary conditions for differential operators», Dissertation, Tübingen ,1990.

[29] H. Vogt et J. Voigt, «Wentzell boundary conditions in the context of Dirichlet forms», Adv. Differ. Equ. 8, n° 7, 821–842 (2003).

[30] M. Warma, «Wentzell-Robin boundary conditions on $C[0,1]$», Semigroup Forum, 66 (2003), 162-170.

[31] A. D. Wentzell, «On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes», Theory Probab, Appl. 4 (1959), 164-177.

[32] T. J. Xiao, J. Liang, «Wave equations with generalized Wentzell boundary conditions», Math. Ann. 327 (2003) 351–363.