

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME

MASTER

FILIÈRE : Automatique

OPTION : Automatique et Informatique Industrielle

THÈME

**COMMANDE ADAPTATIVE PAR
BACKSTEPPING DES SYSTÈMES
NON-LINÉAIRES INCERTAINS**

Présenté Par :

Khalid BOULTIF

Issam MADI

Encadrée Par :

Hocine BENSLIMANE

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2015/2016

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ODE TO BACKSTEPPING...

Oh Backstepping, How do I love thee? Let me count the ways.
You soothe my instabilities,
 Despite my singularities.
In the face of disturbing entities,
 You adapt to my uncertainties.
I love thee for thine flexibility,
 You don't even need controllability.
Your magnitude of feedback is,
 But one of gentle modesty.
You respect my nonlinearities,
 And exploit my structural peculiarities.
As I seek escape (in finite time),
 You bring me back, with Lyapunov tactics so sublime.
Although you're oft chastised for expressions complicated,
 My fears of numerical differentiation you've abated.
I love thee in my states of chaos, rest, or evolution,
 That's right, I love thee in all the meanderings of my solution.
Because of you, invariance my sets will never loose...
 Oh Backstepping, to close my loop, there's no one else I'd rather choose!

KARLA KVATERNIK

DÉDICACE

A mes chers parents, que dieu les protège ; ma mère et l'esprit de mon père pour leur amour, leur encouragement et leurs sacrifices.

☛ A ma sœur

☛ A toute ma famille

☛ A mes amis : MAHDI MOUHAJER OSMAN, KARIME ALIOUCHE, MOHAMED ABDELMOULA, HICHAM CHIHABE, WALIDE. HAMIMED, OUSSAMA BOULTIF, BOUALEM ABDELMOULA, ABDELAZIZE BOULGHABE, ...

☛ A tous les amis de l'école primaire jusqu'au Master 2 Automatique et Informatique Industriel.

Je dédie ce modeste travail .

DÉDICACE

A mes chers parents, que dieu les protège ; mon père et l'esprit de ma mère pour leur amour, leur encouragement et leurs sacrifices.

☞ A Mes frères

☞ A Mes sœurs

☞ A tout ma famille

☞ A toute mes amis ; spécialement : MOUSSA, YASSINE, ABDALHAFID, ISMAIL, KHIRO, HAROUN et MAHDI MOUHAJER OSMAN

☞ A tout la promotion 2015-2016

☞ A tous ceux et celles dont les noms nous ne sont pas cités.

Je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENT

Avant tout choses remercions **NOTRE DIEU** et **DIEU** de toutes les espèces d'avoir créé cette forme de vie, le tout puissant, de nous avoir donné la santé, le courage, la volonté et la patience pour l'accomplissement de ce modeste travail.

A ce titre, nous tenons à remercier notre encadreur, **DR BENSLIMANE HOCINE**, pour l'aide compétente qu'il nous a apportée, pour sa patience, sa confiance, son encouragement, et Son œil critique qui nous a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité de différentes sections de notre mémoire, nous le remercions vivement.

Nous remercions également **Nos FAMILLES** pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.

Nous vous remercions sincèrement pour **AUX MEMBRES DE JURY** d'avoir qui nous a fait l'honneur de résider et d'examiner ce modeste travail.

Nous adressons, également nos remerciements à tous les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de notre travail.

Merci

Table des figures

1.1	Illustration de la définition intuitive de la stabilité.	6
1.2	Stabilité asymptotique	8
1.3	Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov	11
1.4	Principe d'un système de commande adaptative	18
1.5	Structure de la commande adaptative indirecte	19
1.6	Structure de la commande adaptative directe	20
1.7	Structure de base de la commande adaptative avec le modèle de référence	21
2.1	Sortie du système non linéaire : réelle x_1 (" x_1 ") et désirée x_{1d} (" y_r ").	33
2.2	Signal de commande u	33
2.3	Erreur poursuite z_1	33
2.4	Sortie du système non linéaire : réelle x_1 (" x_1 ") et désirée x_{1d} (" y_r ").	36
2.5	Signal de commande u	36
2.6	Erreur poursuite z_1	36
3.1	Sortie du système non linéaire : réelle x_1 (" x_1 ") et désirée x_{1d} (" y_r ").	50
3.2	Signal de commande u	50
3.3	Erreur poursuite z_1	50
3.4	Sortie du système non linéaire : réelle x_1 (" x_1 ") et désirée x_{1d} (" y_r ").	52
3.5	Signal de commande u	52
3.6	Erreur poursuite z_1	52

Table des matières

	Page
Dédicace	i
Remerciement	iii
Table des figures	iv
Table des matières	v
Introduction générale	1
1 Généralités sur la Stabilité et la Commande Adaptative	4
1.1 Introduction	4
1.2 Systèmes non linéaires incertains	5
1.3 Notion de stabilité	5
1.3.1 Définitions	5
1.3.1.1 Équilibre	5
1.3.1.2 Stabilité	6
1.3.1.3 Stabilité locale	7
1.3.1.4 Stabilité globale	7
1.3.1.5 Stabilité asymptotique	7
1.3.1.6 Stabilité exponentielle	7
1.3.1.7 Stabilité de Lyapunov	8
1.4 Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires	9
1.4.1 Première méthode de Lyapunov	9
1.4.2 Deuxième méthode de Lyapunov (Méthode Direct)	10
1.5 Commande par la méthode directe de Lyapunov	11
1.5.1 Choix de la fonction de Lyapunov	12

TABLE DES MATIÈRES

1.5.2	Types des fonctions de Lyapunov	12
1.5.2.1	Fonction quadratique	12
1.5.2.2	Norme de max	13
1.5.2.3	Norme dual de max	13
1.6	Commande par backstepping	13
1.6.1	Principe de la commande	13
1.6.2	Algorithme de base	14
1.6.3	Système d'ordre n	17
1.7	Commande adaptative	18
1.7.1	Commande adaptative indirecte	18
1.7.2	Commande adaptative directe	19
1.7.3	Commande adaptative à modèle de référence	20
1.8	Conclusion	21
2	Commande Adaptative par Backstepping	22
2.1	Introduction	22
2.2	Position du problème	23
2.3	Objectif de la commande	24
2.4	Commande adaptative par backstepping	24
2.5	Exemples de simulation	31
2.5.1	Exemple 1 : <i>Système non linéaire de deuxième ordre</i>	32
2.5.2	Exemple 2 : <i>Bras Manipulateur Actionné par un moteur à courant continu</i>	34
2.6	Conclusion	37
3	Commande Adaptative par Backstepping Filtré	38
3.1	Introduction	38
3.2	position du problème	39
3.3	Synthèse de la loi de commande	40
3.4	Exemples de simulation	49
3.4.1	Exemple 1 : <i>Système non linéaire de deuxième ordre</i>	49
3.4.2	Exemple 2 : <i>Bras Manipulateur Actionné par un moteur à courant continu</i>	51
3.5	Conclusion	53
	CONCLUSION GÉNÉRALE	54

Bibliographie

56



INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'élaboration d'une loi de commande pour un procédé physique nécessite la prise en compte de certains paramètres tels que le suivi de la consigne, le rejet de la perturbation, une marge de robustesse vis-à-vis de certains paramètres de système à commander. La littérature propose une multitude de structure de commande. Chacune d'elle possède son application et également des propriétés (cas linéaire, cas non linéaire, procédé stable, consigne d'un type donné, etc.). Commander un processus, c'est déterminer les commandes à lui appliquer, de manière à assurer aux variables d'états ou aux sorties qui nous intéressent un comportement précisé par un cahier des charges.

Les méthodes de commande non linéaire se basent sur l'existence d'un modèle analytique du système. Cependant, pour les systèmes non linéaires complexes, le modèle peut être inexploitable, imprécis ou tout simplement inexistant. D'un autre côté, la commande adaptative présente un outil puissant pour la commande et pour la réduction de l'incertitude paramétrique.

La commande adaptative a connu un développement rapide et significatif conduisant à la stabilité globale et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite pour une grande classe de systèmes non linéaires incertains [13, 14, 24]. L'idée fondamentale de ces schémas de commande adaptative est d'utiliser la technique de linéarisation par routeur d'état, cela est réalisé par la transformation de système non linéaire

considéré en un système linéaire. Les techniques de commande linéaires peuvent ensuite être appliquées pour obtenir les performances souhaitées. Cependant, afin de garantir la stabilité de performance du système en boucle fermée, certaines restrictions sur le système ont été rencontrées, comme par exemple la condition recouvrement (*Matching condition*) [1, 6, 23]. Ces restrictions ont été surmonté à la suite par le développement d'une méthode de synthèse appelé le backstepping.

La commande par backstepping est une méthode de synthèse systématique basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov s'appliquant aux systèmes non linéaires ayant la forme triangulaire inférieure. La commande par backstepping [15] est développée pour commander les systèmes non linéaires, en particulier, les systèmes non linéaires dans lesquels les incertitudes ne satisfont pas la condition recouvrement. L'avantage principal de cette méthode est de garantir la stabilité du couple commande-système. Cependant, la technique de backstepping souffre du problème de "l'explosion de la complexité". Autrement dit, la mise en œuvre du backstepping devient plus en plus complexe que l'ordre du système augmente [12]. Cette complexité croissante est due principalement de la dérivation successive des commandes virtuelles calculer à chaque étape de la procédure de backstepping. Pour éviter ce problème, une technique de commande a été proposée par l'introduction d'un filtre de premier ordre pour estimer la dérivée de la commande virtuelle à chaque étape de la procédure backstepping traditionnelle [10, 27, 29].

Outre l'introduction et la conclusion générales, ce mémoire est organisé en trois chapitres

Le premier chapitre est consacré à un rappel théorique concernant la commande par backstepping et la commande adaptative, dans un premier temps on présente les notions de stabilité et la stabilité au sens de Lyapunov, ensuite la synthèse par la fonction de Lyapunov, et en fin une description général de la commande adaptative.

Dans le deuxième chapitre nous nous sommes intéressés à la synthèse de la commande adaptative par backstepping pour une classe des systèmes non linéaire sous

INTRODUCTION GÉNÉRALE

forme triangulaire inférieure, et ensuite la validation de cette loi de commande sur deux systèmes l'un est un système artificiel de deuxième ordre et l'autre est un robot à bras manipulateur actionné par un moteur à courant continu est envisagé.

Dans le troisième chapitre, pour éviter le problème de la complexité nous nous sommes intéressés à la synthèse de la commande adaptative par backstepping pour la classe des systèmes considérés au chapitre deux, et cela est fait en introduisant des filtres du premier ordre à chaque étape de la procédure du backstepping traditionnelle. En suite, nous allons valider la loi de commande sur les mêmes exemples utilisés dans le chapitre précédent.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA STABILITÉ ET LA COMMANDE ADAPTATIVE

1.1 Introduction

La commande non linéaire a fait son apparition dans les années de 1980 avec les travaux d'Isidori [24], plus récemment la commande par backstepping (commande stabilisante non linéaire), l'origine du celui-ci n'est pas tous a fait clair, ceci est dû l'apparition simultané et souvent implicite dans les articles publié des 1980. cependant, il est juste de dire que le backstepping a reçue beaucoup d'attention grâce au travaux de professeur V.kokotovic et ses collaborateurs [15] d'une part , Kanllkapous et AL d'autre part. durant les années suivantes, des manuels édités sont apparus [20].

L'idée fondamentale du backstepping est de synthétiser une loi de commande d'une manière systématique et récursive. Certaines composantes du vecteur d'état sont considérées comme des commandes virtuelles et des lois de commande intermédiaires élaborée. Le backstepping s'applique aux systèmes non linéaires sous forme triangulaire.

1.2 Systèmes non linéaires incertains

Un système non linéaire est un ensemble d'équations non linéaire décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées variables de commande, ou simplement commandes.

Dans les systèmes incertains le calcul de la commande passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle qui ne peut jamais être une représentation parfaite de la réalité : il y a toujours des incertitudes de modélisation, dont la conséquence est qu'on ne peut pas décrire exactement par un modèle mathématique le comportement d'un système physique. En effet, le modèle mathématique qui peut être issu, soit des équations physiques reflétant notre compréhension des mécanismes mis en jeu, soit d'une procédure d'identification du comportement entrée/sortie du système, dépend de paramètres dont la valeur est souvent mal connue ou évolue au cours du temps. Donc un système physique ne peut jamais être caractérisé exactement par un modèle mathématique, cependant dans certain cas nous avons une estimation de l'exactitude de notre modèle qui pourrait être plutôt imprécise.

1.3 Notion de stabilité

1.3.1 Définitions

1.3.1.1 Équilibre

Physiquement, un système est en équilibre quand il conserve son état en absence de forces externes. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la dérivée \dot{x} de son état est nul. Pour un système

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

L'état (ou les états) d'équilibre x_e est la solution (les solutions) de l'équation algébrique

$$f(x) = 0 \quad (1.2)$$

Pour les systèmes linéaires, on a $f(x) = Ax$ ce qui implique que $x = 0$ est un point d'équilibre pour les systèmes linéaires deux cas différents peuvent souvenir :

- Si A est régulière, alors l'origine est le seul point d'équilibre.
- Si A est singulier ce qui définit un sous-espace où $Ax = 0$, alors il existe une région d'équilibre.

Pour les systèmes non linéaires, la solution n'est pas aussi évidemment l'équilibre ne se trouve pas toujours à l'origine. Les régions d'équilibre peuvent être constituées de domaine continus ou de points isolés et /ou la combinaison des deux.

1.3.1.2 Stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité dans le domaine d'automatique, parmi ces définitions

Définition 1.3.1. *On dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, s'il tend à s'en écarter davantage.*

Définition 1.3.2. *Un système est stable si en réponse à une entrée bornée, la sortie du système est bornée.*

Définition 1.3.3. *Un point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \sigma > 0$, il existe $r(\sigma) > 0$ tel que :*

$$\text{si } \|x_0 - x_e\| \leq r \text{ alors } \|x(t) - x_e\| \leq \sigma, \forall \sigma \geq 0$$

Définition 1.3.4. *Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre [21].*



FIGURE 1.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

1.3.1.3 Stabilité locale

La stabilité locale concerne simplement la position d'équilibre considérée, sans rien préjuger sur le domaine de validité de cette stabilité. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante à la stabilité du système dans un certain domaine, contenant cette position d'équilibre.

1.3.1.4 Stabilité globale

On parle de stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables du système. La stabilité globale possède un intérêt pratique beaucoup plus considérable que la stabilité locale. Elle ne dépend pas seulement du système, mais aussi des valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème considéré. Ainsi, le même système est stable ou instable globalement, suivant le domaine de variables auquel on s'intéresse.

1.3.1.5 Stabilité asymptotique

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre. En somme, on aimerait que le système revienne et s'arrête au point d'équilibre lorsqu'il en est légèrement perturbé [21].

Point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, c.-à-d. s'il existe

$$r > 0 \text{ tel que } \forall w_0 \in B(x_e, r), \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

1.3.1.6 Stabilité exponentielle

Nous connaissons la stabilité asymptotique : $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ Cependant on veut garantir plus [21] :

On dit que l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable, s'il existe un voisinage de l'origine noté $u(0)$, $\exists \alpha > 0$ et $\exists \lambda > 0$ tel que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall x_0 \in u(0), \forall t \geq t_0 \geq 0$$

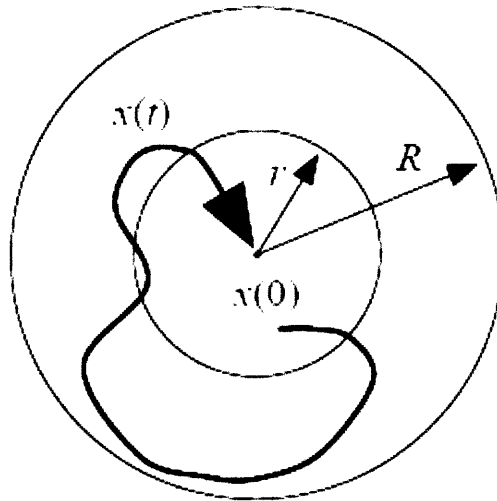


FIGURE 1.2 – Stabilité asymptotique

dans le cas , la constant λ est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence. L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable si $u(0) = \mathbb{R}^n$ [21, 19].

1.3.1.7 Stabilité de Lyapunov

Soit un système dont l'état est défini par le vecteur x qui possède la position d'équilibre x_e . Ecarté de cette position, et abandonné à lui-même au temps $t = t_0$ avec les conditions initiales $x(t_0)$, le système aura comme état $x(t)$. On dit que la position d'équilibre du système est stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si

$$\|x(t_0) - x_e\|^2 \leq \delta_1$$

On soit certain qu'on aura après un certain temps t et pour toutes les valeurs $t > t_0$

$$\|x(t) - x_e\|^2 \leq \varepsilon_1$$

dans le cas contraire (i.e. s'il existe au moins un ε tel que l'on ne puisse pas trouver δ correspondants qui satisfasse aux inégalités) on dit que l'équilibre est instable [8].

1.4 Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires

L'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est très complexe. L'approche de Lyapunov est l'approche la plus utilisée pour étudier ce problème. Cette approche a été introduite au 19^{ième} siècle par le mathématicien russe Alexandre Mikhaïlovitch Lyapunov dans son travail intitulé, "The général problem of the motion stability".

On distingue deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité : La méthode de linéarisation et la méthode directe.

1.4.1 Première méthode de Lyapunov

Pour un système non linéaire, on s'intéresse souvent à son comportement au voisinage des points singuliers. Si la dynamique est linéarisée au tour d'un point d'équilibre, peut-on se prononcer sur la stabilité locale du système ? La réponse est donnée par le théorème de stabilité locale de Lyapunov, connu sous le nom de première méthode [25]. Soit le cas du système décrit par :

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + \prod_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + \prod_2(x_1, x_2)$$

D'après Lyapunov, la stabilité de la position d'équilibre de ce système peut s'étudier sur la version Linéarisée, obtenue en négligeant les termes \prod_1 et \prod_2 qui contiennent des puissances supérieures ou égales à deux en x_1 et x_2 .

Théorème 1.1.

- Si le système linéarisé est asymptotiquement stable, il y a stabilité asymptotique.
- Si le système linéarisé est instable, il y a instabilité.
- Si le système linéarisé est stable sans l'être asymptotiquement, on ne peut se prononcer. C'est le cas critique de Lyapunov. La stabilité ou l'instabilité dans ce cas dépend des termes de degré supérieur à un, négligés dans l'approximation.

Du point de vue pratique, ce théorème a cependant une importance limitée. D'une part, il ne permet d'étudier que la stabilité du point singulier (stabilité locale), et ne

donne aucune information sur le domaine de stabilité (stabilité globale). D'autre part, il suppose que l'approximation du premier degré existe, autrement dit, que les développements en séries des seconds membres des équations comportent des termes du premier degré. Cette hypothèse exclut un certain nombre de cas importants (organe avec zone morte, plus-ou-moins, etc.).

1.4.2 Deuxième méthode de Lyapunov (Méthode Direct)

Son objectif, est de définir une méthode permettant d'analyser la stabilité d'un système non linéaire sans connaître explicitement les solutions des équations différentielles qui le décrivent. La philosophie de cette méthode n'est que l'extension mathématique d'un phénomène physique observé, car les systèmes mécaniques et électriques perdent de l'énergie pour se stabiliser au point d'équilibre.

La méthode directe de Lyapunov (ou la méthode des fonctions de Lyapunov) est dérivée du critère énergétique de stabilité. En appliquant ce critère indépendamment du concept d'énergie, on remplace alors l'énergie du système par une fonction de Lyapunov qui est définie positive (comme l'énergie).

Soit le système autonome :

$$\dot{x} = f(x), \quad x_e = 0 \quad (1.3)$$

Ce système aura un point d'équilibre x_e globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ continue avec une dérivée partielle par rapport au temps $V(x)$ continue ayant les propriétés suivantes :

- $V(0) = 0$.
- $V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$.
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ (Radialement non borné).
- $\dot{V} < 0, \quad \forall \dot{x} \neq 0$.

Théorème 1.2. Stabilité asymptotique[2]

S'il est possible de trouver une fonction $V(x)$ de signe définie positive avec $(V(0) = 0)$ dans un domaine \mathbb{D} comprenant la position d'équilibre, et dont la dérivée totale par rapport au temps V soit définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre sera asymptotiquement stable dans ce domaine.

Théorème 1.3. Instabilité [2]

S'il est possible de trouver une fonction V dont la dérivée est de signe défini dans un domaine \mathbb{D} comprenant l'origine et que V soit

- Définie de même signe que \dot{V} .
- Indéfinie en signe l'équilibre est instable.

Théorème 1.4. Stabilité simple [2]

S'il est possible de trouver une fonction V de signe défini dans un domaine \mathbb{D} et dont la dérivée totale soit semi-définie et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine.

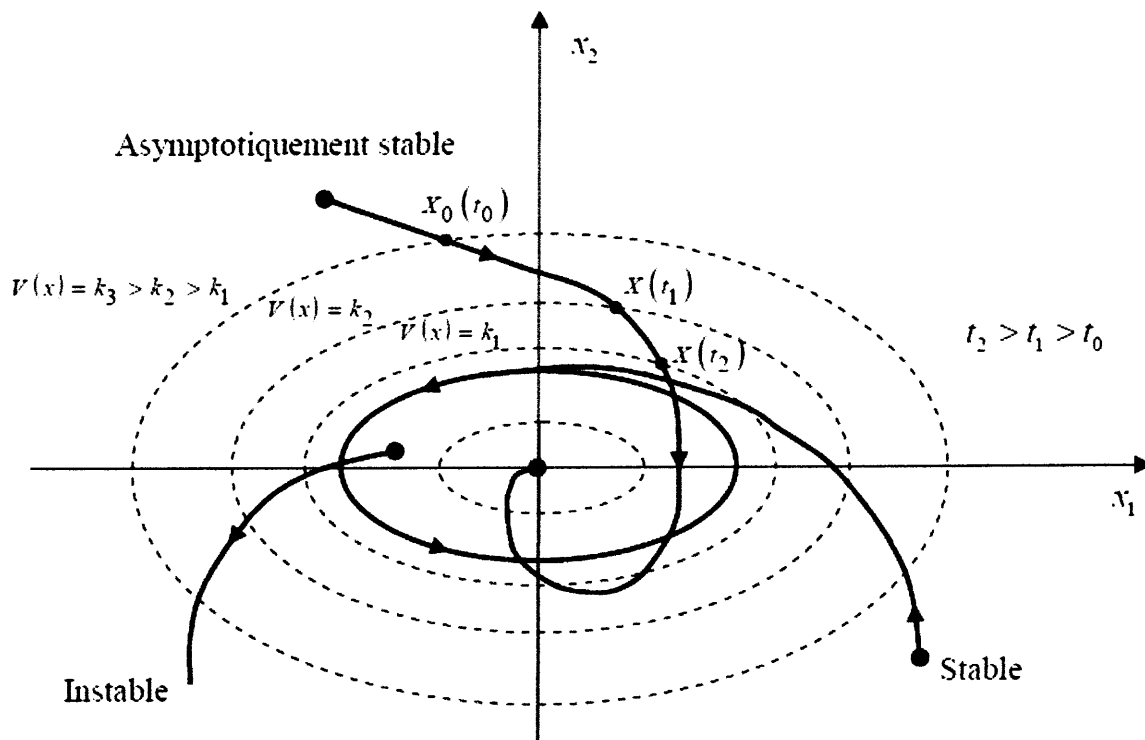


FIGURE 1.3 – Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov

1.5 Commande par la méthode directe de Lyapunov

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la stabilité des systèmes où on a supposé implicitement que la loi de commande a été choisie et notre but était de vérifier la stabilité du système avec cette loi de commande, mais le problème dans

cette synthèse est comment trouver cette commande qui stabilisera le système. Nous allons présenter une méthodologie qui combine entre la recherche de la fonction de Lyapunov et la loi stabilisante. En général, il existe deux concepts pour l'application de la méthode directe de Lyapunov pour la synthèse d'une commande stable :

1^{ere} concept :

On suppose que la loi de commande existe et on cherche la fonction de Lyapunov.

2^{eme} concept :

Cette fois si on fait un choix sur la fonction de Lyapunov candidate $V(x)$, et on cherche la loi de commande qui satisfait les conditions de la stabilité au sens de Lyapunov.

1.5.1 Choix de la fonction de Lyapunov

La théorie de Lyapunov a été pendant longtemps un outil important dans la commande linéaire aussi bien que la commande non-linéaire cependant, son utilisation dans la commande non-linéaire a été entravée par les difficultés pour trouver une fonction de Lyapunov pour un système donné mais la tâche de trouver une telle fonction a été souvent laissée à l'imagination et à l'expertise du concepteur.

Même pour des systèmes simples et en l'absence d'incertitudes le choix de la fonction de Lyapunov, et de la loi de commande n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe à ce jour quant au choix d'une telle fonction. Et quand on sait l'influence de ce choix sur le comportement général du système.

1.5.2 Types des fonctions de Lyapunov

1.5.2.1 Fonction quadratique

Soit n'importe quelle matrice symétrique définie positive P (Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice symétrique P soit définie positive est que ses valeurs propres soient toutes positives), alors

$$V(x) = x^T P x$$

Est une fonction candidate de Lyapunov. Les équipotentielles de Lyapunov sont des ellipsoïdes avec des demi axes définis par les valeurs propres et vecteurs propres de

P. La dérivée au long de la trajectoire de V s'écrit :

$$\dot{V}(x) = x^T P f(x) + f(x)^T P x$$

1.5.2.2 Norme de max

Soit la fonction :

$$V(x) = \max |x_i|$$

C'est à dire que l'on prend la valeur absolue maximale des coefficients du vecteur x . Les équipotentielles de Lyapunov sont des hyper cubes de cotés parallèles aux axes de l'espace vectoriel. la dérivée le long des trajectoires s'écrit :

$$V(x) = \max |x_i| = x_i \text{sing}(x_i)$$

$$\dot{V}(x) = f_i(x) \text{sing}(x_i)$$

1.5.2.3 Norme dual de max

Soit la fonction :

$$V(x) = \sum |x_i|$$

C'est à dire que l'on prend la somme des valeurs absolues des coefficients du vecteur x . Les équipotentielles de Lyapunov sont des hyper cubes de sommets placés sur les axes de l'espace vectoriel. La dérivée le long des trajectoires s'écrit :

$$V(x) = \sum f_i(x) \text{sing}(x_i)$$

1.6 Commande par backstepping

1.6.1 Principe de la commande

Le principe de commande par backstepping consiste à calculer, d'une façon systématique, une loi de commande afin garantir qu'une certaine fonction de Lyapunov soit définie positive et sa dérivée soit toujours négative. Celle-ci permet de garantir la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

1.6.2 Algorithme de base

Soit le cas du système non linéaire du troisième ordre suivant :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \quad (1.6)$$

où, g_i et f_i ($i = 1, 2, 3$) sont des fonctions non linéaires continues et connues telle que $f_i(0) = 0$ et $g_i(x) \neq 0$, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On désire faire suivre à la sortie $y = x_1$, le signal de référence y_r , ou sont supposées connues et uniformément bornées. Le système étant du troisième ordre, la conception s'effectue en trois étapes.

Étape 1

On considère d'abord le premier sous-système (1.4). La variable d'état x_2 est traitée comme une commande virtuelle et l'on définit la première valeur désirée

$$\begin{aligned} x_{1d} &= \alpha_0 \\ &= y_r \end{aligned} \quad (1.7)$$

la première variable d'erreur est définie par

$$z_1 = x_1 - \alpha_0 \quad (1.8)$$

sa dérivée est

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{\alpha}_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

on choisit la fonction de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (1.10)$$

sa dérivée le long de la solution est donnée par

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \quad (1.11)$$

afin d'assurer la stabilité du premier sous-système décrit par (1.4), on prend comme valeur de x_2 la fonction α_1 telle que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_2 \\ &= \frac{1}{g_1} (-k_1 z_1 - f_1 + \dot{\alpha}_0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $k_1 > 0$ est une constante de conception. La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 \quad (1.13)$$

d'où la stabilité asymptotique de e_1

Étape 2

Dans cette étape on considère les sous-systèmes (1.4) et (1.5) et l'on définit la nouvelle variable d'erreur

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \quad (1.14)$$

à cause du fait que x_2 ne peut être forcée à prendre instantanément une valeur désirée, en l'occurrence α_1 , l'erreur e_2 n'est pas instantanément nulle.

La conception dans cette étape consiste alors, à forcer cette erreur à s'annuler avec une certaine dynamique choisie au préalable. Les équations du système à commander, dans l'espace (e_1, e_2) , s'écrivent

$$\dot{z}_1 = f_1 + \dot{\alpha}_0 + g_1(z_2 + \alpha_1) \quad (1.15)$$

$$\dot{z}_2 = f_2 + \dot{\alpha}_1 + g_2 x_3 \quad (1.16)$$

pour lesquelles on choisit la fonction de Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (1.17)$$

qui a pour dérivée avec remplacement les équations (1.15) et (1.16) on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= z_1 (f_1 + g_1(z_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0) + z_2 (f_2 + g_2 x_3 - \dot{\alpha}_1) \\ &= z_1 (f_1 + g_1 \alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + z_2 (f_2 + g_1 z_1 + g_2 x_3 - \dot{\alpha}_1) \\ &= -k_1 z_1^2 + z_2 (f_2 + g_1 z_1 + g_2 x_3 - \dot{\alpha}_1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

le choix de la valeur désirée de x_3 est donnée par

$$\begin{aligned} x_{3d} &= \alpha_2 \\ &= \frac{1}{g_2} (\dot{\alpha}_1 - g_1 z_1 - f_2 - k_2 z_2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

où, $k_2 > 0$ et α_1 se calcule analytiquement

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r \quad (1.20)$$

un tel choix permet de réduire \dot{V}_2 à

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \leq 0 \quad (1.21)$$

\dot{V}_2 étant une fonction définie négative, ce qui assure la stabilité asymptotique de z_1 et z_2 .

Étape 3

Considérons maintenant le système global (1.4)-(1.6). La troisième variable d'erreur est

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \quad (1.22)$$

les équations du système dans l'espace des erreurs (z_1, z_2, z_3) sont données par

$$z_3 = f_1 - \dot{\alpha}_0 + g_1(z_1 + \alpha_1) \quad (1.23)$$

$$z_3 = f_2 - \dot{\alpha}_1 + g_2(z_2 + \alpha_2) \quad (1.24)$$

$$z_3 = f_3 - \dot{\alpha}_2 + g_3 u \quad (1.25)$$

on choisit la fonction de Lyapunov

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (1.26)$$

Sa dérivée le long de la solution de (1.23)-(1.25) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - z_3 (f_3 + g_2 z_2 + g_3 u - \dot{\alpha}_2) \end{aligned} \quad (1.27)$$

le choix approprié de la commande se donne par

$$u = \frac{1}{g_3} (-\dot{\alpha}_2 - f_3 - g_2 z_2 - k_3 z_3) \quad (1.28)$$

où, $k_3 > 0$ et $\dot{\alpha}_2$ se calcule analytiquement

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r} \dddot{y}_r \quad (1.29)$$

Il en résulte que

$$\dot{V}_3 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 < 0 \quad (1.30)$$

D'où la stabilité asymptotique en boucle fermée du système original z_1, z_2, z_3 et la régulation à zéro de l'erreur de poursuite $(y - y_r)$.

1.6.3 Système d'ordre n

L'application récursive de la commande par backstepping permet l'extension de la procédure de conception aux systèmes triangulaires de la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

où, $f_i(0) = 0$ et $g_i \neq 0, (1 \leq i \leq n)$. La procédure de conception commence avec la première équation. Le changement de variable adéquat à chaque étape i permet d'appliquer le backstepping récursivement, en rajoutant l'équation $i + 1$. Partant de α_0 , on construit les différents α_i et V_i . Ce qui résulte en

$$\begin{aligned}
 x_{1d} &= \alpha_0 = y_r \\
 x_{i+1d} &= \alpha_i \\
 &= \frac{1}{g_i} (\varphi_i - g_{i-1}z_{i-1} - \omega_i - k_i z_i) \\
 u &= \frac{1}{g_n} (\varphi_{n-1} - g_{n-1}z_{n-1} - \omega_n - k_n z_n)
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

où

$$\begin{aligned}
 z_i &= x_i - \alpha_i \\
 \varphi_i &= \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_i} g_k x_{k+2} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \right) - \omega_i, \quad i = 1, \dots, n \\
 \omega_i &= f_i - \sum_{k=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_i} f_k
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

les différentes fonctions de Lyapunov sont données par

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \tag{1.34}$$

La commande u , qui permet d'atteindre les objectifs de conception pour le système global est donnée par la dernière commande virtuelle α_n [25].

1.7 Commande adaptative

La commande adaptative est définie comme une commande permettant au régulateur de s'adapter de lui-même aux changements du processus. En conséquence, l'objectif de la commande adaptative est l'ajustement automatique en ligne et des régulateurs des boucles de commande, afin de réaliser ou maintenir de façon identique un certain niveau de performances, quand les paramètres du procédé à commander varient dans le temps. Un système adaptatif peut également s'envisager comme une structure à deux boucles, une boucle principale classique qui prend en compte les variations des signaux d'entrée et de sortie, et une boucle secondaire qui réagit aux variations des paramètres du processus : c'est elle qui rend le système adaptatif. Les différentes méthodes de commande adaptative se différencient par la structure choisie pour réaliser la remise à jour en temps réel des paramètres du régulateur en fonction des variations du processus à commander [3].

La figure 1.4 représente le principe général d'un système dans une plage donnée de commande adaptative

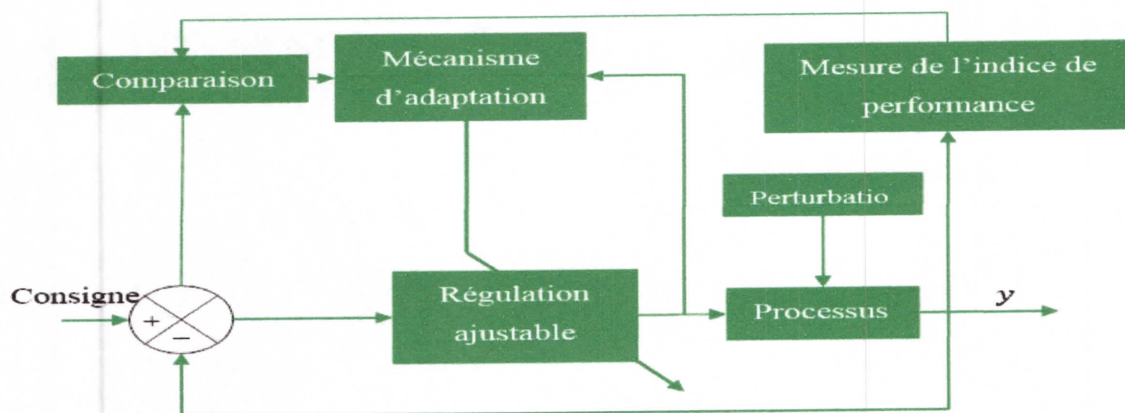


FIGURE 1.4 – Principe d'un système de commande adaptative

1.7.1 Commande adaptative indirecte

Le principe de la Commande Adaptative Indirecte repose sur l'identification d'un modèle du système en ligne et. Puis, avec ce nouveau modèle calculé, le régulateur permettant de satisfaire les spécifications nominales est de nouveau élaboré.

Comme il a été mentionné ci-dessus, cette stratégie se base sur les principes de séparation et d'équivalence certaine.

Un régulateur adaptatif est conçu selon le principe de séparation, si l'estimation du modèle du processus a lieu séparément de la recherche du régulateur : seul le critère sur la commande intervient pour la synthèse du régulateur, sans considération de performances de l'estimation, et vice et versa. Le principe de l'équivalence certaine s'inscrit dans le prolongement du principe de séparation, en considérant que les paramètres du modèle issus de la phase d'identification caractérisent parfaitement le comportement du système, autrement dit toute erreur d'identification nécessairement présente n'est pas prise en compte pour la phase de synthèse de la loi de commande. Ce principe permet donc de séparer totalement les deux étapes (justifiant par ailleurs la terminologie de commande adaptative indirecte), identification puis commande. Le schéma de principe de ce type de commande est illustré Figure 1.5.

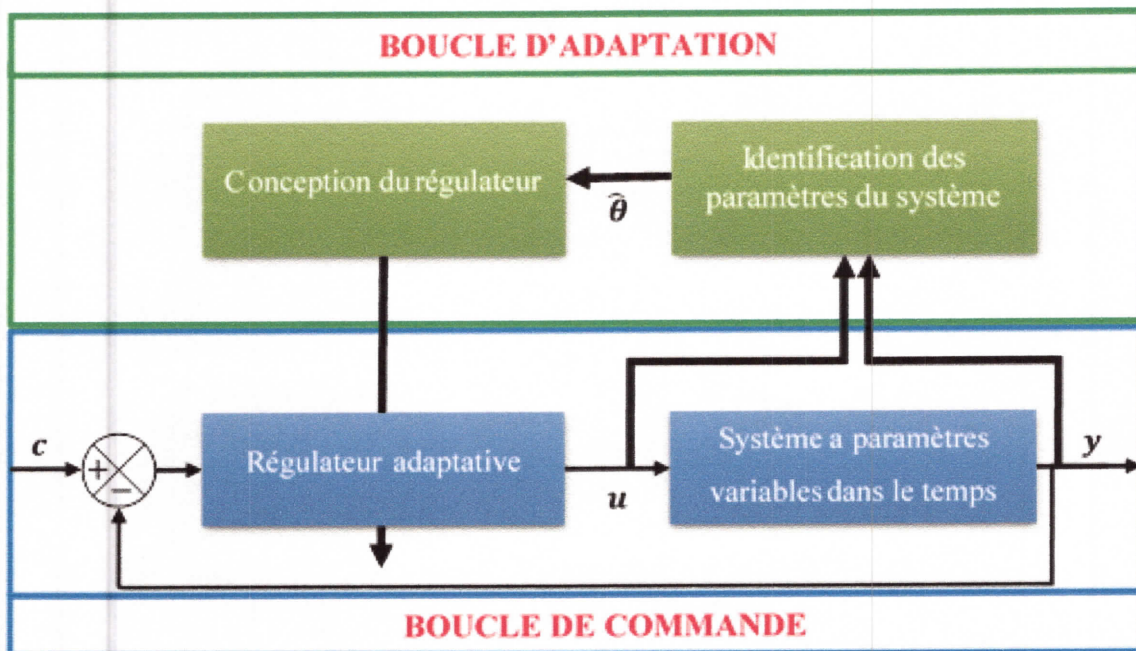


FIGURE 1.5 – Structure de la commande adaptative indirecte

1.7.2 Commande adaptative directe

La Commande Adaptative Directe est une approche moins intuitive que la précédente. L'idée consiste à recalculer les paramètres du régulateur, mais sans identifier



explicitement les paramètres du système, donc en une seule étape, justifiant ainsi la terminologie de commande directe.

Le schéma de la Figure 1.6 illustre ce type de commande, pour laquelle les performances de la boucle fermée sont spécifiées par l'intermédiaire d'un modèle de référence choisi par l'utilisateur de façon cohérente avec les possibilités intrinsèques du système.

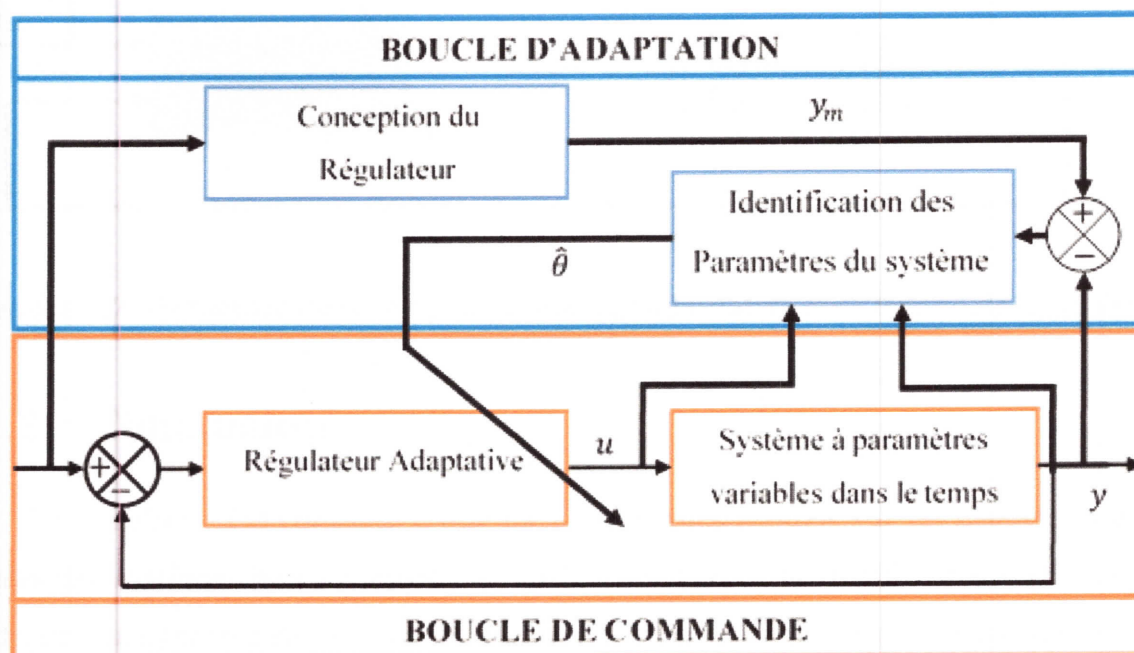


FIGURE 1.6 – Structure de la commande adaptative directe

1.7.3 Commande adaptative à modèle de référence

La commande adaptative avec modèle de référence consiste à adopter l'organe de commande d'une façon à ce que le processus se comporte comme le modèle de référence. La détermination d'une loi de commande adaptative permet à la repense du système de suivre celle du modèle même en présence des perturbations en agissant sur les performances dynamiques du système. Le principe de cette commande est illustré dans la figure 1.7.

Dans ce que reste de ce mémoire nous nous intéressons par la commande adaptative indirecte synthétisé par la procédure de backstepping.

CHAPITRE 2

COMMANDE ADAPTATIVE PAR BACKSTEPPING

2.1 Introduction

La technique de la commande adaptative du backstepping offre une méthode itérative et systématique, qui permet, pour des systèmes non linéaires de tout ordre, de construire récursivement les trois parties indispensables à une commande adaptative basée sur Lyapunov :

- La loi de commande : permet de répondre aux spécifications désirées, quant au comportement du système à commander.
- La loi d'adaptation : détermine la dynamique d'estimation des paramètres inconnus. Elle doit garantir leur convergence vers leurs valeurs respectives, sans affecter le bon fonctionnement, surtout la stabilité, de l'ensemble.
- La fonction de Lyapunov : permet le choix adéquat des deux précédentes lois et garantit la convergence et la stabilité de la structure adaptative, en tout temps. La construction de ce triplet s'effectue simultanément.

Le commande par backstepping est une méthode utilisé la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et l'étude de stabilité. Dans cette technique, il s'agit de choisir une fonction de l'état comme une entrée d'un sous-système et de

procéder de la même manière récursivement jusqu'à obtenir la commande à appliquer au système global.

Nous allons présenter dans ce chapitre la procédure de synthèse de la commande adaptative par la méthode de backstepping, les lois d'adaptations et la fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité et la convergence de la structure adaptative pour une classe de systèmes non linéaire. En suit on applique la loi de commande synthétiser sur deux exemples de simulation.

2.2 Position du problème

On considère la classe de système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \theta_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + d_i(x, t), & i = 1, \dots, n-1. \\ \dot{x}_n = g(x)u + \theta_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + d_n(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie de système, $\theta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ sont les vecteurs des paramètres inconnus, $\psi_i \in \mathbb{R}^{p_i}$, sont les vecteurs des fonction réelles connus, $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire connue, $d_i(x, t)$ représente la dynamique de perturbation.

Pour faciliter la synthèse de la lois du commande nous avons besoin de faire les hypothèses suivantes sur le système (2.1).

Hypothèse 2.1. La fonction $g(x)$ est strictement positive ou négative et, $0 \leq |g(x)| \leq \bar{g}$.

Hypothèse 2.2. Les dynamiques du perturbation $d_i(x, t), i = 1, \dots, n$ sont bornées, il y a des constants positive tel que : $|d_i(x, t)| \leq d_i^*$.

Hypothèse 2.3. La trajectoire de référence et ses dérivés temporelles. Sont bornées et continues.

Lemme 2.1. [5, 11] : Supposons que la fonction $V(t) \geq 0$ est fonction différentiable définie pour $t > 0$. si $\dot{V}(t) \leq -aV(t) + b$. où a et b deux constants positive, alors :

$$V(t) \leq \left(V(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

2.3 Objectif de la commande

L'objectif de la commande est forcé la sortie $y(t)$ à suivre un signal de référence bornée $y_r(t)$, sous la contrainte que tous les signaux implique soient bornée. Plus spécifiquement il s'agit de déterminer la commande par retour d'état $u(x, \hat{\theta})$ et les lois d'adaptations paramétriques base sur la technique de backstepping, le système en boucle fermée doit être globalement stable au sens que tous les variables impliquées doivent être uniformément bornée.

2.4 Commande adaptative par backstepping

Nous allons présenter la procédure de backstepping pour la synthèse de loi de commande adaptative. Cette procédure contient n étapes. A chaque étape, un commande virtuelle, $\alpha_i(t), i = 1, \dots, n - 1$, est conçu. La loi de commande réelle, u_n , est construite à l'étape finale. Chaque étape de cette procédure est basée sur le changement de coordonnées suivant :

$$z_1 = x_1 - y_r \quad (2.2)$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Étape 1

En substituant d'abord la première équation de (2.1) dans la dérivée de (2.2) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= x_2 + \theta_1 \psi_1(x_1) - \dot{y}_r + d_1(x, t) \\ &= z_2 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) + \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r + d_1(x, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $\hat{\theta}_1$ est l'estimation du vecteur du paramètre inconnu θ_1 . $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ est l'erreur d'estimation paramétrique. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\Gamma_{12}} \tilde{d}_1^2 \quad (2.5)$$

où $\Gamma_{11} > 0$ matrice diagonale et $\Gamma_{12} > 0$ sont des paramètres de synthèse. La dérivée temporelle de V_1 en compte tenu de (2.4) est

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 \\ &= z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r \right) + \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 + d_1(x, t) z_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 \\ &\leq z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r \right) + \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 + |d_1| |z_1| - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1\end{aligned}\quad (2.6)$$

en utilisant l'inégalité $xy \leq \frac{x^2}{2a^2} + \frac{a^2 y^2}{2}$ et l'hypothèse 2.2, l'équation (2.6) devient

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r \right) + \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 + d_1^* \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{a_1^2}{2} - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 \\ &\leq z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) + \hat{d}_1 \frac{z_1}{a_1^2} - \dot{y}_r \right) - \tilde{\theta}_1^T \left(\Gamma_{11}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 - \psi_1(x_1) z_1 \right) \\ &\quad - \tilde{d}_1 \left(\Gamma_{12}^{-1} \dot{\hat{d}}_1 - \frac{z_1^2}{a_1^2} \right) + \frac{a_1^2}{2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

où \hat{d}_1 est l'estimation du paramètre inconnu $d_1^* = \frac{1}{2} d_1^2$. $\tilde{d}_1 = d_1^* - \hat{d}_1$ est l'erreur d'estimation paramétrique. La première loi de commande virtuelle est choisie comme suit

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \hat{d}_1 \frac{z_1}{a_1^2} + \dot{y}_r\quad (2.8)$$

et les lois d'adaptations sont

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_{11} \left(\psi_1(x_1) z_1 - \sigma_{11} \hat{\theta}_1 \right)\quad (2.9)$$

$$\dot{\hat{d}}_1 = \Gamma_{12} \left(\frac{z_1^2}{a_1^2} - \sigma_{12} \hat{d}_1 \right)\quad (2.10)$$

En substituant (2.8), (2.9) et (2.10) dans (2.7) on obtient

$$\dot{V}_1 \leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \frac{a_1^2}{2} + \sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 + \sigma_{12} \tilde{d}_1 \hat{d}_1\quad (2.11)$$

l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y$ nous donne

$$\begin{aligned}\sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 &= \sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \left(\hat{\theta}_1 + \theta_1 - \theta_1 \right) \\ &= -\sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \theta_1 \\ &\leq -\frac{1}{2} \sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \sigma_{11} \theta_1^T \theta_1\end{aligned}$$

et

$$\sigma_{12} \tilde{d}_1 \hat{d}_1 \leq -\frac{1}{2} \sigma_{12} \tilde{d}_1^2 + \frac{1}{2} \sigma_{12} (d_1^*)^2$$

la substitution des inégalité ci-dessus en (2.11) donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 - \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_1 - \frac{\sigma_{12} \Gamma_{12}}{2\Gamma_{12}} \tilde{d}_1^2 + z_1 z_2 + \frac{\sigma_{11} \theta_1^2}{2} + \frac{\sigma_{12} (d_1^*)^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} \\ &\leq -\min \left(2k_1, \frac{\sigma_{11}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}, \sigma_{12} \Gamma_{12} \right) \left(\frac{z_1^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11} \tilde{\theta}_1}{2} + \frac{\tilde{d}_1^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{11} \theta_1^2}{2} + \frac{\sigma_{12} (d_1^*)^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} \right) + z_1 z_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec $\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})$ est la valeur propre minimal de Γ_{11}^{-1} . L'équation (2.12) peut donc ré-écrire sous la forme suivante

$$\dot{V}_1 \leq -a_1 V_1 + b_1 + z_1 z_2 \quad (2.13)$$

où $a_1 = \min \left(2k_1, \frac{\sigma_{11}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}, \sigma_{12} \Gamma_{12} \right)$, $b_1 = \left(\frac{\sigma_{11} \theta_1^2}{2} + \frac{\sigma_{12} (d_1^*)^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} \right)$ et le terme $z_1 z_2$ sera éliminé à la prochaine étape.

Étape 2

En substituant la 2^{ieme} équation de (2.1) dans la dérivée de (2.3) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= x_3 + \theta_2 \psi_2(x_1, x_2) - \dot{\alpha}_1 + d_2(x, t) \\ &= z_3 + \alpha_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + \tilde{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \dot{\alpha}_1 + d_2(x, t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $\hat{\theta}_2$ est l'estimation du vecteur du paramètre inconnu θ_2 . $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$ est l'erreur d'estimation paramétrique. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \Gamma_{22}^{-1} \tilde{d}_2^2 \quad (2.15)$$

où $\Gamma_{21} > 0$ matrice diagonale et $\Gamma_{22} > 0$ sont des paramètres de synthèse. La dérivée temporelle de V_2 en compte tenu de (2.15) est

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \dot{V}_1 + z_2 \left(\alpha_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + \hat{d}_2 \frac{z_2^2}{a_2^2} - \dot{\alpha}_1 \right) - \tilde{\theta}_2^T \left(\Gamma_{21}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_2 + \psi_2(x_1, x_2) z_2 \right) \\ &\quad - \tilde{d}_2 \left(\dot{\tilde{d}}_2 \Gamma_{22}^{-1} - \frac{z_2^2}{a_2^2} \right) + \frac{a_2^2}{2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

où \hat{d}_2 est l'estimation du paramètre inconnu $d_2^* = \frac{d_2^2}{2}$. $\tilde{d}_2 = d_2^* - \hat{d}_2$ est l'erreur d'estimation paramétrique. La 2^{ieme} loi de commande virtuelle est choisi comme suit[9]

$$\alpha_2 = -k_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \frac{\hat{d}_2 z_2}{a_2^2} + \dot{\alpha}_1 \quad (2.17)$$

où $k_2 > 0$, $\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \dot{\ddot{y}}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{d}_1} \dot{\hat{d}}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1$ et les lois d'adaptation sont

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_{21} (\psi_2(x_1, x_2) z_2 - \sigma_{21} \hat{\theta}_2) \quad (2.18)$$

$$\dot{\hat{d}}_2 = \Gamma_{22} \left(\frac{z_2^2}{a_2^2} - \sigma_{22} \hat{d}_2 \right) \quad (2.19)$$

Ce qui rend \dot{V}_2 comme suit

$$\dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 - z_1 z_2 + z_2 z_3 - k_2 z_2^2 - \frac{a_2^2}{2} + -\sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 + \sigma_{22} \tilde{d}_2 \hat{d}_2 \quad (2.20)$$

l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y$ nous donne

$$\sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 \leq -\frac{1}{2} \sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2 \quad \text{et} \quad \sigma_{22} \tilde{d}_2 \hat{d}_2 \leq -\frac{1}{2} \sigma_{22} \tilde{d}_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} (d_2^*)^2$$

la substitution des inégalités ci-dessus dans (2.20) donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \dot{V}_1 - z_1 z_2 + z_2 z_3 - k_2 z_2^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{\sigma_{21} \theta_2^2}{2} - \frac{\sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \tilde{\theta}_2}{2 \lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})} + \frac{\sigma_{22} (d_2^*)^2}{2} - \frac{\sigma_{22} \Gamma_{22} \tilde{d}_2^2}{2 \Gamma_{22}} \\ &\leq \dot{V}_1 - \min \left(2k_2, \frac{\sigma_{21}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})}, \sigma_{22} \Gamma_{22} \right) \left(\frac{z_2^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21} \tilde{\theta}_2}{2} + \frac{\tilde{d}_2^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{21} \theta_2^2}{2} + \frac{\sigma_{22} (d_2^*)^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} \right) + z_2 z_3 \\ &\leq \dot{V}_1 - a_2 V_2 + b_2 - z_1 z_2 + z_2 z_3 \\ &\leq \sum_{j=1}^2 (-a_j V_j + b_j) + z_2 z_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $a_2 = \min \left(2k_2, \frac{\sigma_{21}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})}, \sigma_{22} \Gamma_{22} \right)$, $b_2 = \left(\frac{\sigma_{21} \theta_2^2}{2} + \frac{\sigma_{22} (d_2^*)^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} \right)$ et le terme $z_2 z_3$ sera éliminé à la prochaine étape.

Étape i ($i = 3, \dots, n-1$)

En substituant la i^{ieme} équation de (2.1) dans la dérivée de (2.3) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= x_{i+1} + \theta_i \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \dot{\alpha}_{i-1} + d_i(x, t) \\ &= z_{i+1} + \alpha_i + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \dot{\alpha}_{i-1} + d_i(x, t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\hat{\theta}_i$ est l'estimation du vecteur du paramètre inconnu θ_i . $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ est l'erreur d'estimation paramétrique. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{d}_i^2 \quad (2.23)$$

où $\Gamma_{i1} > 0$ matrice diagonale et $\Gamma_{i2} > 0$ sont des paramètres de synthèse. La dérivée de V_i en considérant (2.22) est

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \dot{V}_{i-1} + z_i \left(\alpha_i + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + \hat{d}_i \frac{z_i^2}{a_i^2} - \dot{\alpha}_{i-1} \right) \\ & - \tilde{\theta}_i^T \left(\Gamma_{i1}^{-1} \hat{\theta}_i + \psi_i(x_1, \dots, x_i) z_i \right) - \tilde{d}_i \left(\hat{\theta}_i^T \Gamma_{i2}^{-1} - \frac{z_i^2}{a_i^2} \right) + \frac{a_i^2}{2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où \hat{d}_i est l'estimation du paramètre inconnu $d_i^* = \frac{d_i^2}{i}$. $\tilde{d}_i = d_i^* - \hat{d}_i$ est l'erreur d'estimation paramétrique. La i^{ieme} loi de commande virtuelle est choisie comme suit

$$\alpha_i = -k_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \frac{\hat{d}_i z_i}{a_i^2} + \dot{\alpha}_{i-1} \quad (2.25)$$

où $k_i > 0$ et $\dot{\alpha}_i$ se calcule analytiquement comme suit

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{j=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(j-1)}} \dot{y}_r^j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}_j} \dot{\hat{\theta}}_j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{d}_j} \dot{\hat{d}}_j \quad (2.26)$$

et les lois d'adaptation sont

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_{i1} \left(\psi_i(x_1, \dots, x_i) z_i - \sigma_{i1} \hat{\theta}_i \right) \quad (2.27)$$

$$\dot{\hat{d}}_i = \Gamma_{i2} \left(\frac{z_i^2}{a_i^2} - \sigma_{i2} \hat{d}_i \right) \quad (2.28)$$

Ce qui rend \dot{V}_i comme suit

$$\dot{V}_i \leq \dot{V}_{i-1} - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} - k_i z_i^2 - \frac{a_i^2}{2} + \sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \sigma_{i2} \tilde{d}_i \hat{d}_i \quad (2.29)$$

l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y$ nous donne

$$\sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \leq -\frac{1}{2} \sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i$$

et

$$\sigma_{i2} \tilde{d}_i \hat{d}_i \leq -\frac{1}{2} \sigma_{i2} \tilde{d}_i^2 + \frac{1}{2} \sigma_{i1} (d_i^*)^2$$

la substitution des inégalités ci-dessus en (2.29) nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \dot{V}_{i-1} - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} - k_i z_i^2 + \frac{a_i^2}{2} + \frac{\sigma_{i1} \theta_i^2}{2} - \frac{\sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \tilde{\theta}_i}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})} + \frac{\sigma_{i2} (d_i^*)^2}{2} - \frac{\sigma_{i2} \Gamma_{i2} \tilde{d}_i^2}{2\Gamma_{i2}} \\ \leq & \dot{V}_{i-1} - \min \left(2k_i, \frac{\sigma_{i1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})}, \sigma_{i2} \Gamma_{i2} \right) \left(\frac{z_i^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1} \tilde{\theta}_i}{2} + \frac{\tilde{d}_i^2}{2} \right) \\ & + \left(\frac{\sigma_{i1} \theta_i^2}{2} + \frac{\sigma_{i2} (d_i^*)^2}{2} + \frac{a_i^2}{2} \right) + z_i z_{i+1} \end{aligned} \quad (2.30)$$

où $a_i = \min \left(2k_i, \frac{\sigma_{i1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})}, \sigma_{i2}\Gamma_{i2} \right)$, $b_i = \left(\frac{\sigma_{i1}\theta_i^2}{2} + \frac{\sigma_{i2}(d_i^*)^2}{2} + \frac{a_i^2}{2} \right)$, dans l'étape $(i-1)$, il a été obtenu

$$\dot{V}_{i-1} \leq \sum_{j=1}^{i-1} (-a_j V_j + b_j) + z_{i-1} z_i \quad (2.31)$$

en remplace (2.31) dans (2.30), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \sum_{j=1}^{i-1} (-a_j V_j + b_j) - \min \left(2k_i, \frac{\sigma_{i1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})}, \sigma_{i2}\Gamma_{i2} \right) \left(\frac{z_i^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1} \tilde{\theta}_i}{2} + \frac{\tilde{d}_i^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{i1}\theta_i^2}{2} + \frac{\sigma_{i2}d_i^2}{2} + \frac{a_i^2}{2} \right) + z_i z_{i+1} \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-1} (-a_j V_j + b_j) - a_i V_i + b_i + z_i z_{i+1} \\ &\leq \sum_{j=1}^i (-a_j V_j + b_j) + z_i z_{i+1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

le terme $z_i z_{i+1}$ sera éliminé à la prochaine étape.

Étape n

La substitution de la n^{ieme} équation de (2.1) dans la dérivée de (2.3) on donne

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= g(x)u + \theta_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) - \dot{\alpha}_{n-1} + d_n(x, t) \\ &= g(x)u + \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + \tilde{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) - \dot{\alpha}_{n-1} + d_n(x, t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\hat{\theta}_n$ est l'estimation du vecteur du paramètre inconnu θ_n . $\tilde{\theta}_n = \theta_n - \hat{\theta}_n$ est l'erreur d'estimation paramétrique. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2} \Gamma_{n2} \tilde{d}_n^2 \quad (2.34)$$

où $\Gamma_{n1} > 0$ matrice diagonale et $\Gamma_{n2} > 0$ sont des paramètres de synthèse. La dérivée temporelle de V_n en considérons (2.33) est

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \dot{V}_{n-1} + z_n \left(g(x)u + \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + \frac{\hat{d}_n z_n^2}{a_n^2} - \dot{\alpha}_{n-1} \right) \\ &\quad - \tilde{\theta}_n^T \left(\Gamma_{n1}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n - \psi_n(x_1, \dots, x_n) z_n \right) - \tilde{d}_n \left(\dot{\tilde{d}}_n \Gamma_{n2} - \frac{z_n^2}{a_n^2} \right) + \frac{a_n^2}{2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où \hat{d}_n est l'estimation du paramètre inconnu $d_i^* = \frac{d_i^*}{a_n}$. $\tilde{d}_n = d_n^* - \hat{d}_n$ est l'erreur d'estimation paramétrique. La loi de commande réelle est choisit comme suit

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-k_n z_n - z_{n-1} - \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) - \hat{d}_n \frac{z_n}{a_n^2} + \dot{\alpha}_{n-1} \right) \quad (2.36)$$

depuis $\dot{\alpha}_{n-1}$ peut être exprimé comme suit :

$$\dot{\alpha}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \omega_{n-1}$$

avec

$$\omega_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^i} y_r^{(i+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{d}_i} \dot{\hat{d}}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}_i} \dot{\hat{\theta}}_i$$

et les loi d'adaptation sont

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma_{n1} (\psi_n(x_1, \dots, x_n) z_n - \sigma_{n1} \hat{\theta}_n) \quad (2.37)$$

$$\dot{\hat{d}}_n = \Gamma_{n2} \left(\frac{z_n^2}{a_n^2} - \sigma_{n2} \hat{d}_n \right) \quad (2.38)$$

ce qui rendre (2.35) comme suit

$$\dot{V}_n \leq \dot{V}_{n-1} - z_{n-1} z_n - k_n z_n^2 + \frac{a_n^2}{2} + \sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n + \sigma_{n2} \tilde{d}_n \hat{d}_n \quad (2.39)$$

L'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y$ nous donne

$$\sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n \leq -\frac{1}{2} \sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2} \sigma_{n1} \theta_n^T \theta_n$$

et

$$\sigma_{n2} \tilde{d}_n \hat{d}_n \leq -\frac{1}{2} \sigma_{n2} \tilde{d}_n^2 + \frac{1}{2} \sigma_{n1} (d_n^*)^2$$

la substitution des inégalités ci-dessus en (2.39) nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \dot{V}_{n-1} - z_{n-1} z_n - k_n z_n^2 + \frac{a_n^2}{2} + \frac{\sigma_{n1} \theta_n^2}{2} - \frac{\sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n}{2 \lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})} \\ &\quad + \frac{\sigma_{n2} (d_n)^2}{2} - \frac{\sigma_{n2} \Gamma_{n2} \tilde{d}_n^2}{2 \Gamma_{n2}} \\ &\leq \dot{V}_{n-1} - \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right) \left(\frac{z_n^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1} \tilde{\theta}_n}{2} + \frac{\tilde{d}_n^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{n1} \theta_n^2}{2} + \frac{\sigma_{n2} (d_n)^2}{2} + \frac{a_n^2}{2} \right) - z_{n-1} z_n \end{aligned} \quad (2.40)$$

dans l'étape $(n-1)$, il a été trouvée

$$\dot{V}_{n-1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) + z_{n-1} z_n \quad (2.41)$$

en remplace (2.41) dans (2.40), on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) - \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{n2}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right) \left(\frac{z_n^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1} \tilde{\theta}_n}{2} + \frac{\tilde{d}_n^2}{2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\sigma_{n1} \theta_n^2}{2} + \frac{\sigma_{n2} d_n^2}{2} + \frac{a_n^2}{2} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) - a_n V_n + b_n \\
&\leq \sum_{j=1}^n (-a_j V_j + b_j)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où $a_n = \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{\lambda_{\min}(\Gamma_{n2}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right)$ et $b_n = \left(\frac{\sigma_{n1} \theta_n^2}{2} + \frac{\sigma_{n2} (d_n^*)^2}{2} + \frac{a_n^2}{2} \right)$

à la fin on peut réécrire V_n sous la forme suivante.

$$\dot{V}_n \leq -a V_n + b \tag{2.43}$$

avec les constant a et b prendre les valeurs suivants $a = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = \sum_{j=1}^n b_j$ l'inégalité (2.43) implique

$$0 \leq V \leq \frac{b}{a} + \left(V(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at}, \forall t \geq 0 \tag{2.44}$$

Selon le lemma 2.1, l'équation (2.44) signifie que $V(t)$ est bornée par $\frac{b}{a}$. Donc tous les signaux dans la bonde de commande sont bornée. De plus, par un choix approprié des paramètres des commande on peut augmenter la valeur de a ce qui rendre la quantité $\frac{b}{a}$ petite. Donc l'erreur de poursuite z_1 peut diminuer.

2.5 Exemples de simulation

Afin de montrer la validité de la commande adaptative par backstepping étudiée dans ce chapitre, nous effectuons une simulation numérique en se servant du logiciel **MATLAB** sous l'environnement Windows 7. La résolution des systèmes d'équations différentielles a été faite par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas fixé à 0.01 sec.

Nous appliquons la commande adaptative robuste par backstepping pour deux exemples : Le premier est un système non linéaire de deuxième ordre et l'autre est un bras manipulateur actionné par un moteur à courant continu.

2.5.1 Exemple 1 : Système non linéaire de deuxième ordre

Dans cet exemple, on considère un système non linéaire de deuxième ordre donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta_1^T \psi_1(x_1) + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 = g(x)u + \theta_2^T \psi_2(x_1, x_2) + d_2(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.45)$$

où $x(0) = [0.3 \ 1]^T$, $\theta_1 = [1 \ 2]$, $\theta_2 = [1 \ 0.2]$, $\psi_1 = \begin{bmatrix} x_1 e^{-0.5x_1} \\ x_1^2 \end{bmatrix}$, $\psi_2 = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \sin(x_2) \end{bmatrix}$,
 $d_1(x, t) = 0.5 \sin^2(t)$, $d_2(x, t) = 0.6 \sin(x_1^2 + x_2^2) \cos(t)$ et $g(x) = 1$.

L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système(2.45) à suivre la trajectoire désirée : $y_r = 0.5(\sin(t) + \sin(0.5t))$. En se basant sur la procédure de synthèse présente dans ce chapitre, la loi de commande virtuelle α_1 et la loi de commande pratique u sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -8z_1 - \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \hat{d}_1 \frac{z_1}{a_1} + \dot{y}_r \\ u &= -20z_2 - z_1 - \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \hat{d}_2 \frac{z_2}{a_2} + \dot{\alpha}_1 \end{aligned}$$

et les lois d'adaptation sont donne par

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= 15 \left(\psi_1(x_1) z_1 - \frac{1}{1000} \hat{\theta}_1 \right) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 &= 15 \left(\psi_2(x_1, x_2) z_2 - \frac{2}{10} \hat{\theta}_2 \right) \\ \dot{\hat{d}}_1 &= 10 \left(\frac{z_1^2}{12} - \frac{1}{10} \hat{d}_1 \right) \\ \dot{\hat{d}}_2 &= 10 \left(\frac{z_2^2}{12} - \frac{1}{100} \hat{d}_2 \right) \end{aligned}$$

Les résultats de simulation sont donnés par : figure (2.1) présent la sortie réel du système et désirée. Le signal de commande représenté dans figure (2.2). L'erreur de poursuite présent dans la figure (2.3).

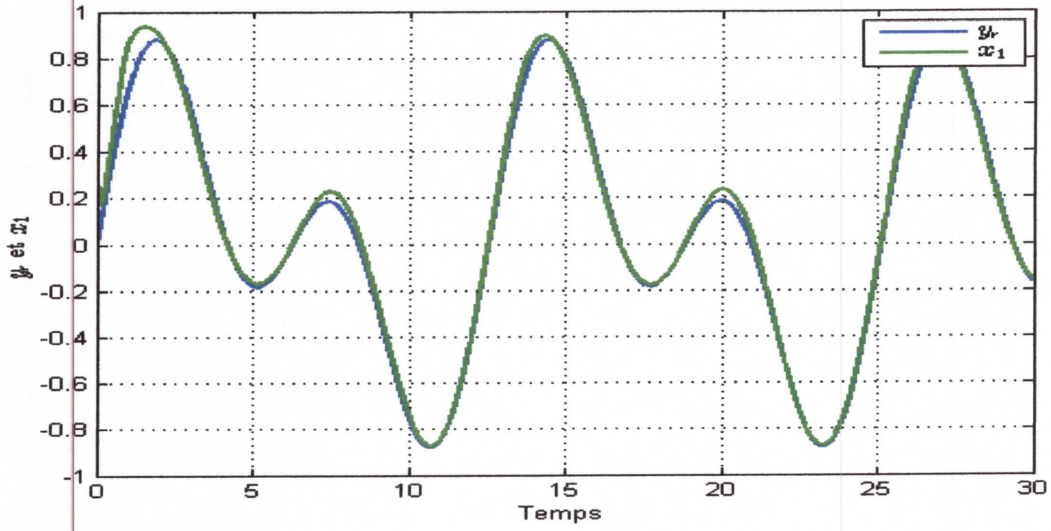


FIGURE 2.1 – Sortie du système non linéaire : réelle x_1 ("x1") et désirée x_{1d} ("y_r").

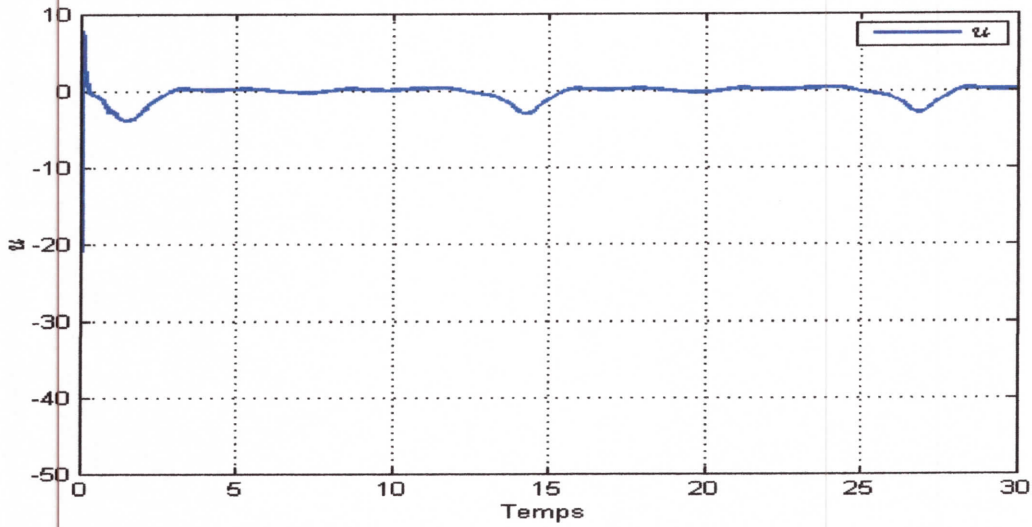


FIGURE 2.2 – Signal de commande u .

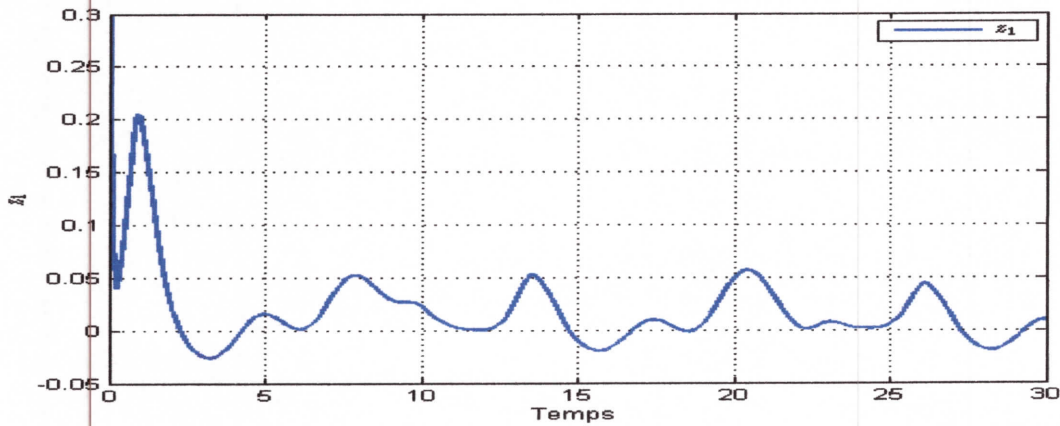


FIGURE 2.3 – Erreur poursuite z_1

Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la loi de commande obtenu dans ce chapitre.

On remarque que la trajectoire réelle convergent vers la trajectoire désirée et que l'erreur de poursuite z_1 tendent vers zéro.

2.5.2 Exemple 2 : Bras Manipulateur Actionné par un moteur à courant continu

Le modèle dynamique du bras manipulateur de degré deux actionné par un moteur à courant continu et donné comme suit [16]

$$\begin{cases} D\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin q = I + \Delta I \\ M\dot{I} = -HI - K_m\dot{q} + V \end{cases} \quad (2.46)$$

où q , \dot{q} , et \ddot{q} désignent la position angulaire, la vitesse angulaire, et accélération angulaire, respectivement. I est le courant du moteur. ΔI représente les perturbations de courant. V est l'entrée de commande en voltage.

Les valeurs des paramètres avec des unités appropriées sont données dans par [28, 4] : $D = 1$, $B = 1$, $M = 0.05$, $H = 0.5$, $N = 10$, $K_m = 10$ et $\Delta I = 4\sin(t)$.

Choisissons les variables d'état comme suit : $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ et $x_3 = \frac{I}{D}$, le modèle dynamique devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - \frac{B}{D}x_2 - \frac{N}{D}\sin(x_1) + d_2(x, t) \\ \dot{x}_3 = \frac{V}{DM} - \frac{H}{M}x_3 - \frac{K_m}{DM}x_2 \end{cases} \quad (2.47)$$

le système d'équations (2.47) peut récite comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + \begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{N}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} + d_2(x, t) \\ \dot{x}_3 = \frac{V}{DM} + \begin{bmatrix} \frac{H}{M} & \frac{K_m}{DM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.48)$$

posons $x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\theta_2 = \begin{bmatrix} \frac{B}{D} & \frac{N}{D} \end{bmatrix}$, $\theta_3 = \begin{bmatrix} \frac{H}{M} & \frac{K_m}{DM} \end{bmatrix}$, $\psi_2 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix}$, $\psi_3 =$

$\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}$, et $d_2 = \Delta I$

ce qui rendre (2.48) comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + \theta_2^T \psi_2(x_1, x_2) + d_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{V}{DM} + \theta_3^T \psi_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2.49)$$

L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système (2.49) à suivre la trajectoire désirée : $y_r = \frac{\pi}{2} \sin(t) (1 - e^{-0.1t^2}) [4]$.

les commandes virtuelles α_1, α_2 et la commande u sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -10z_1 + \dot{y}_r \\ \alpha_2 &= -30z_2 - z_1 - \hat{d}_2 \frac{z_2}{1^2} - \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + \dot{\alpha}_1 \\ u &= -25z_3 - z_2 - \hat{\theta}_3^T \psi_3(x_1, x_2, x_3) + \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

et les lois d'adaptation sont

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_2 &= \frac{1}{10} (\psi_2(x_1, x_2) z_2 - 10 \hat{\theta}_2) \\ \dot{\hat{\theta}}_3 &= \frac{1}{10} (\psi_3(x_1, x_2, x_3) z_3 - 10 \hat{\theta}_3) \\ \dot{\hat{d}}_2 &= \frac{1}{10} \left(\frac{z_2^2}{1^2} - 10 \hat{d}_2 \right) \end{aligned}$$

Les résultats de simulation sont donnés par : figure (2.4) présent la sortie réel du système et désirée. Le signal de commande représenté dans figure (2.5). L'erreur de poursuite présent dans la figure (2.6).

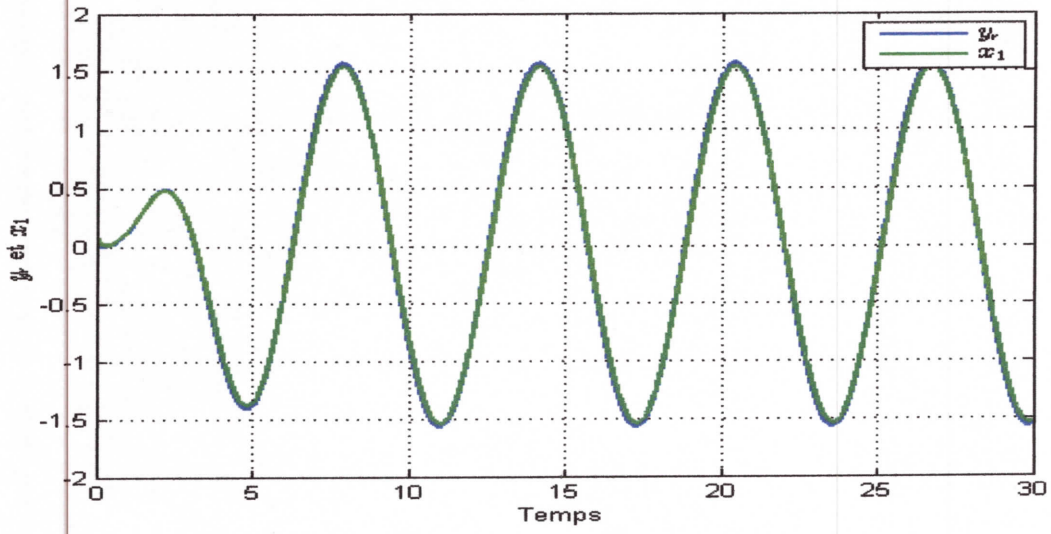


FIGURE 2.4 – Sortie du système non linéaire : réelle x_1 ("x1") et désirée x_{1d} ("y_r").

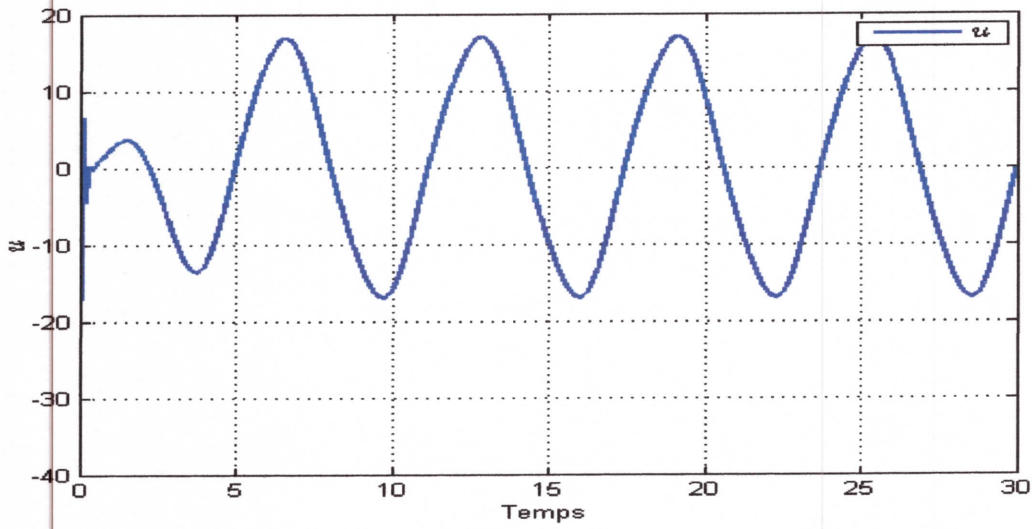


FIGURE 2.5 – Signal de commande u .

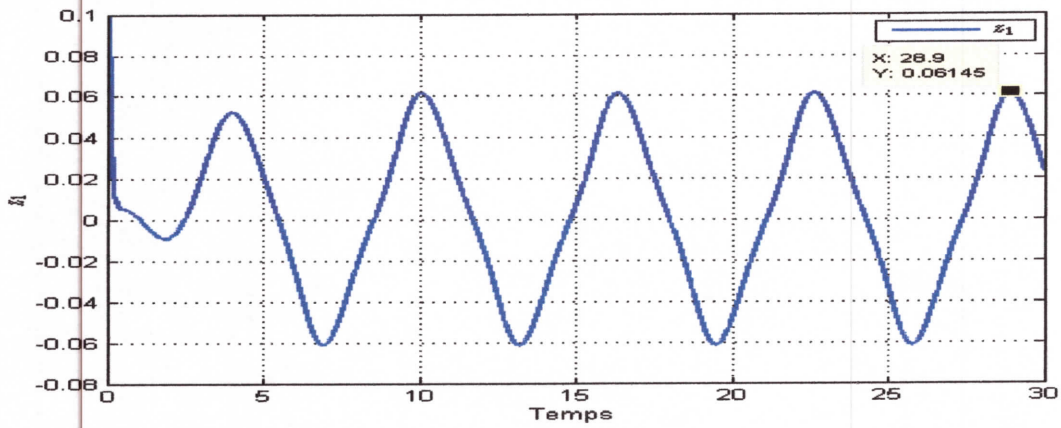


FIGURE 2.6 – Erreur poursuite z_1

Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la loi de commande obtenu dans ce chapitre.

On remarque que la trajectoire réelle convergent vers la trajectoire désirée et que l'erreur de poursuite z_1 tendent vers zéro.

2.6 Conclusion

Ce chapitre présente une procédure systématique pour la synthèse d'une loi de commande adaptative pour une classe de systèmes non linéaire en présence d'incertitudes paramétriques et des perturbations dynamiques. La technique de backstepping est utilisée pour la conception de la commande adaptative. Il a été prouvé que tous les signaux dans la boucle de commande reste bornées et la convergence de l'erreur de poursuite converge vers le voisinage de l'origine. En suite, nous avons validé la loi de commande sur deux systèmes, l'un est un système artificiel de deuxième ordre et l'autre est le modèle du robot manipulateur actionné par un moteur à courant continu. Parmi les problèmes que nous avons rencontré lors de la synthèse et la simulation de la loi de commande est la dérivation successive des lois de commande virtuelles. La résolution de ce problème fait l'objet du chapitre suivant.



CHAPITRE 3

COMMANDE ADAPTATIVE PAR BACKSTEPPING FILTRÉ

3.1 Introduction

Comme nous avons mentionné à la fin du chapitre précédent, lors de la synthèse et la validation d'une loi de commande synthétisée par la méthode de backstepping, le problème majeur que nous avons rencontré est le problème d'explosion de complexité de la loi de commande [10, 18, 26]. Autrement dit, la mise en œuvre du backstepping devient plus en plus complexe que l'ordre du système augmente [12]. Cette complexité croissante est due principalement de la dérivation successive des commandes virtuelles calculées à chaque étape de la procédure de backstepping.

Afin d'éviter le problème d'explosion de complexité existante dans la procédure du backstepping conventionnelle, une méthode de synthèse de la commande appelé filtrage de commande est proposée en introduisant des filtres linéaires à chaque étape de la procédure de backstepping pour approximer les dérivées des lois de commandes virtuelles [7, 27, 29].

Ce chapitre présente, en se basant sur la technique de backstepping, une procédure systématique de conception d'une loi de commande adaptative pour une classe de systèmes non linéaires en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations

dynamiques. Nous avons évité le problème d'explosion de complexité en introduisant des filtres linéaires du premier ordre à chaque étape de la procédure de backstepping. En suit, nous allons valider par simulation la loi de commande sur les exemples utilisés dans le chapitre précédent.

3.2 position du problème

Soit le système d'ordre n d'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \theta_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + d_i(x, t), & i = 1, \dots, n-1. \\ \dot{x}_n = g(x)u + \theta_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + d_n(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

$x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sont l'entrée et la sortie du système, $\theta_i \in \mathbb{R}^i$, sont les vecteurs des paramètres inconnus, $\psi_i \in \mathbb{R}^i$ sont les vecteurs des fonctions connus, $g(x) \in \mathbb{R}^i$ est une fonction non linéaire connue, $d_i(x, t)$ c'est une fonction qui représente la dynamique de perturbation.

Pour faciliter la synthèse de la loi de commande nous avons besoin de faire les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1. *La fonction $g(x)$ est strictement positive ou négative et, $0 \leq |g(x)| \leq \bar{g}$.*

Hypothèse 3.2. *Les dynamiques du perturbation $d_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$ sont bornées, il y a des constants positive tel que : $|d_i(x, t)| \leq d_i^*$.*

Hypothèse 3.3. *La trajectoire de référence et ses dérivés temporelles. Sont bornées et continues.*

Lemme 3.1. [5, 11] : *Supposons que la fonction $V(t) \geq 0$ est une fonction différentiable définie pour $t > 0$. si $\dot{V}(t) \leq -aV(t) + b$, où a et b deux constantes positives, alors*

$$V(t) \leq \left(V(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Lemme 3.2. [22] : *Pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante est vérifié*

$$|z| - z \tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \leq \delta\varepsilon, \delta = 0.2785$$

3.3 Synthèse de la loi de commande

Dans cette section, en utilisant la technique de backstepping, nous allons synthétiser une loi de commande adaptative pour le système (3.1). Cette procédure contient n étapes. A chaque étape une commande virtuelle. La loi de commande pratique u_n est construite à l'étape finale. Chaque étape de cette conception de backstepping est basée sur le changement de coordonnées suivant

$$z_1 = x_1 - y_r \quad (3.2)$$

$$z_i = x_i - \beta_i, i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

où β_i sont les sorties des filtres linéaires du premier ordre définie par [17]

$$\tau_i \dot{\beta}_i + \beta_i = \alpha_i, \alpha_i(0) = \beta_i(0) \quad (3.4)$$

où $\tau_i > 0$ sont des paramètre de conception. Au cour de cette chapitre nous utilisons ce notation $y_i = \beta_i - \alpha_i, i = 1, \dots, n - 1$. Donc la dynamique de l'erreur filtrée est définie comme suit

$$\dot{y}_i = -\frac{1}{\tau_i} y_i \quad (3.5)$$

Étape 1

On considère l'équation (3.2), sa dérivé temporelle en compte tenu de la 1^{ere} équation de (3.1) est

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= x_2 + \theta_1^T \psi_1(x_1) + d_1(x, t) - \dot{y}_r \\ &= z_2 + \alpha_1 + y_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) + d_1(x, t) - \dot{y}_r - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $\hat{\theta}_1$ est l'estimation de θ_1 . $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ est l'erreur d'estimation paramétrique. On prend comme fonction de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1^2 + \frac{1}{2} y_1^2$$

sa dérivé en utilisant (3.6) est donné par

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + y_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r \right) + d_1(x, t) z_1 - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 \\
&\quad - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 + y_1 \dot{y}_1 \\
&\leq z_1 \left(z_2 + \alpha_1 + y_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r \right) + \hat{d}_1^* |z_1| - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 \\
&\quad - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 + y_1 \dot{y}_1 \\
&\leq z_1 (z_2 + \alpha_1 + y_1 + \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \dot{y}_r) + \hat{d}_1 |z_1| (+ \tilde{d}_1 |z_1| - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1) \\
&\quad - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 + y_1 \dot{y}_1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

où \hat{d}_1 est l'estimation de d_1^* . $\tilde{d}_1 = d_1^* - \hat{d}_1$ est l'erreur d'estimation paramétrique. par l'utilisation du lemme 3.1, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\hat{d}_1 |z_1| &= \hat{d}_1 |z_1| - \hat{d}_1 z_1 \tanh \left(\frac{\hat{d}_1 z_1}{\varepsilon_1} \right) + \hat{d}_1 z_1 \tanh \left(\frac{\hat{d}_1 z_1}{\varepsilon_1} \right) \\
&\leq k\varepsilon_1 + \hat{d}_1 z_1 \tanh \left(\frac{\hat{d}_1 z_1}{\varepsilon_1} \right)
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 > 0$ est un paramètre de synthèse. La substitution de l'inégalité ci-dessus dans (3.7) nous donne

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &\leq z_1 (z_2 + \alpha_1 + y_1 + \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) + \hat{d}_1 \tanh \left(\frac{\hat{d}_1 z_1}{\varepsilon_1} \right) - \dot{y}_r) + \tilde{d}_1 |z_1| - \tilde{\theta}_1^T \psi_1(x_1) z_1 \\
&\quad - \Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1 \dot{\hat{d}}_1 - \tilde{\theta}_1^T \Gamma_{11}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_1 + y_1 \dot{y}_1 + k\varepsilon_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Afin d'assurer la stabilité du premier sous-système, on prend la fonction stabilisante α_1 , tel que

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \hat{\theta}_1^T \psi_1(x_1) - \hat{d}_1 \tanh \left(\frac{\hat{d}_1 z_1}{\varepsilon_1} \right) + \dot{y}_r \tag{3.9}$$

et les lois d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \Gamma_{11} \left(\psi_1(x_1) z_1 - \sigma_{11} \hat{\theta}_1 \right) \tag{3.10}$$

$$\dot{\hat{d}}_1 = \Gamma_{12} \left(|z_1| - \sigma_{12} \hat{d}_1 \right) \tag{3.11}$$

où $k_1 > 0$, $\sigma_{11} > 0$ et $\sigma_{21} > 0$ sont des paramètres de conception. En substituant les équations (3.9), (3.10) et (3.11) dans l'équation (3.8) nous donne

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 y_1 + \sigma_{11} \tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 + \sigma_{12} \tilde{d}_1 \hat{d}_1 + y_1 \dot{y}_1 + k\varepsilon_1 \tag{3.12}$$

par l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2}x^T x + \frac{1}{2}y^T y$ on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\tilde{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 &= \sigma_{11}\tilde{\theta}_1^T (\hat{\theta}_1 + \theta_1 - \theta_1) \\ &= -\sigma_{11}\tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \sigma_{11}\tilde{\theta}_1^T \theta_1 \\ &\leq -\frac{1}{2}\sigma_{11}\tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2}\sigma_{11}\theta_1^T \theta_1\end{aligned}$$

et

$$\sigma_{12}\tilde{d}_1 \hat{d}_1 \leq -\frac{1}{2}\sigma_{12}\tilde{d}_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{12}(d_1^*)^2$$

en substituant les inégalités ci-dessus dans l'équation (3.12) nous trouvons

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 y_1 - \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}\tilde{d}_1^2 \\ &\quad + y_1 \dot{y}_1 + \frac{\sigma_{11}}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \theta_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + k\varepsilon_1\end{aligned}\quad (3.13)$$

en remplace (3.5) dans (3.13), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 y_1 - \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2\Gamma_{12}^{-1}}\Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{\tau}y_1^2 - y_1 \dot{\alpha}_1 + \frac{\sigma_{11}}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \theta_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + k\varepsilon_1 \\ &\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 y_1 - \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2\Gamma_{12}^{-1}}\Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1^2 \\ &\quad - \frac{1}{\tau}y_1^2 - |y_1| |\dot{\alpha}_1| + \frac{\sigma_{11}}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \theta_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + k\varepsilon_1\end{aligned}\quad (3.14)$$

Supposons que $\dot{\alpha}_1 \leq M_1$ et en utilisant l'inégalité $xy \leq \frac{x^2 y^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}&\leq -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 y_1 - \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2\Gamma_{12}^{-1}}\Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{\tau_1}y_1^2 + \frac{1}{2\mu_1}y_1^2 M_1 + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\sigma_{11}}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \theta_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + k\varepsilon_1\end{aligned}\quad (3.15)$$

Posons : $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{2} + \frac{M_1^2}{2\mu_1} + \mu_1$ et $k_1 = -\frac{1}{2} + \mu_1$, avec $\mu_1 = \frac{\sigma_{11}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{11}^{-1})}$, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \mu_1 z_1^2 z_1 z_2 - \frac{\mu_1}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} - \frac{\sigma_{12}}{2}\tilde{d}_1^2 - \mu_1 y_1^2 + \frac{\sigma_{11}}{2}\theta_1^T \theta_1 + \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + \frac{\mu_1}{2} + k\varepsilon_1 \\ &\leq -\min(2\mu_1, \mu_1, \sigma_{12}, 2\mu_1) \left(z_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_{11}^T \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\theta}_{11} + \frac{1}{2}\Gamma_{12}^{-1} \tilde{d}_1^2 + y_1^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{11}}{2}\theta_1^T \theta_1 + \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + \frac{\mu_1}{2} + k\varepsilon_1 \right) + z_1 z_2 \\ &\leq -a_1 V_1 + b_1 + z_1 z_2\end{aligned}\quad (3.16)$$

où $a_1 = \min(2\mu_1, \mu_1, \sigma_{12}, 2\mu_1)$ et $b_1 = \frac{\sigma_{11}}{2}\theta_1^T\theta_1 + \frac{\sigma_{12}}{2}d_1^{*2} + \frac{\mu_1}{2} + k\varepsilon_1$. Le terme z_1z_2 sera éliminé dans la prochaine étape.

Étape 2

On considère la deuxième équation de (3.3), son dérivé temporel est

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\beta}_1 \\ &= x_3 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + d_2(x, t) - \dot{\beta}_1 \\ &= z_3 + \alpha_2 + y_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + d_2(x, t) - \dot{\beta}_1 - \tilde{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (3.17)$$

où $\hat{\theta}_2$ est l'estimation de θ_2 . $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$ et l'erreur d'estimation paramétrique. On prend comme fonction de Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{22}^{-1} \tilde{d}_2^2 + \frac{1}{2}y_2^2$$

sa dérivée de la fonction de Lyapunov en utilisant (3.17) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \left(z_3 + \alpha_2 + y_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \dot{\beta}_1 \right) + d_2(x, t) - \tilde{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) \\ &\quad - \Gamma_{22}^{-1} \tilde{d}_2 \dot{\tilde{d}}_2 - \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_2 + y_2 \dot{y}_2 \\ &\leq \dot{V}_1 + z_2 \left(z_3 + \alpha_2 + t_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \dot{\beta}_1 \right) + \hat{d}_2 |z_2| + \tilde{d}_2 |z_2| - \tilde{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) \\ &\quad - \Gamma_{22}^{-1} \tilde{d}_2 \dot{\tilde{d}}_2 - \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_2 + y_2 \dot{y}_2\end{aligned}\quad (3.18)$$

l'utilisation le lemme (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq \dot{V}_1 + z_2 \left(z_3 + \alpha_2 + y_2 + \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + \hat{d}_2 \tanh \left(\frac{\hat{d}_2 z_2}{\varepsilon_2} \right) - \dot{\beta}_2 \right) - \tilde{d}_2 |z_2| \\ &\quad - \tilde{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) z_2 - \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_2 - \Gamma_{22}^{-1} \tilde{d}_2 \dot{\tilde{d}}_2 + y_2 \dot{y}_2 + k\varepsilon_2\end{aligned}\quad (3.19)$$

où $k\varepsilon_2$ est un paramètre de synthèse. Afin d'assurer la stabilité du deuxième sous-système, on prend la fonction stabilisante α_2 , telle que

$$\alpha_2 = -k_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) - \hat{d}_2 \tanh \left(\frac{\hat{d}_2 z_2}{\varepsilon_2} \right)\quad (3.20)$$

et les lois d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \Gamma_{21} \left(\psi_2(x_1, x_2) z_2 - \sigma_{21} \hat{\theta}_2 \right)\quad (3.21)$$

$$\dot{\hat{d}}_2 = \Gamma_{22} \left(|z_2| - \sigma_{22} \hat{d}_2 \right)\quad (3.22)$$

où $k_1 > 0$, $\sigma_{11} > 0$ et $\sigma_{21} > 0$ sont des paramètres de conception. En substituant les équations (3.20), (3.21) et (3.22) dans l'équation (3.19) nous donne

$$\dot{V}_2 \leq \dot{V}_1 - k_2 z_2 - z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_2 y_2 + \sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 + \sigma_{22} \tilde{d}_2 \hat{d}_2 + y_2 \dot{y}_2 + k \varepsilon_2 \quad (3.23)$$

par l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2} x^T x + \frac{1}{2} y^T y$ on obtient

$$\sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \hat{\theta}_2 \leq -\frac{1}{2} \sigma_{21} \tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2$$

et

$$\sigma_{22} \tilde{d}_2 \hat{d}_2 \leq -\frac{1}{2} \sigma_{22} \tilde{d}_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} d_2^{*2}$$

en substituant les inégalités ci-dessus nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \dot{V}_1 - k_2 z_2 - z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_2 y_2 - \frac{\sigma_{21}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \hat{\theta}_2 - \frac{\sigma_{22}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{22}^{-1})} \tilde{d}_2^2 + y_2 \dot{y}_2 \\ & + \frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} d_2^{*2} + k \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En remplace (3.5) dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \dot{V}_1 - k_2 z_2 - z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_2 y_2 - \frac{\sigma_{21}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \hat{\theta}_2 - \frac{\sigma_{22}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{22}^{-1})} \tilde{d}_2^2 + z_2^2 + y_1^2 \\ & - \frac{1}{\tau_2} y_2^2 + |y_2| |\dot{\alpha}_2| + \frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} d_2^{*2} + k \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Posons $\dot{\alpha}_2 \leq M_2$ et en utilisons l'inégalité $xy \leq \frac{x^2 y^2}{2\mu_2} + \frac{\mu_2}{2}$ et l'inégalité (3.16) nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & \dot{V}_1 - z_1 z_2 - \frac{\sigma_{21}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \hat{\theta}_2 - \frac{\sigma_{22}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{22}^{-1})} \tilde{d}_2^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} y_2^2 - \frac{1}{\tau_2} y_2^2 \\ & + \frac{1}{2\tau_2} y_2^2 M_2^2 + \frac{\tau_2}{2} + \frac{\sigma_{21}}{2} \theta_2^T \theta_2 + \frac{\sigma_{22}}{2} d_2^{*2} + k \varepsilon_2 \\ \leq & \dot{V}_1 - \min(2\mu_2, \mu_2, \sigma_{22}, 2\mu_2) \left(\frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_2^T \Gamma_{21}^{-1} \tilde{\theta}_2 + \frac{1}{2} \tilde{d}_2^2 + \frac{1}{2} y_2^2 \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} d_2^{*2} + \frac{\mu_2}{2} + k \varepsilon_2 \right) + z_2 z_3 \\ \leq & -a_1 V_1 + b_1 - a_2 V_2 + b_2 + z_2 z_3 \\ = & \sum_{j=1}^2 (-a_j V_j + b_j) + z_2 z_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $\frac{1}{2\tau_2} = \frac{1}{2} + \frac{M_2^2}{2\mu_2} + \mu_2$, $k_2 = -\frac{1}{2} + \mu_2$, $\mu_2 = \frac{\sigma_{21}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{21}^{-1})}$, $a_2 = \min(2\mu_2, \mu_2, \sigma_{22}, 2\mu_2)$ et $b_2 = \frac{1}{2} \sigma_{21} \theta_2^T \theta_2 + \frac{1}{2} \sigma_{22} d_2^{*2} + \frac{\mu_2}{2} + k \varepsilon_2$. Le terme $z_2 z_3$ sera éliminé dans la prochaine étape.

Étape i

On considère la i^{ieme} équation de (3.3), son dérivé temporel est

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \dot{x}_i - \dot{\beta}_{i-1} \\ &= x_{i+1} + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + d_i(x, t) - \dot{\beta}_{i-1} \\ &= z_{i+1} + \alpha_i + y_i + \hat{\theta}_i^T \psi_2(x_1, \dots, x_i) + d_i(x, t) - \dot{\beta}_{i-1} - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_2)\end{aligned}\quad (3.27)$$

où $\hat{\theta}_i$ est l'estimation de θ_i . $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ et l'erreur d'estimation paramétrique. On prend comme fonction de Lyapunov

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{d}_i^2 + \frac{1}{2} y_i^2$$

sa dérivée de la fonction de Lyapunov en utilisant (3.27) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + z_i \left(z_{i+1} + \alpha_i + y_i + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \dot{\beta}_{i-1} \right) + d_i(x, t) - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_2) \\ &\quad - \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{d}_i \dot{\tilde{d}}_i - \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i + y_i \dot{y}_i \\ &\leq \dot{V}_{i-1} + z_i \left(z_{i+1} + \alpha_i + y_i + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \dot{\beta}_{i-1} \right) + \hat{d}_i |z_i| - \tilde{d}_i |z_i| - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) \\ &\quad - \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{d}_i \dot{\tilde{d}}_i - \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i + y_i \dot{y}_i\end{aligned}\quad (3.28)$$

l'utilisation le lemme (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}_i &\leq \dot{V}_{i-1} + z_i \left(z_{i+1} + \alpha_i + y_i + \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) + \hat{d}_i \tanh \left(\frac{\hat{d}_i z_i}{\varepsilon_i} \right) - \dot{\beta}_i \right) - \tilde{d}_i |z_i| \\ &\quad - \tilde{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) z_i - \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_i - \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{d}_i \dot{\tilde{d}}_i + y_i \dot{y}_i + k \varepsilon_i\end{aligned}\quad (3.29)$$

où $k \varepsilon_i$ est un paramètre de synthèse.

Afin d'assurer la stabilité du deuxième sous-système, on prend la fonction stabilisante α_i , telle que

$$\alpha_i = -k_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}_i^T \psi_i(x_1, \dots, x_i) - \hat{d}_i \tanh \left(\frac{\hat{d}_i z_i}{\varepsilon_i} \right)\quad (3.30)$$

et les lois d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_{i1} \left(\psi_i(x_1, \dots, x_i) z_i - \sigma_{i1} \hat{\theta}_i \right)\quad (3.31)$$

$$\dot{\hat{d}}_i = \Gamma_{i2} \left(|z_i| - \sigma_{i2} \hat{d}_i \right)\quad (3.32)$$

où $k_1 > 0$, $\sigma_{11} > 0$ et $\sigma_{21} > 0$ sont des paramètres de conception. En substituant les équations (3.30), (3.31) et (3.32) dans l'équation (3.29) nous donne

$$\dot{V}_i \leq \dot{V}_{i-1} - k_i z_i - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} + z_i y_i + \sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i + \sigma_{i2} \tilde{d}_i \hat{d}_i + y_i \dot{y}_i + k \varepsilon_i\quad (3.33)$$

par l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2}x^T x + \frac{1}{2}y^T y$ on obtient

$$\sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \hat{\theta}_i \leq -\frac{1}{2} \sigma_{i1} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i$$

et

$$\sigma_{i2} \tilde{d}_i \hat{d}_i \leq -\frac{1}{2} \sigma_{i2} \tilde{d}_i^2 + \frac{1}{2} \sigma_{i2} d_i^{*2}$$

en substituant les inégalités ci-dessus nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \dot{V}_{i-1} - k_i z_i - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} + z_i y_i - \frac{\sigma_{i1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \hat{\theta}_i - \frac{\sigma_{i2}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i2}^{-1})} \tilde{d}_i^2 + y_i \dot{y}_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i + \frac{1}{2} \sigma_{i2} d_i^{*2} + k \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

en remplace (3.5) dans (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \dot{V}_{i-1} - k_i z_i - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} + z_i y_i - \frac{\sigma_{i1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \hat{\theta}_i - \frac{\sigma_{i2}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i2}^{-1})} \tilde{d}_i^2 + z_i^2 + y_{i-1}^2 \\ &\quad - \frac{1}{\tau_i} y_i^2 + |y_i| |\dot{\alpha}_i| + \frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i + \frac{1}{2} \sigma_{i2} d_i^{*2} + k \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3.35)$$

posons $\dot{\alpha}_i \leq M_i$ et en utilisons l'inégalité $xy \leq \frac{x^2 y^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i}{2}$ et l'inégalité (3.26) nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \dot{V}_{i-1} - z_{i-1} z_i - \frac{\sigma_{i1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \hat{\theta}_i - \frac{\sigma_{i2}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i2}^{-1})} \tilde{d}_i^2 + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} y_i^2 - \frac{1}{\tau_i} y_i^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\tau_i} y_i^2 M_i^2 + \frac{\tau_i}{2} + \frac{\sigma_{i1}}{2} \theta_i^T \theta_i + \frac{\sigma_{i2}}{2} d_i^2 + k \varepsilon_i \\ &\leq \dot{V}_{i-1} - \min(2\mu_i, \mu_i, \sigma_{i2}, 2\mu_i) \left(\frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_{i1}^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} \tilde{d}_i^2 + \frac{1}{2} y_i^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i + \frac{1}{2} \sigma_{i2} d_i^{*2} + \frac{\mu_i}{2} + k \varepsilon_i \right) - z_{i-1} z_i + z_i z_{i+1} \end{aligned}$$

Dans l'étape $i-1$, il a été obtenu

$$\dot{V}_{i-1} \leq \sum_{j=1}^{i-1} (-a_j V_j + b_j) + z_{i-1} z_i \quad (3.36)$$

En remplace donc (3.36) dans (3.35) on obtient

$$\begin{aligned} &\leq -a_{i-1} V_{i-1} + b_{i-1} - a_i V_i + b_i + z_i z_{i+1} \\ &= \sum_{j=1}^i (-a_j V_j + b_j) + z_i z_{i+1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $\frac{1}{2\tau_i} = \frac{1}{2} + \frac{M_i^2}{2\mu_i} + \mu_i$, $k_i = -\frac{1}{2} + \mu_i$, $\mu_i = \frac{\sigma_{i1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{i1}^{-1})}$, $a_i = \min(2\mu_i, \mu_i, \sigma_{i2}, 2\mu_i)$ et $b_i = \frac{1}{2} \sigma_{i1} \theta_i^T \theta_i + \frac{1}{2} \sigma_{i2} d_i^{*2} + \frac{\mu_i}{2} + k \varepsilon_i$. Le terme $z_i z_{i+1}$ sera éliminé dans la prochaine étape.

Étape n

c'est la dernière étape de conception, du moment que le contrôle actuelle u apparait dans la dernière équation du système (3.1), la dérivé temporelle de la n^{ieme} equation de (3.3) est

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= \dot{x}_n - \dot{\beta}_{n-1} \\ &= g(x)u + \theta_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + d_n(x, t) - \dot{\beta}_{n-1} \\ &= g(x)u + \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + d_n(x, t) - \dot{\beta}_{n-1} - \tilde{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (3.38)$$

où $\hat{\theta}_n$ est l'estimation de θ_n . $\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n - \theta_n$ est l'erreur d'estimation paramétrique. On prend comme fonction de Lyapunov. La fonction de Lyapunov globale prend la forme suivante

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2}\Gamma_{n2}^{-1} \tilde{d}_n^2$$

sa dérivée de la fonction de Lyapunov, en considèreront (3.38) et la lemme (3.1) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{V}_n &\leq \dot{V}_{n-1} + z_n \left(g(x)u + \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) + \hat{d}_n \tanh\left(\frac{\hat{d}_n z_n}{\varepsilon_n}\right) - \dot{\beta}_{n-1} \right) + \tilde{d}_n |z_n| \\ &\quad + z_n \tilde{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) - \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \dot{\hat{\theta}}_n - \Gamma_{n2}^{-1} \tilde{d}_n \dot{\hat{d}}_n + k\varepsilon_n\end{aligned}\quad (3.39)$$

la loi de commande u est conçue pour rendre la dérivée de la fonction de Lyapunov globale définie négative, tell que

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-k_n z_n - \hat{\theta}_n^T \psi_n(x_1, \dots, x_n) - \hat{d}_n \tanh\left(\frac{\hat{d}_n z_n}{\varepsilon_n}\right) + \dot{\beta}_{n-1} \right)\quad (3.40)$$

et les lois d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma_{n1} \left(\psi_n(x_1, \dots, x_n) z_n - \sigma_{n1} \hat{\theta}_n \right)\quad (3.41)$$

$$\dot{\hat{d}}_n = \Gamma_{n2} \left(|z_n| - \sigma_{n2} \hat{d}_n \right)\quad (3.42)$$

où $k_n > 0$, $\sigma_{n1} > 0$ et $\sigma_{n2} > 0$ sont des constantes de conception. En substituant les équations (3.40), (3.41) et (3.42) dans l'équation (3.39) nous donne

$$\dot{V}_n \leq \dot{V}_{n-1} - k_n z_n^2 + \sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n + \sigma_{n2} \tilde{d}_n \hat{d}_n + k\varepsilon_n\quad (3.43)$$

par l'utilisation de l'inégalité $x^T y \leq \frac{1}{2}x^T x + \frac{1}{2}y^T y$ on obtient

$$\sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \hat{\theta}_n \leq -\frac{1}{2}\sigma_{n1} \tilde{\theta}_n^T \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2}\sigma_{n1} \theta_n^T \theta_n$$

et

$$\sigma_{n2} \tilde{d}_n \hat{d}_n \leq -\frac{1}{2} \sigma_{n2} \tilde{d}_n^2 + \frac{1}{2} \sigma_{n1} d_n^T$$

en substituant les inégalités ci-dessus nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \dot{V}_{n-1} - k_n z_n^2 - z_{n-1} z_n - \frac{\sigma_{n1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})} \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n - \frac{\sigma_{n2}}{2\Gamma_{n2}^{-1}} \Gamma_{n2}^{-1} \tilde{d}_n^2 \\ &\quad + \frac{\sigma_{n1}}{n} \theta_n^T \theta_n - \frac{\sigma_{n2}}{2} d_n^2 + k\varepsilon_n \\ &\leq \dot{V}_{n-1} - z_{n-1} z_n - \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right) \left(\frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2} \tilde{d}_n^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{n1}}{2} \theta_n^T \theta_n + \frac{\sigma_{n2}}{2} d_n^2 + k\varepsilon_n \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

dans l'étape $(n-1)$, il a été trouver

$$\dot{V}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) + z_{n-1} z_n \quad (3.45)$$

en substitue (3.45) dans (3.44) on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) - \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right) \left(z_n^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_n^T \Gamma_{n1}^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2} \tilde{d}_n^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_{n1}}{2} \theta_n^T \theta_n + \frac{\sigma_{n2}}{2} d_n^2 + k\varepsilon_n \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (-a_j V_j + b_j) + a_n V_n + b_n \\ &\leq \sum_{j=1}^n (-a_j V_j + b_j) \\ &\leq -aV + b \end{aligned} \quad (3.46)$$

où $a_n = \min \left(2k_n, \frac{\sigma_{n1}}{2\lambda_{\min}(\Gamma_{n1}^{-1})}, \sigma_{n2} \Gamma_{n2} \right)$ et $b_n = \left(\frac{\sigma_{n1}}{2} \theta_n^T \theta_n + \frac{\sigma_{n2}}{2} d_n^2 + k\varepsilon_n \right)$

avec les constants "a" et "b" prendre les valeurs $a_n = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b_n = \sum_{j=1}^n b_j$

avec les constant a et b prendre les valeurs suivants $a = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = \sum_{j=1}^n b_j$ l'inégalité (2.43) implique

$$0 \leq V \leq \frac{b}{a} + \left(V(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.47)$$

selon le lemma 3.1, l'équation (3.47) signifie que $V(t)$ est bornée par $\frac{b}{a}$. Donc tous les signaux dans la bonde de commande sont bornée. De plus, par un choix approprié des paramètres des commande on peut augmenter la valeur de a ce qui rendre la quantité $\frac{b}{a}$ petite. Donc l'erreur de poursuite z_1 peut diminuer.

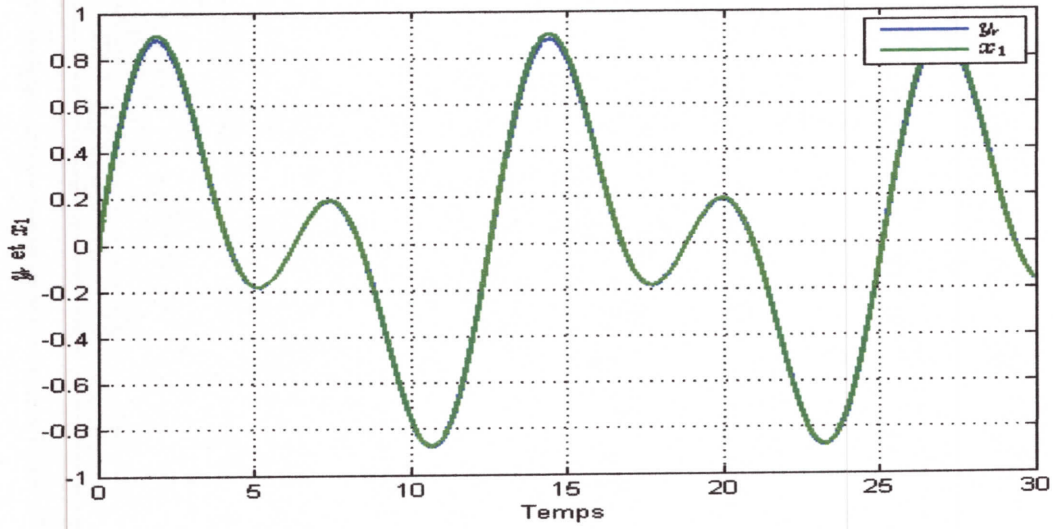


FIGURE 3.1 – Sortie du système non linéaire : réelle x_1 (" x_1 ") et désirée x_{1d} (" y_r ").

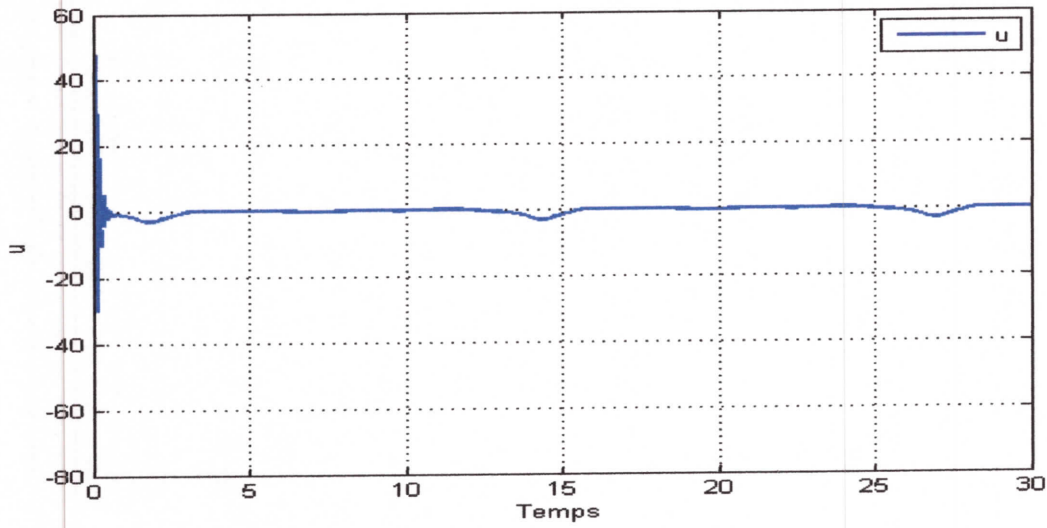


FIGURE 3.2 – Signal de commande u .

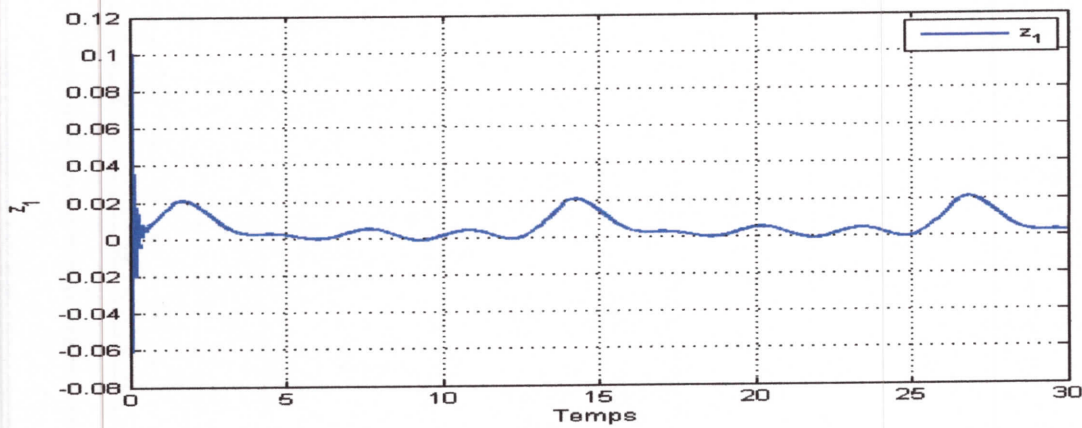


FIGURE 3.3 – Erreur poursuite z_1

Les résultats de simulation montrent l'efficacité de la loi de commande obtenu dans ce chapitre.

On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées et l'erreur de poursuite z_1 tend vers zéro après un peu de temps.

3.4.2 Exemple 2 : Bras Manipulateur Actionné par un moteur à courant continu

Le modèle dynamique du bras manipulateur de degré un actionné par un moteur à courant continu et donné dans l'équation (2.47), avec $x(0) = \left[\frac{1}{4.5} \ 0 \ 1 \right]^T$.

L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système (2.49) à suivre la trajectoire désirée : $y_r = \frac{\pi}{2} \sin(t) (1 - e^{-0.1t^2})$, avec $\Delta I = 4 \sin(t)$.

les commandes virtuelles α_1, α_2 et la commande u sont :

$$\alpha_1 = -10z_1 + \dot{y}_r$$

$$\alpha_2 = -30z_2 - z_1 - \hat{d}_2 \tanh\left(\frac{\hat{d}_2 z_2}{10}\right) - \hat{\theta}_2^T \psi_2(x_1, x_2) + \dot{\beta}_1$$

$$u = -20z_3 - z_2 - \hat{\theta}_3^T \psi_3(x_1, x_2, x_3) + \dot{\beta}_2$$

et les lois d'adaptation sont

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = 0.1(\psi_2(x_1, x_2)z_2 - 10\hat{\theta}_2)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3 = 0.1(\psi_3(x_1, x_2, x_3)z_3 - 10\hat{\theta}_3)$$

$$\dot{\hat{d}}_2 = 0.1(|z_2| - 10\hat{d}_2)$$

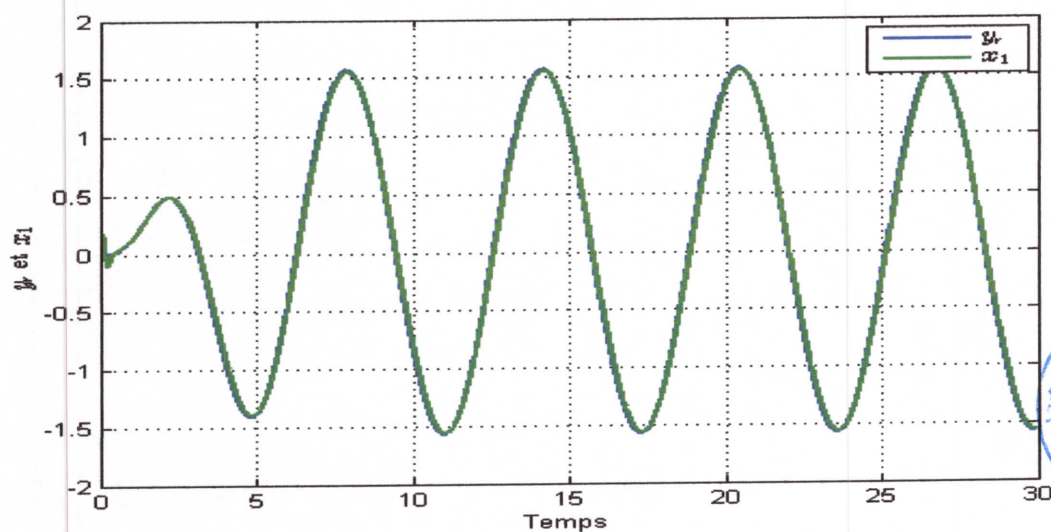


FIGURE 3.4 – Sortie du système non linéaire : réelle x_1 ("x1") et désirée x_{1d} ("y_r").

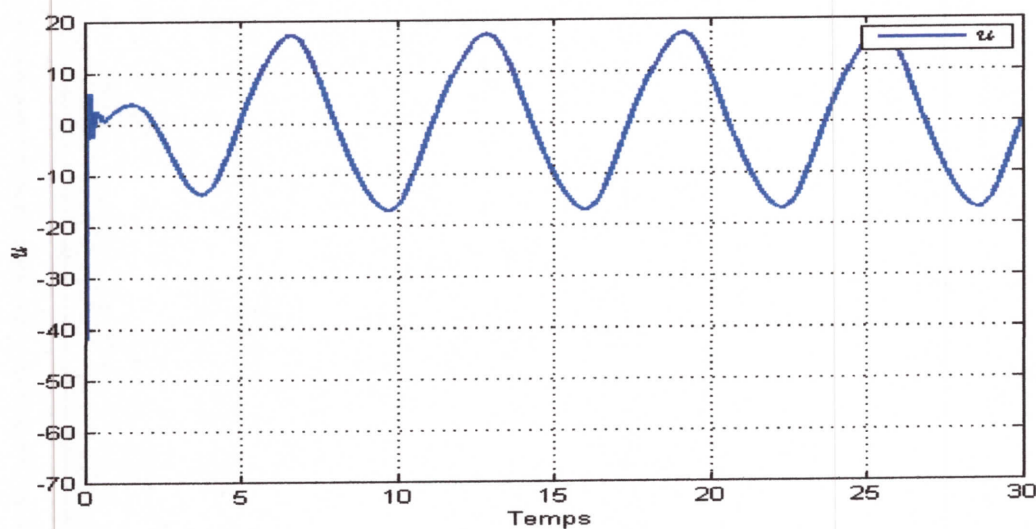


FIGURE 3.5 – Signal de commande u .

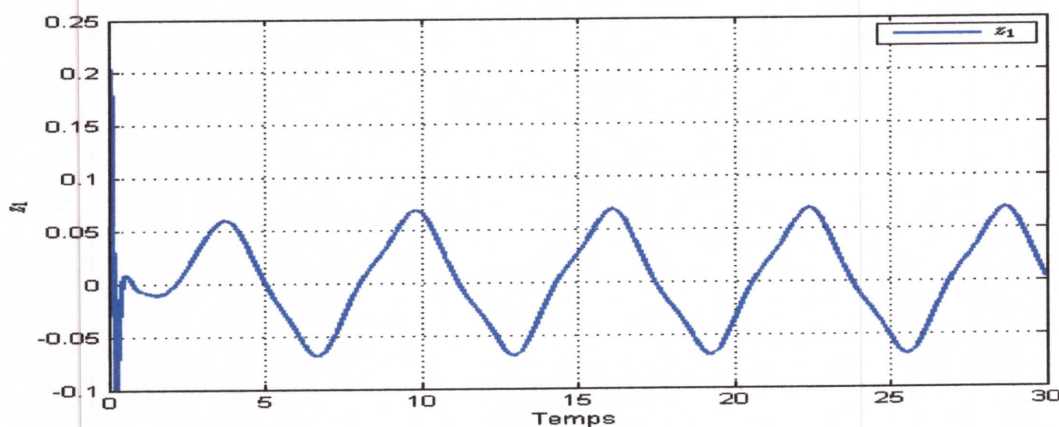


FIGURE 3.6 – Erreur poursuite z_1

Les résultats de simulation sont donnés par les figures (3.4) à (3.6), d'après ces figures, on peut voir que l'état x_1 éventuellement convergé asymptotique vers la trajectoire de référence, et par conséquent. L'erreur de poursuite z_1 converge vers α .

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, en se basant sur la procédure du backstepping, nous avons présenté une procédure de synthèse d'une loi de commande adaptative pour une classe des systèmes non linéaires incertains. La technique de commande par backstepping filtré est utilisé pour la conception de la loi de commande. En se basant sur la théorie de Lyapunov, nous avons montré la bornitude de tous signaux dans la boucle de commande et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite vers le voisinage du zéro. Enfin nous avons validé la loi de commande par simulation sur les deux exemples utilisés dans le chapitre précédent. Les résultats théoriques et de simulation montre l'efficacité de la méthode présentée dans ce chapitre.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la technique de la commande adaptative par backstepping d'une classe des systèmes non linéaires monovariante ayant la forme triangulaire paramétrique. La méthode de Backstepping est une procédure systématique et récursive utilisant la théorie de Lyapunov dans la recherche de la loi de commande et dans l'étude de la stabilité. Cependant, le choix de la fonction de Lyapunov, et de la loi de commande n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe à ce jour quant au choix d'une telle fonction, elle a été souvent laissée à l'imagination et à l'expérience du concepteur. La méthode de backstepping consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. À chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Le problème principal de l'approche commande adaptative par backstepping est l'explosion de complexité de ces lois de commandes, causée par la dérivation des commandes virtuelle C'est-à-dire, la complexité de la conception de la commande augmente lorsque l'ordre du système augmente. L'utilisation de l'approche de commande filtré (backstepping filter control) qui basé sur l'introduisant des filtres du premier ordre à chaque étape des commandes virtuelles a permis de pallier à ce problème de

complexité.

Dans le premier chapitre nous avons présenté la technique de la commande par backstepping. Nous avons rappelé ou début, des définitions sur la stabilité, des méthodes d'analyse des systèmes non linéaires, et la synthèse par la méthode de Lyapunov, ensuite nous avons présenté le principe de la commande par backstepping avec un algorithme général de synthèse, et enfin nous avons terminé par une description sur la commande adaptative.

Dans le deuxième chapitre nous avons étudié la technique de la commande adaptative par backstepping pour une classe des systèmes non linéaire ayant la forme triangulaire inférieure paramétrique. Les résultats de simulation sont présentés pour valider cette approche.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié la commande adaptative par backstepping filtré pour une classe de système non linéaire sous forme triangulaire inférieure paramétrique. Le principe de cette approche de commande adaptative est d'ajouter un filtre du premier ordre à chaque étape des commandes virtuelles pour éviter le problème de complexité. Le mécanisme proposé est testé pour un système artificiel de deuxième ordre et sur le modèle de robot à bras manipulateur.

A l'issus de ses travaux, ce mémoire ouvre de nouvelle perspective de recherche parmi laquelle nous citons :

- ☞ Commande par backstepping à base de mode glissant.
- ☞ Commande par backstepping avec observateur.
- ☞ Commande par backstepping basé sur les réseaux de neuraux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARMISH, B., AND LEITMANN, G. On ultimate boundedness control of uncertain systems in the absence of matching assumptions. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 27, 1 (1982), 153–158.
- [2] BENASKEUR, A. R. *Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systmes non linéaires*. PhD thesis, Thse (Ph.D.)–Université Laval, 2000.
- [3] BOUOUDEN, S. *Robustification de la loi de commande adaptative par la zone morte*. PhD thesis, Université Mentouri Constantine, 2006.
- [4] CARROLL JR, J. J., AND DAWSON, D. M. Integrator backstepping techniques for the tracking control of permanent magnet brush dc motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on* 31, 2 (1995), 248–255.
- [5] CHEN, W., JIAO, L., LI, R., AND LI, J. Adaptive backstepping fuzzy control for nonlinearly parameterized systems with periodic disturbances. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 18, 4 (2010), 674–685.
- [6] CHEN, Y. A new matching condition for nonlinear robust control design. *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 117, 4 (1995), 453–458.
- [7] DONG, W., FARRELL, J. A., POLYCARPOU, M. M., DJAPIC, V., AND SHARMA, M. Command filtered adaptive backstepping. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 20, 3 (2012), 566–580.
- [8] ESHBAIR, F. *Modelisation et commande d'un systeme multi-moteur par la technique de commande backstepping*, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [9] FAN, H. *Robust Adaptive Control of Uncertain Non Linear Systems*. University of Singapore, 2003.
- [10] FARRELL, J. A., POLYCARPOU, M., SHARMA, M., AND DONG, W. Command filtered backstepping. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 54, 6 (2009), 1391–1395.
- [11] HOU, Z.-G., CHENG, L., AND TAN, M. Decentralized robust adaptive control for the multiagent system consensus problem using neural networks. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on* 39, 3 (2009), 636–647.
- [12] IKURO, M., RYUJI, M., YUICHI, T., AND ZENTA, I. Robust adaptive tracking control for time-varying nonlinear systems with higher order relative degree.
- [13] IOANNOU, P. A., AND SUN, J. *Robust adaptive control*. Courier Corporation, 2012.
- [14] ISIDORI, A. *Nonlinear control systems (communications and control engineering)*, 1995.
- [15] KRSTIC, M., KOKOTOVIC, P. V., AND KANELLAKOPOULOS, I. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [16] LI, T.-S., WANG, D., FENG, G., AND TONG, S.-C. A dsc approach to robust adaptive nn tracking control for strict-feedback nonlinear systems. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on* 40, 3 (2010), 915–927.
- [17] LI, T.-S., WANG, D., FENG, G., AND TONG, S.-C. A dsc approach to robust adaptive nn tracking control for strict-feedback nonlinear systems. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on* 40, 3 (2010), 915–927.
- [18] MADANI, T., AND BENALLEGUE, A. Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on* (2006), IEEE, pp. 1515–1520.
- [19] MARQUEZ, H. J. *Nonlinear control systems : s : analysis and design*. 2003.
- [20] MOKHTARI, M. *Commande Adaptative des Systèmes Non linéaires par l'Approche Backstepping Neuronale*. PhD thesis, Université Hadj Lakhdar, 2015.
- [21] MÜLLHAUPT, P. *Introduction à l'analyse et à la commande des systmes non linéaires*. Mécanique (Lausanne). Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.
- [22] POLYCARPOU, M. M., AND IOANNOU, P. A. A robust adaptive nonlinear control design. In *American Control Conference, 1993* (1993), IEEE, pp. 1365–1369.

- [23] QU, Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *Systems & Control Letters* 18, 4 (1992), 301–307.
- [24] SASTRY, S. S., AND ISIDORI, A. Adaptive control of linearizable systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 34, 11 (1989), 1123–1131.
- [25] SOUKKOU, Y. Commande adaptative par backstepping d'une classe des systemes non linéaires incertains, 2014.
- [26] STOTSKY, A., HEDRICK, J., AND YIP, P. The use of sliding modes to simplify the backstepping control method. *Applied Mathematics and Computer Science* 8 (1998), 123–133.
- [27] SWAROOP, D., HEDRICK, J. K., YIP, P. P., AND GERDES, J. C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 45, 10 (2000), 1893–1899.
- [28] YANG, Y., FENG, G., AND REN, J. A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems. *Systems, Man and Cybernetics, Part A : Systems and Humans, IEEE Transactions on* 34, 3 (2004), 406–420.
- [29] YIP, P. P., HEDRICK, J. K., AND SWAROOP, D. The use of linear filtering to simplify integrator backstepping control of nonlinear systems. In *Variable Structure Systems, 1996. VSS'96. Proceedings., 1996 IEEE International Workshop on* (1996), IEEE, pp. 211–215.