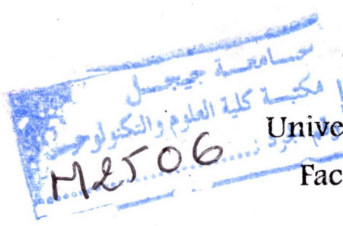
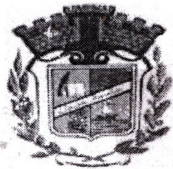


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mohammed Seddik Benyahia
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Automatique

Laboratoire d'Automatique de Jijel -LAJ-

Mémoire



de Projet de Fin d'Etudes pour l'obtention du diplôme de Master en

Automatique et Traitement du Signal

Thème

Commande Adaptative par DSC pour une Classe des Systèmes Non linéaires Incertains

Présenté par :

Nesrine Kias & Nezha Bouhadiche

Proposé et dirigé par :

M. Hicham Khebbache

M. Naamane Bounar

Promotion 2016

Remerciements

Avant toute chose, nos remerciements vont en premier lieu à Allah le tout puissant pour la volonte, la sante et la patience qu'il nous donnee durant toutes ces annees d'etude.

Nous tenons à remercier Mr Khebbache Hicham qui a suivi pas à pas notre travail, qu'il veuille bien trouver dans ce memoire le temoignage de notre profonde reconnaissance pour sa bienveillante disponibilite, ses encouragements, ses conseils avisés et ses suggestions qui ont beaucoup contribue à susciter, à enrichir et à mener à bien ce travail.

Nous remercions également les membres du jury pour avoir accepte de presider et d'examiner ce modeste travail.

Nezha et Nestine

Dédicace

Que ce travail témoigne de mes respects:

A mes chers parents :

A ma mère « fadila », aimable, honorable : Tu représentes pour moi le symbole de la générosité par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A mon Père « Ahcene » : Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux.

A mes frères et sœurs.

A mes sœur wided mounia nesrine et ma belle rahma : Les mots ne suffisent rarement pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous.

A mes frères sabir et mouloud: Vous avez toujours été présents pour les bons conseils. Votre affection et votre soutien m'ont été d'un grand secours au long de ma vie.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mon binôme nesrine, ma sœur qui m'a supporté durant cette année, je vous souhaite une vie pleine de santé, amour, bonheur.

A mes Chères amies: nassira,sihem ,Meryem², nesaiba, ibtissam, souad ,kanza , Nejwa,Imane Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, Vous êtes plus que des amies, vous êtes des sœurs sur qui je peux compter. En témoignage des plus beaux souvenirs que nous avons passés ensemble. , je vous souhaite une vie pleine de bonheur.

A toute mes collègues d'Automatique promotion 2016 à l'université de Jijel.

A mes enseignants d'Automatique dans mon cursus universitaire.

Nezha

Dédicace

*Je tiens à dédier ce mémoire
À mes très chers parents
Pour tout l'amour dont vous m'avez entouré, pour
tout ce que vous avez fait pour moi*

*Que ce modeste travail, soit l'exaucement de vos
vœux tant formulés et de vos prières quotidiennes*

A mes très chères sœurs

Besma, Mouna, Manel, Aïda

A mon cher frère

Bachir

A ma très cher grande mère

*Que dieu vous garde et vous alloue bonne santé, bonheur,
prospérité et longue vie*

A mes Chères amies

*A toutes les personnes qui m'ont aidés de
proche ou de loin.*

A toute mes collègues

d'Automatique promotion 2016 à l'université de Jijel.

A mes enseignants

d'Automatique dans mon cursus universitaire.

Nesrine

Table des matières

Remerciements

Liste des figures

Table des matières

Introduction générale.....I

Chapitre 1 Introduction à la commande des systèmes non linéaires

1.1. Introduction.....	1
1.2 Système linéaire	1
1.3 Systèmes non linéaires	2
1.3.1 Propriétés des systèmes non linéaires	2
1.3.2 La commande des systèmes non linéaires.....	2
1.4 Stabilité des systèmes non linéaires	3
1.4.1 Définitions.....	3
1.4.2 Stabilité locale et stabilité globale	4
1.4.3 Stabilité simple.....	5
1.5 Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires.....	5
1.5.1 Méthode indirecte de Lyapunov	6
1.5.2 Méthode directe de Lyapunov.....	6
1.5.3 Choix de la fonction de Lyapunov	7
1.6 Synthèse de la commande par la méthode directe de Lyapunov	8
1.7. Conclusion.....	9

Chapitre 2 Introduction à la commande par backstepping

2.1. Introduction.....	10
2.2. Commande par backstepping des systèmes non linéaires.....	10
2.2.1. Le principe de la commande par backstepping	10
2.3. Algorithme de base	11
2.5. Résultats de simulation	14

2.6. Conclusion.....	20
----------------------	----

Chapitre 3 Commande par Surface Dynamique (DSC)

3.1. Introduction.....	21
3.2. Commande par DSC avec des filtres linéaires passe-bas.....	21
3.3. Commande par DSC avec des filtres non linéaires par mode glissant.....	25
3.4. Résultats de simulation	29
3.5. Conclusion.....	36

Chapitre 4 Commande Adaptative par DSC

4.1. Introduction.....	37
4.2. Définitions.....	37
4.2.1. Commande adaptative	37
4.2.2. Système de commande adaptative.....	38
4.3. Commande adaptative par DSC avec des filtres linéaires passe-bas	38
4.4. Commande adaptative par DSC avec le filtre non linéaire par mode glissant.	43
4.5. Exemples d'application.....	48
4.6. Conclusion.....	52

Conclusion générale.....	53
---------------------------------	-----------

Références bibliographiques



Table des Figures

Chapitre 1 : Introduction à la commande des systèmes non linéaires

Figure 1.1: Stabilité d'un point d'équilibre.....	4
Figure 1.2: Stabilité asymptotique.	4
Figure 1.3 : Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov.....	7

Chapitre 2 : Introduction à la commande par backstepping

Figure (2.1) : L'évolution de la position du pendule	15
Figure (2.2) : L'évolution de la vitesse du pendule	15
Figure (2.3) : Poursuite de première erreur	16
Figure (2.4) : Poursuite de deuxième erreur.....	16
Figure (2.5) : Signal de commande U	16
Figure (2.6) : L'évolution de la position du pendule	16
Figure (2.7) : L'évolution de la vitesse du pendule	16
Figure (2.8) : Signal de commande U	17
Figure (2.9) : Perturbations	17
Figure (2.10) : Poursuite de première erreur	17
Figure (2.11) : Poursuite de deuxième erreur.....	17
Figure (2.12) : L'évolution de la position du pendule	18
Figure (2.13) : L'évolution de la vitesse du pendule	18
Figure (2.14) : Poursuite de première erreur	18
Figure (2.15) : Poursuite de deuxième erreur.....	18
Figure (2.16) : Signal de commande U	19
Figure (2.17) : L'évolution de la position du pendule	19
Figure (2.18) : L'évolution de la vitesse du pendule	19

Figure (2.19) : Signal de commande U	19
Figure (2.20) :Perturbations	19
Figure (2.21) : Poursuite de première erreur	20
Figure (2.22) : Poursuite de deuxième erreur.....	20

Chapitre 3 : Commande par Surface Dynamique (DSC)

Figure (3.1) : L'évolution de la position du pendule	30
Figure (3.2) : L'évolution de la vitesse du pendule	30
Figure (3.3) : Signal de commande U	31
Figure (3.4) : Perturbation.....	31
Figure (3.5) : Poursuite de la première surface	31
Figure (3.6) : Poursuite de la deuxième surface.....	31
Figure (3.7) : L'évolution de la position du pendule	32
Figure (3.8) : L'évolution de la vitesse du pendule	32
Figure (3.9) : Poursuite de la première surface	32
Figure (3.10) : Poursuite de la deuxième surface.....	32
Figure (3.11) : Perturbation $\Delta_1(t)$	32
Figure (3.12) : L'incertitude $\Delta_2(t)$	32
Figure (3.13) : Signal de commande U	33
Figure (3.14) : L'évolution de la position du pendule	33
Figure (3.15) : Evolution de la vitesse du pendule.....	33
Figure (3.16) : Signal de commande U	34
Figure (3.17) : Incertitude	34
Figure (3.18) : Poursuite de la première surface	34
Figure (3.19) : Poursuite de la deuxième surface.....	34
Figure (3.20) : L'évolution de la position du pendule	35
Figure (3.21) : L'évolution de la vitesse du pendule	35
Figure (3.22) :Poursuite de la première surface	35
Figure (3.23) : Poursuite de la deuxième surface.....	35
Figure (3.24) : Incertitude Δ_1	35
Figure (3.25) : Incertitude Δ_2	35
Figure (3.26) : Signal de commande U	36

Chapitre 4 : Commande Adaptative par DSC

Figure (4.1) : L'évolution de la position du pendule	49
Figure (4.2) : L'évolution de la vitesse du pendule	49
Figure (4.3) : La poursuite de la première surface	49
Figure (4.4) : La poursuite de la deuxième surface	49
Figure (4.5) : Estimation de l'incertitude Δ_1	50
Figure (4.6) : Estimation de la perturbation Δ_2	50
Figure (4.7) : Signal de commande U	50
Figure (4.8) : L'évolution de la position du pendule	51
Figure (4.9) : L'évolution de la vitesse du pendule	51
Figure (4.10) : La poursuite de la première surface	51
Figure (4.11) : La poursuite de la deuxième surface	51
Figure (4.12) : Estimation de l'incertitude Δ_1	51
Figure (4.13) : Estimation de l'incertitude Δ_2	51
Figure (4.14) : Signal de commande U	52

Introduction générale

Introduction générale

De la commande linéaire classique à la commande non linéaire moderne, l'automatique a connu un progrès considérable ces 50 dernières années. De ce fait, la théorie de la commande est devenue l'un des domaines de recherche les plus riches en termes d'algorithmes. Les stratégies de commande existantes peuvent être classées en deux catégories dites linéaires ou non linéaires. L'automatique linéaire repose sur une approximation du modèle du système autour d'un point de fonctionnement donné de telle sorte que les outils d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires puissent être exploités [1, 2]. Néanmoins, cette approche ne garantit pas la stabilité du système bouclé sur toute la plage de fonctionnement et souffre, en général, d'un manque de robustesse. Quant à elle, l'automatique non linéaire s'intéresse à assurer une stabilité sur une plus large plage de fonctionnement et peut avoir de bonnes propriétés de robustesse [3,4]. Malheureusement, pour l'automatique non linéaire, il n'existe pas des méthodes d'analyse et de synthèse universelles, comme pour le cas linéaire, mais plutôt des approches destinées pour des classes des systèmes non linéaires particulières sous certaines hypothèses. En outre, les solutions et les performances apportées sont, souvent, au prix de la complexité de la loi de commande résultante et de sa synthèse, comme pour le cas de la commande réursive par backstepping [5]. Parmi les techniques de commande proposées dans la littérature, que ce soient linéaires ou non linéaires, il existe des lois qui nécessitent la connaissance a priori d'un modèle du système à commander et d'autres approches qui n'exigent pas cette connaissance.

La commande par backstepping est une méthode systématique basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov pour la conception de la commande non linéaire, qui s'applique aux systèmes non linéaires sous la forme triangulaire inférieure. La commande par backstepping est développée pour commander les systèmes non linéaires, en particulier, les systèmes non linéaires dans lesquels les incertitudes ne satisfont pas le « matching condition ».

Le problème principal avec l'approche de backstepping [6,7] est « *L'explosion de complexité* » causée par les dérivations successives des commandes virtuelles. C'est-à-dire, la complexité de la conception de la commande augmente lorsque l'ordre du système augmente.

Pour régler ces problèmes on utilise la commande par surface dynamique (en anglais : Dynamic Surface Control).

La commande par DSC a été développée pour pallier au problème d'explosion de complexité due à la nécessité pour effectuer la différentiation répétée dans les fonctions non linéaires, qui est généralement problématique dans la commande par backstepping intégrateur.

La commande adaptative robuste est une méthode de commande des systèmes non linéaires. L'idée de base est d'estimer les paramètres et/ou modèle inconnu en ligne, et d'utiliser les paramètres estimés dans le calcul de la loi de commande. Un système de commande adaptative robuste peut donc être considéré comme un système de commande avec estimation en ligne des paramètres [8] avec des incertitudes matchées et non-matchées.

Ce mémoire est divisé suivant une approche thématique en quatre chapitres :

Nous commençons dans le premier chapitre par introduire la notion de la commande des systèmes non linéaires, et donner un état de l'art sur les travaux développés dans cet axe de recherche. Ensuite, nous rappelons quelques définitions sur la stabilité des systèmes et nous présentons aussi quelques outils mathématiques utilisés dans le long de ce travail

Dans le deuxième chapitre, on présente la technique de commande backstepping. Dans un premier temps, on s'attache à donner le design et les étapes de cette technique de commande. Dans un deuxième temps, pour illustrer cette approche, nous appliquons l'algorithme de commande par backstepping sur deux systèmes non linéaires incertains de deuxième ordre.

Dans le troisième chapitre, nous proposons deux approches de commande par surface dynamique (DSC) pour une classe des systèmes non linéaires incertains en utilisant des filtres linéaires passe-bas et des filtres non linéaires par mode glissant. Ensuite, nous appliquons ces deux techniques de commande sur les deux exemples considérés dans le deuxième chapitre.

Le quatrième chapitre est consacré à la commande adaptative par DSC pour une classe des systèmes non linéaires incertains en utilisant deux types de filtres : linéaires passe-bas et non linéaires lisses en utilisant un terme de tangente hyperbolique « Tanh » au lieu du terme « sign », tout en estimant les perturbations externes et les incertitudes paramétriques agissant sur le système. Enfin, on applique ces deux algorithmes de commande sur les mêmes exemples étudiés dans les chapitres précédents en tenant compte des incertitudes matchées et non-matchées.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion reprenant les principaux résultats présentés.



Chapitre 1

Introduction à la commande des systèmes non linéaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques aspects sur la commande des systèmes non linéaires. Après avoir donné quelques définitions sur la stabilité des systèmes, nous présentons les outils mathématiques nécessaires utilisés dans ce contexte.

1.1. Introduction

Dans le domaine de l'automatique, l'étude des systèmes non linéaires constitue toujours un champ de recherche très riche. Contrairement aux systèmes linéaires pour lesquels l'automatique fournit une panoplie de méthodes d'analyse et de synthèse de lois de la commande, les systèmes non linéaires ne disposent pas d'outils et de méthodes générales pour l'analyse et la synthèse. Ceci est dû au fait que les systèmes non linéaires possèdent des structures extrêmement variées, des dynamiques complexes et peuvent présenter toutes sortes de comportements étranges. La plupart des systèmes non linéaires sont caractérisés par des incertitudes structurelles et / ou non structurelles variantes dans le temps, ce qui rend leur commande très délicates et complexes à mettre en œuvre. Pour résoudre ce problème, plusieurs approches ont été développées dans la littérature

Parmi ces techniques, on peut citer les commandes par Backstepping et DSC. Ces dernières présentent des performances notables en termes de poursuite et de régulation.

1.2 Système linéaire

Un système linéaire (le terme système étant pris au sens de l'automatique, à savoir un système dynamique) est un objet du monde matériel qui peut être décrit par des équations linéaires (équations linéaires différentielles ou aux différences), ou encore qui obéit au principe de superposition : toute combinaison linéaire des variables de ce système est encore une variable de ce système. Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Néanmoins, en linéarisant (quand c'est possible) un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire. La linéarisation d'un système non linéaire autour d'une trajectoire non réduite à un point d'équilibre engendre un système linéaire à coefficients variables (en fonction de

temps), d'où l'importance qu'a pris ces types des systèmes et les études récentes qui lui ont été consacrées. Souvent (mais pas toujours), on distingue parmi les variables d'un système les variables d'entrée, rassemblées dans une colonne u , et les variables de sortie [9].

1.3 Systèmes non linéaires

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition, ou plutôt cette non-définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires [8].

1.3.1 Propriétés des systèmes non linéaires

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations différentielles non linéaires, d'écrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou commande, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs. Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui rendent compte de l'état du système à chaque instant [10].

Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Principe de superposition n'est pas applicable.
- Points d'équilibre multiples : un système non linéaire présente plusieurs points d'équilibre isolés (pour le système linéaire, le point d'équilibre est unique).
- Limite de cycle : les systèmes non linéaires peuvent exhiber des oscillations à amplitudes et fréquences fixes en l'absence d'une entrée exogène.

1.3.2 La commande des systèmes non linéaire

Pour commander un système, on s'appuie en général sur un modèle obtenu à partir d'une identification préalable comme les lois physiques ou à partir d'observations expérimentales. Dans notre cas, les commandes Backstepping et DSC sont des techniques qui prennent en charge la nature non linéaire du système. Il est utile de noter que la stabilité de ces techniques est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov [8].

1.4 . Stabilité des systèmes non linéaires

La stabilité est une notion primordiale dans l'étude des systèmes physiques, elle caractérise le comportement du système au voisinage de ses points d'équilibre. D'une manière intuitive, la stabilité est la propriété d'un système de revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il est écarté dans un certain voisinage, appelé le domaine de stabilité. La stabilité asymptotique combine les deux notions : stabilité et attractivité. Nous parlons de la stabilité asymptotique lorsque le système reviendra au bout d'un temps qui peut être infini, au point d'équilibre, tout en restant proche de celui-ci au cours du temps.

En effet, la notion de stabilité asymptotique est la plus exigée en pratique. Ceci s'explique certainement parce qu'elle constitue une première approche pouvant s'adapter à plusieurs situations (précision en régulation, poursuite d'une trajectoire de référence, . . . , etc.). Outre la notion de stabilité asymptotique, une propriété de stabilité souvent évoquée dans le domaine de l'automatique en occurrence de la stabilité exponentielle, elle vient ajouter au caractère asymptotique un critère de rapidité de convergence [11]. Nous allons présenter ici quelques définitions et outils de base sur la stabilité [3, 11, 12, 13, 14].

1.4.1 Définitions

- **Point d'équilibre [8]** : x_0 est un point d'équilibre pour le système $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si $f(t, x_0) = 0, \forall t \geq t_0$.
- **Equilibre stable [3, 14]** : L'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si $f(t, x_0) = 0, \forall t \geq t_0$, si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$.

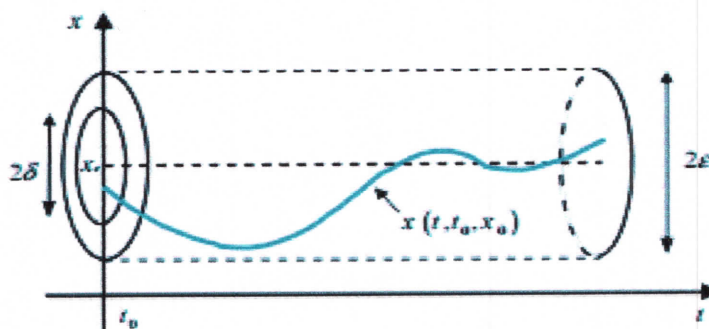


Figure 1.1: Stabilité d'un point d'équilibre.

- **Equilibre uniformément stable [13]** : L'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour le système $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon)$ telle que $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$.
- **Equilibre asymptotiquement stable [3, 14]** : L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement (respectivement globalement asymptotiquement) stable pour le système $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ s'il est stable.

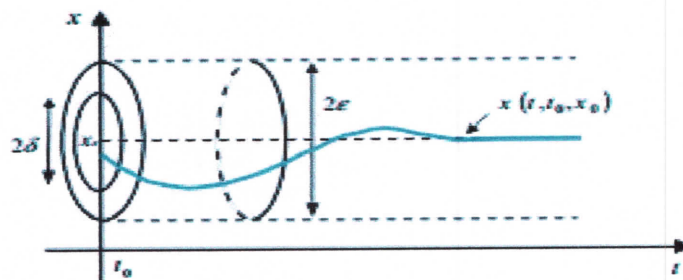


Figure 1.2: Stabilité asymptotique.

- **Equilibre exponentiellement stable [3, 14]** : L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour le système $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ s'il existe deux constantes strictement positive α et β telles que $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}, \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in D_r$. Lorsque $D_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

1.4.2 Stabilité locale et stabilité globale

On peut prédire le comportement d'un système linéaire à partir de l'analyse de sa position d'équilibre. Un système dont le point d'équilibre est stable (instable). Il n'en est plus de même pour un système non linéaire. Étant donné que celui-ci peut avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité de l'une de ces positions d'équilibre ne suffit pas à elle seule à prédire la stabilité du système. Afin de quantifier l'influence de la stabilité d'un point d'équilibre sur la stabilité du système, de nouvelles définitions de la stabilité sont introduites ; on parle de stabilité locale et stabilité globale.

❖ Stabilité locale

La stabilité locale concerne simplement la position d'équilibre considérée, sans rien préjuger sur le domaine de validité de cette stabilité. C'est une condition nécessaire, mais non suffisante à la stabilité du système dans un certain domaine D contenant cette position d'équilibre.

❖ Stabilité globale

On parle de la stabilité globale lorsque le système est stable pour toutes les valeurs que peuvent prendre les variables du système. La stabilité globale possède un intérêt pratique beaucoup plus considérable que la stabilité locale. Elle ne dépend pas seulement du système, mais aussi des valeurs que peuvent prendre les variables dans le problème considéré. Ainsi, le même système est stable ou instable globalement : suivant le domaine de variables auquel on s'intéresse.

1.4.3 Stabilité simple

S'il est possible de trouver une fonction $V(x) = 0$ de signe défini dans un domaine D et dont la dérivée totale $\dot{V}(x)$ soit semi-définie négative et de signe opposé dans le même domaine, l'équilibre est (simplement) stable dans ce domaine.

Dans le cas d'une stabilité simple, on peut prouver la stabilité asymptotique en utilisant le lemme de Barbalat [16], qui vient compléter le théorème de Lyapunov pour la stabilité simple [8].

1.5 Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires

L'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est très complexe. L'approche de Lyapunov est l'approche la plus utilisée pour étudier ce problème. Cette approche a été introduite au 19^{ème} siècle par le mathématicien russe Alexandre Mikhaïlovitch Lyapunov dans son travail intitulé, « *The Général Problem Of The Motion Stability* ».

On distingue deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité : La méthode indirecte, connue aussi par la méthode de linéarisation et la méthode directe. La première concerne la stabilité locale autour d'un point d'équilibre. Par scalaire des états du système dont on examinera la variation temporelle [8].

1.5.1 Méthode indirecte de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le fait que le comportement d'un système non linéaire est le même que son approximation linéaire pour des petites variations autour du point d'équilibre [17]. Elle permet l'étude et l'analyse de la stabilité locale des systèmes physiques.

Contre, la méthode directe, basée sur le concept d'énergie, détermine la stabilité du système en construisant une fonction de Lyapunov définie positive.

1.5.2. Méthode directe de Lyapunov :

Son objectif, est de définir une méthode permettant d'analyser la stabilité d'un système non linéaire sans connaître explicitement les solutions des équations différentielles qui le décrivent. La philosophie de cette méthode n'est que l'extension mathématique d'un phénomène physique observé, car les systèmes mécaniques et électriques perdent de l'énergie pour se stabiliser au point d'équilibre.

❖ Théorème de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov (ou la méthode des fonctions de Lyapunov) est dérivée du critère énergétique de stabilité. En appliquant ce critère indépendamment du concept d'énergie, on remplace alors l'énergie du système par une fonction de Lyapunov qui est définie positive (comme l'énergie).

Soit le système autonome: $\dot{x} = f(x)$, $x_e = 0$ ce système aura un point d'équilibre $x_e = 0$ globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction scalaire $V(x)$ continue avec une dérivée partielle par rapport au temps $\dot{V}(x)$ continue ayant les propriétés suivantes :

1. $V(0) = 0$.
2. $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.
3. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ (radialement non bornée).
4. $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

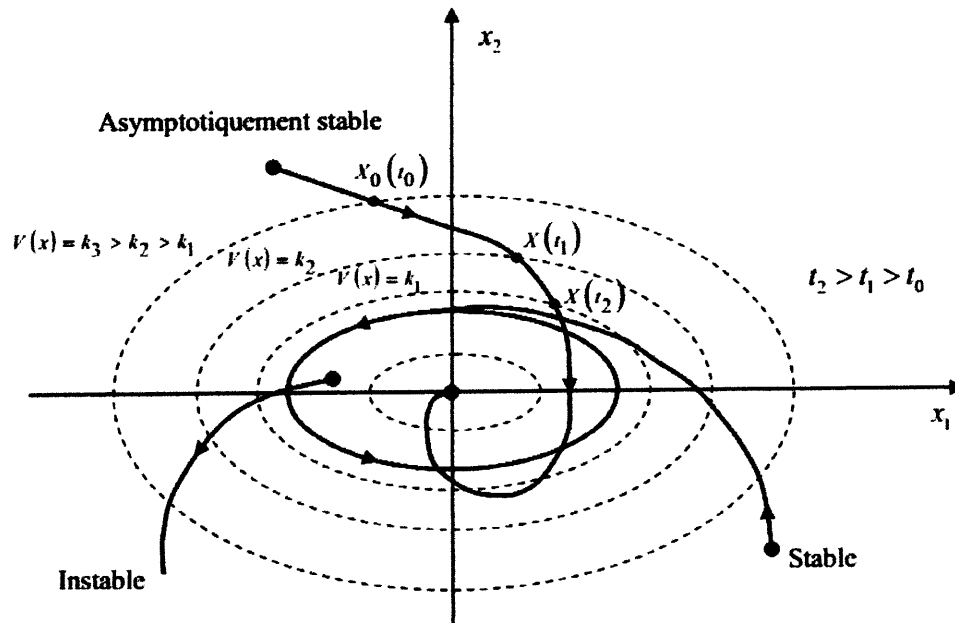


Figure 1.4. Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov.

Lemme [15, 14] :

Pour un système non linéaire, considérons la fonction définie positive suivante $\dot{V}(t) \leq -\zeta V(t) + C$ tel que ζ et C sont des constants qui satisfont $\zeta > 0$ et $C \geq 0$; $\forall t_0$. La fonction $V(t)$ satisfait l'inégalité suivante :

$$0 \leq V(t) \leq \frac{1}{\zeta} \left[C - (C - \zeta V(t_0)) \exp(-\zeta(t - t_0)) \right]$$

Ce qui implique que $V(t)$ borné par $\left(\frac{C}{\zeta}\right)$ et le taux de convergence exponentielle au borne de $V(t)$ est égal à ζ . Ainsi, l'état de système est définitivement uniformément borné (UUB).

1.5.3 Choix de la fonction de Lyapunov

Même pour des systèmes simples et en l'absence d'incertitudes, le choix de la fonction de Lyapunov et de la loi de commande n'est pas toujours facile. Aucune règle générale n'existe à ce jour quant au choix d'une telle fonction. Et quand on sait l'influence de ce choix sur le comportement général du système, on comprend l'intérêt qu'a suscité ce problème ces dernières années. Un bon choix de la fonction de Lyapunov permet d'assurer une stabilité dans une large plage de fonctionnement, voire même globale. Différentes approches ont été

dans le chapitre 2, offre l'avantage de répondre simultanément à ces trois problèmes.

1.6 Synthèse de la commande par la méthode directe de Lyapunov

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la stabilité des systèmes où on a supposé implicitement que la loi de commande a été choisie et notre but était de vérifier la stabilité du système avec cette loi de commande, mais le problème dans cette synthèse est comment trouver cette commande qui stabilisera le système.

Nous allons présenter une méthodologie qui combine entre la recherche de la fonction de Lyapunov et la loi stabilisante. En général, il existe deux concepts pour l'application de la méthode directe de Lyapunov pour la synthèse d'une commande stable :

- ❖ **1^{er} concept** : On suppose que la loi de commande existe et on cherche la fonction de Lyapunov.
- ❖ **2^{ème} concept** : Cette fois si, on fait un choix sur $V(x)$, la fonction de Lyapunov candidate, et on cherche la loi de commande qui rend cette fonction candidate à la fonction de Lyapunov réelle [8].

Pour commander un système, on s'appuie en général sur un modèle obtenu à partir d'une identification préalable comme les lois physiques ou à partir d'observations expérimentales. La commande par Backstepping est une technique qui prend en charge la nature non linéaire du système. Il est utile de noter que la stabilité de cette technique est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov [8].

La méthode de Lyapunov consiste, alors, à chercher une fonction $V(x)$ (représentative de l'énergie) de signe défini qui se prête à l'application de l'un des théorèmes cités précédemment. Pour les systèmes linéaires, il existe des méthodes systématiques pour construire une fonction de Lyapunov permettant de conclure à sa stabilité. Il n'en est pas de même pour les systèmes non linéaires, pour lesquels on est réduit à essayer des types de fonctions pour telle ou telle classe de systèmes. Il n'y a aucune règle générale permettant de trouver une fonction de Lyapunov pour n'importe quel système. Il existe néanmoins des approches qui conduisent, en général, à des résultats acceptables (Gille 1988 [16]. Khalil 1996 [18]. Benaskeur 1997 [8]). Des exemples de fonctions qui réussissent souvent comme fonctions de Lyapunov, sont données par des fonctions quadratiques.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, notre principal objectif était d'introduire la notion de la commande des systèmes non linéaires, de présenter quelques définitions sur la stabilité des systèmes physiques et quelques lemmes utilisées dans les prochains chapitres.

Dans la plupart des théorèmes de stabilité au sens de Lyapunov, l'existence de la fonction de Lyapunov était assumée et l'objectif était de déterminer la stabilité de ces systèmes. Mais dans la plupart des cas, la recherche de cette fonction est très difficile.

Dans le chapitre suivant, nous allons synthétiser une commande par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires incertains. Les performances de cette approche seront examinées sur deux exemples de simulation.



Chapitre 2

Introduction à la commande par backstepping

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche de la commande par backstepping qui s'applique aux systèmes non linéaires triangulaires (en anglais : Strict-Feedback System). Pour illustrer cette approche, des résultats de simulations sont présentés pour deux systèmes non linéaires incertains de deuxième ordre.

2.1. Introduction

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos en (1991) [19] et inspiré par les travaux de Feurer & Morse (1978) [20] d'une part et Tsiniias (1989) [21] et Kokotovic & Sussman (1989) [22] d'autre part. L'arrivée de cette méthode a donné un nouveau souffle à la commande adaptative des systèmes non linéaires, qui malgré les grands progrès réalisés, manquait d'approches générales. Le backstepping présente une alternative prometteuse aux méthodes basées sur l'équivalence certaine. Il se base sur la deuxième méthode de Lyapunov, dont il combine le choix de la fonction de Lyapunov avec celui des lois de commande et d'adaptation. Ceci lui permet, en plus de la tâche pour laquelle le contrôleur est conçu (poursuite et/ou régulation), de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé [8].

2.2. Commande par backstepping des systèmes non linéaires

La commande par backstepping est une méthode systématique basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov pour la conception de la commande non linéaire, qui s'applique aux systèmes non linéaires sous la forme triangulaire inférieure. La commande par backstepping [17] est développée pour commander les systèmes non linéaires, en particulier, les systèmes non linéaires dans lesquels les incertitudes ne satisfont pas le « Matching Condition » [8].

2.2.1. Le principe de la commande par backstepping

La commande par backstepping consiste à calculer, d'une façon systématique, une loi de commande afin de garantir qu'une certaine fonction de Lyapunov soit définie positive et

sa dérivée soit toujours négative. Celle-ci permet de garantir la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation [8].

Le problème principal avec l'approche du backstepping est « *L'explosion de complexité* » causée par la dérivation des commandes virtuelles [6,7]. C'est-à-dire, la complexité de la conception de la commande augmente lorsque l'ordre du système augmente.

Dans la démonstration suivante, nous présenterons la notion du backstepping qui nous offre une solution à ce problème.

2.3. Algorithme de base

Considérons la classe des systèmes non linéaires d'ordre n suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) & i = 2, \dots, n-1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x) + g(x)u + \Delta(t, x) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où, $f_i, i=1, \dots, n$ et g sont des fonctions non linéaires connues tel que $f(0)=0$ et $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ Est le vecteur d'état partiel, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état total, u est l'entrée de commande, y est la sortie du système et $\Delta(t, x)$ est la perturbation externe.

On désire faire suivre à la sortie $y = x_1$ le signal de référence y_r , supposé connu et uniformément borné.

La procédure de la commande par backstepping s'effectue comme suite :

Etape 1 :

On considère d'abord le premier sous-système et on définit la première valeur désirée :

$$x_{1d} = \alpha_0 = y_r \quad (2.2)$$

La première variable d'erreur est définie par :

$$e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (2.3)$$

La dynamique de cette erreur e_1 est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 + f(x_1) - \dot{\alpha}_0\end{aligned}\quad (2.4)$$

Afin d'assurer la stabilité du premier sous-système, la variable d'état x_2 est traitée comme une commande virtuelle. On prend comme valeur désirée de x_2 la fonction α_1 , telle que :

$$\alpha_1 = x_{2d} = -f_1(x_1) - k_1 e_1 + \dot{\alpha}_0 \quad (2.5)$$

Où, $k_1 > 0$ est une constante de conception.

En remplaçant l'équation (2.5) dans (2.4) on trouve que :

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 \quad (2.6)$$

Où $e_2 = x_2 - \alpha_1$ représente la deuxième erreur de poursuite.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (2.7)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 \\ &= e_1 (-k_1 e_1 + e_2) \\ &= -k_1 e_1^2 + e_1 e_2\end{aligned}\quad (2.8)$$

Remarque 1 Dans la conception du backstepping classique, $e_1 e_2$ sera annulée dans l'étape suivante, tandis qu'un autre terme de couplage $e_2 e_3$ apparaît et être traité plus tard, jusqu'à la dernière étape.

Etape 2 :

On considère maintenant le deuxième sous-système avec la deuxième variable d'erreur. La dérivée temporelle de e_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &= x_3 + f_2(\bar{x}_2) - \dot{\alpha}_1\end{aligned}\quad (2.9)$$

La valeur désirée de x_3 est donnée par :

$$x_{3d} = \alpha_2 = -e_1 - k_2 e_2 - f_2(x_1, x_2) + \dot{\alpha}_1 \quad (2.10)$$

En remplaçant l'équation (2.10) dans (2.9) on trouve que :

$$\dot{e}_2 = -e_1 - k_2 e_2 + e_3 \quad (2.11)$$

Où $e_3 = x_3 - \alpha_2$ est la troisième variable d'erreur.

Pour les quelles on choisit la fonction de Lyapunov

$$V_2(e_1, e_2) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 \quad (2.12)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 \\ &= -k_1 e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 (-e_1 - k_2 e_2 + e_3) \\ &= -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + e_2 e_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Etape i : ($i=3, \dots, n-1$)

La dérivée de $e_i = x_i - \alpha_{i-1}$ est

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} \\ &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) - \dot{\alpha}_{i-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le choix de la valeur désirée de x_i est donnée par :

$$x_{id} = \alpha_{i-1} = -e_{i-1} - k_i e_i - f_i(x_1, \dots, x_i) + \dot{\alpha}_{i-1} \quad (2.15)$$

En remplaçant l'équation (2.15) dans (2.14), on obtient :

$$\dot{e}_i = -e_{i-1} - k_i e_i + e_{i+1} \quad (2.16)$$

Où $e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$ est la $i+1$ erreur de poursuite

La fonction de Lyapunov correspondante est donnée comme suite :

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} e_j^2 \quad (2.17)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \sum_{j=1}^{i-1} e_j \dot{e}_j \\ &= -\sum_{j=1}^{i-1} k_j e_j^2 + e_i e_{i+1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'après la remarque 1, le terme $e_i e_{i+1}$ sera être traité jusqu'à la dernière étape.

Étape n :

Définissons la dernière variable d'erreur comme suite :

$$e_n = x_n - \alpha_{n-1} \quad (2.19)$$

La dérivée temporelle de e_n est donnée par :

$$\dot{e}_n = f_n(x) + g(x)u + \Delta - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (2.20)$$

Le choix approprié de la commande se donne par :

$$u = \frac{1}{g(x)} (-e_{n-1} - k_n e_n - f_n(x) + \dot{\alpha}_{n-1} - \rho \text{sign}(e_n)) \quad (2.21)$$

Où, $k_n > 0$ et $\dot{\alpha}_{n-1}$ se calcule analytiquement,

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} g_k \dot{x}_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \right) - f_i + \sum_{k=1}^i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} f_k, i=1, \dots, n \quad (2.22)$$

La fonction de Lyapunov globale est donnée par :

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n e_j^2 \quad (2.23)$$

Sa dérivée temporelle est

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= -\sum_{j=1}^{n-1} k_j e_j^2 + e_{n-1} e_n + e_n (-e_{n-1} - k_n e_n - \rho \text{sign}(e_n) + \Delta) \\ &\leq -\sum_{j=1}^n k_j e_j^2 - |e_n|(\rho - \Delta) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si on choisit le paramètre ρ suffisamment grand de tel sorte que : $\rho \geq \Delta$, on trouve que :

$$\dot{V}_n < -\sum_{j=1}^n k_j e_j^2 \quad (2.25)$$

Ce qui explique la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuites vers zéro.

2.5. Résultats de simulation

Afin de montrer les performances de la commande par backstepping proposée dans ce chapitre, nous effectuons une simulation numérique de deux systèmes non linéaires du deuxième ordre.

Exemple 1

On considère le pendule inversé comme premier exemple d'application, soit $y = x_1 = \theta$ l'angle du pendule par rapport à la ligne verticale et $x_2 = \dot{\theta}$ sa vitesse. L'objectif de commande est de forcer la sortie y pour suivre une trajectoire de référence $y_r = \sin(t)$, le modèle d'état de ce système est donné par [15] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u + \Delta(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

Où $f(x_1, x_2) = \frac{mlx_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1) - (m_c + m)g \sin(x_1)}{ml \cos^2(x_1) - \frac{4}{3}(m_c + m)l}$ et $g(x_1, x_2) = \frac{\cos(x_1)}{ml \cos^2(x_1) - \frac{4}{3}(m_c + m)l}$.

avec : m_c est la masse de chariot, m est la masse de pendule, l est la longueur efficace de pendule, g est l'accélération dû à gravité et u est la force appliquée.

L'algorithme de commande est donné comme suite :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_{1d} \\ \dot{x}_{2d} = -k_2 e_2 + \dot{x}_{1d} \\ e_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = \frac{1}{g(x_1, x_2)} \left(-e_1 - k_2 e_2 - k_1 (-k_1 e_1 + e_2) - f(x_1, x_2) + \ddot{x}_{1d} - \rho \text{sign}(e_2) \right) \end{cases}$$

Les conditions initiales choisies sont : $x(0) = [-0.5 \ 0]^T$, les paramètres de conception sont : $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$, $\rho = 2$, sachant que (BC) représente la commande par backstepping simple et le (BSMC) représente la commande par backstepping robuste, les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (2.1) à (2.11).

Test 1 : sans perturbation ($\Delta(t) = 0$)

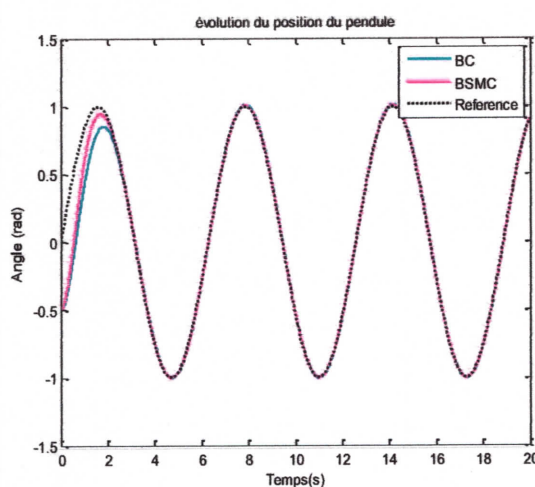


Figure (2.1) : Evolution de la position du pendule

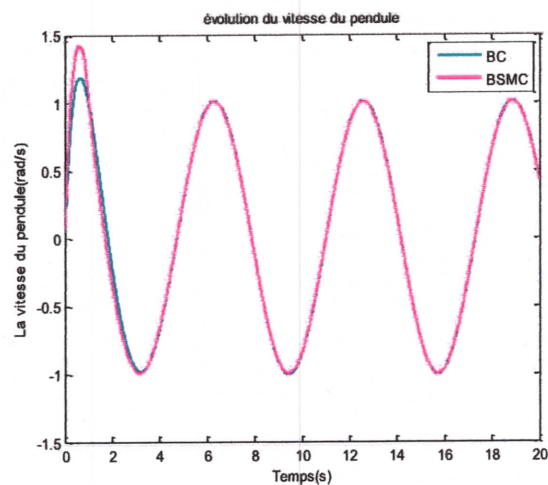


Figure (2.2) : Evolution de la vitesse du pendule

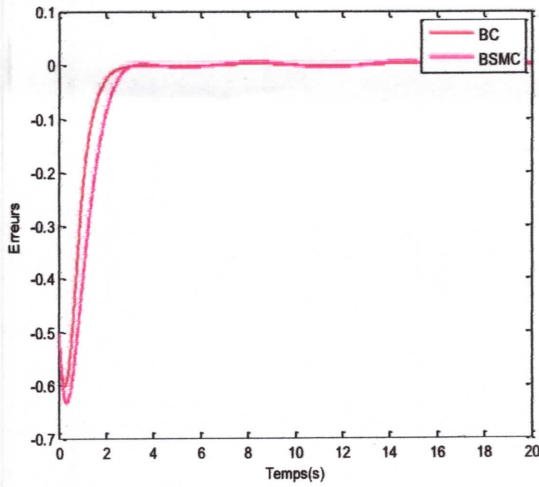


Figure (2.3) : Pursuite de la première erreur

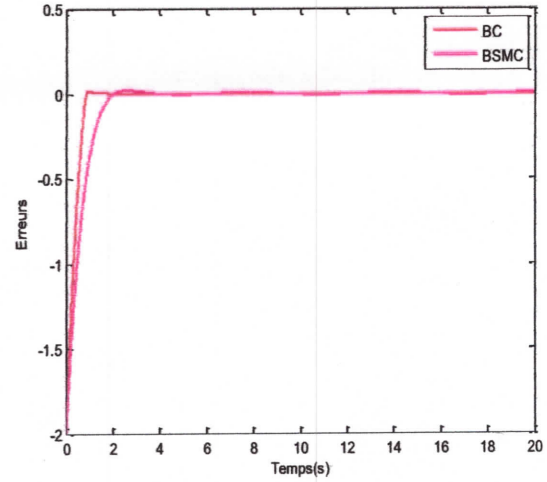


Figure (2.4) : Pursuite de la deuxième erreur

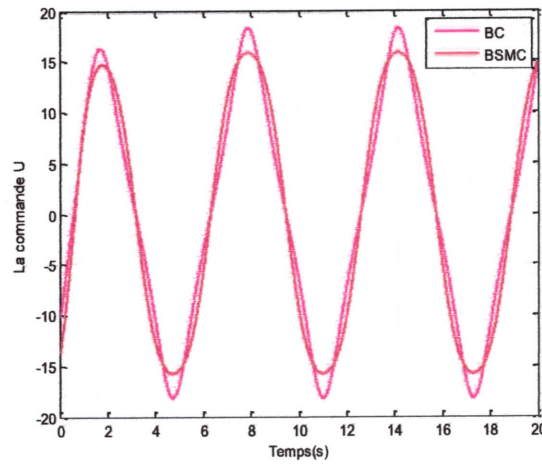


Figure (2.5) : Signal de commande U

Test 2 : avec perturbation ($\Delta \neq 0$). La perturbation externe est supposée égale $\Delta(t) = 2\sin(t)$ et apparaît à l'instant $t = 8s$.

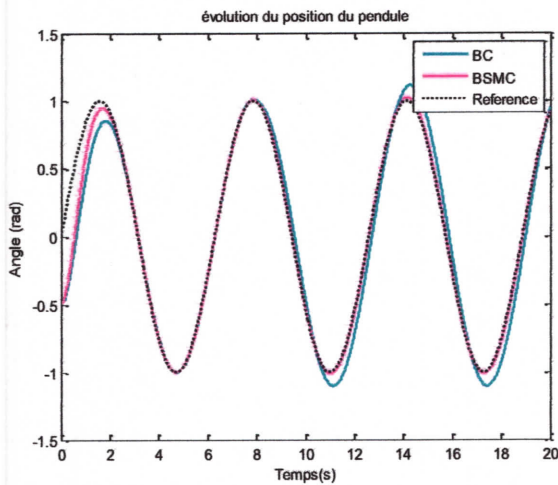


Figure (2.6) : Evolution de la position du pendule

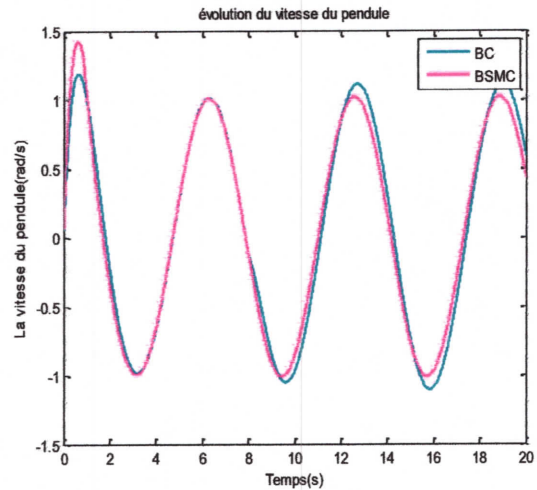


Figure (2.7) : Evolution de la vitesse du pendule

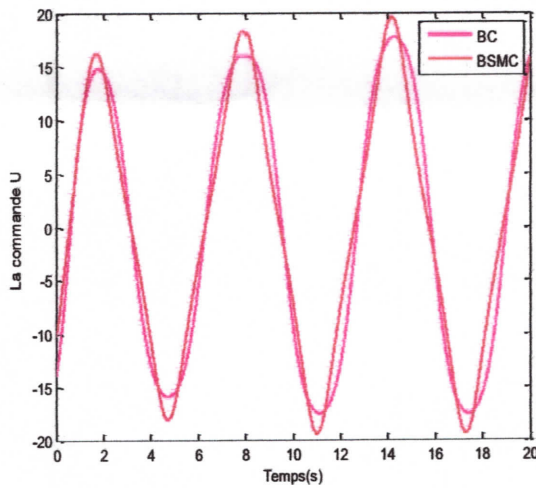


Figure (2.8) : Signal de commande U

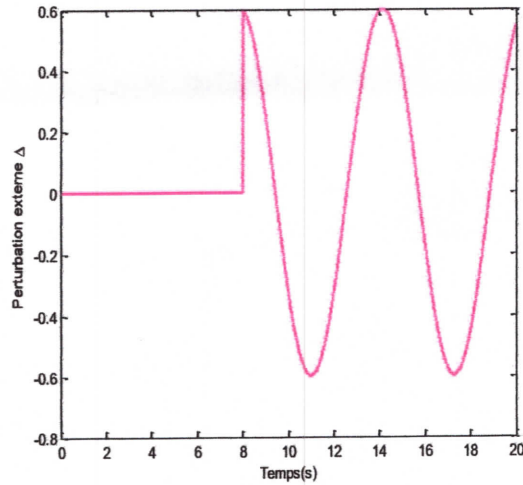


Figure (2.9) : Perturbation

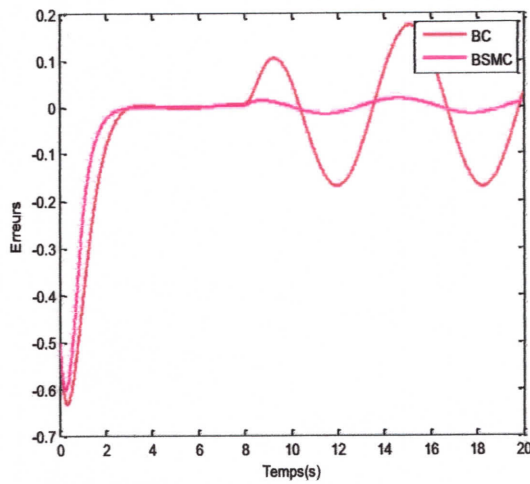


Figure (2.10) : Poursuite de la première erreur

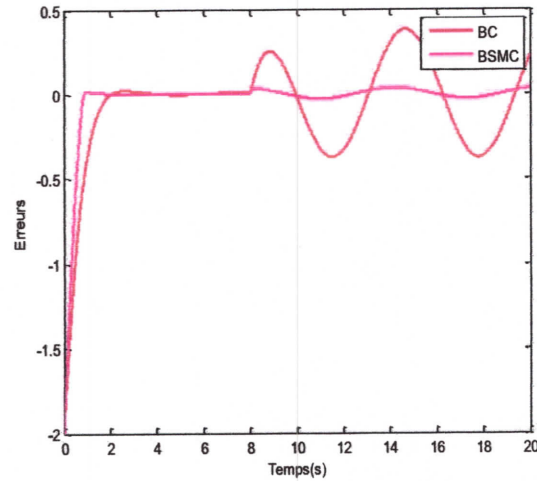


Figure (2.11) : Poursuite de la deuxième erreur

Exemple 2

Considérons comme deuxième exemple d'application le système non linéaire du 2^{ème} ordre suivant [14] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.1x_1^2 + x_1 e^{-0.5x_1} \\ \dot{x}_2 = u + x_1 x_2^2 + \Delta(t, x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

L'algorithme de commande par backstepping pour ce deuxième exemple est donné comme suite :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \alpha_0 \\ \dot{\alpha}_1 = -k_1 e_1 - 0.1x_1^2 - x_1 \exp(-0.5x_1) + \dot{\alpha}_0 \\ e_2 = x_2 - \alpha_1 \\ u = -e_1 - k_2 e_2 - x_1 x_2^2 + \dot{\alpha}_1 + \rho(x) \text{sign}(e_2) \end{cases}$$

Avec : $\Delta(t, x) = 2(x_1^2 + x_2^2) \sin^3(t)$. On choisit : $\rho(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$, ce qui signifie que : $|\Delta(t, x)| \leq \rho(x)$. La trajectoire de référence est : $y_d(t) = 0.5(\sin(t) + \sin(0.5t))$. Les conditions initiales sont : $x(0) = [-0.5 \ 0]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = k_2 = 5$. Les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (2.12) à (2.22)

Test 1 : $\Delta(t, x) = 0$ (sans perturbation).

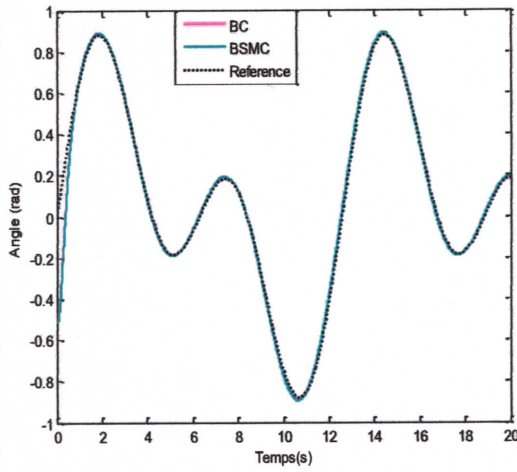


Figure (2.12) : Evolution de la position du pendule

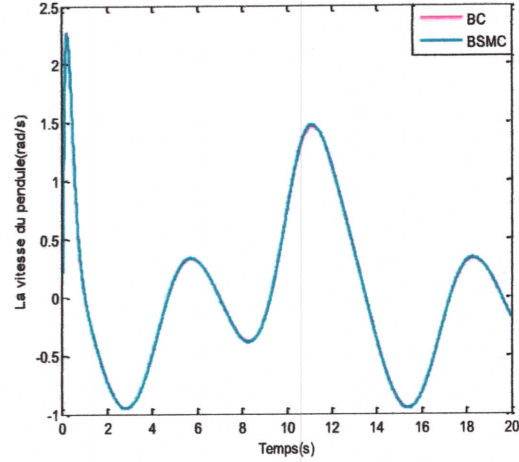


Figure (2.13) : Evolution de la vitesse du pendule

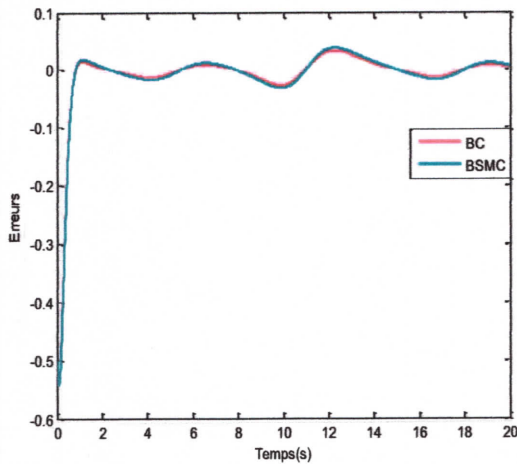


Figure (2.14) : Poursuite de la première erreur

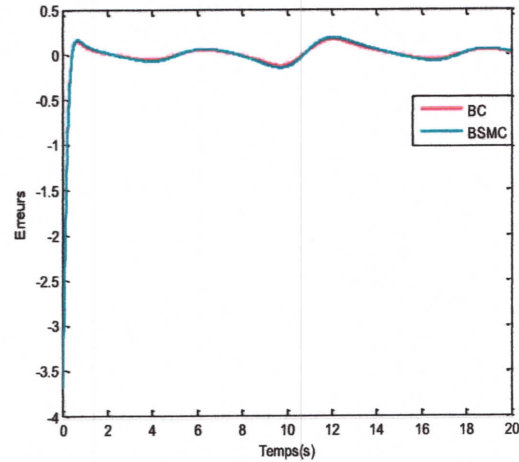


Figure (2.15) : Poursuite de la deuxième erreur

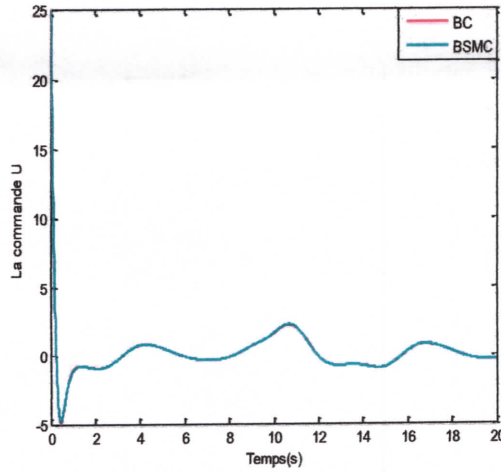


Figure (2.16) : Signal de commande U

Test 2 : $\Delta \neq 0$ (avec perturbation). La perturbation externe est supposée égale $\Delta(t, x) = 2(x_1^2 + x_2^2)\sin^3(t)$ et apparaît à l'instant $t=8s$.

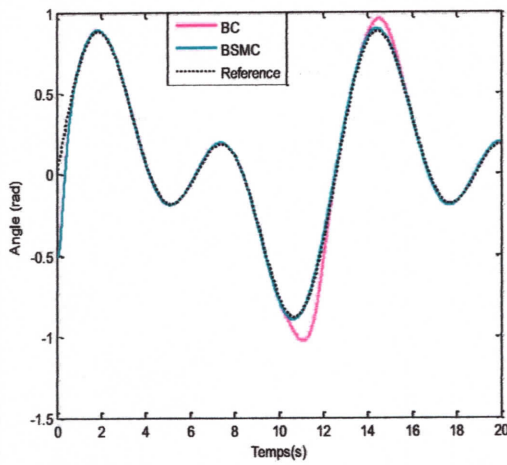


Figure (2.17) : Evolution de la position du pendule

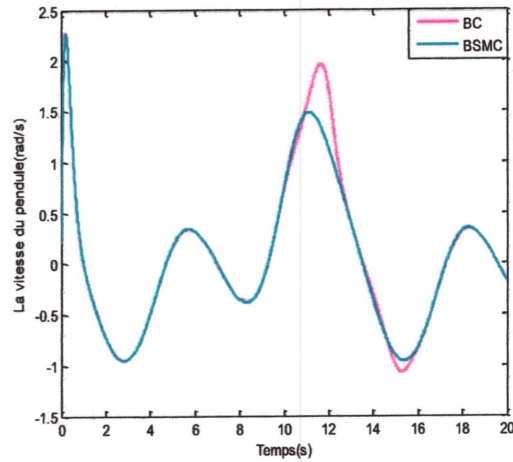


Figure (2.18) : Evolution de la vitesse du pendule

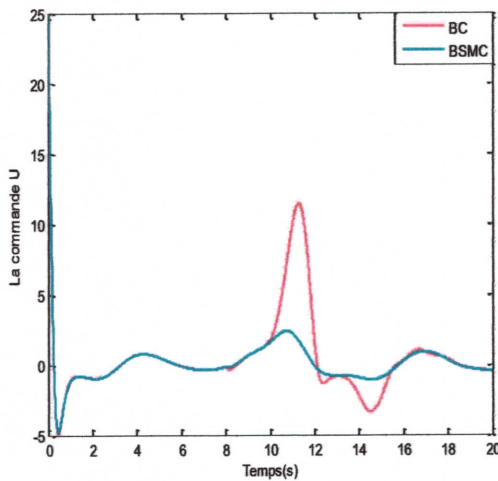


Figure (2.19) : Signal de commande U

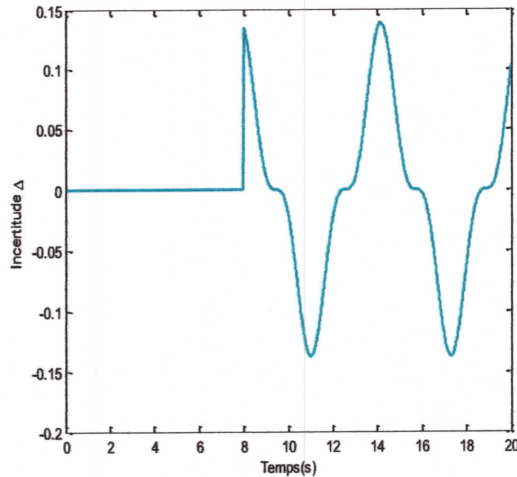


Figure (2.20) : Incertitude

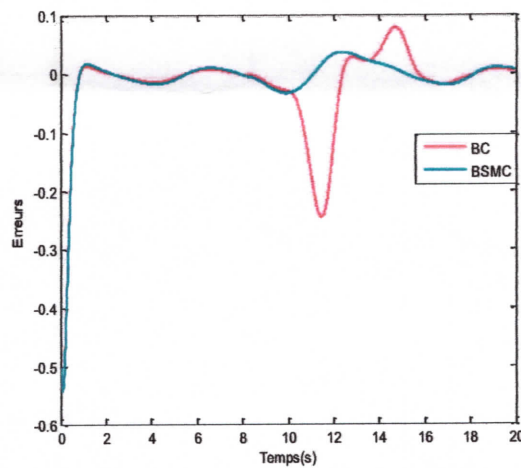


Figure (2.21) : Poursuite de la première erreur

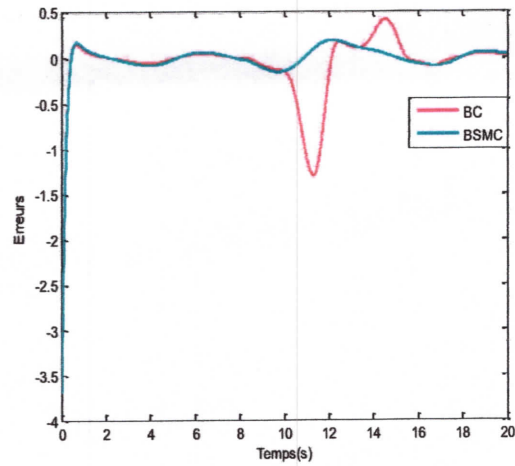


Figure (2.22) : Poursuite de la deuxième erreur

D'après les résultats de simulations obtenus dans les deux exemples on remarque que :

En absence de perturbations, les deux techniques de commande (BC et BSMC) sont efficaces, elles arrivent à stabiliser le système, et garantissent la poursuite de trajectoire avec une erreur tend vers zéro. Cependant, lorsqu'on applique des perturbations externes ou des incertitudes paramétriques sur les systèmes, la commande par backstepping (BC) perd son efficacité.

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la technique de commande par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires incertains. Les résultats de simulation effectués sur deux exemples d'applications montrent que cet algorithme de commande donne des bons résultats avec des erreurs de poursuites relativement nuls. Cependant, lorsqu'une perturbation est introduite dans le système, les résultats de poursuite deviennent moins performants et le système tend vers l'instabilité. Le problème majeur de cette stratégie de commande est « l'explosion de complexité » qui est causé par les dérivés successifs des commandes virtuelles. Pour éviter ce problème, une deuxième technique de commande dite « commande par surface dynamique (DSC) » est proposée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Commande par Surface Dynamique (DSC)

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche de la commande par surface dynamique (DSC) pour une classe des systèmes non linéaires incertains en utilisant des filtres linéaires passe-bas et des filtres non linéaires par mode glissant. Des résultats de simulations sont présentés pour deux systèmes non linéaires du deuxième ordre.

3.1. Introduction

L'asservissement des systèmes non linéaires incertains par des techniques de commande robustes ou d'adaptation est un problème d'une importance primordiale dans le domaine de la commande, puisque les non-linéarités et incertitudes existent essentiellement dans des nombreux systèmes réels [23,24]. Un outil puissant pour résoudre un tel problème est la technique de backstepping. Cette méthodologie de conception de commande a d'abord été proposée pour les systèmes strict feedback paramétriques avec des incertitudes linéaires paramétrées [25,17], puis étendu pour faire face à des incertitudes non linéaires paramétrées [26,27]. Cependant, la technique de backstepping souffre du problème d'explosion de complexité découlant des différentiations répétées des commandes virtuelles.

La commande par surface dynamique (DSC) a été développée pour pallier ce problème «explosion de complexité» due à la nécessité pour effectuer la différentiation répétée dans les fonctions non linéaires, qui est généralement une problématique dans la commande par backstepping intégrateur, grâce à l'utilisation des filtres dynamiques. L'existence des gains de DSC et des constantes de temps des filtres pour la stabilité semi-globale a été théoriquement prouvée dans [28] et elle a été prolongée à la commande adaptative d'une classe spécifique des incertitudes paramétriques [29].

3.2. Commande par DSC avec des filtres linéaires passe-bas

Dans cette section, on va synthétiser une commande par surface dynamique en utilisant des filtres linéaires passe-bas. Considérons la même classe des systèmes non linéaires incertains présentée dans le chapitre 2 (voir l'équation (2.1)).

La procédure de conception s'effectue en n étapes comme suite :

Etape 1 : ($i = 1$)

Nous définissons la première surface :

$$s_1 = x_1 - x_{1d} \quad (3.1)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 + f_1(x_1) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour que s_1 tend vers zéro, on choisit x_{2c} comme suit :

$$x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) + \dot{x}_{1d}, \quad k_1 > 0 \quad (3.3)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle (i.e. \dot{x}_{2c}), on introduit une nouvelle variable x_{2d} obtenu par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} . Dans cette section on utilise un filtre de premier ordre passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$:

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (3.4)$$

L'erreur du filtre s'exprime par :

$$\chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.5)$$

Prenant en compte de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} \\ &= s_2 + \chi_2 + x_{2c} \end{aligned} \quad (3.6)$$

En remplaçant (3.3) et (3.6) dans (3.2) on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 \quad (3.7)$$

Etape i ($i=2, \dots, n-1$) :

En définit la $i^{\text{ème}}$ surface :

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (3.8)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous choisissons $x_{(i+1)c}$ comme suite :

$$\dot{x}_{(i+1)c} = -s_{i-1} - k_i s_i - f_i(\bar{x}_i) + \dot{x}_{id}, \quad k_i > 0 \quad (3.10)$$

Des filtres du premier ordre avec des constantes de temps $\tau_{i+1} > 0$ sont utilisés pour éliminer le problème d'explosion de la complexité :

$$\tau_{i+1} \dot{\mathcal{X}}_{(i+1)d} + \mathcal{X}_{(i+1)d} = \mathcal{X}_{(i+1)c}, \quad \mathcal{X}_{(i+1)d}(0) = \mathcal{X}_{(i+1)c}(0) \quad (3.11)$$

On définit l'erreur de filtre comme suit :

$$\mathcal{X}_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.12)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\dot{\mathcal{X}}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} \mathcal{X}_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (3.13)$$

Considérons la $i^{\text{ème}}$ +1 surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, il en résulte que :

$$x_{i+1} = s_{i+1} + \mathcal{X}_{i+1} + x_{(i+1)c} \quad (3.14)$$

En remplaçant les équations (3.10) et (3.14) dans (3.9) on trouve que :

$$\dot{s}_i = -s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \mathcal{X}_{i+1} \quad (3.15)$$

Etape n :

La $n^{\text{ème}}$ surface est défini par :

$$s_n = x_n - x_{nd} \quad (3.16)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\dot{s}_n = \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} = f_n(x) + g(x)u + \Delta - \dot{x}_{nd} \quad (3.17)$$

Pour que S_n tende vers zéro, nous choisissons la loi de commande u suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-s_{n-1} - k_n s_n - f_n(x) + \dot{x}_{nd} - k \text{sign}(s_n) \right) \quad (3.18)$$

L'erreur du filtre est défini par :

$$\mathcal{X}_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (3.19)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\dot{\mathcal{X}}_n = \dot{x}_{nd} - \dot{x}_{nc} = -\frac{1}{\tau_n} \mathcal{X}_n - \dot{x}_{nc} \quad (3.20)$$

En remplaçant (3.18) dans (3.17) on trouve que :

$$\dot{S}_n = -S_{n-1} - k_n S_n - k \text{sign}(S_n) + \Delta \quad (3.21)$$

Les fonctions candidats de Lyapunov sont données par :

$$V = \sum_{i=1}^n V_{s_i} + \sum_{i=2}^n V_{\chi_i} \quad (3.22)$$

Avec
$$V_{s_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2, V_{\chi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \chi_i^2 \quad (3.23)$$

En employant (3.7), (3.15), (3.21) et l'inégalité de Young (i.e. $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_1} &= s_1 \dot{s}_1 \\ &= s_1 (-k_1 s_1 + s_2 + \chi_2) \\ &= -k_1 s_1^2 + s_1 s_2 + s_1 \chi_2 \\ &\leq -k_1 s_1^2 + s_1 s_2 + |s_1| |\chi_2| \\ &\leq -k_1 s_1^2 + \frac{s_1^2}{2} + \frac{\chi_2^2}{2} + s_1 s_2 \\ &\leq -\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_i} &= s_i \dot{s}_i \\ &= s_i (-s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_{i+1}) \\ &\leq -k_i s_i^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + |s_i| |\chi_{i+1}| \\ &\leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &= s_n \dot{s}_n \\ &= s_n (-s_{n-1} - k_n s_n - k \text{sign}(s_n) + \Delta) \\ &= -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} - k |s_n| + \Delta s_n \\ &\leq -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} - |s_n| (k - \Delta) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si on suppose que : $|\Delta| < k$, il en résulte que :

$$\dot{V}_{s_n} \leq -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} \quad (3.27)$$

En utilisant (3.13), (3.20) avec l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{ie} &= \chi_i \dot{\chi}_i \\
&= \chi_i \left(-\frac{1}{\tau_i} \chi_i + \dot{\chi}_{ic} \right) \\
&\leq -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 + |\chi_i \dot{\chi}_{ic}| \\
&\leq -\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2} \right) \chi_i^2 + \frac{M_i^2}{2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Notant que $0 < |\dot{\chi}_{ic}| < M_i$, avec M_i est une constante positive.

En remplaçant (3.24), (3.25), (3.27) et (3.28) dans la dérivée temporelle de (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_{s_i} + \sum_{i=2}^n \dot{V}_{\chi_i} \\
&\leq \left(-\left(k_1 - \frac{1}{2} \right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[-\left(k_i - \frac{1}{2} \right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} \right] - (k_n s_n^2 + s_n s_{n-1}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \left[-\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2} \right) \chi_i^2 + \frac{M_i^2}{2} \right] \\
&\leq -\sum_{i=1}^{n-1} \left(k_i - \frac{1}{2} \right) s_i^2 - k_n s_n^2 - \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\tau_i} - 1 \right) \chi_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{M_i^2}{2} \\
&\leq -\alpha V + \beta
\end{aligned} \tag{3.29}$$



Tel que :

$$\begin{cases} \alpha = \min \left[(2k_1 - 1), (2k_2 - 1), \dots, (2k_{n-1} - 1), 2k_n, 2\left(\frac{1}{\tau_2} - 1\right), 2\left(\frac{1}{\tau_3} - 1\right), \dots, 2\left(\frac{1}{\tau_n} - 1\right) \right] > 0 \\ \beta = \sum_{i=2}^n \frac{M_i^2}{2} > 0 \end{cases}$$

Selon le lemme 1 (voir chapitre 1), on conclue que le système bouclé a une stabilité bornée (UUB) et que tous les signaux de la boucle fermée sont bornés ainsi que la convergence des surfaces au voisinage de zéro.

3.3. Commande par DSC avec des filtres non linéaires par mode glissant

Dans cette section, on va synthétiser une commande par surface dynamique en utilisant des filtres non linéaires par mode glissant. Considérons la même classe des systèmes non linéaires incertains présentée dans le chapitre 2 (voir l'équation (2.1)).

La procédure de conception s'effectue en n étapes comme suite :

Etape 1 : ($i=1$)

Nous définissons la première surface :

$$s_1 = x_1 - x_{1d} \quad (3.30)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 + f_1(x_1) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nous choisissons x_{2c} pour que s_1 tend vers zéro avec,

$$x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) + \dot{x}_{1d}, \quad k_1 > 0 \quad (3.32)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle (i.e. \dot{x}_{2c}), on introduit une nouvelle variable x_{2d} obtenu par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} . Dans cette section on utilise un filtre non linéaire par mode glissant avec une constant de temps $\tau_2 > 0$ [31] :

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c} - \alpha \tau_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}), \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (3.33)$$

L'erreur de filtre est donnée par :

$$\chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.34)$$

Prenant en compte de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on trouve que :

$$x_2 = s_2 + \chi_2 + x_{2c} \quad (3.35)$$

En remplaçant les équations (3.32) et (3.35) dans (3.31) on trouve que

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 \quad (3.36)$$

Etape i ($i=2, \dots, n-1$) :

Nous définissons la $i^{\text{ème}}$ surface :

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (3.37)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= x_i + f_i(\bar{x}_i) - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nous choisissons $x_{(i+1)c}$ comme suite :

$$x_{(i+1)c} = -s_{i-1} - k_i s_i - f_i(\bar{x}_i) + \dot{x}_{id}, \quad k_i > 0 \quad (3.39)$$

Des filtres du premier ordre avec des constantes de temps $\tau_{i+1} > 0$, sont utilisés pour éliminer le problème d'explosion de la complexité :

$$\tau_{i+1} \dot{\chi}_{(i+1)d} + \chi_{(i+1)d} = x_{(i+1)c} - \alpha \tau_{i+1} \text{sign}(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) \quad , \chi_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (3.40)$$

On définit l'erreur de filtre comme suit :

$$\chi_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.41)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\dot{\chi}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{(i+1)}} \chi_{(i+1)} - \alpha \text{sign}(\chi_{(i+1)}) - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (3.42)$$

Considérons la $i^{\text{ème}}$ +1 surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, il en résulte que :

$$x_{i+1} = s_{i+1} + \chi_{i+1} + x_{(i+1)c} \quad (3.43)$$

En remplaçant les équations (3.39) et (3.43) dans (3.38), on trouve que

$$\dot{s}_i = -s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_{i+1} \quad (3.44)$$

Etape n :

La dérivée temporelle de la $n^{\text{ème}}$ surface $s_n = x_n - x_{nd}$:

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n(x) + g(x)u + \Delta - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Pour que S_n tende vers zéro, nous choisissons la loi de commande u suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)} (-s_{n-1} - k_n s_n - f(x) + \dot{x}_{nd}) - \alpha \text{sign}(\chi_n) - k \text{sign}(s_n) \quad (3.46)$$

L'erreur du filtre est défini par :

$$\chi_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (3.47)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\dot{\chi}_n = \dot{x}_{nd} - \dot{x}_{nc} = -\frac{1}{\tau_n} \chi_n - \alpha \text{sign}(\chi_n) - \dot{x}_{nc} \quad (3.48)$$

En remplaçant (3.46) dans (3.45) on trouve que :

$$\dot{S}_n = -S_{n-1} - k_n S_n - k \text{sign}(S_n) + \Delta_n \quad (3.49)$$

Les fonctions candidats de Lyapunov sont données par :

$$V = \sum_{i=1}^n V_{s_i} + \sum_{i=2}^n V_{\chi_i} \quad (3.50)$$

Avec
$$V_{s_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2, V_{\chi_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \chi_i^2 \quad (3.51)$$

En employant (3.36), (3.44), (3.49) et l'inégalité de Young $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_1} &= s_1 \dot{s}_1 \\ &= s_1 (-k_1 s_1 + s_2 + \chi_2) \\ &\leq -k_1 s_1^2 + s_1 s_2 + |s_1| |\chi_2| \\ &\leq -\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_i} &= s_i \dot{s}_i \\ &= s_i (-s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_{i+1}) \\ &\leq -k_i s_i^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + |s_i| |\chi_{i+1}| \\ &\leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &= s_n \dot{s}_n \\ &= s_n (-s_{n-1} - k_n s_n - k \text{sign}(s_n) + \Delta) \\ &= -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} - k |s_n| + \Delta s_n \\ &\leq -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} - |s_n| (k - \Delta) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Si on suppose que : $|\Delta| \leq k$, il en résulte que :

$$\dot{V}_{s_n} \leq -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} \quad (3.55)$$

En utilisant (3.42), (3.48) avec l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\chi_i} &= \chi_i \dot{\chi}_i \\ &= \chi_i \left(-\frac{1}{\tau_i} \chi_i - \alpha_i \text{sign}(\chi_i) - \dot{x}_{ic} \right) \\ &\leq -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 - \alpha_i |\chi_i| + |\chi_i \dot{x}_{ic}| \\ &\leq -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 - |\chi_i| (\alpha_i - M_i) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Notant que $0 < |\dot{x}_{ic}| < M_i$, avec M_i est une constante positive.

Si on suppose que $\alpha_i \geq M_i$, on assure que :

$$\dot{V}_{\xi_i} \leq -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 \quad (3.57)$$

En remplaçant (3.52), (3.53), (3.55) et (3.57) dans la dérivée temporelle de (3.50), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_{s_i} + \sum_{i=2}^n \dot{V}_{\chi_i} \\ \dot{V} &\leq \left(-\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} \right] \\ &\quad - k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} - \sum_{i=2}^n \frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-1} \left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 - k_n s_n^2 - \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\tau_i} - 1\right) \chi_i^2 \\ &\leq -\mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Avec

$$\lambda = \min \left[(2k_1 - 1), (2k_2 - 1), \dots, (2k_{n-1} - 1), 2k_n, 2\left(\frac{1}{\tau_2} - 1\right), 2\left(\frac{1}{\tau_3} - 1\right), \dots, 2\left(\frac{1}{\tau_n} - 1\right) \right] > 0$$

Ce qui explique la stabilité exponentielle globale du système en BF ainsi que la convergence asymptotique des surfaces vers zéro.

3.4. Résultats de simulation :

Pour les deux exemples d'application l'algorithme de commande par DSC en utilisant des filtres linéaires passe-bas (i.e. DSC-LPF) est donné comme suite :

$$\begin{cases} s_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = -k_1 s_1 + \dot{x}_{1d} \\ \tau \dot{x}_{2d} = x_{2c} - x_{2d} \\ \chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ s_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = -\frac{1}{g(x_1, x_2)} \left(f(x_1, x_2) + s_1 + k_2 s_2 + \frac{\chi_2}{\tau} + k \text{sign}(s_2) \right) \end{cases}$$

Le deuxième algorithme de commande par DSC en utilisant des filtres non linéaires par mode glissant (i.e. DSC-SMF) est représenté comme suit :

$$\begin{cases} s_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = -k_1 s_1 + \dot{x}_{1d} \\ \tau \dot{x}_{2d} = x_{2c} - x_{2d} - \alpha \tau \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}) \\ \chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ s_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = -\frac{1}{g(x_1, x_2)} (f(x_1, x_2) + s_1 + k_2 s_2 + \frac{\chi_2}{\tau} + \alpha \text{sign}(\chi_2) + k \text{sign}(s_2)) \end{cases}$$

Remarque : Pour éviter le problème de Chattering causé par l'utilisation de la fonction 'sign', on va utiliser une fonction lisse de tangente hyperbolique 'Tanh'.

Exemple 1 :

Reprenons le même système considéré dans le chapitre 2 (voir l'équation (2.26)). Les conditions initiales sont choisies comme suit : $x = [-0.5 \ 0]^T$, les paramètres de conception sont : $k_1 = 5, k_2 = 5, k = 1, \tau = 0.1, \alpha = 1$, les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (3.1) à (3.6).

Test 1 : Dans ce test on va introduire une perturbation externe $\Delta(t, x) = 2\sin(x_2)$ à l'instant $t = 4s$.

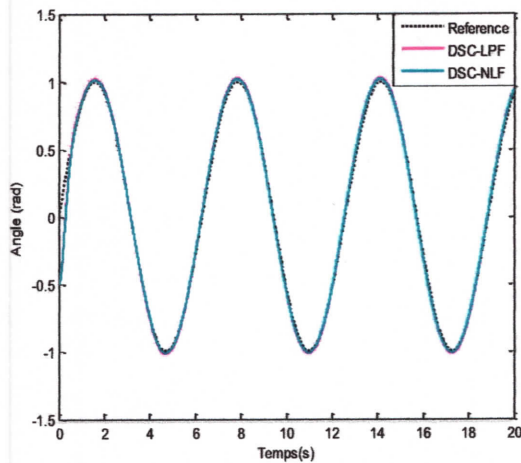


Figure (3.1) : Evolution de la position du pendule

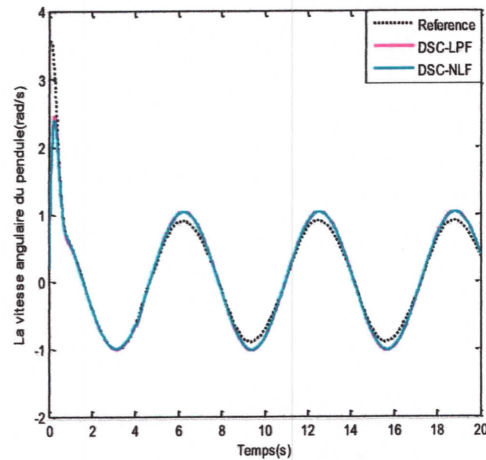


Figure (3.2) : Evolution de la vitesse du pendule

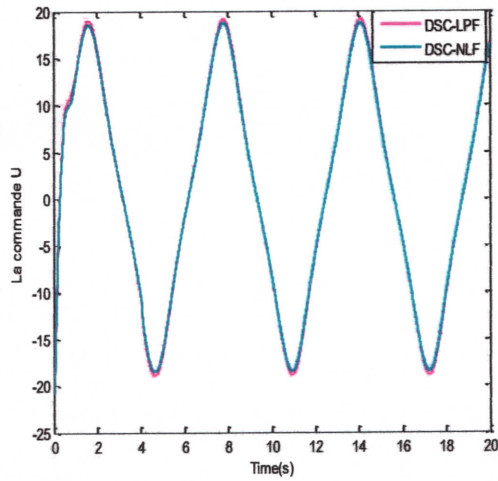


Figure (3.3) : Signal de commande U

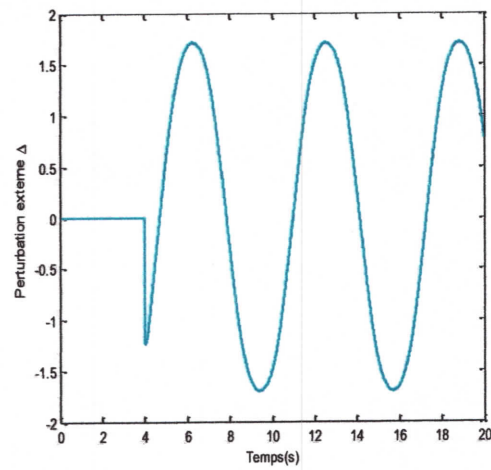


Figure (3.4) : Perturbation

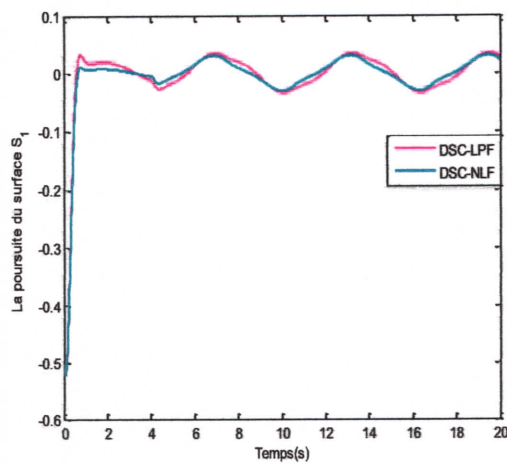


Figure (3.5) : Poursuite de la première surface

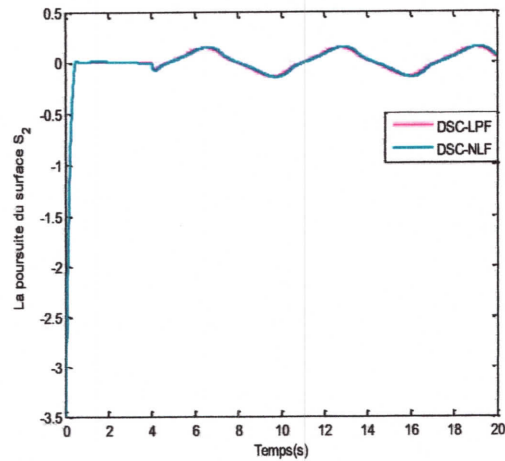


Figure (3.6) : Poursuite de la deuxième surface

Test 2 : Dans ce test on va considérer deux perturbations externes dont le modèle d'état correspondant est donné comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \Delta_1(t) \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u + \Delta_2(t, x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.59)$$

La première perturbation $\Delta_1(t)$ est représentée par un signal carré d'amplitude 2 et de fréquence 1 qui apparait à l'instant $t = 8s$ et la deuxième perturbation $\Delta_2(t, x)$ est considérée comme dans le test 1. Les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (3.7) à (3.13).

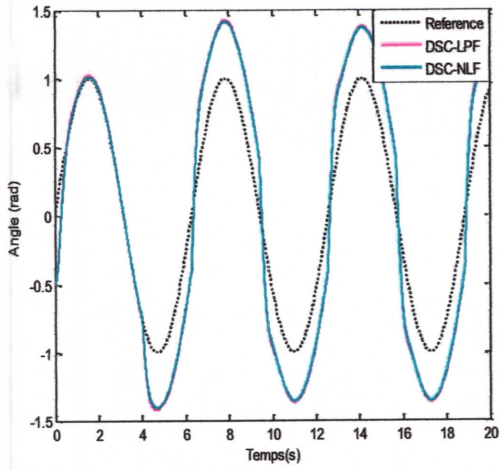


Figure (3.7) : Evolution de la position du pendule

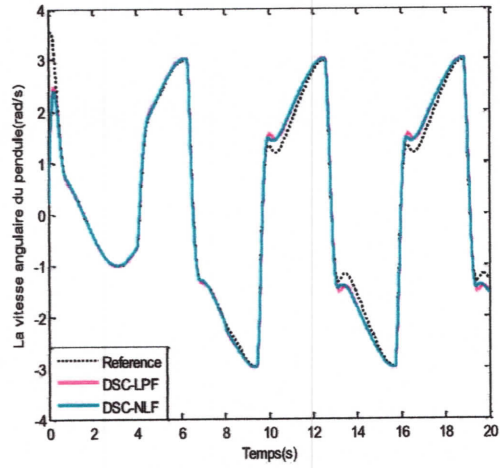


Figure (3.8) : Evolution de la vitesse du pendule

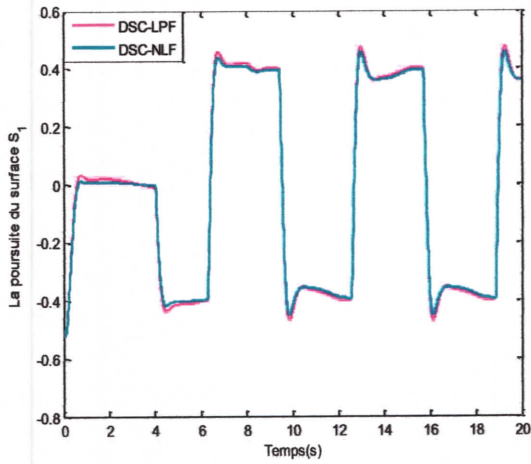


Figure (3.9) : Poursuite de la première surface

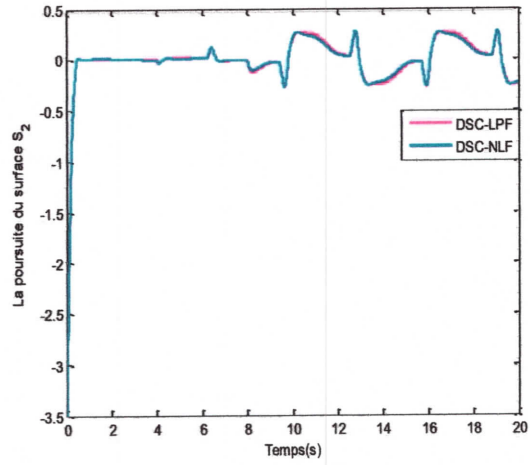


Figure (3.10) : Poursuite de la deuxième surface

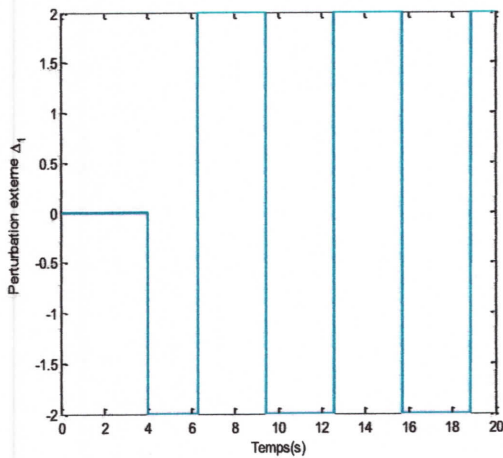


Figure (3.11) : Perturbation Δ_1

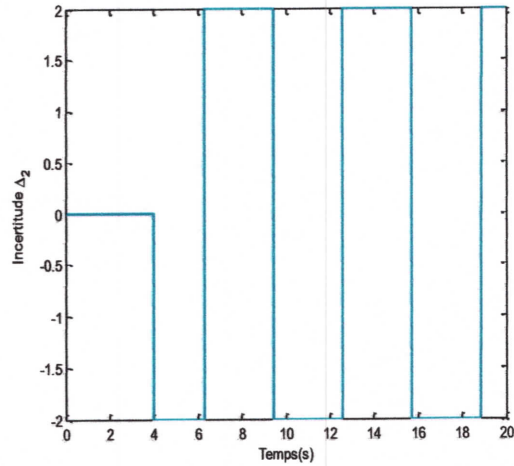


Figure (3.12) : Incertitude Δ_2

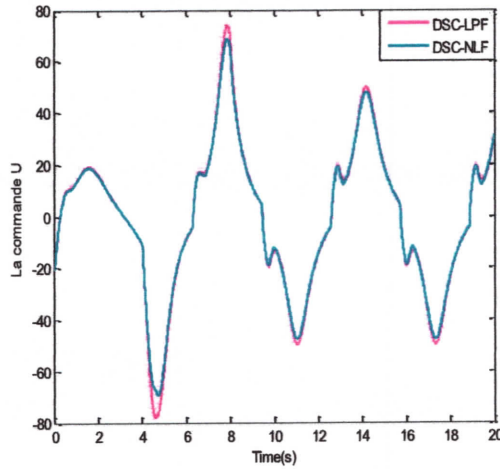


Figure (3.13) : Signal de commande U

Exemple 2 :

Considérons le même système étudié dans le chapitre précédemment 2 (voir l'équation (2.27)).

Les conditions initiales choisies sont : $x(0) = [-0.5 \ 0]^T$, les constantes positives k_1 et k_2 sont choisies comme suit : $k_1 = 5$, $k_2 = 5$, $k = 5$ et $\tau = 0.1$, les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (3.14) à (3.19).

Test 1 : Dans ce cas on va considérer une incertitude paramétrique $\Delta(t, x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)\sin^3(t)$

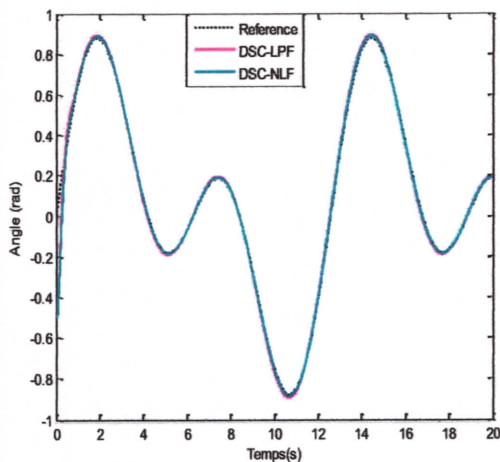


Figure (3.14) : Evolution de la position du pendule

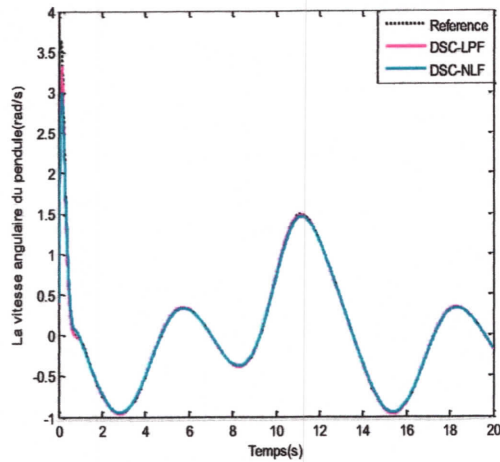


Figure (3.15) : Evolution de la vitesse du pendule

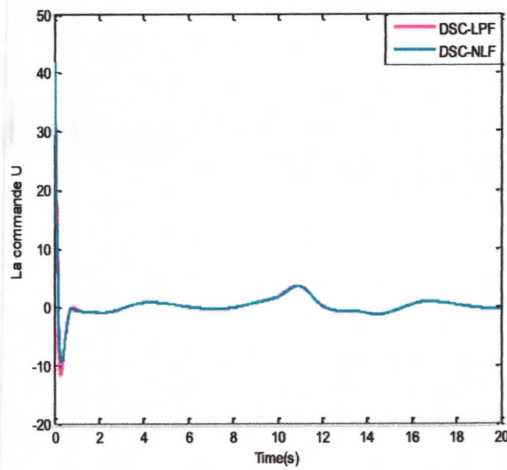


Figure (3.16) : Signal de commande U

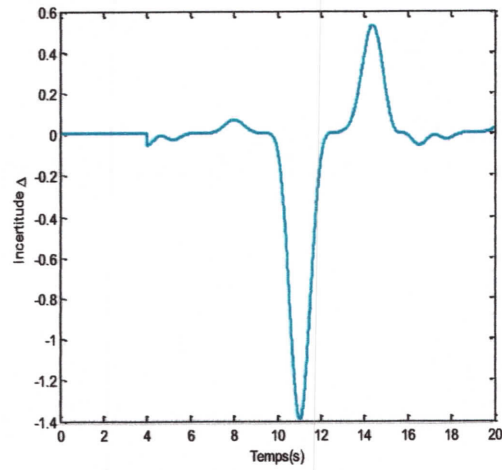


Figure (3.17) : Incertitude

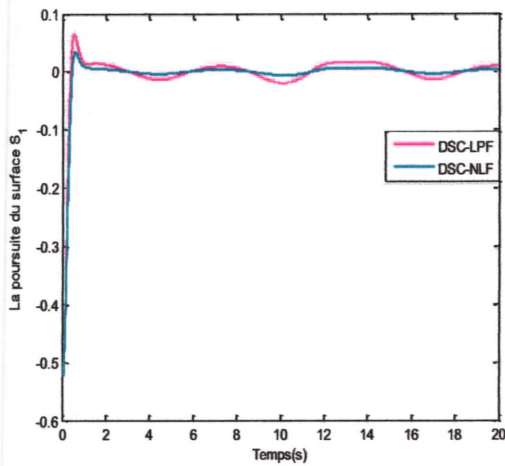


Figure (3.18) : Poursuite de la première surface

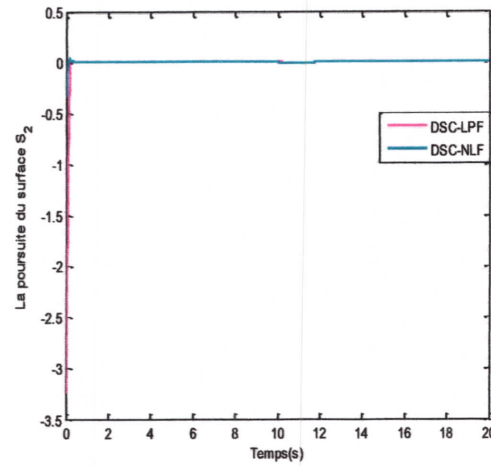


Figure (3.19) : Poursuite de la deuxième surface

Test 2 : Dans ce test on va introduire une perturbation externe avec une incertitude paramétrique comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.1x_1^2 + x_1e^{-0.5x_1} + \Delta_1(t, x) \\ \dot{x}_2 = u + x_1x_2^2 + \Delta_2(t, x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.60)$$

avec $\Delta_1(t, x) = 2 \sin(x_2)$ introduite à partir de l'instant $t = 4s$ et $\Delta_2(t, x)$ est considérée comme dans le test 1.

Les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (3.20) à (3.26)

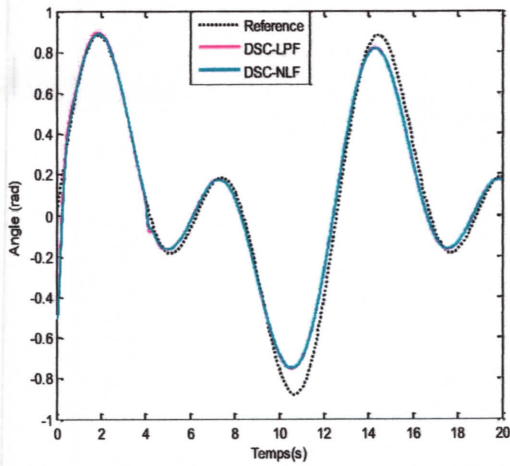


Figure (3.20) : L'évolution de la position du pendule

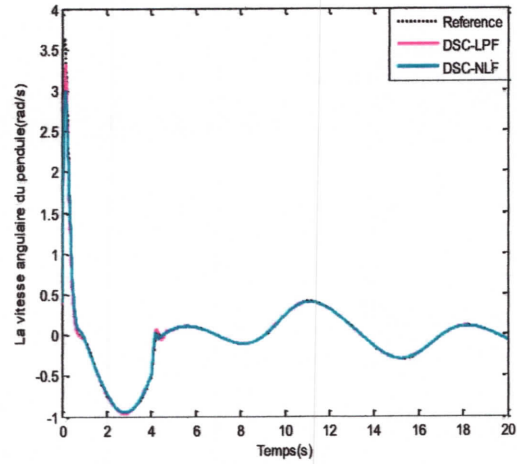


Figure (3.21) : L'évolution de la vitesse du pendule

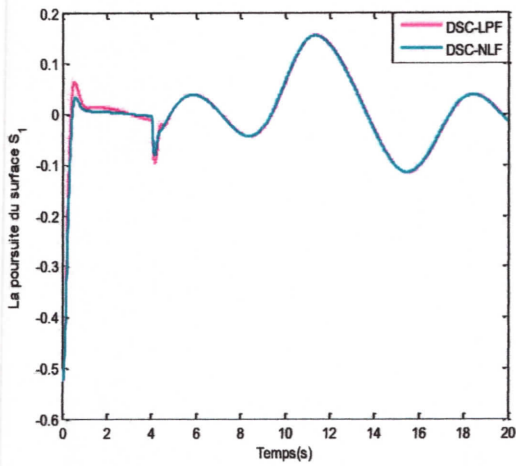


Figure (3.22) : Poursuite de la première surface

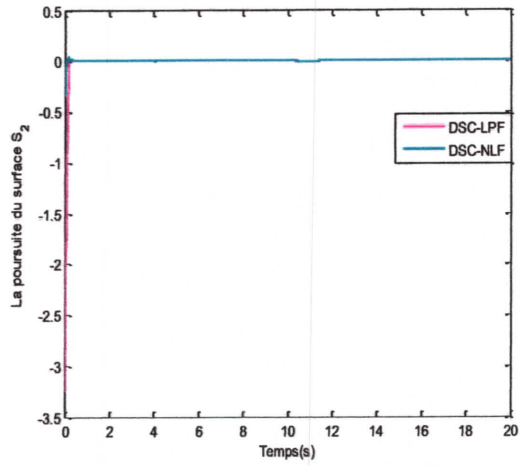


Figure (3.23) : Poursuite de la deuxième surface

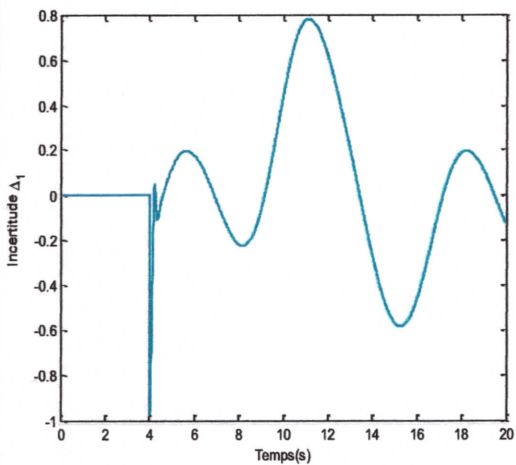


Figure (3.24) : Incertitude Δ_1

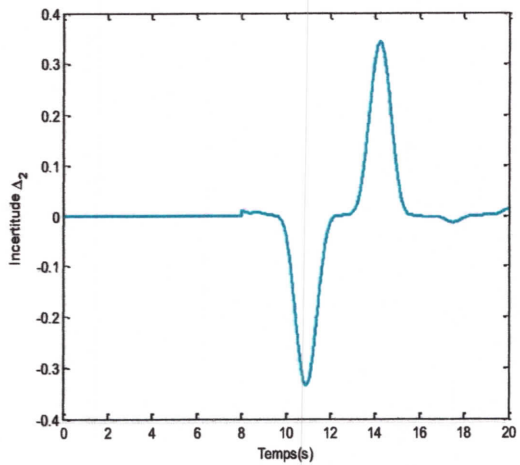


Figure (3.25) : Incertitude Δ_2

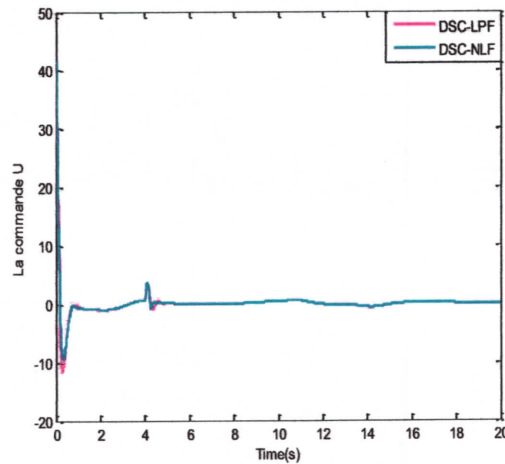


Figure (3.26) : Signal de commande U

En présence des incertitudes matchées, on remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées et les surfaces S_1 et S_2 tendent vers zéro, mais, après l'apparition des incertitudes non-matchées en perde la poursuite des trajectoires réelles vers les trajectoires désirées.

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la commande par DSC pour une classe des systèmes non linéaires incertains. Deux approches de commande par DSC sont proposées, la première en utilisant des filtres linéaires passe-bas et la deuxième en utilisant des filtres non linéaires par mode glissant. Pour valider ces approches, nous avons appliquées deux algorithmes de commande sur deux systèmes non linéaires de deuxième ordre. D'après les résultats de simulation, on conclue que l'approche de commande proposée dans ce chapitre est capable de compenser seulement les perturbations matchées. Pour remédier à ce problème, on va proposer dans le chapitre suivant un autre algorithme de commande par DSC basé sur l'approche adaptative qui est capable de compenser tous les perturbations et les incertitudes matchées et non-matchées.

Chapitre 4

Commande Adaptative par DSC

Dans ce chapitre, nous présentons la commande adaptative par DSC en utilisant deux types de filtres, linéaires passe-bas et non linéaires lisses en utilisant un terme de tangente hyperbolique « Tanh » au lieu de celui du « sign », avec l'estimation des incertitudes par une loi de commande adaptative. Des résultats de simulations sont présentés pour deux systèmes non linéaires incertains.

4.1. Introduction

L'origine de la commande adaptative remonte aux années 1950 : les automaticiens se sont vite aperçus en effet qu'un contrôleur avec des paramètres fixes n'était pas toujours capable d'assurer les performances voulues, par exemple dans le cas où les paramètres du système variaient avec le temps [30]. La commande adaptative est une méthode de contrôle de ces systèmes. L'idée de base est d'estimer les paramètres et/ou modèle inconnu en ligne, et d'utiliser les paramètres estimés dans le calcul de la loi de commande. Un système de commande adaptative peut donc être considéré comme un système de commande avec estimation en ligne des paramètres [23].

Une commande adaptative pour résoudre le problème de «l'explosion de la complexité» a été développée pour une classe de systèmes non linéaires, est appelé « *Dynamic Surface Control (DSC)* ».

4.2. Définitions

4.2.1. Commande adaptative

Adapter veut dire un comportement en conformité avec de nouvelles circonstances. Intuitivement, un contrôleur adaptatif est un régulateur qui peut modifier son comportement en réponses aux changements dus aux dynamiques d'un système et aux perturbations. Le Contrôle adaptatif consiste à éliminer les perturbations structurelles (les variations des paramètres) agissant sur la performance du système de contrôle. Un système de contrôle est adaptatif, si plus d'une contre réaction conventionnelle, il contient une boucle fermée de

contrôle de son indice de performance. Une solution de ce problème est apportée par l'approche appelée commande adaptative [32].

4.2.2. Système de commande adaptative

Un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance du système de commande, et à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré, le mécanisme d'adaptation modifie les paramètres du système ajustable. On génère des signaux de commande auxiliaire, afin de maintenir l'indice de performance du système dans le voisinage des valeurs désirées.

On note que les systèmes de commande adaptative, même s'il s'agit de la commande d'un système linéaire à paramètres inconnus, sont des systèmes non linéaires car les paramètres du régulateur dépendent des variables ou des procédés à travers les mécanismes d'adaptation. Ceci explique les difficultés d'analyse et de synthèse de tels systèmes [32].

4.3. Commande adaptative par DSC avec des filtres linéaires passe-bas

Dans cette section, nous appliquant une commande adaptative par DSC en utilisant des filtres linéaires passe-bas. On considère une classe des systèmes non linéaires incertains décrits par la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(t, x) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + \Delta_i(t, x) \quad , \quad i = 2, \dots, n-1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}) + g(\bar{x})u + \Delta_n(t, x) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $\bar{X} = [x_1, \dots, x_i]^T$ est le vecteur d'état partiel, $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ est le vecteur d'état global, u est l'entrée de commande, y est la sortie du système et $\Delta_i(t, x)$ représente les perturbations externes et les incertitudes paramétriques.

La procédure de conception s'effectue en n étapes comme suit :

Etape 1: ($i = 1$)

On définit la 1^{ière} surface par :

$$s_1 = x_1 - x_{1d} \quad (4.2)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(t, x) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour que s_1 tend vers zéro, on choisit x_{2c} comme suite :

$$x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) - \hat{\Delta}_1 + \dot{x}_{1d}, \quad k_1 > 0 \quad (4.4)$$

Où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé de Δ_1 .

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[s_1 - \sigma_1 (\hat{\Delta}_1 - \Delta_{10}) \right] \quad (4.5)$$

avec $\tilde{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_1 - \Delta_{10}$

Comme dans le chapitre 3, et afin d'éviter le problème d'explosion de complexité (i.e. la dérivation de x_{2c}), on va filtrer de la commande virtuelle x_{2c} en utilisant un filtre de premier ordre passe-bas avec une constant de temps $\tau_2 > 0$ comme suite :

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c}, \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (4.6)$$

L'erreur du filtre est donnée par

$$\chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (4.7)$$

Prenant en considération de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on trouve que :

$$x_2 = s_2 + \chi_2 + x_{2c} \quad (4.8)$$

En remplaçant les équations (4.4) et (4.7) dans (4.3), on obtient :

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 + \tilde{\Delta}_1 \quad (4.9)$$

Etape i : ($2 \leq i \leq n-1$)

La i^{eme} surface est définie par :

$$S_i = x_i - x_{id} \quad (4.10)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{S}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ \dot{S}_i &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + \Delta_i - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (4.11)$$

On choisit la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ comme suite :

$$x_{(i+1)c} = -s_{i-1} - k_i s_i - f_i(\bar{x}_i) - \hat{\Delta}_i + \dot{x}_{id}, \quad k_i > 0 \quad (4.12)$$

Où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé de Δ_i . La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}) \right] \quad (4.13)$$

avec $\tilde{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}$

Pour éliminer le problème d'explosion de la complexité, des filtres du premier ordre passe-bas avec des constantes de temps $\tau_{i+1} > 0$ sont employés comme suite :

$$\tau_i \dot{x}_{(i+1)d} + x_{(i+1)d} = x_{(i+1)c}, \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (4.14)$$

L'erreur des filtres est écrite comme suite :

$$\chi_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (4.15)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\dot{\chi}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} \chi_{i+1} - \dot{x}_{(i+1)c} \quad (4.16)$$

Tenant en compte la $i^{\text{ème}}$ +1 surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, on trouve que :

$$x_i = \chi_i + s_i + x_{ic} \quad (4.17)$$

En remplaçant (4.12) et (4.16) dans (4.11), il en résulte que :

$$\dot{s}_i = -s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_i + \tilde{\Delta}_i \quad (4.18)$$

Etape n :

La dérivée temporelle de la $n^{\text{ème}}$ surface est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n(x) + g(x)u + \Delta_n(t, x) - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous choisissons la loi de commande u comme suite :

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-s_{n-1} - k_n s_n - f_n(x) - \hat{\Delta}_n + \dot{x}_{nd} \right) \quad (4.20)$$

Où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de Δ_n et la loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n \left[s_n - \sigma_n (\hat{\Delta}_n - \Delta_{n0}) \right] \quad (4.21)$$

avec $\tilde{\Delta}_n = \hat{\Delta}_n - \Delta_{n0}$

L'erreur du filtre est :

$$\chi_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (4.22)$$

Dont la dérivée temporelle est comme suite :

$$\dot{\chi}_n = -\frac{\chi_n}{\tau_n} - \dot{x}_{nc} \quad (4.23)$$

En remplaçant (4.19) dans (4.18), on trouve que :

$$\dot{s}_n = -s_{n-1} - k_n s_n + \tilde{\Delta}_n \quad (4.24)$$

Les fonction de Lyapunov globale données par :

$$V = \sum_{i=1}^n V_{s_i} + \sum_{i=2}^n V_{\chi_i} + \sum_{i=1}^n V_{\Delta_i} \quad (4.25)$$

Avec :

$$V_{s_i} = \frac{1}{2} s_i^2 ; V_{\chi_i} = \frac{1}{2} \chi_i^2 ; V_{\Delta_i} = \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\Delta}_i^2.$$

En employant les équations (4.9), (4.18) et (4.24) avec l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_1} &= s_1 \dot{s}_1 \\ &= s_1 (-k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 + \tilde{\Delta}_1) \\ &\leq -\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 + \tilde{\Delta}_1 s_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_i} &= s_i \dot{s}_i \\ &= s_i (-s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_{i+1} + \tilde{\Delta}_i) \\ &\leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + s_i \tilde{\Delta}_i \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_n} &= s_n \dot{s}_n \\ &= s_n (-s_{n-1} - k_n s_n + \tilde{\Delta}_n) \\ &= -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n s_n \end{aligned} \quad (4.28)$$

En utilisant (3.16), (3.23) avec l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\chi_i} &= \chi_i \dot{\chi}_i \\ &= \chi_i \left(-\frac{1}{\tau_i} \chi_i + \dot{x}_{ic} \right) \\ &\leq -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 + |\chi_i \dot{x}_{ic}| \\ &\leq -\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2}\right) \chi_i^2 + \frac{M_i^2}{2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Tel que : $0 < |\dot{x}_{ic}| < M_i$, avec M_i est une constante positive.

Employons (4.5), (4.13) et (4.21), on aboutit à :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\Lambda_i} &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\ &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \left[\dot{\tilde{\Delta}}_i - \gamma_i \left[s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}) \right] \right], \quad i=1, \dots, n \\ &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i - \tilde{\Delta}_i s_i + \sigma_i \tilde{\Delta}_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0})\end{aligned}\quad (4.30)$$

Si on suppose que : $|\dot{\tilde{\Delta}}_i| \leq \Delta_i^*$, il en résulte que :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\Lambda_i} &\leq \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\Delta}_i^2 + \frac{1}{2\gamma_i} \Delta_i^{*2} - \tilde{\Delta}_i s_i - \frac{\sigma_i}{2} \tilde{\Delta}_i^2 + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \\ &\leq -\left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 - \tilde{\Delta}_i s_i + \frac{1}{2\gamma_i} \Delta_i^{*2} + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2\end{aligned}\quad (4.31)$$

En remplaçant (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) et (4.31) dans la dérivée temporelle de (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_{ix} + \sum_{i=2}^n \dot{V}_{ix} + \sum_{i=1}^n \dot{V}_{i\Delta} \\ &\leq \left(-\left(k_1 - \frac{1}{2} \right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 + \tilde{\Delta}_1 s_1 \right) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left[-\left(k_i - \frac{1}{2} \right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + \tilde{\Delta}_i s_i \right] - (k_n s_n^2 + s_n s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n s_n) \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \left[-\left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2} \right) \chi_i^2 + \frac{M_i^2}{2} \right] + \sum_{i=1}^n \left[-\left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 - \tilde{\Delta}_i s_i + \frac{1}{2\gamma_i} \Delta_i^{*2} + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-1} \left(k_i - \frac{1}{2} \right) s_i^2 - k_n s_n^2 - \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\tau_i} - 1 \right) \chi_i^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i} \right) \tilde{\Delta}_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\gamma_i} \Delta_i^{*2} + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \right) + \sum_{i=2}^n \frac{M_i^2}{2}\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\dot{V} \leq -\mu V + \nu \quad (4.33)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \mu = \min \left[(2k_1 - 1), \dots, (2k_n - 1); 2k_n, 2\left(\frac{1}{\tau_2} - 1 \right), \dots, 2\left(\frac{1}{\tau_n} - 1 \right); (\sigma_1 \gamma_1 - 1), \dots, (\sigma_n \gamma_n - 1) \right] > 0 \\ \nu = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_i} \Delta_i^{*2} + \sigma_i (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \right) + \sum_{i=2}^n M_i^2 \right] > 0 \end{cases}$$

En employant le lemme 1 [16,14], on conclue que le système en boucle fermée a une stabilité bornée (UUB) et que tous les signaux de la boucle sont uniformément bornés.

4.4. Commande adaptative par DSC avec le filtre non linéaire par mode glissant

La procédure de conception s'effectue en n étapes pour le système précédent (4.1) est comme suit :

Etape 1: ($i = 1$)

En définit la 1^{ier} surface

$$s_1 = x_1 - x_{1d} \quad (4.34)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ &= x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(t, x) - \dot{x}_{1d} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour que s_1 tend vers zéro, on choisit x_{2c} comme suite :

$$x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) - \hat{\Delta}_1 + \dot{x}_{1d}, \quad k_1 > 0 \quad (4.36)$$

Où $\hat{\Delta}_1$ est l'estimé de Δ_1

La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_1$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 \left[s_1 - \sigma_1 (\hat{\Delta}_1 - \Delta_{10}) \right] \quad (4.37)$$

avec $\tilde{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_1 - \Delta_{10}$

On introduise une nouvelle variable x_{2d} obtenu par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} pour éviter la dérivation de la commande virtuelle (i.e. \dot{x}_{2c}). Dans cette section on utilise un filtre non linéaire de deuxième ordre passe-bas avec une constant de temps τ_2 :

$$\tau_2 \dot{x}_{2d} + x_{2d} = x_{2c} - \tau \alpha \tanh\left(\frac{x_{2d} - x_{2c}}{\varepsilon_2}\right), \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (4.38)$$

L'erreur de filtre est donnée par

$$\chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (4.39)$$

Prenant en considération de la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d}$, on trouve que :

$$x_2 = \chi_2 + s_2 + x_{2c} \quad (4.40)$$

En remplaçant les équations (4.35) et (4.38) dans (4.34), on trouve que

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 + \tilde{\Delta}_1 \quad (4.41)$$

Etape $i : (i = 2, \dots, n-1) :$

La $i^{\text{ème}}$ surface est définie par :

$$s_i = x_i - x_{id} \quad (4.42)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} \\ &= x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + \Delta_i - \dot{x}_{id} \end{aligned} \quad (4.43)$$

On choisit la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ comme suite :

$$x_{(i+1)c} = -s_{i-1} - k_i s_i - f_i(\bar{x}_i) - \hat{\Delta}_i + \dot{x}_{id}, \quad k_i > 0 \quad (4.44)$$

Où $\hat{\Delta}_i$ est l'estimé de Δ_i . La loi d'estimation de $\hat{\Delta}_i$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_i = \gamma_i \left[s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}) \right] \quad (4.45)$$

avec $\tilde{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}$

Pour éliminer le problème d'explosion de la complexité, des filtres du deuxième ordre par mode glissant avec des constantes de temps $\tau_{i+1} > 0$ sont employés comme suite :

$$\tau_i \dot{\chi}_{(i+1)d} + \chi_{(i+1)d} = x_{(i+1)c} - \tau_i \alpha \tanh\left(\frac{x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}}{\varepsilon_{i+1}}\right), \quad x_{(i+1)d}(0) = x_{(i+1)c}(0) \quad (4.46)$$

L'erreur de filtre qui donnée par

$$\chi_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (4.47)$$

Dont la dérivée temporelle est :

$$\dot{\chi}_{i+1} = \dot{x}_{(i+1)d} - \dot{x}_{(i+1)c} = -\frac{1}{\tau_i} \chi_i - \alpha \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) - \dot{x}_{ic} \quad (4.48)$$

Tenant en compte la $i^{\text{ème}} + 1$ surface $s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d}$, on trouve que :

$$x_i = \chi_i + s_i + x_{ic} \quad (4.49)$$

En remplaçant les équations (4.43) et (4.46) dans (4.42), il en résulte que :

$$\dot{s}_i = -s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_i + \tilde{\Delta}_i \quad (4.50)$$

Étape n :

La dérivée temporelle de la $n^{\text{ième}}$ surface est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} \\ &= f_n(x) + g(x)u + \Delta_n(t, x) - \dot{x}_{nd} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nous choisissons la loi de commande u comme suite :

$$u = \frac{1}{g(x)} \left(-s_{n-1} - k_n s_n - f_n(x) - \hat{\Delta}_n + \dot{x}_{nd} \right) \quad (4.52)$$

Où $\hat{\Delta}_n$ est l'estimé de Δ_n et la loi d'estimation de $\hat{\Delta}_n$ est donnée par :

$$\dot{\hat{\Delta}}_n = \gamma_n \left[s_n - \sigma_n (\hat{\Delta}_n - \Delta_{n0}) \right] \quad (4.53)$$

avec $\tilde{\Delta}_n = \hat{\Delta}_n - \Delta_{n0}$

L'erreur de filtre est :

$$\chi_n = x_{nd} - x_{nc} \quad (4.54)$$

Dont la dérivée temporelle est comme suite :

$$\dot{\chi}_n = -\frac{1}{\tau_n} \chi_n - \alpha \tanh\left(\frac{\chi_n}{\varepsilon_n}\right) - \dot{x}_{nc} \quad (4.55)$$

En remplaçant (4.51) dans (4.50) on trouve que :

$$\dot{s}_n = -s_{n-1} - k_n s_n + \tilde{\Delta}_n \quad (4.56)$$

Les fonctions de Lyapunov globale données par :

$$V = \sum_{i=1}^n V_{s_i} + \sum_{i=2}^n V_{\chi_i} + \sum_{i=1}^n V_{\Delta_i} \quad (4.57)$$

Avec :

$$V_{s_i} = \frac{1}{2} s_i^2 ; V_{\chi_i} = \frac{1}{2} \chi_i^2 ; V_{\Delta_i} = \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\Delta}_i^2.$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{V}_{s_i} + \sum_{i=2}^n \dot{V}_{\chi_i} + \sum_{i=1}^n \dot{V}_{\Delta_i} \quad (4.58)$$

En employant l'équation (4.53) et l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{s_1} &= s_1 \dot{s}_1 \\
 &= s_1 (-k_1 s_1 + s_2 + \chi_2 + \tilde{\Delta}_1) \\
 &\leq -\left(k_1 - \frac{1}{2}\right) s_1^2 + \frac{1}{2} \chi_2^2 + s_1 s_2 + \tilde{\Delta}_1 s_1
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{s_i} &= s_i \dot{s}_i \\
 &= s_i (-s_{i-1} - k_i s_i + s_{i+1} + \chi_{i+1} + \tilde{\Delta}_i) \\
 &\leq -\left(k_i - \frac{1}{2}\right) s_i^2 + \frac{1}{2} \chi_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + s_i \tilde{\Delta}_i
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{s_n} &= s_n \dot{s}_n \\
 &= s_n (-s_{n-1} - k_n s_n + \tilde{\Delta}_n) \\
 &\leq -k_n s_n^2 - s_n s_{n-1} + \tilde{\Delta}_n s_n
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

En utilisant (4.46), (4.47) avec l'inégalité de Young, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{\chi_i} &= \chi_i \dot{\chi}_i \\
 &= \chi_i \left(-\frac{1}{\tau_i} \chi_i - \alpha \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) - \dot{x}_{ic} \right) \\
 &= -\frac{1}{\tau_i} \chi_i^2 - \alpha \chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) - \chi_i \dot{x}_{ic}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{\Delta_i} &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i \\
 &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \left[\dot{\tilde{\Delta}}_i - \gamma_i \left[s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i - \tilde{\Delta}_i \left[s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0}) \right] \\
 &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\Delta}_i \dot{\tilde{\Delta}}_i - \tilde{\Delta}_i s_i + \sigma_i \tilde{\Delta}_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0})
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

$, i = 1, \dots, n$

Si on suppose que : $|\dot{\tilde{\Delta}}_i| \leq \Delta_i^*$, il en résulte :

$$\dot{V}_{\Delta_i} \leq -\left(\frac{\sigma_i}{2} - \frac{1}{2\gamma_i}\right) \tilde{\Delta}_i^2 - \tilde{\Delta}_i s_i + \frac{1}{2\gamma_i} \Delta_i^{*2} + \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_{s_i} + \sum_{i=2}^n \dot{V}_{\chi_i} + \sum_{i=1}^n \dot{V}_{\Delta_i} \\
&\leq \left((1-k_1)s_1^2 + s_1s_2 + \frac{1}{2}\chi_{i+1}^2 + \tilde{\Delta}_1s_1 \right) + \sum_{i=2}^n \left[(1-k_i)s_i^2 + \frac{1}{2}s_{i+1}^2 - s_i s_{i-1} + s_i s_{i+1} + \frac{1}{2}\chi_{i+1}^2 + \tilde{\Delta}_i s_i \right] \\
&\quad + \sum_{i=2}^n \left[-\frac{1}{\tau_i} \chi_i - \chi_i \dot{\chi}_{ic} - \alpha_i \chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) \right] + \sum_{i=1}^n \left[-\gamma_i (s_i - \sigma_i (\hat{\Delta}_i - \Delta_{i0})) \right]
\end{aligned} \quad (4.65)$$

Supposition 1 [31] :

La dérivée temporelle de la commande virtuelle $\dot{\chi}_{ic}$, $i = 1, 2, \dots, q$ est supposée bornée par des constantes positives inconnues α_i^* , tel que $0 \leq |\dot{\chi}_{ic}| \leq \alpha_i^*$.

D'après supposition 1 et $\chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) \geq 0$, $\forall \chi_i \in \mathfrak{R}$, en a

$$-\chi_i \dot{\chi}_{ic} - \alpha_i \chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) \leq \alpha_i^* \left(|\chi_i| - \chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) \right) \quad (4.66)$$

Nous considérons l'inégalité suivante [32]:

$$|x| - x \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0.2785 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.67)$$

D'après les équations (4.66), l'équation (4.65) devient

$$-\left(\chi_i \dot{\chi}_{ic} + \alpha_i \chi_i \tanh\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon_i}\right) \right) \leq 0.2785 \varepsilon_i \alpha_i^* \leq \frac{\varepsilon_i \alpha_i^*}{2} \quad (4.68)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^n \left(k_i - \frac{1}{2} \right) s_i^2 - k_n s_n^2 - \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{\tau_i} - \frac{1}{2} \right) \chi_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2} \tilde{\Delta}_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i^* \varepsilon_i}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2} (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \\
&\leq -\mu V + \beta
\end{aligned} \quad (4.69)$$

Tel que :

$$\begin{cases} \mu = \min \left[(2k_1 - 1), (2k_2 - 1), \dots, (2k_n - 1), 2k_n, \left(\frac{2}{\tau_2} - 1 \right), \left(\frac{2}{\tau_3} - 1 \right), \dots, \left(\frac{2}{\tau_n} - 1 \right), \sigma_1 \gamma_1, \sigma_2 \gamma_2, \dots, \sigma_n \gamma_n \right] > 0 \\ \nu = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^n \alpha_i^* \varepsilon_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i (\Delta_i - \Delta_{i0})^2 \right] \end{cases}$$

4.5. Exemples d'application

Pour les deux exemples d'application étudiés précédemment, l'algorithme de commande adaptative par DSC en utilisant des filtres linéaires passe-bas (i.e. ADSC-LPF) est donné comme suite :

$$\begin{cases} s_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) + \dot{x}_{1d} - \hat{\Delta}_1 \\ \tau \dot{x}_{2d} = x_{2c} - x_{2d} \\ \chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ s_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = -\frac{1}{g(x_1, x_2)} \left(f_2(x_1, x_2) + s_1 + k_2 s_2 + \frac{\chi_2}{\tau} + \hat{\Delta}_2 \right) \end{cases}$$

Le deuxième algorithme de commande adaptative par DSC en utilisant des filtres non linéaires lisses (i.e. ADSC-NLF) est représenté par :

$$\begin{cases} s_1 = x_1 - x_{1d} \\ x_{2c} = -k_1 s_1 - f_1(x_1) + \dot{x}_{1d} - \hat{\Delta}_1 \\ \tau \dot{x}_{2d} = x_{2c} - x_{2d} - \alpha \tau \tanh\left(\frac{x_{2d} - x_{2c}}{\varepsilon}\right) \\ \chi_2 = x_{2d} - x_{2c} \\ s_2 = x_2 - x_{2d} \\ u = -\frac{1}{g(x_1, x_2)} \left(f_2(x_1, x_2) + s_1 + k_2 s_2 + \frac{\chi_2}{\tau} + \alpha \tanh\left(\frac{\chi_2}{\varepsilon}\right) + \hat{\Delta}_2 \right) \end{cases}$$

Dans les deux algorithmes proposés ci-dessus, les lois d'estimations de $\hat{\Delta}_1$ et $\hat{\Delta}_2$ sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Delta}}_1 = \gamma_1 [s_1 - \sigma_1 (\hat{\Delta}_1 - \Delta_{10})] \\ \dot{\hat{\Delta}}_2 = \gamma_2 [s_2 - \sigma_2 (\hat{\Delta}_2 - \Delta_{20})] \end{cases}$$

Exemple 1 :

On considère le système (3.59) étudié dans le chapitre précédent et on effectue le même test de simulation (voir Test 2). Les conditions initiales sont choisies comme suit :

$x = [0.1 \ 0]^T$, les paramètres de conception sont : $k_1 = 25$, $k_2 = 25$, $\alpha = 1$, $\tau = 0.1$. Les paramètres d'adaptation sont : $\gamma_1 = 70$, $\gamma_2 = 50$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.001$, $\Delta_{10} = 0$ et $\Delta_{20} = 0$. Avec $\Delta_1(t, x) = 2 \sin(x_2)$ introduite à partir de l'instant $t = 4s$ et $\Delta_2(t)$ introduite à partir de l'instant $t = 8s$. Les résultats de simulation sont donnés respectivement par les figures (4.1) à (4.7).

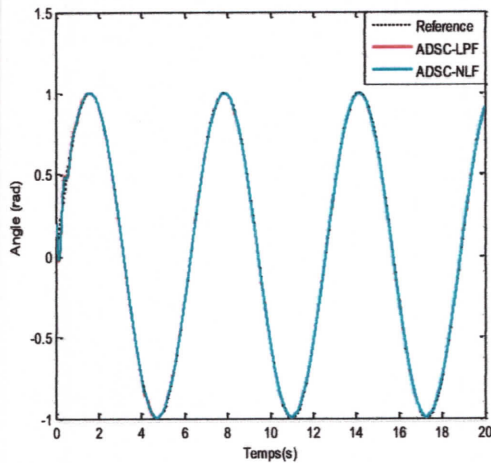


Figure (4.1) : L'évolution de la position du pendule

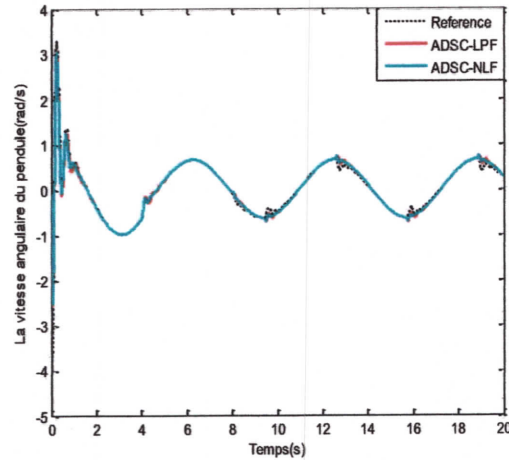


Figure (4.2) : L'évolution de la vitesse du pendule

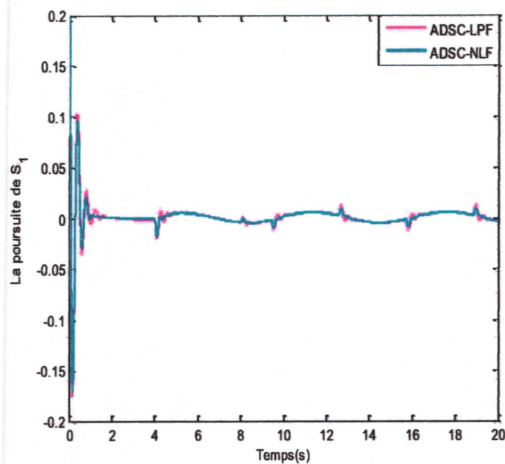


Figure (4.3) : Poursuite de la première surface

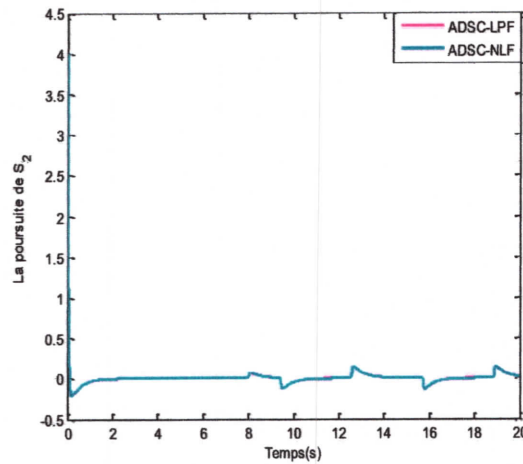


Figure (4.4) : Poursuite de la deuxième surface

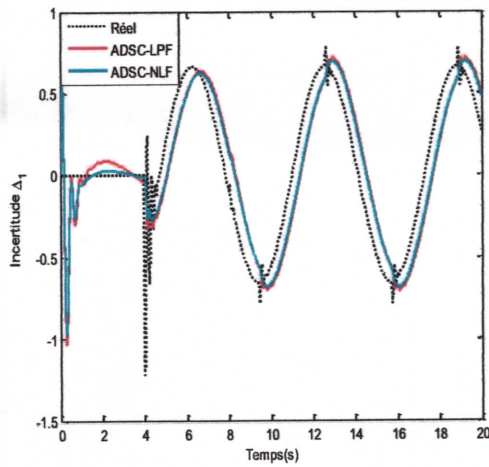


Figure (4.5): Estimation de l'incertitude Δ_1

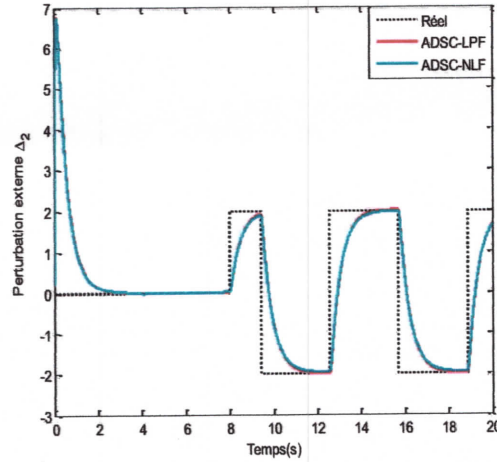


Figure (4.6): Estimation de la perturbation Δ_2

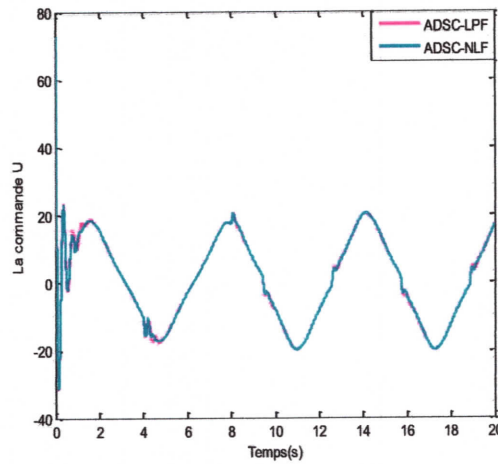


Figure (4.7) : Signal de commande U

Exemple 2 :

Reprenons le système non linéaire (3.60). Dans cette partie, on va considérer les mêmes perturbations externes et incertitudes paramétriques que dans le Test 2 du chapitre 3. Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0)=[0.1 \ 0]^T$, les paramètres de conception sont : $k_1=25, k_2=25, \alpha=1, \tau=0.1$ et Les paramètres d'adaptation sont $\gamma_1=70, \gamma_2=50, \sigma_1=0.001, \sigma_2=0.001, \Delta_{10}=0$ et $\Delta_{20}=0$. Avec $\Delta_1(t, x)=2 \sin(x_2)$ introduite à partir de l'instant $t=4s$ et $\Delta_2(t, x)=0.5(x_1^2+x_2^2)\sin^3(t)$ introduite à partir de l'instant $t=8s$. Les résultats correspondants sont donnés respectivement par les figures (4.8) à (4.14).

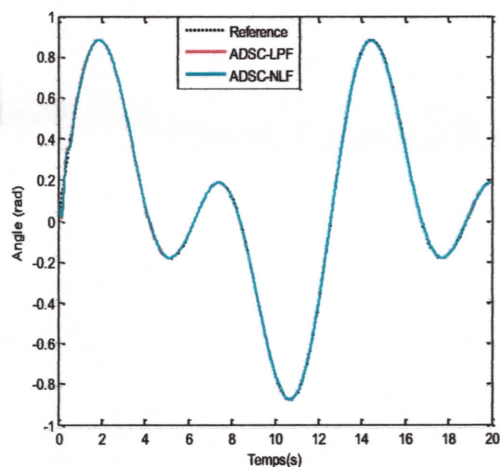


Figure (4.8) : L'évolution de la position du pendule

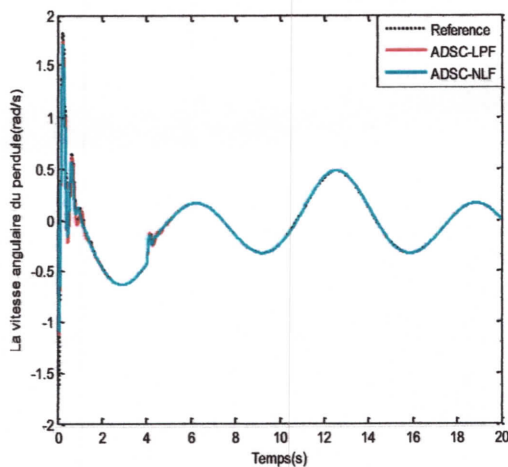


Figure (4.9) : L'évolution de la vitesse du pendule

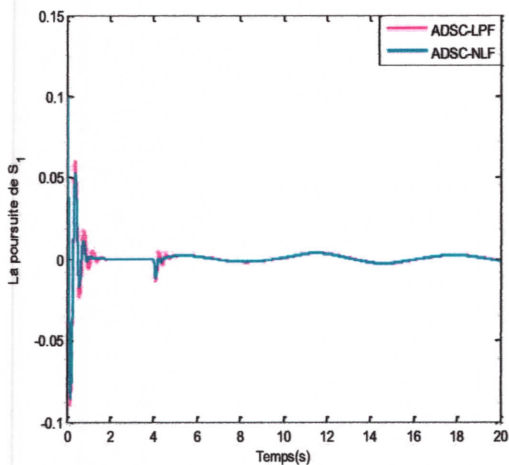


Figure (4.10) : Poursuite de la première surface

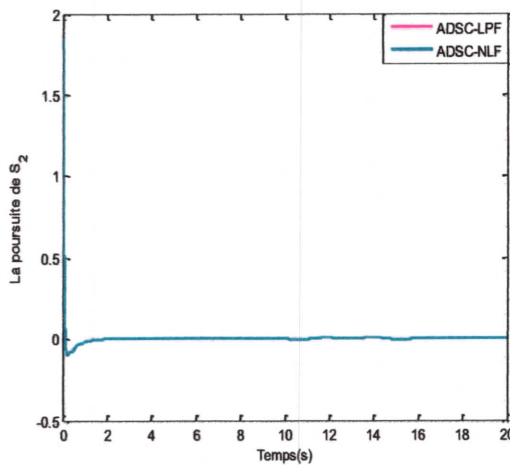


Figure (4.11) : Poursuite de la deuxième surface

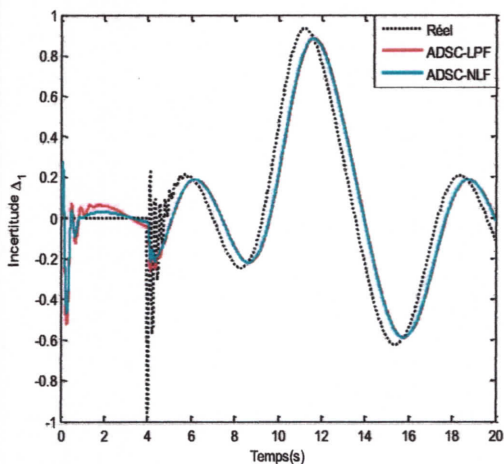


Figure (4.12): Estimation de l'incertitude Δ_1

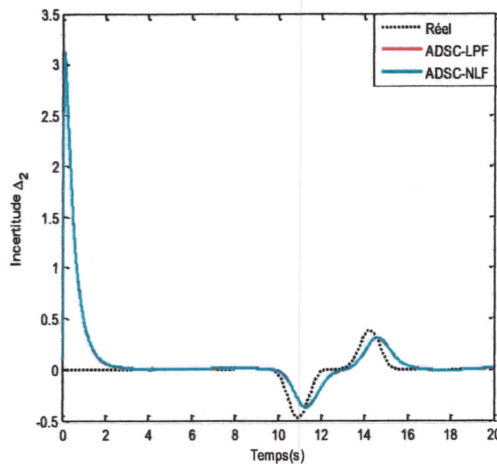


Figure (4.13): Estimation de l'incertitude Δ_2

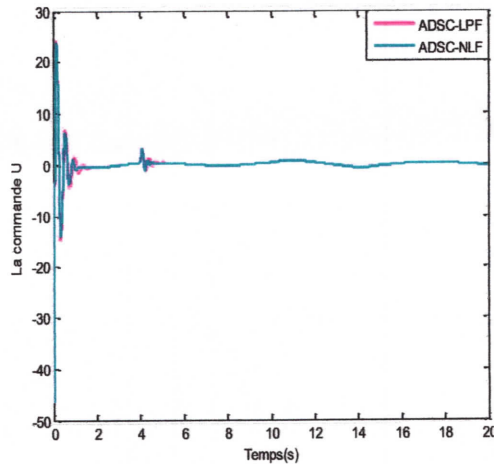


Figure (4.14) : Signal de commande U

D'après les résultats de simulation dans les deux exemples, on remarque une bonne poursuite de la trajectoire désirée malgré la présence des incertitudes matchées et non-matchées.

4.6. Conclusion

La commande adaptative par DSC a été étudiée pour une classe de systèmes non linéaires incertains. Le principe de ces approches est l'utilisation des filtres linéaires de premier ordre (passe-bas) et des filtres non linéaires par mode glissant avec une loi de commande adaptative. Pour valider ces approches, nous avons appliquées ces deux commandes sur deux systèmes non linéaires de deuxième ordre, les résultats de simulations sont obtenus montrent l'efficacité de cette technique et la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes matchées et non-matchées.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail développé dans ce thème donne un aperçu sur la commande adaptative par DSC pour une classe des systèmes non linéaires incertains. Ces stratégies de commande par DSC nécessitent la synthèse des lois de commande adaptatives stables. Le problème principal de l'approche de commande par backstepping est la complexité de ces lois de commande causée par les dérivations successives des commandes virtuelles. L'utilisation de l'approche de commande par DSC qui introduit un filtrage des commandes virtuelles a permis de pallier à ce problème. La stabilité de toutes les structures de commande sont étudiées par L'approche de Lyapunov.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé, au début, des méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. Les outils mathématiques, qui nous ont servis dans le présent manuscrit, ont été exhibés aussi dans ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la technique de commande par backstepping. Nous avons rappelé, au début quelque définitions sur cette approche de commande. Ensuite, nous avons présenté le principe de calcul de la loi de commande par backstepping ainsi que l'algorithme de base de cette technique de commande. Des résultats de simulations sont présentés pour deux systèmes non linéaires de deuxième ordre.

Dans le troisième chapitre, une commande par surface dynamique (DSC) pour une classe des systèmes non linéaires incertains ayant la forme triangulaire inférieure paramétrique avec des incertitudes matchées a été développée. Dans cette approche, l'élimination du problème d'explosion de complexité est effectuée par l'utilisation des filtres linéaires passe-bas ainsi que des filtres non linéaires par mode glissant, et la loi de commande est calculée selon le principe de la DSC. Des résultats de simulations sont présentés pour valider ces approches.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé une commande adaptative par DSC pour une classe des systèmes non linéaires ayant la forme triangulaire inférieure paramétrique avec des incertitudes matchées et non-matchées. Le principe de cette approche adaptative de commande est de combiner les lois d'adaptation issues de la commande adaptative pour

améliorer les performances du système bouclé vis-à-vis les perturbations externes et les incertitudes paramétrique. Le mécanisme proposé est testé sur deux systèmes non linéaires incertains. Des résultats de simulation sont présentés, afin de démontrer les performances des approches proposées par rapport à celles de la commande par DSC sans adaptation.

Bibliographie

Références bibliographiques

- [1] P. de Larminat : *Analysis and Control of Linear Systems*. ISTE. Wiley, 2013.
- [2] S.P. Boyd et C.H. Barratt : *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice- Hall information and system sciences series. Prentice-Hall International, 1991.
- [3] H.K. Khalil : *Nonlinear Systems (2nd ed.)*. Prentice-Hall, 1996.
- [4] A. Isidori : *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. springer, 1995.
- [5] M. Krstic, P.V. Kokotovic et I. Kanellakopoulos : *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st 'edition, 1995.
- [6] J. S. Bang, H. Shim, S. K. Park and J. H. Seo, Robust tracking and vibration suppression for a two-inertia system by combining backstepping approach with disturbance observer, *IEEE Trans Ind Electron*, Vol. 57, pp. 3197.
- [7] W. Yim, Adaptive control of a flexible joint manipulator, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea*, pp. 3441–3446, May-21
- [8] AbderBDER AREZAK Benasker, Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires. Thèse de Doctorat, février 2000.
- [9] https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_lin%C3%A9aire
- [10] Messaoud Mokhtari : *Commande Adaptative des Systèmes Non linéaires par l'Approche Backstepping Neuronale*. Université Hadj Lakhdar Batna. Thèse de doctorat, 2015.
- [11] R. Bourdais : *Une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes non linéaires à commutation*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2007.
- [12] I. Ellouze : *Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 2010.
- [13] A. Boulkroune : *Commande floue adaptative avec et sans observateur des systèmes non linéaires incertains*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2009.

- [14] L. Hetel : *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
- [15] A. Boubakir : méthode de commande par mode de glissement appliqué au bras manipulateur et au système hydraulique CE105 à réservoirs couplés. Mémoire de magistère, Ecole Militaire Polytechnique, 2007.
- [16] Gille, J.-C, *Systèmes asservis non linéaires*, Dunod 1988.
- [17] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotovic, "*Nonlinear and adaptive control design*", Wiley-Interscience Publication, New York, 1995
- [18] S.J. Yoo, J.B. Park ET Y.H. Choi: Indirect adaptive control of nonlinear dynamic. Systems using self-recurrent wavelet neural networks via adaptive learning rates. *Information Sciences*, 177(15):3074–3098, 2007.
- [19] Kanellakopoulos, I, Kokotovic, P. V. & Morse, A. S, 'Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems', *IEEE Transactions On Automatic*(1991).
- [20] Feurer, A. & Morse, A. S. (1978), 'Adaptive control of single-input, single-output linear systems', *IEEE Transactions On Automatic Control*, 23(4), 557-569, 1978.
- [21] Tsiniias, J., 'Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization', *Math. Contr. Signal. Syst. vol.2*, pp. 343-357, 1989.
- [22] Kokotovic, P. V. & Sussmann, H. J. (1989) 'A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems', *Systems & Control Letters*, 13, 125, 1989.
- [23] J. J. Slotine and W. P. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [24] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [25] I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, and A. S. Morse, "Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems," *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol.36, pp.1241-1253, 1991.
- [26] Y. Hashimoto, H. S. Wu, and K. Mizukami, "Robust output tracking of nonlinear systems with mismatched uncertainties, *International Journal of Control*, vol. 72, no. 5, pp. 411-417, 1999.
- [27] W. Lin and C. J. Qian, "Adaptive regulation of cascade systems with nonlinear parameterization," *Int.J. Robust Nonlinear Control*, vol. 12. pp. 1093-1108, 2002.

- [28] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip and J. C. Gerdes, Dynamic surface control for a class of nonlinear systems," *IEEE Trans Autom Control*, Vol. 45, No.10, pp. 1893.
- [29] P. P. Yip and J. K. Hedrick, Adaptive dynamic surface control: a simplified algorithm for adaptive backstepping control of non linear systems," *Int J Control*, Vol. 71, No. 5, pp,959.
- [30] Amieur Toufik, *Commande des Systèmes Non Linéaires par Mode Glissant Flou*, Mémoire de magister, UNIVERSITE MOHAMED KHEIDER DE BISKRA, 2009.
- [31] Hicham Khebbache, Adaptive sensor-fault tolerant control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems: Adaptive nonlinear filter-based dynamic surface control, 2016.
- [32] Khettab Khatir, *Commande Adaptative Floue Des Système Non Linéaires Par La Méthode De Backstepping Utilisant Le Mode Glissant*. Mémoire de magister, Université Ferrhat Abbas, 2005.